Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Шелкович, p -адические эволюционные псевдодифференциальные уравнения и p -адические всплески, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 6, 163–194

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4281>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 18:34:25

УДК 517.983.37+517.984.57+512.625.5

В. М. Шелкович

p -адические эволюционные псевдодифференциальные уравнения и p -адические всплески

Развивается теория p -адических эволюционных псевдодифференциальных уравнений (где $t \in \mathbb{R}$ – временная переменная, а $x \in \mathbb{Q}_p^n$ – пространственная переменная). Предлагается метод разделения переменных (аналог классического метода Фурье), позволяющий решать задачи Коши для широкого класса упомянутых p -адических уравнений. Наш метод сводит решение задачи Коши для p -адического псевдодифференциального уравнения к решению вещественного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами по временной переменной t . При использовании метода разделения переменных решены задачи Коши для линейных эволюционных псевдодифференциальных уравнений и систем первого порядка по t , для линейных эволюционных псевдодифференциальных уравнений второго и более высоких порядков по t и для полулинейных эволюционных псевдодифференциальных уравнений. Для линейных уравнений первого и второго порядка выведено условие стабилизации решения при $t \rightarrow \infty$. Некоторые из изученных уравнений являются аналогами уравнения теплопроводности, а также линейного и нелинейного уравнений Шрёдингера. Полученные результаты развивают теорию p -адических псевдодифференциальных уравнений и могут быть использованы в приложениях.

Библиография: 65 наименований.

Ключевые слова: p -адический псевдодифференциальный оператор, p -адический дробный оператор, базисы p -адических всплесков, p -адические псевдодифференциальные уравнения.

§ 1. Введение и основные результаты

1.1. p -адическая математическая физика. В течение нескольких сотен лет теоретическая физика развивалась на основе действительных (а затем и комплексных) чисел. Эта математическая модель физического мира сохранилась даже в процессе перехода от классической к квантовой физике, где комплексные числа стали играть даже несколько большую роль, чем вещественные числа. Ранее комплексные числа начали использоваться в анализе Фурье, который применялся в классической электродинамике и акустике. Однако последние 20 лет поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ (как и его алгебраические расширения, включая поле так называемых комплексных p -адических чисел $\mathbb{C}_p$) интенсивно использовалось в теоретической и математической физике.

Согласно известной теореме Островского (см. [1, гл. I, § 1, п. 1]) в некотором смысле имеются только два равноправных “универсума”: *вещественный*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 09-01-00162) и DFG (грант 436 RUS 113/951).

и p -адический. Вещественный “универсум” базируется на поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, которое определяется как пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по обычной евклидовой норме; p -адический “универсум” базируется на поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$, которое определяется как пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по p -адической норме $|\cdot|_p$. Эта норма определяется следующим образом. Представим рациональное число $x \neq 0$ в виде $x = p^\gamma \frac{m}{n}$, где $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ и целые числа $m = m(x)$ и $n = n(x)$ не делятся на p . Тогда

$$|x|_p = p^{-\gamma}, \quad x \neq 0, \quad |0|_p = 0. \quad (1.1)$$

Норма $|\cdot|_p$ удовлетворяет *усиленному неравенству треугольника*

$$|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$$

и является *неархимедовой*.

Применение p -адических чисел в теоретической физике началось с попытки решить одну из самых интересных проблем современной физики, а именно объединить квантовую механику и теорию гравитации. Так, в [2], [3] (см. также [1]) была высказана гипотеза о том, что на очень малых расстояниях порядка планковской длины ($\sim 10^{-33}$ см) геометрия пространства-времени *неархимедова*. После этих статей появилось большое число работ, в которых рассматривались различные физические приложения поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$. p -адические модели можно, таким образом, рассматривать как новый существенный вклад в теорию струн, теорию гравитации и космологию. В работах В. С. Владимирова, И. В. Воловича, Б. Г. Драговича, А. Ю. Хренникова были построены p -адические и адельные модели квантовой механики (см., например, [1], [4]–[10]). p -адические теории струн, гравитации и космологии стимулируют развитие и новые приложения p -адического анализа Фурье, теории распределений, псевдодифференциальных уравнений, самосопряженных операторов в $L^2(\mathbb{Q}_p)$, теории интегралов Фейнмана, теории p -адически значных вероятностей и теории динамических систем (см., например, монографии [1], [8], [9], [11]–[13]). Эти новые приложения стимулировали, в свою очередь, развитие новых областей p -адического анализа, в частности теорию p -адических всплесков [13], [14]–[26]. Данные математические теории предоставляют новые возможности для физических приложений p -адической математики, например, в теории неупорядоченных систем (спиновых стекол) (см. [13], [24], [27]–[29]). Таким образом, несмотря на то, что p -адические числа были открыты К. Гензелем в 1899 г., теория p -адических чисел уже успела найти применение в нескольких областях математики и прикладных исследованиях.

Поскольку в p -адическом анализе, связанном с отображениями $\mathbb{Q}_p$ в $\mathbb{C}$, операция дифференцирования не определена, в p -адических моделях интенсивно используются псевдодифференциальные уравнения, в частности уравнения с оператором дробного дифференцирования D^α (дробным оператором). Спектральная теория псевдодифференциального оператора типа Шрёдингера $D^\alpha + V(x)$ была также построена В. С. Владимировым [30] (см. также [1]). Развитие спектральной теории оператора $D^\alpha + V(x)$ было продолжено в работах [31], [32]. При использовании результатов из работы [12] в статьях [33] и [34] было получено дальнейшее развитие теории p -адического оператора Шрёдингера с дельта-потенциалами. Стационарное и нестационарное p -адическое уравнение Шрёдингера исследовалось в [35]. p -адическое стохастическое псевдодифференциальное уравнение было рассмотрено в [36]. p -адические уравнения

Эйнштейна и квантовой p -адической гравитации изучались в работах [6], [7]; p -адические псевдодифференциальные уравнения использовались для моделирования межбассейновой кинетики [13], [24], [27], [28]. В частности, в [28] простейшее p -адическое уравнение типа уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + D_x^\alpha u(x, t) = 0$$

было использовано в модели межбассейновой кинетики макромолекул. Здесь t – время (действительный параметр), а p -адический параметр x описывает иерархию бассейнов. В работах [37] и [38] для моделирования турбулентности использовались нелинейные ультраметрические и p -адические уравнения. Широкий класс p -адических псевдодифференциальных уравнений был исследован в книге [12]. В статье [39] исследовались p -адические параболические уравнения и ультраметрическая диффузия.

Отсюда следует, что развитие теории p -адических псевдодифференциальных уравнений имеет не только значительное теоретическое, но и прикладное значение.

Как оказалось, теория p -адических всплесков дает мощный адекватный формализм для построения решений p -адических псевдодифференциальных уравнений. При некоторых условиях p -адические всплески являются собственными функциями псевдодифференциальных операторов. В частности, p -адические всплески автоматически являются собственными функциями p -адического дробного оператора. Следует также отметить, что базисы из собственных функций с компактным носителем для p -адических псевдодифференциальных операторов (не являющиеся базисами всплесков) ранее изучались и использовались в приложениях В. С. Владимировым [30], [40] (см. также [1, § 9, 10]) и А. Н. Кочубеем [32], [41]; p -адические всплески использовались для решений p -адических псевдодифференциальных уравнений в работах [13], [14], [18], [33], [34], [37], [42]–[45].

1.2. Содержание статьи. В § 2 приводятся некоторые определения и факты p -адического анализа, которые используются в статье.

В § 3–5 излагаются некоторые результаты, связанные с теорией p -адических всплесков, p -адическими пространствами Лизоркина и теорией p -адических псевдодифференциальных операторов соответственно. Эти результаты являются основой *метода разделения переменных*, который является аналогом классического метода Фурье и позволяет решать задачи Коши для широкого класса p -адических эволюционных псевдодифференциальных уравнений (рассматривается случай, когда t – вещественная временная переменная, а $x \in \mathbb{Q}_p^n$ – пространственная переменная). Суть метода разделения переменных формулируется в § 6.

Далее, в § 7–10 метод разделения переменных применяется для решения ряда задач Коши для нескольких типов p -адических эволюционных псевдодифференциальных уравнений. Так, в § 7 решаются задачи Коши для линейных эволюционных псевдодифференциальных уравнений (7.1), (7.10), (7.12), (7.14) первого порядка по t . Теорема 7.2 и следствие 7.2 дают соответственно для решений задач Коши (7.1) и (7.10) условие стабилизации решения при $t \rightarrow \infty$. Критерий стабилизации для решения однородной задачи Коши (7.10) был введен в [12, п. 4.3]. Уравнения (7.1), (7.10) подобны классическим параболическим уравнениям. В частности, уравнение (7.10) является уравнением типа

уравнения теплопроводности, уравнение (7.14) – аналог линейного уравнения Шрёдингера. В § 8 решаются задачи Коши для систем линейных эволюционных псевдодифференциальных уравнений (8.1) и (8.13) первого порядка по t . В § 9 изучаются задачи Коши для псевдодифференциальных уравнений высших порядков по t . Так, в п. 9.1 находится решение задачи Коши для линейного псевдодифференциального эволюционного уравнения (9.1) второго порядка по t . В теореме 9.2 доказывается, что решение задачи Коши (9.1) стабилизируется при $t \rightarrow \infty$. В § 10 (который обобщает результаты заметки [42]) решаются задачи Коши для полулинейных эволюционных псевдодифференциальных уравнений (10.1), (10.10). Уравнение (10.10) является аналогом нелинейного уравнения Шрёдингера. Оказывается, его решение можно записать в замкнутой форме.

Результаты настоящей работы развивают теорию p -адических псевдодифференциальных уравнений и могут быть использованы в приложениях.

§ 2. Некоторые необходимые результаты p -адического анализа

В дальнейшем мы будем систематически использовать обозначения и результаты из книги [1]. Обозначим через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{C}$ множества натуральных, целых и комплексных чисел соответственно.

Каждое p -адическое число $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$, представляется в канонической форме

$$x = p^\gamma(x_0 + x_1p + x_2p^2 + \dots), \quad (2.1)$$

где $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$, $x_k = 0, 1, \dots, p-1$, $x_0 \neq 0$, $k = 0, 1, \dots$. Ряд (2.1) сходится по p -адической норме $|\cdot|_p$ и $|x|_p = p^{-\gamma}$. Дробная часть p -адического числа $x \in \mathbb{Q}_p$, заданного формулой (2.1), определяется следующим образом:

$$\{x\}_p = \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma(x) \geq 0 \text{ или } x = 0, \\ p^\gamma(x_0 + x_1p + x_2p^2 + \dots + x_{|\gamma|-1}p^{|\gamma|-1}), & \text{если } \gamma(x) < 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Полное метрическое локально компактное вполне несвязное пространство $\mathbb{Q}_p^n = \mathbb{Q}_p \times \dots \times \mathbb{Q}_p$ состоит из точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, где $x_j \in \mathbb{Q}_p$, $j = 1, 2, \dots, n$, $n > 1$; p -адическая норма на $\mathbb{Q}_p^n$ имеет вид

$$|x|_p = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|_p, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad (2.3)$$

где норма $|x_j|_p$, $x_j \in \mathbb{Q}_p$, $j = 1, \dots, n$, определена формулой (1.1).

Обозначим через $B_\gamma^n(a) = \{x: |x - a|_p \leq p^\gamma\}$ шар с радиусом p^γ и центром в точке $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}_p^n$ и через $S_\gamma^n(a) = \{x: |x - a|_p = p^\gamma\}$ соответствующую сферу, $\gamma \in \mathbb{Z}$. Будем записывать $B_\gamma^n(0) = B_\gamma^n$ и $S_\gamma^n(0) = S_\gamma^n$. При $n = 1$ мы не будем выписывать в обозначении шара верхний индекс n . Здесь

$$B_\gamma^n(a) = B_\gamma(a_1) \times \dots \times B_\gamma(a_n), \quad (2.4)$$

где $B_\gamma(a_j) = \{x_j: |x_j - a_j|_p \leq p^\gamma\}$ – шар с радиусом p^γ и центром в точке $a_j \in \mathbb{Q}_p$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Назовем определенную на $\mathbb{Q}_p^n$ комплекснозначную функцию f локально постоянной, если для любого $x \in \mathbb{Q}_p^n$ существует такое целое число $l(x) \in \mathbb{Z}$, что

$$f(x + y) = f(x) \quad \forall y \in B_{l(x)}^n.$$

Обозначим через $\mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^n)$ пространство локально постоянных комплекснозначных функций на $\mathbb{Q}_p^n$ и через $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ – пространство основных функций Брюа–Шварца, являющееся подпространством функций из $\mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^n)$, имеющих компактный носитель. Если $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, согласно [1, гл. VI, § 1, лемма 1] существует такое число $l \in \mathbb{Z}$, что

$$\varphi(x+y) = \varphi(x), \quad y \in B_l^n, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Наибольшее из таких чисел $l = l(\varphi)$ называется *параметром постоянности* функции φ .

Обозначим через $\mathcal{D}_N^l(\mathbb{Q}_p^n)$ конечномерное пространство основных функций $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, имеющих носитель в шаре B_N^n с параметром постоянности $\geq l$ [1, гл. VI, § 2]. Имеет место вложение $\mathcal{D}_N^l(\mathbb{Q}_p^n) \subset \mathcal{D}_{N'}^{l'}(\mathbb{Q}_p^n)$, $N \leq N'$, $l \geq l'$.

