Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Тихонов, Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 2, 133–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/im429>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:11:04

УДК 517.954

И. В. Тихонов

Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений

Изучается линейная нелокальная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве. Получен критерий единственности решения. Приведены различные следствия и обобщения.

Библиография: 27 наименований.

Введение

В банаховом пространстве E рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t). \quad (1)$$

Здесь A – линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A)$. Аргумент t изменяется в интервале $J \subset \mathbb{R}$, выбор которого зависит от постановки задачи. Вопрос единственности для решений уравнения (1) принадлежит к числу классических. Коротко его можно сформулировать так. С помощью каких условий решение уравнения (1) находится однозначно? На какой промежуток J эта однозначность распространяется?

В случае задачи Коши

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad u(0) = u_0 \in E, \quad (2)$$

основные результаты получены Э. Хилле [1]–[3] и Ю. И. Любичем [4], [5]. Выявленная картина оказалась достаточно сложной. Для примера перечислим следующие факты.

1°. Если полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda \geq \lambda_0$ заполнена собственными значениями оператора A и уравнение $Af(\lambda) = \lambda f(\lambda)$ обладает нетривиальным решением $f(\lambda)$, ограниченным и голоморфным в этой полуплоскости, то при $t > 0$ единственность решения задачи Коши (2) заведомо нарушается (см. [3, с. 632, 633]).

2°. Решение задачи Коши может быть неединственным даже при полном отсутствии спектра у оператора A (см. [4, с. 182], [5, с. 42, 43]).

3°. Если резольвента $(\lambda - A)^{-1}$ оператора A определена на луче $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ и имеет конечный экспоненциальный тип при $\lambda \rightarrow +\infty$, то на соответствующем промежутке значений t гарантирована единственность решения задачи Коши (см. [4], [5, с. 40, 41]).

4°. Единственность решения задачи Коши (2) возможна даже тогда, когда собственные значения оператора A заполняют всю комплексную плоскость (см. [1, с. 183–185]).

Отсюда видно, что имеется определенная связь между единственностью решения задачи Коши и спектральными характеристиками оператора A (пп. 1° и 3°). Но эта связь не является абсолютной: пп. 2° и 4° указывают на ограниченность утверждений из пп. 1° и 3°. Исчерпывающего критерия единственности для задачи Коши, насколько известно, до сих пор не найдено.

В настоящей работе будет показано, что положение принципиально меняется в случае *нелокальной задачи*

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \int_0^T u(t) d\mu(t) = u_1 \in E. \quad (3)$$

Здесь $\mu(t)$ – заданная скалярная функция ограниченной вариации на отрезке $[0, T]$. Интеграл Римана–Стилтьеса в (3) определен для любой непрерывной функции $u: [0, T] \rightarrow E$. Нелокальная задача (3) изучается на конечном отрезке $[0, T]$. Условие *конечности* отрезка существенно для полученных результатов (см. § 3).

Вместо вопроса о единственности решения в нелокальной задаче (3) удобно рассматривать эквивалентный вопрос о тривиальности решения у однородной задачи

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \int_0^T u(t) d\mu(t) = 0. \quad (4)$$

Как обычно, *тривиальным решением* задачи (4) называется векторная функция $u(t) \equiv 0$.

Введем краткое обозначение для оператора нелокального условия:

$$\Gamma(u(t)) \equiv \int_0^T u(t) d\mu(t). \quad (5)$$

Построим по $\Gamma(u(t))$ характеристическую функцию

$$L(\lambda) = \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

Оказывается, что наличие или отсутствие нетривиальных решений в (4) зависит лишь от взаимного расположения собственных значений оператора A и нулей характеристической функции (6).

Пусть, например, некоторый нуль $\lambda_k \in \mathbb{C}$, $L(\lambda_k) = 0$, является собственным значением оператора A с собственным вектором f_k . Это означает, что $Af_k = \lambda_k f_k$ для элемента $f_k \neq 0$, принадлежащего $D(A)$. Непосредственно проверяется, что функция $u(t) = e^{\lambda_k t} f_k$ служит нетривиальным решением однородной задачи (4). Тем самым, решение неоднородной задачи (3) будет заведомо неединственным (если будет существовать).

Покажем, что справедливо обращение этого факта: если ни один из нулей характеристической функции (6) не является собственным значением оператора A , то однородная нелокальная задача (4) имеет только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$

на $[0, T]$. Соответственно, неоднородная задача (3) будет иметь не более одного решения $u(t)$ при любом выборе $u_1 \in E$.

Коротко центральный результат статьи формулируется так: *для единственности решения нелокальной задачи (3) на конечном отрезке $[0, T]$ необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль λ_k характеристической функции (6) не являлся собственным значением оператора A* (теорема 1 § 1).

Никаких ограничений на оператор A , кроме линейности и замкнутости, здесь не требуется. Предполагается только, что мера $d\mu(t)$ не вырождается на концах отрезка $[0, T]$, т.е. интеграл Римана–Стилтьеса в (5) не допускает сужения на промежутки, меньший, чем $[0, T]$. По нашей терминологии (см. § 1) точки $t = 0$ и $t = T$ – *точки вариации* меры $d\mu(t)$. Другими словами, критерий единственности применим к минимальному отрезку, содержащему носитель меры $d\mu(t)$. Вне такого отрезка критерий может нарушаться в силу неединственности решения соответствующей задачи Коши (см. § 3). Но это обстоятельство уже не связано с природой нелокальной задачи.

Таким образом, для нелокальной задачи (3) получен полный ответ на вопрос о единственности решения.

Отметим, что задача (3) позволяет рассматривать единым методом целый ряд различных ситуаций. Укажем возможные виды нелокального оператора (5) вместе с соответствующими характеристическими функциями (6):

- (i) $\Gamma(u(t)) \equiv u(T) - u(0)$, $L(\lambda) = e^{\lambda T} - 1$;
- (ii) $\Gamma(u(t)) \equiv \sum_k \alpha_k u(t_k)$, $L(\lambda) = \sum_k \alpha_k e^{\lambda t_k}$;
- (iii) $\Gamma(u(t)) \equiv \int_0^T u(t) \omega(t) dt$, $L(\lambda) = \int_0^T e^{\lambda t} \omega(t) dt$.

В случае условия (i), т.е. условия T -периодичности, критерий единственности выглядит особенно просто: *для того чтобы периодическая задача $u'(t) = Au(t)$, $u(T) - u(0) = 0$ имела только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы ни одно число $\lambda_k = 2k\pi i/T$, $k \in \mathbb{Z}$, не являлось собственным значением оператора A* . Этот результат элементарен (см. [6, с. 65]), хотя и не слишком широко известен. Многоточечное условие (ii) обобщает условие периодичности. Оно получается, если $\mu(t)$ – функция скачков в конечном или счетном числе точек $t_k \in [0, T]$ с величинами скачков α_k такими, что $\sum |\alpha_k| < \infty$. Интегральное условие (iii) соответствует абсолютно непрерывной функции $\mu(t)$ с суммируемой производной $\omega(t)$. Для нелокальных задач с условиями (ii) и (iii) сформулированный критерий единственности, по-видимому, является новым (даже в предположении, что A порождает C_0 -полугруппу).

Все эти типы нелокальных условий вместе с разнообразными модификациями хорошо известны в теории обыкновенных дифференциальных уравнений; справочник [7, ч. 2, § 5] содержит ссылки на первоисточники. Для абстрактных уравнений отметим исследования Э. А. Штейнвиля, изучавшего вопрос о корректности нелокальной задачи (3) и ее обобщений при условии, что A порождает аналитическую полугруппу (см. [8, с. 170, 171]). В последнее время подобные задачи стали привлекать интерес в связи с прикладной тематикой [9]. Мы не касаемся сейчас обширной сферы периодических и краевых задач для абстрактных дифференциальных уравнений; различные направления этой теории представлены в [6], [8], [10], [11].

Укажем также на связь между вопросами существования и единственности решения в нелокальной задаче (3) и теоремами об отображении спектра в теории

полугрупп. Некоторые результаты Э. Хилле [12, гл. XV] с дополнениями Р. Филлипса [3, гл. XVI] можно интерпретировать в терминах нелокальной задачи (3) с оператором A , порождающим C_0 -полугруппу. И наоборот, наш новый критерий единственности позволяет существенно уточнить теоремы 15.5.2 из [12] и 16.6.2 из [3] об отображении точечного спектра для интегралов от полугрупп в случае конечного отрезка $[0, T]$. Подобным исследованиям “тонкой структуры” спектра будет посвящена отдельная совместная работа Ю. С. Эйдельмана и автора.

Другой аспект проблемы единственности в нелокальной задаче (3) связан с распределением нулей характеристической функции (6). Для того чтобы сравнивать нули с собственными значениями оператора A , надо знать их взаимное расположение. Вопрос о распределении нулей целых функций типа (6) изучался в классических работах [13]–[15]. Много полезных сведений содержит книга [16]. Особенно удобны для нас результаты работы [13], непосредственно применимые к нелокальной задаче (3) с абсолютно непрерывной мерой $d\mu(t) = \omega(t) dt$ (см. § 4).