ЛЕММА 2.1 [1, гл. VI, § 5, (5.2')]. *Каждая функция $\varphi \in \mathcal{D}_N^l(\mathbb{Q}_p^n)$ может быть представлена как конечная линейная комбинация:*

$$\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{p^{n(N-l)}} \varphi(a^\nu) \Delta_l(x - a^\nu), \quad x \in \mathbb{Q}_p^n,$$

где $\Delta_l(x - a^\nu) = \Omega(p^{-l}|x - a^\nu|_p)(x)$ – характеристическая функция шара $B_l^n(a^\nu)$, $\Omega(t)$ – характеристическая функция отрезка $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Здесь точки $a^\nu = (a_1^\nu, \dots, a_n^\nu) \in B_N^n$ не зависят от φ и являются такими, что шары $B_l^n(a^\nu)$, $\nu = 1, \dots, p^{n(N-l)}$, не пересекаются и покрывают шар B_N^n .

Обозначим через $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ пространство линейных функционалов на $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ и введем сходимость на $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ как слабую сходимость функционалов. Линейные функционалы из $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ непрерывны [1, гл. VI, § 3].

Известно, что на $\mathbb{Q}_p$ существует мера Хаара, т. е. положительная мера dx , инвариантная относительно сдвига, $d(x+a) = dx$, и нормированная соотношением $\int_{|x|_p \leq 1} dx = 1$. Инвариантная мера dx на поле $\mathbb{Q}_p$ стандартным образом расширяется до инвариантной меры $d^n x = dx_1 \cdots dx_n$ на $\mathbb{Q}_p^n$.

Преобразование Фурье функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ определяется формулой

$$\widehat{\varphi}(\xi) = F[\varphi](\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi_p(\xi \cdot x) \varphi(x) d^n x, \quad \xi \in \mathbb{Q}_p^n,$$

где $\chi_p(\xi \cdot x) = \chi_p(\xi_1 x_1) \cdots \chi_p(\xi_n x_n)$; $\xi \cdot x$ – скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $x_j, \xi_j \in \mathbb{Q}_p$, $j = 1, 2, \dots, n$; $\chi_p(x) = e^{2\pi i \{x\}_p}$ – аддитивный характер поля $\mathbb{Q}_p$, $x \in \mathbb{Q}_p$; $\{x\}_p$ – дробная часть числа $x \in \mathbb{Q}_p$, определенная в (2.2).

ЛЕММА 2.2 [1, гл. VII, § 2], [46, лемма A], [47, гл. III, (3.2)]. *Преобразование Фурье является линейным изоморфизмом из $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ в $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$. При этом*

$$\varphi \in \mathcal{D}_N^l(\mathbb{Q}_p^n) \Leftrightarrow F[\varphi] \in \mathcal{D}_{-l}^{-N}(\mathbb{Q}_p^n). \quad (2.5)$$

Преобразование Фурье распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ является распределением $\widehat{f} = F[f]$, которое определяется соотношением $\langle F[f], \varphi \rangle = \langle f, F[\varphi] \rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$.

Пусть A – матрица, $\det A \neq 0$, и $b \in \mathbb{Q}_p^n$. Тогда для распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ имеет место следующее соотношение [1, гл. VII, § 3, (3.3)]:

$$F[f(Ax + b)](\xi) = |\det A|_p^{-1} \chi_p(-A^{-1}b \cdot \xi) F[f(x)](A^{-1}\xi). \quad (2.6)$$

Согласно [1, гл. IV, § 3, (3.1)] имеем

$$F[\Omega(p^{-k} \cdot | \cdot |_p)](x) = p^{nk} \Omega(p^k |x|_p), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n. \quad (2.7)$$

В частности, $F[\Omega(|\xi|_p)](x) = \Omega(|x|_p)$.

§ 3. Базисы p -адических всплесков

В настоящее время трудно найти прикладную область, где бы не использовались всплески. Хотя первый базис всплесков был введен Хааром в 1910 г. [48], а его различные обобщения рассматривались многими математиками, почти в течение столетия никто не мог построить другую всплеск-функцию, сдвиги и растяжения которой образовывали бы ортогональный базис. И только в начале девяностых годов прошлого века началось интенсивное развитие теории всплесков. В это время И. Мейером [49] и С. Малла [50], [51] был разработан метод построения всплеск-функций, который основан на понятии *кратномасштабного анализа* (в дальнейшем обозначаемого КМА); см., например, [52, ч. 5], [53, § 2.1].

Однако в сравнении с вещественным случаем теория p -адических всплесков имеет более короткую историю. С. В. Козырев в 2002 г. [23] построил первый p -адический базис всплесков с компактным носителем для $L^2(\mathbb{Q}_p)$, являющийся аналогом вещественного базиса Хаара. Всплеск-функции Козырева имеют вид

$$\psi_k(x) = \chi_p(p^{-1}kx) \Omega(|x|_p), \quad x \in \mathbb{Q}_p. \quad (3.1)$$

Базис Козырева, порождаемый сдвигами и растяжениями всплеск-функций (3.1), состоит из всплеск-функций

$$\psi_{k;ja}(x) = p^{-j/2} \chi_p(p^{-1}k(p^jx - a)) \Omega(|p^jx - a|_p), \quad x \in \mathbb{Q}_p, \quad (3.2)$$

где $k \in \{1, 2, \dots, p-1\}$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : \{x\}_p = x\}$. Здесь

$$\begin{aligned} I_p &= \{a = p^{-\gamma}(a_0 + a_1p + \dots + a_{\gamma-1}p^{\gamma-1}) : \\ &\quad \gamma \in \mathbb{N}; a_j = 0, 1, \dots, p-1; j = 0, 1, \dots, \gamma-1\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

является “естественным” множеством сдвигов в $\mathbb{Q}_p$, поскольку $\mathbb{Q}_p$ можно “естественным” образом представить в виде объединения непересекающихся шаров:

$$\mathbb{Q}_p = \bigcup_{a \in I_p} B_0(a).$$

Дальнейшее развитие теория всплесков получила в работах [21], [26]. В [26] было введено определение КМА в $L^2(\mathbb{Q}_p)$ и описана общая схема для его построения. Эта схема была реализована для $p = 2$ в [26] и для случая произвольного p в [21]. Для построения КМА было использовано *масштабирующее уравнение*

$$\phi(x) = \sum_{r=0}^{p-1} \phi\left(\frac{1}{p}x - \frac{r}{p}\right), \quad x \in \mathbb{Q}_p, \quad (3.4)$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Все растяжения и сдвиги всплеск-функции (3.7) образуют ортонормальный (p -адический хааровский) базис всплесков в $L^2(\mathbb{Q}_p^n)$*

$$\Psi_{k;ja}(x) = p^{-nj/2} \Psi_k(p^j x - a) = p^{-nj/2} \chi_p(p^{-1}k \cdot (p^j x - a)) \Omega(|p^j x - a|_p), \quad (3.9)$$

где $x \in \mathbb{Q}_p^n$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$ и $I_p^n = I_p \times \dots \times I_p$ – прямое произведение n экземпляров множеств (3.3), множество J_{p0}^n определено в (3.8).

Многомерный базис (3.9) был введен в [42]. Этот базис также можно построить, используя теорию представлений некоторой p -адической группы преобразований [55].

В дальнейшем именно этот многомерный базис всплесков (3.9) мы будем использовать для построения решений псевдодифференциальных уравнений.

§ 4. p -адические пространства Лизоркина

4.1. p -адические пространства Лизоркина основных функций и распределений. В работах П. И. Лизоркина [56], [57] были введены пространства, инвариантные относительно вещественных действий дробных операторов. Мы введем p -адические пространства Лизоркина, которые являются аналогами вещественных пространств [56], [57]. Согласно [14], [58] p -адическое пространство Лизоркина основных функций определяется следующим образом:

$$\Phi(\mathbb{Q}_p^n) = \{\phi: \phi = F[\psi], \psi \in \Psi(\mathbb{Q}_p^n)\}, \quad (4.1)$$

где $\Psi(\mathbb{Q}_p^n) = \{\psi(\xi) \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n): \psi(0) = 0\}$. Пространство $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ может быть оснащено топологией пространства $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$, которая превращает $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ в полное пространство. Пространство Лизоркина $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ допускает следующую характеризацию.

ЛЕММА 4.1 [14], [58]. *Выполнены следующие утверждения:*

- (а) $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ тогда и только тогда, когда $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{Q}_p^n)$ и $\int_{\mathbb{Q}_p^n} \phi(x) d^n x = 0$;
- (б) $\phi \in \mathcal{D}_N^l(\mathbb{Q}_p^n) \cap \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ (т. е. $\int_{B_N^n} \phi(x) d^n x = 0$) тогда и только тогда, когда $\psi = F^{-1}[\phi] \in \mathcal{D}_l^{-N}(\mathbb{Q}_p^n) \cap \Psi(\mathbb{Q}_p^n)$ (т. е. $\psi(\xi) = 0$, $\xi \in B_{-N}^n$).

Обозначим через $\Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$ и $\Psi'(\mathbb{Q}_p^n)$ топологически двойственные пространства к пространствам $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ и $\Psi(\mathbb{Q}_p^n)$ соответственно. Назовем $\Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$ *пространством Лизоркина p -адических распределений*. Пространство $\Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$ может быть получено из $\mathcal{D}'(\mathbb{Q}_p^n)$ “удалением” констант.

Преобразования Фурье распределений $f \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$ и $g \in \Psi'(\mathbb{Q}_p^n)$ определяются соответственно формулами $\langle F[f], \psi \rangle = \langle f, F[\psi] \rangle$ для всех $\psi \in \Psi(\mathbb{Q}_p^n)$ и $\langle F[g], \phi \rangle = \langle g, F[\phi] \rangle$ для всех $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$. Очевидно, что $F[\Phi'(\mathbb{Q}_p^n)] = \Psi'(\mathbb{Q}_p^n)$ и $F[\Psi'(\mathbb{Q}_p^n)] = \Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$ [14].

4.2. p -адические пространства Лизоркина и всплески. Легко проверить, что $\int_{\mathbb{Q}_p^n} \Psi_{k;ja}(x) d^n x = 0$, т. е. в силу леммы 4.1 многомерные всплески $\Psi_{k;ja}$, $k = (k_1, \dots, k_n) \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$, принадлежат пространству Лизоркина основных функций $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$.

Теперь мы покажем, что каждая основная функция из пространства Лизоркина $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ может быть представлена как конечная линейная комбинация всплесков, т. е. мы докажем, что для $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ имеет место аналог леммы 2.1.

ЛЕММА 4.2. Каждая функция $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ может быть представлена в виде конечной суммы:

$$\phi(x) = \sum_{k \in J_{p^0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} c_{k;j,a} \Psi_{k;j,a}(x), \quad x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad (4.2)$$

где $c_{k;j,a}$ – константы, $\Psi_{k;j,a}(x)$ – элементы хааровского базиса всплесков (3.9), $k = (k_1, \dots, k_n) \in J_{p^0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая (2.4), (2.7), (2.6), легко найти преобразование Фурье от всплеск-функции (3.7)

$$F[\Psi_k(x)](\xi) = \prod_{r=1}^n \Omega(|p^{-1}k_r + \xi_r|_p) = \Omega(|p^{-1}k + \xi|_p), \quad \xi \in \mathbb{Q}_p^n, \quad (4.3)$$

где $k = (k_1, \dots, k_n) \in J_{p^0}^n$. Поскольку $|p^{-1}k_r|_p = p$, то $\Omega(|\xi_r + p^{-1}k_r|_p) \neq 0$, если только $\xi_r = -p^{-1}k_r + \eta_r$, где $\eta_r \in \mathbb{Z}_p$, $r = 1, 2, \dots, n$. А значит, $\xi = -p^{-1}k + \eta$, $\eta \in \mathbb{Z}_p^n$, $k \in J_{p^0}^n$, и $|\xi|_p = p$. Согласно (3.9), (4.3), (2.6) имеем

$$\begin{aligned} F[\Psi_{k;j,a}(x)](\xi) &= p^{-nj/2} F[\Psi_k(p^j x - a)](\xi) \\ &= p^{nj/2} \chi_p(p^{-j}a \cdot \xi) \Omega(|p^{-1}k + p^{-j}\xi|_p). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ясно, что $\phi \in L^2(\mathbb{Q}_p^n)$. Теперь, учитывая формулу (4.4) и используя теорему Парсеваля–Стеклова [1, гл. VII, § 4, (4.4)], вычислим $L^2(\mathbb{Q}_p^n)$ -скалярное произведение $(\phi, \Psi_{k;j,a})$:

$$\begin{aligned} c_{k;j,a} &= (\phi(x), \Psi_{k;j,a}(x)) = (F[\phi](\xi), F[\Psi_{k;j,a}](\xi)) \\ &= (\psi(\xi), p^{nj/2} \chi_p(p^{-j}a \cdot \xi) \Omega(|p^{-1}k + p^{-j}\xi|_p)), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $k \in J_{p^0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$. Здесь согласно определению (4.1) и леммам 4.1, 2.2 каждая функция $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ принадлежит одному из пространств $\mathcal{D}_N^l(\mathbb{Q}_p^n)$ и $\psi = F^{-1}[\phi] \in \Psi(\mathbb{Q}_p^n) \cap \mathcal{D}_{-l}^{-N}(\mathbb{Q}_p^n)$, $\text{supp } \psi \subset B_{-l}^n \setminus B_{-N}^n$.