Общий план статьи следующий. В § 1 дана точная постановка нелокальной задачи и окончательная формулировка критерия единственности. Доказательство выделено в § 2. В § 3 сделаны необходимые уточнения и дополнения по поводу условия конечности отрезка $[0, T]$ и вырождения меры $d\mu(t)$ на границах отрезка. Здесь же приводятся усиленные результаты для случая, когда оператор A порождает C_0 -полугруппу или является симметрическим. В § 4 указаны достаточные признаки единственности решения, вытекающие из основного критерия. Попутно затрагивается вопрос об одном структурном свойстве решений абстрактного дифференциального уравнения (1) с оператором A , не имеющим собственных значений. Последние параграфы посвящены обобщениям: в § 5 рассматривается более общее уравнение $Bu'(t) = Au(t)$, а в § 6 – более общее нелокальное условие, включающее интеграл от производной $u'(t)$. Эти результаты демонстрируют “эластичность” наших методов.

§ 1. Постановка нелокальной задачи, формулировка критерия единственности

Пусть E – комплексное банахово пространство. Пусть A – линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A) \subset E$. Плотность в E области $D(A)$ не предполагается.

Рассмотрим уравнение (1) на интервале $J \subset \mathbb{R}$. *Интервалом* считается всякое связное подмножество вещественной прямой, содержащее более одной точки.

Функцию $u: J \rightarrow E$ назовем *классическим решением* уравнения (1), если эта функция непрерывно дифференцируема в норме E на интервале J , ее значения $u(t)$ принадлежат $D(A)$ и $Au(t) = u'(t)$ для всех $t \in J$, т.е. уравнение (1) выполнено всюду на J . Отсюда, в частности, следует, что функция $Au: J \rightarrow E$ непрерывна в норме E на интервале J .

В силу замкнутости оператора A каждое классическое решение удовлетворяет соотношениям

$$\int_{t_1}^{t_2} u(s) ds \in D(A), \quad A \int_{t_1}^{t_2} u(s) ds = u(t_2) - u(t_1) \quad (7)$$

при любых $t_1, t_2 \in J$. Первое условие (7) – очевидно, второе проверяется непосредственно:

$$A \int_{t_1}^{t_2} u(s) ds = \int_{t_1}^{t_2} Au(s) ds = \int_{t_1}^{t_2} u'(s) ds = u(t_2) - u(t_1).$$

Рассмотрим теперь соотношения (7) независимо, как обобщенную (“допредельную”) форму записи дифференциального уравнения (1). Это мотивирует следующее определение.

Функцию $u: J \rightarrow E$ назовем *обобщенным решением* уравнения (1), если эта функция непрерывна в норме E на интервале J и удовлетворяет соотношениям (7) при любых $t_1, t_2 \in J$.

Всякое классическое решение, очевидно, является обобщенным. Производная от классического решения есть также обобщенное решение (проверяется непосредственно). Если последовательность классических решений $u_n(t)$ сходится к функции $u(t)$ так, что $\|u_n(t) - u(t)\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно на любом отрезке $[t_1, t_2] \subset J$, то предельная функция $u(t)$ будет обобщенным решением уравнения (1). Для доказательства этого достаточно заметить, что соотношения (7) устойчивы к таким предельным переходам (поскольку оператор A замкнут). Подобным способом – как пределы классических решений – определял обобщенные решения Ю. И. Любич [5, § 10]. Этот подход практически эквивалентен нашему [5, теорема 10.1].

Обобщенные решения наследуют важное свойство классических: при замене $u(t) = e^{\lambda t}v(t)$ с произвольным $\lambda \in \mathbb{C}$ обобщенные решения уравнения $u'(t) = Au(t)$ переходят в обобщенные решения уравнения $v'(t) = (A - \lambda)v(t)$. Точнее это свойство выражает следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть $u(t)$ – обобщенное решение уравнения (1) на интервале J . Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda s} u(s) ds \in D(A), \quad (A - \lambda) \int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda s} u(s) ds = e^{-\lambda t_2} u(t_2) - e^{-\lambda t_1} u(t_1) \quad (8)$$

для всех $t_1, t_2 \in J$ и произвольной константы $\lambda \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое соотношение (8) следует из элементарного тождества

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda s} u(s) ds = e^{-\lambda t_2} \int_{t_1}^{t_2} u(s) ds + \lambda \int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda t} dt \int_{t_1}^t u(s) ds.$$

Применяя к тождеству оператор A с учетом того, что $u(t)$ – обобщенное решение уравнения (1), получим

$$\begin{aligned} A \int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda s} u(s) ds &= e^{-\lambda t_2} (u(t_2) - u(t_1)) + \lambda \int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda t} (u(t) - u(t_1)) dt \\ &= e^{-\lambda t_2} u(t_2) - e^{-\lambda t_1} u(t_1) + \lambda \int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda s} u(s) ds. \end{aligned}$$

Но это – второе соотношение (8). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь нелокальную задачу (3) на конечном отрезке $[0, T]$. Отдельно выпишем нелокальное условие

$$\int_0^T u(t) d\mu(t) = u_1. \quad (9)$$

Здесь u_1 – заданный элемент E . Скалярная функция $\mu(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, T]$. Предполагаем, что в каждой внутренней точке $t \in (0, T)$ значение $\mu(t)$ совпадает с одним из пределов $\mu(t + 0)$ или $\mu(t - 0)$. Это требование распространяется в дальнейшем на все функции ограниченной вариации.