В силу (4.5) возможно, что $c_{s;j,a} \neq 0$, если только $p^{-N} \leq |\xi|_p \leq p^{-l}$ и $p^{-1}k + p^{-j}\xi = \eta \in \mathbb{Z}_p^n$. Поскольку $\xi = p^j\eta - p^{j-1}k$, мы имеем $|\xi|_p = \max_{1 \leq m \leq n} |\xi_m|_p = p^{-j+1}$ и $p^{-N} \leq p^{-j+1} \leq p^{-l}$. Таким образом, имеется конечное число индексов $j \in \mathbb{Z}$ таких, что $c_{s;j,a} \neq 0$, и, следовательно, сумма (4.2) конечна по j .

Еще раз рассмотрим выражение (4.5):

$$c_{k;j,a} = (\phi(x), \Psi_{k;j,a}(x)) = p^{-nj/2} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \phi(x) \chi_p(p^{-1}k \cdot (p^j x - a)) \Omega(|p^j x - a|_p) d^n x,$$

где $\text{supp } \phi \subset B_N^n$ и $\text{supp } \Psi_{k;j,a} \subset B_j^n(p^{-j}a)$. Ясно, что $c_{k;j,a} \neq 0$ по крайней мере в том случае, когда пересечение шаров $B_j^n(p^{-j}a)$ и B_N^n не пусто. Используя соотношение (2.4) и формулу (см. [1, гл. VII, § 1], [23])

$$\Omega(|p^j x - a|_p) \Omega(|p^{j'} x - a'|_p) = \Omega(|p^j x - a|_p) \Omega(|p^{j'-j} a - a'|_p), \quad j \leq j', \quad (4.6)$$

мы найдем, что

$$\Omega(|p^{-j}x_m - a_m|_p) \Omega(|p^N x_m|_p) = \begin{cases} \Omega(|p^j x_m - a_m|_p) \Omega(|p^{N-j} a_m|_p), & j \leq N, \\ \Omega(|p^N x_m|_p) \Omega(|a_m|_p), & j > N, \end{cases}$$

$m = 1, 2, \dots, n$. Отсюда следует, что $c_{k;ja} \neq 0$ по крайней мере для случая, когда $p^{N-j}a_m \in \mathbb{Z}_p$ ($j \leq N$) или $a_m = 0$ ($j > N$). Поскольку в силу доказанного выше множество индексов j , для которых $c_{k;ja} \neq 0$, конечно, множество индексов a_m , для которых $c_{k;ja} \neq 0$, также конечно, $m = 1, 2, \dots, n$. Таким образом, сумма (4.2) также конечна и по $a \in I_p^n$. Лемма доказана.

Используя стандартные результаты из книги [59], мы получим следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Любое распределение $f \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$ может быть представлено в виде бесконечной суммы*

$$f(x) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} d_{k;ja} \Psi_{k;ja}(x), \quad x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad (4.7)$$

где $d_{s;ja}$ – константы, $\Psi_{k;ja}(x)$ – элементы хааровского базиса всплесков (3.9), $k = (k_1, \dots, k_n) \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$.

Каждое распределение $f \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$ соотносится с представлением (4.7), где коэффициенты имеют вид

$$d_{k;ja} \stackrel{\text{def}}{=} \langle f, \Psi_{k;ja}(x) \rangle, \quad k \in J_{p0}^n, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad a \in I_p^n. \quad (4.8)$$

Обратно, учитывая лемму 4.2 и ортонормальность базиса всплесков (3.9), каждой бесконечной сумме (4.7) можно сопоставить распределение $f \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$, которое действует на основную функцию $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$, представляемую в форме (4.2), следующим образом:

$$\langle f, \phi \rangle = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} d_{k;ja} \overline{c_{k;ja}}, \quad (4.9)$$

где сумма конечна.

Ясно, что в лемме 4.2 и предложении 4.1 можно вместо базиса всплесков $\Psi_{k;ja}(x)$ использовать один из многомерных хааровских базисов всплесков, которые были построены в работах [21], [26].

В [43] утверждения типа леммы 4.2 и предложения 4.1 были сформулированы для случая ультраметрических пространств Лизоркина.

§ 5. p -адические псевдодифференциальные операторы в пространствах Лизоркина

5.1. p -адические псевдодифференциальные операторы. Теперь мы рассмотрим класс p -адических псевдодифференциальных операторов, исследованных в [14], [58]. На основных функциях $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ такой оператор A определяется следующим образом:

$$(A\phi)(x) = F^{-1}[\mathcal{A}(\xi)F[\phi](\xi)](x) = \int_{\mathbb{Q}_p^n} \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi_p((y-x) \cdot \xi) \mathcal{A}(\xi) \phi(y) d^n \xi d^n y, \quad (5.1)$$

где $\mathcal{A}(\xi) \in \mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^n \setminus \{0\})$, $\mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^n)$ – пространство локально постоянных функций на $\mathbb{Q}_p^n$ [1, гл. VI, § 1, п. 2]. Определив сопряженный оператор A^T по формуле

$$\begin{aligned} (A^T \phi)(x) &= F^{-1}[\mathcal{A}(-\xi)F[\phi](\xi)](x) \\ &= \int_{\mathbb{Q}_p^n} \chi_p(-x \cdot \xi) \mathcal{A}(-\xi)F[\phi](\xi) d^n \xi, \quad \phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n), \end{aligned}$$

мы определим оператор A на пространстве распределений Лизоркина следующим образом: если $f \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$, то $\langle Af, \phi \rangle = \langle f, A^T \phi \rangle$ для всех $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$. Из последнего соотношения следует, что

$$Af = F^{-1}[\mathcal{A}F[f]], \quad f \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n). \quad (5.2)$$

Заметим, что класс (5.1) содержит псевдодифференциальные операторы Кочубея с символами вида $\mathcal{A}(\xi) = |f(\xi_1, \dots, \xi_n)|_p^\alpha$, $\alpha > 0$, где $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ – квадратичная форма, для которой $f(\xi_1, \dots, \xi_n) \neq 0$, когда $|\xi_1|_p + \dots + |\xi_n|_p \neq 0$ (см. [12], [60]), а также псевдодифференциальные операторы Зуниги-Галинды с символами $\mathcal{A}(\xi) = |f(\xi_1, \dots, \xi_n)|_p^\alpha$, $\alpha > 0$, где $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$ – отличный от константы полином (см. [61], [62]).

Многомерный дробный оператор D^α , введенный Тайблесоном в [47], также принадлежит классу (5.1) и имеет символ $\mathcal{A}(\xi) = |\xi|_p^\alpha$, т. е.

$$(D^\alpha f)(x) = F^{-1}[|\cdot|_p^\alpha F[f](\cdot)](x), \quad f \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n), \quad (5.3)$$

где $\alpha \in \mathbb{C}$. Представление (5.3) можно переписать как свертку:

$$(D^\alpha f)(x) = \kappa_{-\alpha}(x) * f(x) = \langle \kappa_{-\alpha}(x), f(x - \xi) \rangle, \quad f \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n), \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

где согласно [14] многомерное ядро Рисса κ_α есть распределение:

$$\kappa_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{|x|_p^{\alpha-n}}{\Gamma_p^{(n)}(\alpha)}, & \alpha \neq 0, n, \\ \delta(x), & \alpha = 0, \\ -\frac{1-p^{-n}}{\log p} \log |x|_p, & \alpha = n, \end{cases} \quad x \in \mathbb{Q}_p^n;$$

здесь функция $|x|_p$ определяется, как в (2.3), $\Gamma_p^{(n)}(\alpha)$ – n -мерная Γ -функция [46, теорема 1], [47, гл. III, теорема (4.2)], [1, гл. VIII, (4.4)].

Из (5.1), (5.2) следует

ЛЕММА 5.1 [14]. *Пространства Лизоркина $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ и $\Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$ инвариантны относительно действия операторов (5.1), (5.2).*

Согласно [14] семейство псевдодифференциальных операторов (5.1) с символами $\mathcal{A}(\xi) \neq 0$, $\xi \in \mathbb{Q}_p^n \setminus \{0\}$, образует абелеву группу, где $A^{-1}f = F^{-1}[\mathcal{A}^{-1}F[f]]$, $f \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$.

5.2. Спектральная теория псевдодифференциальных операторов.

Напомним, что в [1, гл. IX, § 4] была построена спектральная теория p -адических псевдодифференциальных операторов и найден базис из собственных

функций с компактным носителем (одномерного) дробного оператора (5.3). Другой пример базиса из собственных функций дробного оператора (5.3) был построен в [41]. Затем в [23] был впервые построен базис всплесков (3.2), элементы которого являются собственными функциями (одномерного) дробного оператора (5.3):

$$D^\alpha \psi_{k;ja}(x) = p^{\alpha(1-j)} \psi_{k;ja}(x), \quad x \in \mathbb{Q}_p, \quad \alpha > 0, \quad (5.4)$$

где $k = 1, 2, \dots, p-1$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p$. Типично то, что элементы базисов всплесков при соответствующих условиях являются собственными функциями p -адических псевдодифференциальных операторов. Действительно, имеет место следующая

ТЕОРЕМА 5.1 [42]. Пусть A – псевдодифференциальный оператор (5.1), (5.2) с символом $\mathcal{A}(\xi) \in \mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^n \setminus \{0\})$. Тогда n -мерный хааровский всплеск (3.9):

$$\Psi_{k;ja}(x) = p^{-nj/2} \chi_p(p^{-1}k \cdot (p^j x - a)) \Omega(|p^j x - a|_p), \quad x \in \mathbb{Q}_p^n,$$

является собственной функцией A , т. е.

$$A\Psi_{k;ja}(x) = \mathcal{A}(-p^{j-1}k) \Psi_{k;ja}(x),$$

в том и только в том случае, если выполнено условие

$$\mathcal{A}(p^j(-p^{-1}k + \eta)) = \mathcal{A}(-p^{j-1}k) \quad \forall \eta \in \mathbb{Z}_p^n, \quad (5.5)$$

где $k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$ и J_{p0}^n определяется формулой (3.8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполнено условие (5.5), то, используя соотношения (5.1), (4.4), получим

$$\begin{aligned} A\Psi_{k;ja}(x) &= F^{-1}[\mathcal{A}(\xi)F[\Psi_{k;ja}](\xi)](x) \\ &= p^{nj/2} F^{-1}[\mathcal{A}(\xi)\chi_p(p^{-j}a \cdot \xi)\Omega(|p^{-1}k + p^{-j}\xi|_p)](x). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Делая замену переменных $\xi = p^j(\eta - p^{-1}k)$, получим $A\Psi_{k;ja}(x) = \lambda \Psi_{k;ja}(x)$, где $\lambda = \mathcal{A}(-p^{j-1}k)$.

Обратно, если $A\Psi_{k;ja}(x) = \lambda \Psi_{k;ja}(x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, то, применяя обратное преобразование Фурье к последнему соотношению и используя формулы (4.4), (5.6), мы получим $(\mathcal{A}(\xi) - \lambda)\Omega(|p^{-1}k + p^{-j}\xi|_p) = 0$, $\xi \in \mathbb{Q}_p^n$. Если $p^{-1}k + p^{-j}\xi = \eta$, $\eta \in \mathbb{Z}_p^n$, то $\xi = p^j(-p^{-1}k + \eta)$ и $\lambda = \mathcal{A}(p^j(-p^{-1}k + \eta))$ для каждого $\eta \in \mathbb{Z}_p^n$. В частности, $\lambda = \mathcal{A}(-p^{j-1}k)$, и, следовательно, имеет место (5.5). Теорема доказана.

Аналогичного типа утверждения справедливы и для всплеск-функций, построенных в [21], [26] (см. § 3). Таким образом, p -адический анализ всплесков тесно связан со спектральным анализом псевдодифференциальных операторов. В отличие от p -адического случая, для действительных псевдодифференциальных операторов существование собственных функций с компактным носителем нетипично.

Поскольку символ $\mathcal{A}(\xi) = |\xi|_p^\alpha$ дробного оператора (5.3) удовлетворяет условию (5.5):

$$\mathcal{A}(-p^{-1}k + \eta) = |-p^{-1}k + \eta|_p^\alpha = |-p^{-1}k|_p^\alpha = \mathcal{A}(-p^{-1}k) = p^\alpha \quad \forall \eta \in \mathbb{Z}_p^n,$$

$k = (k_1, \dots, k_n) \in J_{p0}^n$, в силу теоремы 5.1 мы имеем

СЛЕДСТВИЕ 5.1 [42]. n -мерная всплеск-функция Хаара (3.9) является собственной функцией дробного оператора (5.3):

$$D^\alpha \Psi_{k;ja} = p^{\alpha(1-j)} \Psi_{k;ja}(x), \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad (5.7)$$

где $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$, $k \in J_{p0}^n$.

§ 6. Метод разделения переменных

Теперь мы дадим формулировку метода разделения переменных, который опирается на результаты из §3–5. Этот метод позволяет решать задачи Коши для p -адических эволюционных псевдодифференциальных уравнений. Метод базируется на следующих трех важных фактах.

1. Элементы базиса p -адических всплесков (3.9), которые описаны в теореме 3.1, при выполнении условия (5.5) являются собственными функциями псевдодифференциальных операторов (5.1), построенных в §5. Кроме того, всплески (3.9) принадлежат пространству основных функций Лизоркина $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$, введенному в §4.

2. Пространство распределений Лизоркина $\Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$ является естественной областью определения для псевдодифференциальных операторов (5.1). Согласно лемме 5.1 пространства Лизоркина $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ и $\Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$ инвариантны относительно действия псевдодифференциальных операторов (5.1).

3. Согласно лемме 4.2 каждая основная функция из пространства Лизоркина $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ может быть представлена в форме конечной линейной комбинации (4.2) всплесков (3.9). Согласно предложению 4.1 каждое распределение из пространства Лизоркина $\Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$ может быть представлено как бесконечная линейная комбинация (4.7) всплесков (3.9).

Согласно пп. 1–3 естественно искать решения $u(x, t)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Q}_p^n$, задач Коши для эволюционных псевдодифференциальных уравнений в пространстве $\tilde{\Phi}'_{(m)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$ таких распределений $f(x, t)$, что:

(а) $f(\cdot, t) \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$ для каждого $t \geq 0$;

(б) если $m = 0$, то для каждой основной функции $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ функция $\langle f(\cdot, t), \phi(\cdot) \rangle$ является непрерывной по t ; если $m = 1, 2, \dots$, то для каждой основной функции $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ существуют производные $\frac{d^j}{dt^j} \langle f(\cdot, t), \phi(\cdot) \rangle$ (согласно [63, гл. I, добавление 2.2] это эквивалентно существованию слабых производных $\frac{d^j f(\cdot, t)}{dt^j}$), $j = 1, \dots, m$.

В силу леммы 4.2, предложения 4.1 и формул (4.9), (4.5), (4.8) каждое распределение $f \in \tilde{\Phi}'_{(m)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$ представляется в виде формального ряда вида

$$f(x, t) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} d_{k;ja}(t) \Psi_{k;ja}(x), \quad (6.1)$$

где коэффициенты

$$d_{k;ja}(t) = \langle f(\cdot, t), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle \quad (6.2)$$

являются непрерывными функциями для $m = 0$ и m раз дифференцируемыми функциями для $m = 1, 2, \dots$; $\Psi_{k;ja}(x)$ – n -мерная хааровская всплеск-функция (3.9), $k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Q}_p^n$. При этом для каждой основной

функции $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ мы имеем

$$\langle f(\cdot, t), \phi(\cdot) \rangle = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \overline{\langle \phi(\cdot), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle} \langle f(\cdot, t), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle, \quad (6.3)$$

где сумма конечна, $\Psi_{k;ja}(x)$ – n -мерная хааровская всплеск-функция (3.9), $k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Q}_p^n$.

Согласно изложенному выше мы должны искать решение задачи Коши для p -адического эволюционного псевдодифференциального уравнения в виде формального ряда

$$u(x, t) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \Lambda_{k;ja}(t) \Psi_{k;ja}(x) \in \tilde{\Phi}'_{(m)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+), \quad (6.4)$$

где $\Lambda_{k;ja}(t)$ – неизвестные функции, $k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$.

В случае систем эволюционных псевдодифференциальных уравнений мы будем искать вектор-решение $u(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_r(x, t))^T$ задачи Коши в пространстве $(\tilde{\Phi}'_{(m)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+))^r$, где $(\tilde{\Phi}'_{(m)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+))^r$ – прямое произведение r экземпляров пространств $\tilde{\Phi}'_{(m)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$, T – операция транспонирования.

Как будет видно из следующих параграфов, наш метод в конечном счете сводит решение задачи Коши для p -адического эволюционного псевдодифференциального уравнения к решению вещественного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами по временной переменной t .

Отметим, что для решения p -адических псевдодифференциальных уравнений методом разделения переменных также использовались собственные базисы p -адических псевдодифференциальных операторов (не являющиеся базисами всплесков) [1]. В [64] для решения некоторых эволюционных псевдодифференциальных уравнений был введен класс функций $\mathcal{M}(D^\alpha) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{Q}_p) : D^\alpha \varphi \in L^2(\mathbb{Q}_p)\}$. Решения искали в виде рядов (6.4), которые равномерно сходятся в $\mathcal{M}(D^\alpha)$. Ясно, что таким образом можно построить только решения задач Коши для специального вида уравнений. В отличие от $\mathcal{M}(D^\alpha)$, пространство $\tilde{\Phi}'_{(m)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$ является “естественным” классом решений для задач Коши.

§ 7. Линейные псевдодифференциальные эволюционные уравнения первого порядка по t

7.1. Уравнения типа уравнения теплопроводности. Рассмотрим задачу Коши для линейного эволюционного псевдодифференциального уравнения первого порядка по t

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + A_x u(x, t) &= f(x, t) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times (0, \infty), \\ u(x, t) &= u^0(x) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times \{t = 0\}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где $t \in \mathbb{R}$, $u^0 \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$ и

$$A_x u(x, t) = F^{-1}[\mathcal{A}(\xi) F[u(\cdot, t)]](\xi)(x) \quad (7.2)$$

– псевдодифференциальный оператор (5.1) (относительно x) с символом $\mathcal{A}(\xi) \in \mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^n \setminus \{0\})$, $u(x, t) \in \tilde{\Phi}'_{(1)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$ – искомое распределение.

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть символ псевдодифференциального оператора A_x в задаче Коши (7.1) удовлетворяет условию (5.5):

$$\mathcal{A}(p^j(-p^{-1}k + \eta)) = \mathcal{A}(-p^{j-1}k) \quad \forall \eta \in \mathbb{Z}_p^n,$$

для всех $j \in \mathbb{Z}$, $k \in J_{p0}^n$. Пусть $f \in \tilde{\Phi}'_{(0)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$. Тогда задача (7.1) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \left(e^{-\mathcal{A}(-p^{j-1}k)t} \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle \right. \\ & \left. + \int_0^t e^{-\mathcal{A}(-p^{j-1}k)(t-\tau)} \langle f(\cdot, \tau), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle d\tau \right) \Psi_{k;ja}(x) \in \tilde{\Phi}'_{(1)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+), \end{aligned} \quad (7.3)$$

где $\Psi_{k;ja}(x)$ – n -мерные хааровские всплески (3.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f \in \tilde{\Phi}'_{(0)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$, согласно изложенному в § 6 это распределение представляется в виде бесконечной суммы (6.1), где в силу (6.2)

$$d_{k;ja}(t) = \langle f(\cdot, t), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle, \quad k \in J_{p0}^n, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad a \in I_p^n,$$

– непрерывные функции. Так как мы хотим найти решение $u(x, t)$ задачи Коши (7.1) в классе $\tilde{\Phi}'_{(1)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$, в соответствии с § 6 мы должны искать это решение в форме (6.4), где $\Lambda_{k;ja}(t)$ – неизвестные функции, $k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$.

Подставляя (6.4) в уравнение (7.1), в силу теоремы 5.1 получим

$$\sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} (\dot{\Lambda}_{k;ja}(t) + \mathcal{A}(-p^{j-1}k)\Lambda_{k;ja}(t) - d_{k;ja}(t))\Psi_{k;ja}(x) = 0,$$

где через $\dot{F}$ обозначена производная $\frac{d}{dt}$. Последнее уравнение понимается в слабом смысле, т. е.

$$\sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \langle (\dot{\Lambda}_{k;ja}(t) + \mathcal{A}(-p^{j-1}k)\Lambda_{k;ja}(t) - d_{k;ja}(t))\Psi_{k;ja}(x), \phi(x) \rangle = 0 \quad (7.4)$$

для всех $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$. Поскольку согласно лемме 4.2 каждая основная функция $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ представляется в форме конечной суммы (4.2), из (7.4) следует, что

$$\dot{\Lambda}_{k;ja}(t) + \mathcal{A}(-p^{j-1}k)\Lambda_{k;ja}(t) = d_{k;ja}(t) \quad \forall k \in J_{p0}^n, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad a \in I_p^n,$$

для всех $t \geq 0$. Решая это дифференциальное уравнение (см. [65]), получим

$$\Lambda_{k;ja}(t) = e^{-\mathcal{A}(-p^{j-1}k)t} \left(\Lambda_{k;ja}(0) + \int_0^t e^{\mathcal{A}(-p^{j-1}k)\tau} d_{k;ja}(\tau) d\tau \right), \quad (7.5)$$

$k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$.

Подставляя (7.5) в (6.4), найдем решение задачи Коши (7.1) в форме

$$u(x, t) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} e^{-\mathcal{A}(-p^{j-1}k)t} \times \left(\Lambda_{k;ja}(0) + \int_0^t e^{\mathcal{A}(-p^{j-1}k)\tau} d_{k;ja}(\tau) d\tau \right) \Psi_{k;ja}(x). \quad (7.6)$$

Полагая $t = 0$, получим $u^0(x) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \Lambda_{k;ja}(0) \Psi_{k;ja}(x)$, где $u^0 \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$ и согласно (4.7) коэффициенты $\Lambda_{k;ja}(0)$ однозначно определяются с помощью (4.8):

$$\Lambda_{k;ja}(0) = \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle, \quad k \in J_{p0}^n, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad a \in I_p^n. \quad (7.7)$$

Из соотношений (7.6), (7.7), (6.2) следует (7.3). Ввиду (6.3) сумма (7.3) конечна на каждой основной функции из пространства Лизоркина $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть символ псевдодифференциального оператора A_x в задаче Коши (7.1) удовлетворяет условиям

$$\mathcal{A}(p^j(-p^{-1}k + \eta)) = \mathcal{A}(-p^{j-1}k) \quad \forall \eta \in \mathbb{Z}_p^n, \quad \operatorname{Re} \mathcal{A}(-p^{j-1}k) > 0,$$

для всех $j \in \mathbb{Z}$, $k \in J_{p0}^n$. Пусть $f \in \tilde{\Phi}'_{(0)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$. Предположим, что для любых $k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle f(\cdot, t), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle = e_{k;ja} (= \text{const}). \quad (7.8)$$

Тогда решение (7.3) задачи Коши (7.1) стабилизируется при $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = g(x) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \frac{e_{k;ja}}{\mathcal{A}(-p^{j-1}k)} \Psi_{k;ja}(x) \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n), \quad (7.9)$$

для каждого $x \in \mathbb{Q}_p^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что сумма (7.3) конечна на каждой основной функции $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$, и используя правило Лопиталья, легко найти, что для всех $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ из (7.3) следует (7.9). Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай задачи Коши (7.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + D_x^\alpha u(x, t) &= f(x, t) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times (0, \infty), \\ u(x, t) &= u^0(x) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times \{t = 0\}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

где $D_x^\alpha u(x, t) = F^{-1} [|\xi|^\alpha F[u(\cdot, t)](\xi)](x)$ – дробный оператор (5.3) по переменной x , $\alpha \in \mathbb{C}$.

Поскольку для дробного оператора условие (8.3) выполнено, теорема 7.1 и следствие 5.1 влекут следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 7.1. Пусть $f \in \tilde{\Phi}'_{(0)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$. Тогда задача Коши (7.10) имеет единственное решение

$$u(x, t) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \left(e^{-p^{\alpha(1-j)}t} \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle + \int_0^t e^{-p^{\alpha(1-j)}(t-\tau)} \langle f(\cdot, \tau), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle d\tau \right) \Psi_{k;ja}(x) \in \tilde{\Phi}'_{(1)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+), \quad (7.11)$$

где $\Psi_{k;ja}(x)$ – n -мерные хааровские всплески (3.9).

СЛЕДСТВИЕ 7.2. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in \tilde{\Phi}'_{(0)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$ в задаче (7.10). Если выполнено условие (7.8), то решение (7.11) задачи Коши (7.10) стабилизируется при $t \rightarrow \infty$, т.е. имеет место (7.9):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = g(x) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \frac{e_{k;ja}}{p^{\alpha(1-j)}} \Psi_{k;ja}(x) \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n) \quad \forall x \in \mathbb{Q}_p^n.$$

Для случая однородных задач Коши (7.1) и (7.10), когда $f(x, t) = 0$, решения (7.3) и (7.11) описывают диффузионные процессы в пространстве $\mathbb{Q}_p^n$.

7.2. Уравнения типа линейного уравнения Шрёдингера. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - A_x u(x, t) &= f(x, t) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times (0, \infty), \\ u(x, t) &= u^0(x) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times \{t = 0\}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

где $u^0 \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$, а псевдодифференциальный оператор A_x задан (7.2).

Используя теорему 7.1, мы найдем решения задачи Коши (7.12).

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть символ псевдодифференциального оператора $\mathcal{A}(\xi)$ в задаче Коши (7.12) удовлетворяет условию (5.5):

$$\mathcal{A}(p^j(-p^{-1}k + \eta)) = \mathcal{A}(-p^{j-1}k) \quad \forall \eta \in \mathbb{Z}_p^n,$$

для всех $j \in \mathbb{Z}$, $k \in J_{p0}^n$. Пусть $f \in \tilde{\Phi}'_{(0)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$. Тогда задача (7.12) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \left(e^{-i\mathcal{A}(-p^{j-1}k)t} \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle - i \int_0^t e^{-i\mathcal{A}(-p^{j-1}k)(t-\tau)} \langle f(\cdot, \tau), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle d\tau \right) \Psi_{k;ja}(x) \in \tilde{\Phi}'_{(1)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+), \end{aligned} \quad (7.13)$$

где $\Psi_{k;ja}(x)$ – n -мерные хааровские всплески (3.9).

В частности, мы рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - D_x^\alpha u(x, t) &= f(x, t) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times (0, \infty), \\ u(x, t) &= u^0(x) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times \{t = 0\}, \end{aligned} \quad (7.14)$$

где D_x^α – дробный оператор (5.3) по переменной x , $\alpha \in \mathbb{C}$.

Используя следствие 7.1, мы построим решения задач Коши (7.14).

СЛЕДСТВИЕ 7.3. Пусть $f \in \tilde{\Phi}'_{(0)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$. Тогда задача Коши (7.14) имеет единственное решение

$$u(x, t) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \left(e^{-ip^{\alpha(1-j)}t} \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle - i \int_0^t e^{-ip^{\alpha(1-j)}(t-\tau)} \langle f(\cdot, \tau), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle d\tau \right) \Psi_{k;ja}(x) \in \tilde{\Phi}'_{(1)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+), \quad (7.15)$$

где $\Psi_{k;ja}(x)$ – n -мерные хааровские всплески (3.9).

§ 8. Системы линейных псевдодифференциальных эволюционных уравнений первого порядка по t

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных эволюционных псевдодифференциальных уравнений первого порядка по t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= A_x u(x, t) + f(x, t) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times (0, \infty), \\ u(x, t) &= u^0(x) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times \{t = 0\}, \end{aligned} \quad (8.1)$$

где $t \in \mathbb{R}$, $u^0 = (u_1^0, \dots, u_m^0)^T \in (\Phi'(\mathbb{Q}_p^n))^m$; $u(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_m(x, t))^T$ – искомое вектор-распределение из пространства $(\tilde{\Phi}'_{(1)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+))^m$; $f(x, t) = (f_1(x, t), \dots, f_m(x, t))^T$ – заданное вектор-распределение; A_x – матрица, элементы которой суть псевдодифференциальные операторы (5.1) (относительно x)

$$A_{rs,x} u_s(x, t) = F^{-1} [A_{rs}(\xi) F[u_s(\cdot, t)](\xi)](x) \quad (8.2)$$

с символами $A_{rs}(\xi) \in \mathcal{E}(\mathbb{Q}_p^n \setminus \{0\})$, $r, s = 1, 2, \dots, m$.

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть символ псевдодифференциального оператора $A_{rs,x}$ в соотношении (8.2) удовлетворяет условию (5.5):

$$A_{rs}(p^j(-p^{-1}k + \eta)) = A_{rs}(-p^{j-1}k) \quad \forall \eta \in \mathbb{Z}_p^n, \quad (8.3)$$

для всех $j \in \mathbb{Z}$, $k \in J_{p0}^n$; $r, s = 1, 2, \dots, m$. Пусть вектор-распределение $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ принадлежит $(\tilde{\Phi}'_{(0)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+))^m$. Тогда задача Коши (8.1) имеет единственное решение

$$u(x, t) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \left(e^{\mathcal{A}_{k;j}t} \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle + \int_0^t e^{\mathcal{A}_{k;j}(t-\tau)} \langle f(\cdot, \tau), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle d\tau \right) \Psi_{k;ja}(x) \in (\tilde{\Phi}'_{(1)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+))^m, \quad (8.4)$$

где $\mathcal{A}_{k;j}$ – $(m \times m)$ -матрица, состоящая из чисел $A_{rs}(-p^{j-1}k)$, $r, s = 1, 2, \dots, m$; $\Psi_{k;ja}(x)$ – n -мерные хааровские всплески (3.9). Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} (\langle u_1^0, \Psi_{k;ja} \rangle, \dots, \langle u_m^0, \Psi_{k;ja} \rangle)^T, \\ \langle f(\cdot, \tau), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle &\stackrel{\text{def}}{=} (\langle f_1(\cdot, \tau), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle, \dots, \langle f_m(\cdot, \tau), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle)^T. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f \in (\tilde{\Phi}'_{(0)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+))^m$, в силу (6.1) его компоненты представляются в виде бесконечной суммы:

$$f_r(x, t) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} d_{r,k;j a}(t) \Psi_{k;j a}(x), \quad x \in \mathbb{Q}_p^n, \quad t \geq 0, \quad (8.5)$$

где согласно (6.2)

$$d_{r,k;j a}(t) = \langle f_r(\cdot, t), \Psi_{k;j a}(\cdot) \rangle, \quad k \in J_{p0}^n, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad a \in I_p^n, \quad (8.6)$$

– непрерывные функции, $r = 1, 2, \dots, m$.

Так как мы ищем решение $u(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_m(x, t))^T$ задачи Коши (8.1) в классе $(\tilde{\Phi}'_{(1)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+))^n$, согласно § 6 компоненты решения мы будем искать в форме (6.4):

$$u_r(x, t) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \Lambda_{r,k;j a}(t) \Psi_{k;j a}(x), \quad (8.7)$$

где $\Lambda_{r,k;j a}(t)$ – неизвестные функции, $k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$, $r = 1, 2, \dots, m$.

Подставляя (8.7) в систему (8.1) и учитывая условие (8.3) и теорему 5.1, мы получим

$$\sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \left(\dot{\Lambda}_{r,k;j a}(t) - \sum_{s=1}^m \mathcal{A}_{rs}(-p^{j-1}k) \Lambda_{s,k;j a}(t) - d_{r,k;j a}(t) \right) \Psi_{k;j a}(x) = 0,$$

где $r = 1, 2, \dots, m$. Последнее уравнение понимается в слабом смысле, т. е.

$$\sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \left\langle \left(\dot{\Lambda}_{r,k;j a}(t) - \sum_{s=1}^m \mathcal{A}_{rs}(-p^{j-1}k) \Lambda_{s,k;j a}(t) - d_{r,k;j a}(t) \right) \Psi_{k;j a}(x), \phi(x) \right\rangle = 0 \quad (8.8)$$

для всех $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$. Поскольку согласно лемме 4.2 каждая основная функция $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ представляется в форме конечной суммы (4.2), из равенства (8.8) следует, что

$$\dot{\Lambda}_{r,k;j a}(t) = \sum_{s=1}^m \mathcal{A}_{rs}(-p^{j-1}k) \Lambda_{s,k;j a}(t) + d_{r,k;j a}(t) \quad \forall k \in J_{p0}^n, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad a \in I_p^n,$$

для всех $t \geq 0$, $r = 1, 2, \dots, m$. Систему этих уравнений можно записать в матричной форме:

$$\dot{\Lambda}_{k;j a}(t) = \mathcal{A}_{k;j} \Lambda_{k;j a}(t) + d_{k;j a}(t), \quad (8.9)$$

где $\Lambda_{k;j a}(t) = (\Lambda_{1,k;j a}(t), \dots, \Lambda_{m,k;j a}(t))^T$; $d_{k;j a}(t) = (d_{1,k;j a}(t), \dots, d_{m,k;j a}(t))^T$; $k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$. Как известно [65], решение уравнения (8.9) имеет вид

$$\Lambda_{k;j a}(t) = e^{\mathcal{A}_{k;j} t} \Lambda_{k;j a}(0) + \int_0^t e^{\mathcal{A}_{k;j} (t-\tau)} d_{k;j a}(\tau) d\tau, \quad (8.10)$$

$k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$.

Поскольку $u(x, t) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \Lambda_{k;ja}(t) \Psi_{k;ja}(x)$ согласно (8.7), подставляя (8.10) в последнее соотношение, найдем решение задачи Коши (8.1)

$$u(x, t) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \left(e^{\mathcal{A}_{k;j}t} \Lambda_{k;ja}(0) + \int_0^t e^{\mathcal{A}_{k;j}(t-\tau)} d_{k;ja}(\tau) d\tau \right) \Psi_{k;ja}(x). \quad (8.11)$$

Полагая $t = 0$ в (8.11), найдем, что $u^0(x) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \Lambda_{k;ja}(0) \Psi_{k;ja}(x) \in (\Phi'(\mathbb{Q}_p^n))^m$. Согласно (4.7) и (4.8) векторы $\Lambda_{k;ja}(0)$ однозначно определяются равенством

$$\Lambda_{k;ja}(0) = \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle, \quad k \in J_{p0}^n, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad a \in I_p^n, \quad (8.12)$$

где векторное равенство понимается в том смысле, что

$$\Lambda_{s, k;ja}(0) = \langle u_s^0, \Psi_{k;ja} \rangle, \quad k \in J_{p0}^n, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad a \in I_p^n, \quad s = 1, 2, \dots, m.$$

Из соотношений (8.11), (8.12), (8.6) следует (8.4). В силу (6.3) сумма (8.4) конечна на каждой основной вектор-функции из пространства Лизоркина $(\Phi(\mathbb{Q}_p^n))^n$. Теорема доказана.

Рассмотрим частный случай задачи Коши (8.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= D_x u(x, t) + f(x, t) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times (0, \infty), \\ u(x, t) &= u^0(x) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times \{t = 0\}, \end{aligned} \quad (8.13)$$

где $u^0 \in (\Phi'(\mathbb{Q}_p^n))^n$; $u(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_m(x, t))^T \in (\tilde{\Phi}'_{(1)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+))^m$ – искомое вектор-распределение; $f(x, t) = (f_1(x, t), \dots, f_m(x, t))^T$ – заданное вектор-распределение; D_x – матрица, элементы которой – дробные операторы (5.3) относительно x :

$$D_{rs,x} u_s(x, t) = D_x^{\alpha_{rs}} u_s(x, t) = F^{-1} [|\xi|_p^{\alpha_{rs}} F[u_s(\cdot, t)](\xi)](x),$$

$\alpha_{rs} \in \mathbb{C}$, $r, s = 1, 2, \dots, m$.

Поскольку для дробного оператора условие (8.3) выполнено, из теоремы 8.1 и следствия 5.1 мы получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 8.1. Пусть вектор-распределение $f = (f_1, \dots, f_m)^T$ принадлежит $(\tilde{\Phi}'_{(0)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+))^m$. Тогда задача Коши (8.13) имеет в $(\tilde{\Phi}'(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+))^n$ единственное решение

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \left(e^{\mathcal{D}_j t} \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t e^{\mathcal{D}_j(t-\tau)} \langle f(\cdot, \tau), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle d\tau \right) \Psi_{k;ja}(x) \in (\tilde{\Phi}'_{(1)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+))^m, \end{aligned} \quad (8.14)$$

где $\mathcal{D}_j$ – $(m \times m)$ -матрица, состоящая из чисел $p^{\alpha_{rs}(1-j)}$, $r, s = 1, 2, \dots, m$; $\Psi_{k;ja}(x)$ – n -мерные хааровские всплески (3.9).

Для случая однородных задач Коши (8.1) и (8.13), когда $f(x, t) = 0$, решения (8.4) и (8.14) описывают диффузионные процессы в пространстве $\mathbb{Q}_p^n$.

§ 9. Линейные псевдодифференциальные эволюционные уравнения высших порядков t

9.1. Линейные уравнения второго порядка по t . Рассмотрим задачу Коши для линейного псевдодифференциального эволюционного уравнения второго порядка по t

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D_x^{\alpha_1} \frac{\partial u}{\partial t} + D_x^{\alpha_2} u(x, t) + u(x, t) &= f(x, t) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times (0, \infty), \\ u(x, t) &= u^0(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = u^1(x) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times \{t = 0\}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

где $t \in \mathbb{R}$, $u^0, u^1(x) \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$, $D_x^{\alpha_1} u(x, t) = F^{-1} [|\xi|_p^{\alpha_1} F[u(\cdot, t)](\xi)](x)$, $D_x^{\alpha_2} u(x, t) = F^{-1} [|\xi|_p^{\alpha_2} F[u(\cdot, t)](\xi)](x)$ – дробные операторы (5.3) по переменной x , $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$, $u(x, t) \in \tilde{\Phi}'_{(2)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$ – искомое распределение.

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть $f \in \tilde{\Phi}'_{(0)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$. Тогда задача Коши (9.1) имеет единственное решение

$$u(x, t) = \sum_{k \in J_{p^0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \Lambda_{k;ja}(t) \Psi_{k;ja}(x) \in \tilde{\Phi}'_{(2)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+), \quad (9.2)$$

где $\Psi_{k;ja}(x)$ – n -мерные хааровские всплески (3.9). Здесь:

(а) если $p^{2\alpha_1(1-j)} \neq 4(p^{\alpha_2(1-j)} + 1)$, то

$$\begin{aligned} \Lambda_{k;ja}(t) &= \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \left(\int_0^t (e^{\lambda_+(t-\tau)} - e^{\lambda_-(t-\tau)}) \langle f(\cdot, \tau), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle d\tau \right. \\ &\quad \left. + (\langle u^1, \Psi_{k;ja} \rangle - \lambda_- \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle) e^{\lambda_+ t} - (\langle u^1, \Psi_{k;ja} \rangle - \lambda_+ \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle) e^{\lambda_- t} \right), \end{aligned} \quad (9.3)$$

где $\lambda_{\pm} = \frac{-p^{\alpha_1(1-j)} \pm \sqrt{p^{2\alpha_1(1-j)} - 4(p^{\alpha_2(1-j)} + 1)}}{2}$;

(б) если $p^{2\alpha_1(1-j)} = 4(p^{\alpha_2(1-j)} + 1)$, то

$$\begin{aligned} \Lambda_{k;ja}(t) &= \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} (t - \tau) \langle f(\cdot, \tau), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle d\tau \\ &\quad + e^{\lambda t} (\langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle + (\langle u^1, \Psi_{k;ja} \rangle - k \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle)), \end{aligned} \quad (9.4)$$

где $\lambda = \lambda_{\pm} = \frac{-p^{\alpha_1(1-j)}}{2}$; $d_{k;ja}(t)$ – коэффициенты (6.2) распределения $f(x, t)$ в представлении (6.1); $k \in J_{p^0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f \in \tilde{\Phi}'_{(0)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$, согласно изложенному в § 6 это распределение представляется в форме (6.1), где задаваемые формулой (6.2) коэффициенты $d_{k;ja}(t) = \langle f(\cdot, t), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle$ являются непрерывными функциями. Как и в теореме 7.1, будем искать решение задачи Коши (9.1) в форме (6.4). Подставляя (6.4) в уравнение (9.1), в силу следствия 5.1 будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{k \in J_{p^0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} (\ddot{\Lambda}_{k;ja}(t) + p^{\alpha_1(1-j)} \dot{\Lambda}_{k;ja}(t) \\ + (p^{\alpha_2(1-j)} + 1) \Lambda_{k;ja}(t) - d_{k;ja}(t)) \Psi_{k;ja}(x) = 0, \end{aligned}$$

где $d_{k;ja}(t)$ задается формулой (6.2). Далее, так же, как в доказательстве теоремы 7.1, из последнего соотношения следует, что $\Lambda_{k;ja}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\ddot{\Lambda}_{k;ja}(t) + p^{\alpha_1(1-j)} \dot{\Lambda}_{k;ja}(t) + (p^{\alpha_2(1-j)} + 1) \Lambda_{k;ja}(t) = d_{k;ja}(t) \quad (9.5)$$

для всех $t \geq 0$, $k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$. Поскольку $d_{k;ja}(t)$ непрерывна, то для заданных $\Lambda_{k;ja}(0)$ и $\dot{\Lambda}_{k;ja}(0)$ дифференциальное уравнение (9.5) имеет единственное решение (см. [65]). Это решение можно получить в явном виде.

Характеристическое уравнение, соответствующее однородному дифференциальному уравнению (9.5), имеет следующий вид:

$$\lambda^2 + \lambda p^{\alpha_1(1-j)} + (p^{\alpha_2(1-j)} + 1) = 0. \quad (9.6)$$

(а) Пусть $p^{2\alpha_1(1-j)} \neq 4(p^{\alpha_2(1-j)} + 1)$. В этом случае характеристическое уравнение (9.6) имеет корни $\lambda_{\pm} = \frac{-p^{\alpha_1(1-j)} \pm \sqrt{p^{2\alpha_1(1-j)} - 4(p^{\alpha_2(1-j)} + 1)}}{2}$. Применяя, например, метод вариации произвольных постоянных, мы найдем решение уравнения (9.5)

$$\Lambda_{k;ja}(t) = \frac{1}{\lambda_+ - \lambda_-} \left(\int_0^t (e^{\lambda_+(t-\tau)} - e^{\lambda_-(t-\tau)}) d_{k;ja}(\tau) d\tau + (\dot{\Lambda}_{k;ja}(0) - \lambda_- \Lambda_{k;ja}(0)) e^{\lambda_+ t} - (\dot{\Lambda}_{k;ja}(0) - \lambda_+ \Lambda_{k;ja}(0)) e^{\lambda_- t} \right). \quad (9.7)$$

(б) При $p^{2\alpha_1(1-j)} = 4(p^{\alpha_2(1-j)} + 1)$ характеристическое уравнение (9.6) имеет один корень $\lambda = \frac{-p^{\alpha_1(1-j)}}{2}$. В этом случае решением уравнения (9.5) будет

$$\Lambda_{k;ja}(t) = \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} (t - \tau) d_{k;ja}(\tau) d\tau + e^{\lambda t} (\Lambda_{k;ja}(0) + (\dot{\Lambda}_{k;ja}(0) - \lambda \Lambda_{k;ja}(0)) t). \quad (9.8)$$

Подставляя решение (9.7) (или (9.8)) дифференциального уравнения (9.5) в соотношение (6.4), с учетом формул (6.2) и

$$\Lambda_{k;ja}(0) = \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle, \quad \dot{\Lambda}_{k;ja}(0) = \langle u^1, \Psi_{k;ja} \rangle, \quad k \in J_{p0}^n, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad a \in I_p^n,$$

мы найдем единственное решение задачи Коши (9.1) в виде (9.2), где коэффициенты $\Lambda_{k;ja}(t)$ определяются соотношениями (9.3) или (9.4). В силу формулы (6.3) сумма (9.2) конечна на любой основной функции из пространства Лизоркина $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$. Теорема доказана.

Частный случай задачи Коши (9.1) был решен в статье [64] в другом классе решений.

ТЕОРЕМА 9.2. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $f \in \tilde{\Phi}'_{(0)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$ в задаче (9.1). Предположим также, что для любых $k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle f(\cdot, t), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle = e_{k;ja} (= \text{const}). \quad (9.9)$$

Тогда решение (9.2)–(9.4) задачи Коши (9.1) стабилизируется при $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = g(x) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \frac{e_{k;ja}}{p^{\alpha_2(1-j)} + 1} \Psi_{k;ja}(x) \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n), \quad (9.10)$$

для каждого $x \in \mathbb{Q}_p^n$; $\lambda_{\pm}$ – корни характеристического уравнения (9.6), определенные в теореме 9.1, причем формула (9.10) верна и при $\lambda_+ = \lambda_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как видно из формул для корней характеристического уравнения (9.6), $\lambda_{\pm} < 0$ и $\lambda < 0$ (см. теорему 9.1). Согласно тому, что сумма (9.2) конечна на каждой основной функции $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$, применяя к (9.3), (9.4) правило Лопиталья, легко получаем, что для всех $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ из (9.2)–(9.4) следует равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \frac{e_{k;ja}}{\lambda_+ \lambda_-} \Psi_{k;ja}(x),$$

где $\lambda_{\pm}$ – корни характеристического уравнения (9.6), определенные в теореме 9.1, причем последняя формула верна и при $\lambda_+ = \lambda_-$. Отсюда следует (9.10). Теорема доказана.

9.2. Линейные уравнения m -го порядка по t . Метод разделения переменных может быть также использован при решении задач Коши для линейных псевдодифференциальных уравнений порядка m по t :

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^m A_{sx} \frac{\partial^s u(x, t)}{\partial t^s} + u(x, t) &= f(x, t) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times (0, \infty), \\ u(x, t) &= u^0(x), \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = u^1(x), \dots, \frac{\partial^{m-1} u(x, t)}{\partial t^{m-1}} = u^{m-1}(x) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times \{t = 0\}, \end{aligned} \quad (9.11)$$

где псевдодифференциальные операторы A_{sx} даются формулами (7.2), $s = 0, 1, \dots, k$, $u(x, t) \in \tilde{\Phi}'_{(m)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$ – искомое распределение.

ТЕОРЕМА 9.3. Пусть символ $\mathcal{A}_r(\xi)$ псевдодифференциального оператора A_{rx} в уравнении (9.11) удовлетворяет условию (5.5):

$$\mathcal{A}_s(p^j(-p^{-1}k + \eta)) = \mathcal{A}_s(-p^{j-1}k) \quad \forall \eta \in \mathbb{Z}_p^n, \quad (9.12)$$

для всех $j \in \mathbb{Z}$, $k \in J_{p0}^n$, $s = 1, 2, \dots, m$. Пусть $f \in \tilde{\Phi}'_{(0)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$. Тогда задача Коши (9.11) имеет единственное решение

$$u(x, t) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \Lambda_{k;ja}(t) \Psi_{k;ja}(x) \in \tilde{\Phi}'_{(m)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+), \quad (9.13)$$

где $\Psi_{k;ja}(x)$ – n -мерные хааровские всплески (3.9), а $\Lambda_{k;ja}(t)$ – единственное решение дифференциального уравнения m -го порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{s=0}^m \mathcal{A}_s(-p^{j-1}k) \Lambda_{k;ja}^{(s)}(t) + \Lambda_{k;ja}(t) = d_{k;ja}(t) \quad (9.14)$$

и начальными условиями

$$\Lambda_{k;ja}(0) = \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle, \quad \Lambda_{k;ja}^{(1)}(0) = \langle u^1, \Psi_{k;ja} \rangle, \quad \dots, \quad \Lambda_{k;ja}^{(m-1)}(0) = \langle u^{m-1}, \Psi_{k;ja} \rangle,$$

где $\Lambda_{k;ja}^{(s)}$ – производная s -го порядка по t , $d_{k;ja}(t) = \langle f(\cdot, t), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle$ – коэффициенты (6.2) в представлении (6.1) для распределения $f(x, t)$, $k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя изложенный в § 6 алгоритм, будем искать решение задачи Коши (9.11) в форме (6.4). Подставляя (6.4) в уравнение (9.11) и учитывая условие (9.12) и теорему 5.1, мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение m -го порядка (9.17) для определения неизвестных функций $\Lambda_{k;ja}(t)$. Поскольку $d_{k;ja}(t)$ непрерывна, согласно известной теореме из теории обыкновенных дифференциальных уравнений [65] для заданных $\Lambda_{k;ja}^{(s)}(0)$, $s = 0, 1, \dots, m-1$, $k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$, дифференциальное уравнение (9.17) имеет единственное решение. Это решение можно получить в явном виде. Подставляя это решение в (6.4), мы получим доказательство теоремы.

Рассмотрим частный случай задачи Коши (9.11):

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^m D_x^{\alpha_s} \frac{\partial^s u(x, t)}{\partial t^s} + u(x, t) &= f(x, t) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times (0, \infty), \\ u(x, t) = u^0(x), \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= u^1(x), \dots, \frac{\partial^{m-1} u(x, t)}{\partial t^{m-1}} = u^{m-1}(x) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times \{t = 0\}, \end{aligned} \quad (9.15)$$

где $D_x^{\alpha_s}$ – дробный оператор (5.3) по x , $\alpha_s \in \mathbb{C}$, $s = 0, 1, \dots, m$.

Учитывая следствие 5.1, из теоремы 9.3 получим

СЛЕДСТВИЕ 9.1. Путь $f \in \tilde{\Phi}'_{(0)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$. Тогда задача Коши (9.15) имеет единственное решение

$$u(x, t) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \Lambda_{k;ja}(t) \Psi_{k;ja}(x) \in \tilde{\Phi}'_{(m)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+), \quad (9.16)$$

где $\Psi_{k;ja}(x)$ – n -мерные хааровские всплески (3.9), а $\Lambda_{k;ja}(t)$ – единственное решение дифференциального уравнения m -го порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{s=0}^m p^{\alpha_s(1-j)} \Lambda_{k;ja}^{(s)}(t) + \Lambda_{k;ja}(t) = d_{k;ja}(t) \quad (9.17)$$

и начальными условиями

$$\Lambda_{k;ja}(0) = \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle, \quad \Lambda_{k;ja}^{(1)}(0) = \langle u^1, \Psi_{k;ja} \rangle, \quad \dots, \quad \Lambda_{k;ja}^{(m-1)}(0) = \langle u^{m-1}, \Psi_{k;ja} \rangle,$$

где $d_{k;ja}(t) = \langle f(\cdot, t), \Psi_{k;ja}(\cdot) \rangle$ – коэффициенты (6.2) в представлении (6.1) для распределения $f(x, t)$, $k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$.

§ 10. Полулинейные псевдодифференциальные эволюционные уравнения

Рассмотрим задачу Коши для полулинейного псевдодифференциального уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + A_x u(x, t) + u(x, t) |u(x, t)|^{2m} &= 0 \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times (0, \infty), \\ u(x, t) &= u^0(x) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times \{t = 0\}, \end{aligned} \quad (10.1)$$

где A_x – псевдодифференциальный оператор, заданный (7.2), $m \in \mathbb{N}$, $u^0 \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$, $u(x, t) \in \tilde{\Phi}'_{(1)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$ – искомое распределение.

В силу предложения 4.1 и согласно изложенному в § 6 мы должны искать решение $u(x, t)$ задачи (10.1) в виде (6.4), где $\Lambda_{k;ja}(t)$ – искомые дифференцируемые функции. Мы будем решать задачу Коши для частного случая распределений $u(x, t)$ таких, что в представлении (6.4)

$$p^{j'-j}a - a' \notin \mathbb{Z}_p^n, \quad \text{если } j < j'. \quad (10.2)$$

Из формулы (4.6) следует, что все множества $\{x \in \mathbb{Q}_p^n: |p^j x - a|_p \leq 1\}$, $\{x \in \mathbb{Q}_p^n: |p^{j'} x - a'|_p \leq 1\}$, $j < j'$, являются непересекающимися.

ТЕОРЕМА 10.1. Пусть символ псевдодифференциального оператора A_x в задаче Коши (10.1) удовлетворяет условию (5.5), т. е.

$$\mathcal{A}(p^j(-p^{-1}k + \eta)) = \mathcal{A}(-p^{j-1}k) \quad \forall \eta \in \mathbb{Z}_p^n,$$

для всех $j \in \mathbb{Z}$, $k \in J_{p0}^n$. Тогда в упомянутом выше классе распределений (6.4), (10.2) задача Коши (10.1) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \left(\frac{\operatorname{Re} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)}{\operatorname{Re} \mathcal{A}(-p^{j-1}k) + |\langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle|^{2m} p^{-mnj} (1 - e^{-2m \operatorname{Re} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)t})} \right)^{1/(2m)} \\ &\quad \times \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle e^{-\mathcal{A}(-p^{j-1}k)t} \Psi_{k;ja}(x), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (10.3)$$

где $\Psi_{k;ja}(x)$ – n -мерные хааровские всплески (3.9). Более того, эта формула верна для случая $\mathcal{A} \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $|\chi_p(kp^{-1}(p^j x - a))| = 1$, учитывая формулы (6.4), (10.2), (3.9), выразим $|u(x, t)|^2$ в виде формального ряда

$$|u(x, t)|^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}, k \in J_{p0}^n, a \in I_p^n} |\Lambda_{k;ja}(t)|^2 p^{-nj} \Omega(|p^j x - a|_p)$$

и найдем

$$\begin{aligned} &u(x, t) |u(x, t)|^{2m} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}, k \in J_{p0}^n, a \in I_p^n} |\Lambda_{k;ja}(t)|^{2m} \Lambda_{k;ja}(t) p^{-mnj} \Psi_{k;ja}(x) \in \tilde{\Phi}'(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+), \end{aligned} \quad (10.4)$$

где индексы в сумме удовлетворяют условию (10.2).

Подставляя (10.4) и (6.4) в (10.1), в силу теоремы 5.1 мы найдем, что

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}, k \in J_{p0}^n, a \in I_p^n} (\dot{\Lambda}_{k;ja}(t) + \mathcal{A}(-p^{j-1}k) \Lambda_{k;ja}(t) + p^{-mnj} |\Lambda_{k;ja}(t)|^{2m} \Lambda_{k;ja}(t)) \Psi_{k;ja}(x) = 0, \quad (10.5)$$

где последнее равенство понимается в слабом смысле. Поскольку согласно лемме 4.2 каждая основная функция $\phi \in \Phi(\mathbb{Q}_p^n)$ представляется в форме конечной суммы (4.2), из равенства (10.5) мы имеем

$$\dot{\Lambda}_{k;ja}(t) + \mathcal{A}(-p^{j-1}k) \Lambda_{k;ja}(t) + p^{-mnj} |\Lambda_{k;ja}(t)|^{2m} \Lambda_{k;ja}(t) = 0 \quad (10.6)$$

для всех $k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$ и для всех $t \geq 0$. Представив $\Lambda_{k;ja}(t)$ и $\mathcal{A}(-p^{j-1}k)$ в виде $\Lambda_{k;ja}(t) = R_{k;ja}(t) e^{i\alpha_{k;ja}(t)}$ и $\mathcal{A}(-p^{j-1}k) = \operatorname{Re} \mathcal{A}(-p^{j-1}k) + i \operatorname{Im} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)$, получим из (10.6) следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{R}_{k;ja}(t) + \operatorname{Re} \mathcal{A}(-p^{j-1}k) R_{k;ja}(t) + p^{-mnj} R_{k;ja}^{2m+1}(t) &= 0, \\ \dot{\alpha}_{k;ja}(t) + \operatorname{Im} \mathcal{A}(-p^{j-1}k) &= 0, \end{aligned} \quad (10.7)$$

$k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$. Интегрируя (10.7), найдем

$$\frac{R_{k;ja}^{2m}(t)}{\operatorname{Re} \mathcal{A}(-p^{j-1}k) + p^{-mnj} R_{k;ja}^{2m}(t)} = E_{k;ja} e^{-2m \operatorname{Re} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)t}$$

и $\alpha_{k;ja}(t) = -\operatorname{Im} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)t + \alpha_{k;ja}(0)$, т. е.

$$\Lambda_{k;ja}(t) = \left(\frac{E_{k;ja} \operatorname{Re} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)}{1 - E_{k;ja} p^{-mnj} e^{-2m \operatorname{Re} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)t}} \right)^{1/(2m)} e^{-\mathcal{A}(-p^{j-1}k)t} e^{i\alpha_{k;ja}(0)}, \quad (10.8)$$

где $E_{k;ja}$ – постоянная, $k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$.

Подставляя (10.8) в (6.4), мы получим решение задачи (10.1)

$$\begin{aligned} u(x, t) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} & \left(\frac{E_{k;ja} \operatorname{Re} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)}{1 - E_{k;ja} p^{-mnj} e^{-2m \operatorname{Re} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)t}} \right)^{1/(2m)} \\ & \times e^{-\mathcal{A}(-p^{j-1}k)t} e^{i\alpha_{k;ja}(0)} \Psi_{k;ja}(x). \end{aligned} \quad (10.9)$$

Полагая $t = 0$ в (10.9), найдем, что

$$u^0(x) = \sum_{k \in J_{p0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \left(\frac{E_{k;ja} \operatorname{Re} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)}{1 - E_{k;ja} p^{-mnj}} \right)^{1/(2m)} e^{i\alpha_{k;ja}(0)} \Psi_{k;ja}(x),$$

где $u^0 \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$. Следовательно, согласно (4.7), (4.8) мы имеем

$$\left(\frac{E_{k;ja} \operatorname{Re} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)}{1 - E_{k;ja} p^{-mnj}} \right)^{1/(2m)} e^{i\alpha_{k;ja}(0)} = \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle.$$

Пусть $\langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle = |\langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle| e^{i\beta_{k;ja}}$. Тогда из последнего уравнения следует, что $\alpha_{k;ja}(0) = \beta_{k;ja}$ и

$$E_{k;ja} = \frac{|\langle u^0(x), \Psi_{k;ja} \rangle|^{2m}}{\operatorname{Re} \mathcal{A}(-p^{j-1}k) + p^{-mnj} |\langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle|^{2m}}.$$

Подставляя $\alpha_{k;ja}(0)$ и $E_{k;ja}$ в (10.9), получим (10.3). Ввиду (6.3) сумма (10.3) конечна на каждой основной функции из пространства Лизоркина $\Phi(\mathbb{Q}_p^n)$.

Переходя в формуле (10.3) к пределу, когда $\mathcal{A} \rightarrow 0$, можно легко увидеть, что эта формула применима для случая $\mathcal{A} \equiv 0$. Теорема доказана.

Теперь мы рассмотрим задачу Коши

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - A_x u(x, t) + u(x, t) |u(x, t)|^{2m} &= 0 \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times (0, \infty), \\ u(x, t) &= u^0(x) \quad \text{в } \mathbb{Q}_p^n \times \{t = 0\}, \end{aligned} \quad (10.10)$$

где A_x – псевдодифференциальный оператор, заданный в (7.2), $m \in \mathbb{N}$, $u^0 \in \Phi'(\mathbb{Q}_p^n)$, $u(x, t) \in \tilde{\Phi}'_{(1)}(\mathbb{Q}_p^n \times \mathbb{R}_+)$ – искомое распределение.

ТЕОРЕМА 10.2. Пусть символ псевдодифференциального оператора A_x в задаче Коши (10.10) удовлетворяет условию (5.5), т.е.

$$\mathcal{A}(p^j(-p^{-1}k + \eta)) = \mathcal{A}(-p^{j-1}k) \quad \forall \eta \in \mathbb{Z}_p^n,$$

для всех $j \in \mathbb{Z}$, $k \in J_{p^0}^n$. Тогда в упомянутом выше классе распределений (6.4), (10.2) задача Коши (10.10) имеет единственное решение

$$\begin{aligned} u(x, t) = \sum_{k \in J_{p^0}^n, j \in \mathbb{Z}, a \in I_p^n} \exp \left\{ ip^{-mnj} \frac{|\langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle|^{2m}}{2m \operatorname{Im} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)} (e^{2m \operatorname{Im} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)t} - 1) \right\} \\ \times \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle e^{-i\mathcal{A}(-p^{j-1}k)t} \Psi_{k;ja}(x), \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (10.11)$$

где $\Psi_{k;ja}(x)$ – n -мерные хааровские всплески (3.9). Более того, из этой формулы предельным переходом $\operatorname{Im} \mathcal{A} \rightarrow 0$ получаем решение для случая $\operatorname{Im} \mathcal{A} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и выше, мы будем искать решение задачи в виде (6.4), (10.2). Подставляя (10.4) и (6.4) в (10.10) и учитывая теорему 5.1, как и в доказательстве теоремы 10.1, получим, что коэффициенты $\Lambda_{k;ja}$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$i \dot{\Lambda}_{k;ja}(t) - \mathcal{A}(-p^{j-1}k) \Lambda_{k;ja}(t) + p^{-mnj} |\Lambda_{k;ja}(t)|^{2m} \Lambda_{k;ja}(t) = 0, \quad (10.12)$$

$k \in J_{p^0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$, для всех $t \geq 0$. Как и ранее, представив $\Lambda_{k;ja}(t)$ и $\mathcal{A}(-p^{j-1}k)$ в виде $\Lambda_{k;ja}(t) = R_{k;ja}(t) e^{i\alpha_{k;ja}(t)}$ и $\mathcal{A}(-p^{j-1}k) = \operatorname{Re} \mathcal{A}(-p^{j-1}k) + i \operatorname{Im} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)$, получим из (10.12) систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{R}_{k;ja}(t) - \operatorname{Im} \mathcal{A}(-p^{j-1}k) R_{k;ja}(t) &= 0, \\ \dot{\alpha}_{k;ja}(t) + \operatorname{Re} \mathcal{A}(-p^{j-1}k) - p^{-mnj} R_{k;ja}^{2m}(t) &= 0, \end{aligned}$$

$k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$. Решая эту систему, найдем, что

$$\begin{aligned} R_{k;ja}(t) &= R_{k;ja}(0)e^{\operatorname{Im} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)t}, \\ \alpha_{k;ja}(t) &= -\operatorname{Re} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)t + p^{-mnj} \frac{R_{k;ja}^{2m}(0)}{2m \operatorname{Im} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)} \\ &\quad \times e^{2m \operatorname{Im} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)t} + \alpha_{k;ja}(0), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Lambda_{k;ja}(t) &= R_{k;ja}(0)e^{i\alpha_{k;ja}(0)}e^{-i\mathcal{A}(-p^{j-1}k)t} \\ &\quad \times \exp\left\{ip^{-mnj} \frac{R_{k;ja}^{2m}(0)}{2m \operatorname{Im} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)}e^{2m \operatorname{Im} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)t}\right\}, \quad (10.13) \end{aligned}$$

$k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$. Поскольку

$$\Lambda_{k;ja}(0) = \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle = R_{k;ja}(0) \exp\left\{i\left(\alpha_{k;ja}(0) + p^{-mnj} \frac{R_{k;ja}^{2m}(0)}{2m \operatorname{Im} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)}\right)\right\},$$

из (10.13) следует, что

$$\begin{aligned} \Lambda_{k;ja}(t) &= \langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle e^{-i\mathcal{A}(-p^{j-1}k)t} \\ &\quad \times \exp\left\{ip^{-mnj} \frac{|\langle u^0, \Psi_{k;ja} \rangle|^{2m}}{2m \operatorname{Im} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)}(e^{2m \operatorname{Im} \mathcal{A}(-p^{j-1}k)t} - 1)\right\}, \end{aligned}$$

$k \in J_{p0}^n$, $j \in \mathbb{Z}$, $a \in I_p^n$. Подставляя последнее выражение в (6.4), получим (10.11). Теорема доказана.

С. В. Козырев сообщил автору, что частное решение задачи (10.10) для случая $A_x = D_x^\alpha$ и $m = 1$ было впервые получено им в 2006 г.

В задачах (10.1), (10.10) имеет место эффект *локализации решений*, впервые отмеченный в [44]. Действительно, согласно (10.3), (10.11) *если носитель начального данного $u^0(x)$ находится в шаре $B_N^n \subset \mathbb{Q}_p^n$, то для всех $t > 0$ носитель решения $u(x, t)$ по переменной x будет оставаться в этом же шаре.*

Список литературы

1. В. С. Владимиров, И. В. Волович, Е. И. Зеленов, *p-адический анализ и математическая физика*, Наука, М., 1994; англ. пер.: V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, E. I. Zelenov, *p-adic analysis and mathematical physics*, Ser. Soviet East European Math., 1, World Scientific, River Edge, NJ, 1994.
2. И. В. Волович, “p-Адическое пространство-время и теория струн”, *ТМФ*, **71**:3 (1987), 337–340; англ. пер.: I. V. Volovich, “p-adic space-time and string theory”, *Theoret. and Math. Phys.*, **71**:3 (1987), 574–576.
3. I. V. Volovich, “p-Adic string”, *Classical Quantum Gravity*, **4**:4 (1987), 83–87.
4. I. Ya. Aref’eva, B. G. Dragović, I. V. Volovich, “On the adelic string amplitudes”, *Phys. Lett. B*, **209**:4 (1988), 445–450.
5. I. Ya. Aref’eva, I. V. Volovich, “Strings, gravity and p-adic space-time”, *Quantum Gravity*, Proceedings of the Fourth Seminar on Quantum Gravity (Moscow, 1987), World Scientific, Singapore, 1988.

6. I. Ya. Aref'eva, B. Dragovich, P. H. Frampton, I. V. Volovich, "The wave function of the universe and p -adic gravity", *Internat. J. Modern Phys. A*, **6**:24 (1991), 4341–4358.
7. I. Ya. Aref'eva, P. H. Frampton, "Beyond Planck energy to non-archimedean geometry", *Modern Phys. Lett. A*, **6**:4 (1991), 313–316.
8. A. Yu. Khrennikov, *p -adic valued distributions in mathematical physics*, Math. Appl., **309**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.
9. A. Khrennikov, *Non-archimedean analysis: quantum paradoxes, dynamical systems and biological models*, Math. Appl., **427**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997.
10. V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, " p -adic quantum mechanics", *Comm. Math. Phys.*, **123**:4 (1989), 659–676.
11. V. Anashin, A. Yu. Khrennikov, *Applied algebraic dynamics*, de Gruyter Exp. Math., **49**, De Gruyter, Berlin–New York, 2009.
12. A. N. Kochubei, *Pseudo-differential equations and stochastics over non-archimedean fields*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **244**, Marcel Dekker, New York–Basel, 2001.
13. С. В. Козырев, *Методы и приложения ультраметрического и p -адического анализа: от теории всплесков до биофизики*, Совр. пробл. матем., **12**, МИАН, М., 2008.
14. S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, "Harmonic analysis in the p -adic Lizorkin spaces: fractional operators, pseudo-differential equations, p -adic wavelets, Tauberian theorems", *J. Fourier Anal. Appl.*, **12**:4 (2006), 393–425.
15. A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, "Wavelets on ultrametric spaces", *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **19**:1 (2005), 61–76.
16. С. В. Козырев, А. Ю. Хренников, "Псевдодифференциальные операторы на ультраметрических пространствах и ультраметрические всплески", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:5 (2005), 133–148; англ. пер.: S. V. Kozyrev, A. Yu. Khrennikov, "Pseudodifferential operators on ultrametric spaces and ultrametric wavelets", *Izv. Math.*, **69**:5 (2005), 989–1003.
17. A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, *p -Adic multidimensional wavelets and their application to p -adic pseudo-differential operators*, arXiv: math-ph/0612049.
18. A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, "Non-Haar p -adic wavelets and their application to pseudo-differential operators and equations", *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **28**:1 (2010), 1–23.
19. А. Ю. Хренников, В. М. Шелкович, "Нехааровские p -адические всплески и псевдодифференциальные операторы", *Докл. РАН*, **418**:2 (2008), 167–170; англ. пер.: A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, "Non-haar p -adic wavelets and pseudodifferential operators", *Dokl. Math.*, **77**:1 (2008), 42–45.
20. A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, "An infinite family of p -adic non-haar wavelet bases and pseudo-differential operators", *P-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:3 (2009), 204–216.
21. A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, M. Skopina, " p -Adic orthogonal wavelet bases", *P-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl.*, **1**:2 (2009), 145–156.
22. A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, M. Skopina, " p -adic refinable functions and MRA-based wavelets", *J. Approx. Theory*, **161**:1 (2009), 226–238.
23. С. В. Козырев, "Теория всплесков как p -адический спектральный анализ", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 149–158; англ. пер.: S. V. Kozyrev, "Wavelet theory as p -adic spectral analysis", *Izv. Math.*, **66**:2 (2002), 367–376.
24. С. В. Козырев, " p -адические псевдодифференциальные операторы: методы и приложения", *Избранные вопросы p -адической математической физики и анализа*, Тр. МИАН, **245**, Наука, М., 2004, 154–165; англ. пер.: S. V. Kozyrev, " p -adic pseudodifferential operators: methods and applications", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **245** (2004), 143–153.

25. С. В. Козырев, “ p -адические псевдодифференциальные операторы и p -адические всплески”, *ТМФ*, **138**:3 (2004), 383–394; англ. пер.: S. V. Kozyrev, “ p -Adic pseudodifferential operators and p -adic wavelets”, *Theoret. and Math. Phys.*, **138**:3 (2004), 322–332.
26. V. Shelkovich, M. Skopina, “ p -Adic Haar multiresolution analysis and pseudo-differential operators”, *J. Fourier Anal. Appl.*, **15**:3 (2009), 366–393.
27. V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, “Application of p -adic analysis to models of breaking of replica symmetry”, *J. Phys. A*, **32**:50 (1999), 8785–8791.
28. V. A. Avetisov, A. H. Bikulov, S. V. Kozyrev, V. A. Osipov, “ p -adic models of ultrametric diffusion constrained by hierarchical energy landscapes”, *J. Phys. A*, **35**:2 (2002), 177–189.
29. G. Parisi, N. Sourlas, “ p -adic numbers and replica symmetry breaking”, *Eur. Phys. J. B Condens. Matter Phys.*, **14**:3 (2000), 535–542.
30. В. С. Владимиров, “О спектрах некоторых псевдодифференциальных операторов над полем p -адических чисел”, *Алгебра и анализ*, **2**:6 (1990), 107–124; англ. пер.: V. S. Vladimirov, “On the spectrum of some pseudodifferential operators over the field of p -adic numbers”, *Leningrad Math. J.*, **2**:6 (1991), 1261–1278.
31. А. Н. Кочубей, “Параболические уравнения над полем p -адических чисел”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:6 (1991), 1312–1330; англ. пер.: A. N. Kochubei, “Parabolic equations over the field of p -adic numbers”, *Math. USSR-Izv.*, **39**:3 (1992), 1263–1280.
32. А. Н. Кочубей, “Операторы типа Шрёдингера над полем p -адических чисел”, *ТМФ*, **86**:3 (1991), 323–333; англ. пер.: A. N. Kochubei, “Schrödinger-type operator over p -adic number field”, *Theoret. and Math. Phys.*, **86**:3 (1991), 221–228.
33. S. Albeverio, S. Kuzhel, S. Torba, “ p -Adic Schrödinger-type operator with point interactions”, *J. Math. Anal. Appl.*, **338**:2 (2008), 1267–1281.
34. S. Kuzhel, S. Torba, “ p -adic fractional differentiation operators with point interactions”, *Methods Funct. Anal. Topology*, **13**:2 (2007), 169–180.
35. V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, “ p -adic Schrödinger-type equation”, *Lett. Math. Phys.*, **18**:1 (1989), 43–53.
36. А. Х. Биколов, И. В. Волович, “ p -адическое броуновское движение”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:3 (1997), 75–90; англ. пер.: A. Kh. Bikulov, I. V. Volovich, “ p -adic Brownian motion”, *Izv. Math.*, **61**:3 (1997), 537–552.
37. С. В. Козырев, “К ультраметрической теории турбулентности”, *ТМФ*, **157**:3 (2008), 413–424; англ. пер.: S. V. Kozyrev, “Toward an ultrametric theory of turbulence”, *Theoret. and Math. Phys.*, **157**:3 (2008), 1713–1722.
38. S. Fischenko, E. Zelenov, “ p -adic models of turbulence”, *p-adic mathematical physics* (Belgrade, Serbia and Montenegro, 2005), AIP Conf. Proc., **826**, Amer. Institute of Physics, Melville, NY, 2006, 174–191.
39. J. J. Rodriguez-Vega, W. A. Zúñiga-Galindo, “Taibleson operators, p -adic parabolic equations and ultrametric diffusion”, *Pacific J. Math.*, **237**:2 (2008), 327–347.
40. V. S. Vladimirov, “ p -Adic analysis and p -adic quantum mechanics”, *Ann. of the NY Ac. Sci.: Symposium in Frontiers of Math.*, 1988.
41. A. N. Kochubei, “Additive and multiplicative fractional differentiations over the field of p -adic numbers”, *p-adic functional analysis* (Nijmegen, Netherlands, 1996), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **192**, Marcel Dekker, New York, 1997, 275–280.
42. С. Альбеверлио, А. Ю. Хренников, В. М. Шелкович, “ p -Адические полулинейные эволюционные псевдодифференциальные уравнения в пространствах Лизоркина”, *Докл. РАН*, **415**:3 (2007), 295–299; англ. пер.: S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, “ p -Adic semilinear evolutionary pseudodifferential equations in Lizorkin spaces”, *Dokl. Math.*, **76**:1 (2007), 539–543.

43. S. Albeverio, S. V. Kozyrev, “Multidimensional Ultrametric Pseudodifferential Equations”, *Избранные вопросы математической физики и p -адического анализа*, Тр. МИАН, **265**, МАИК, М., 2009, 19–35; англ. пер.: S. Albeverio, S. V. Kozyrev, “Multidimensional ultrametric pseudodifferential equations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **265** (2009), 13–29.
44. С. В. Козырев, А. Ю. Хренников, “Пространственная локализация для свободной частицы в ультраметрической квантовой механике”, *Докл. РАН*, **411**:3 (2006), 319–322; англ. пер.: S. V. Kozyrev, A. Yu. Khrennikov, “Localization in space for a free particle in ultrametric quantum mechanics”, *Dokl. Math.*, **74**:3 (2006), 906–909.
45. A. Yu. Khrennikov, S. V. Kozyrev, “Wavelets and the Cauchy problem for the Schrödinger equation on analytic ultrametric space”, *Mathematical modelling of wave phenomena* (Växjö, Sweden, 2005), AIP Conf. Proc., **834**, Amer. Institute of Physics, Melville, NY, 2006, 344–350.
46. M. Taibleson, “Harmonic analysis on n -dimensional vector spaces over local fields I. Basic results on fractional integration”, *Math. Ann.*, **176**:3 (1968), 191–207.
47. M. H. Taibleson, *Fourier analysis on local fields*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1975.
48. A. Haar, “Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme”, *Math. Ann.*, **69**:3 (1910), 331–371.
49. Y. Meyer, “Ondelettes et fonctions splines”, *Séminaire sur les équations aux dérivées partielles 1986–1987*, Ecole Polytech., Palaiseau, 1987.
50. S. Mallat, *Multiresolution representation and wavelets*, Ph. D. Thesis, University of Pennsylvania, Philadelphia, PA, 1988.
51. S. Mallat, “An efficient image representation for multiscale analysis”, *Proc. of Machine Vision Conference*, Lake Tahoe, 1987.
52. И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, РХД, М., 2001; пер. с англ.: I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math., **61**, SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
53. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, М., 2005; англ. пер.: I. Ya. Novikov, V. Yu. Protasov, M. A. Skopina, *Wavelet theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2011.
54. Y. Meyer, “Principe d’incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d’opérateurs”, *Séminaire N. Bourbaki* 1985/86, Astérisque, **145–146**, 1987, 209–223.
55. S. Albeverio, S. V. Kozyrev, “Multidimensional basis of p -adic wavelets and representation theory”, *p -adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications*, **1**:3 (2009), 181–189.
56. П. И. Лизоркин, “Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$. Теоремы вложения”, *Матем. сб.*, **60(102)**:3 (1963), 325–353.
57. П. И. Лизоркин, “Операторы, связанные с дробным дифференцированием, и классы дифференцируемых функций”, *Исследования по теории дифференциальных функций многих переменных и ее приложениям* – 4, Тр. МИАН СССР, **117**, Наука, М., 1972, 212–243; англ. пер.: P. I. Lizorkin, “Operators connected with fractional differentiation, and classes of differentiable functions”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **117** (1974), 251–286.
58. S. Albeverio, A. Yu. Khrennikov, V. M. Shelkovich, “Pseudo-differential operators in the p -adic Lizorkin space”, *p -adic mathematical physics* (Belgrade, Serbia and Montenegro, 2005), AIP Conf. Proc., **826**, Amer. Institute of Physics, Melville, NY, 2006, 195–205.
59. Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Мир, М., 1971; пер. с англ.: H. H. Schaefer, *Topological vector spaces*, Macmillan, New York, 1966.

60. А. Н. Кочубей, “Фундаментальные решения псевдодифференциальных уравнений, связанных с p -адическими квадратичными формами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **62**:6 (1998), 103–124; англ. пер.: A. N. Kochubei, “Fundamental solutions of pseudodifferential equations connected with p -adic quadratic forms”, *Izv. Math.*, **62**:6 (1998), 1169–1188.
61. W. A. Zuniga-Galindo, “Pseudo-differential equations connected with p -adic forms and local zeta functions”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **70**:1 (2004), 73–86.
62. W. A. Zuniga-Galindo, “Fundamental solutions of pseudo-differential operators over p -adic fields”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **109** (2003), 241–245.
63. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними*, вып. 1, Физматгиз, М., 1959.
64. N. M. Chuong, N. V. Co, “The Cauchy problem for a class of pseudodifferential equations over p -adic field”, *J. Math. Anal. and Appl.*, **340**:1 (2008), 629–645.
65. И. Г. Петровский, *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1970; англ. пер.: I. G. Petrovskii, *Ordinary differential equations*, Dover, New York, 1973.

В. М. Шелкович (V. M. Shelkovich)
Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет
E-mail: shelkv@vs1567.spb.edu

Поступило в редакцию
31.12.2009
12.07.2010