Точка $t_0 \in [0, T]$ называется *точкой вариации* меры $d\mu(t)$ (по другой терминологии – *точкой роста*), если функция $\mu(t)$ не обращается в константу ни в какой окрестности t_0 . Так, если $t = 0$ и $t = T$ – точки вариации меры $d\mu(t)$, то $\text{Var}\{\mu(t)\}|_0^\varepsilon > 0$ и $\text{Var}\{\mu(t)\}|_{T-\varepsilon}^T > 0$ для любого малого $\varepsilon > 0$, и интеграл Римана–Стилтьеса в (9) не вырождается на промежуток, меньший, чем $[0, T]$.

Функцию $u: [0, T] \rightarrow E$ назовем *классическим* (соответственно, *обобщенным*) *решением* нелокальной задачи (3) на отрезке $[0, T]$, если эта функция является классическим (обобщенным) решением уравнения (1) на $[0, T]$ и удовлетворяет нелокальному условию (9) с заданным элементом $u_1 \in E$. Таким образом, классическое решение нелокальной задачи (3) – это непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая на $[0, T]$ уравнению (1) и нелокальному условию (9). Соответственно, обобщенное решение нелокальной задачи (3) – это непрерывная функция, удовлетворяющая на $[0, T]$ соотношениям (7) и нелокальному условию (9).

Для нелокальной задачи (3) введем по формуле (6) характеристическую функцию $L(\lambda)$. Функция $L(\lambda)$ является целой по переменной $\lambda \in \mathbb{C}$. Хорошо известно [13, с. 380], [17, с. 107], что если мера $d\mu(t)$ обладает более чем одной точкой вариации на $[0, T]$, то $L(\lambda)$ имеет бесконечно много различных нулей $\lambda_k \in \mathbb{C}$. Совокупность всех нулей $\{\lambda_k\}$ обозначим Λ_L . Нули занумерованы целочисленным индексом k (без учета их кратности); система нумерации может зависеть от $L(\lambda)$. Далее будем сравнивать нули $\lambda_k \in \Lambda_L$ с собственными значениями оператора A .

Как обычно, число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *собственным значением* оператора A , если уравнение $Af = \lambda f$ имеет ненулевое решение $f \in D(A)$. Указанный элемент f называется *собственным вектором* оператора A с собственным значением λ . Собственное значение считается вещественным, если $\lambda \in \mathbb{R}$, и комплексным, если $\lambda \notin \mathbb{R}$.

Основным результатом статьи является следующий критерий единственности для нелокальной задачи (3).

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве E . Пусть $\mu(t)$ – скалярная функция ограниченной вариации на $[0, T]$, причем $t = 0$ и $t = T$ – точки вариации меры $d\mu(t)$. Предположим, что нелокальная задача (3) с заданным элементом $u_1 \in E$ имеет на $[0, T]$ обобщенное решение $u(t)$. Для того чтобы это решение было единственным, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль $\lambda_k \in \Lambda_L$ характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (6) не являлся собственным значением оператора A .

Приведем эквивалентную формулировку для однородной задачи (4). Здесь не-локальное условие имеет вид

$$\int_0^T u(t) d\mu(t) = 0 \quad (10)$$

и всегда существует тривиальное решение $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A – линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве E . Пусть $\mu(t)$ – скалярная функция ограниченной вариации на $[0, T]$, причем $t = 0$ и $t = T$ – точки вариации меры $d\mu(t)$. Для того чтобы нелокальная задача (4) имела только тривиальное обобщенное решение $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль $\lambda_k \in \Lambda_L$ характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (6) не являлся собственным значением оператора A .

Теоремы 1 и 2 утверждают единственность в классе обобщенных решений нелокальной задачи. Отсюда сразу следует единственность классического решения.

§ 2. Доказательство критерия единственности

Критерий единственности будем доказывать в форме теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим однородную нелокальную задачу (4). Пусть некоторый нуль $\lambda_k \in \Lambda_L$ характеристической функции $L(\lambda)$ является собственным значением оператора A с собственным вектором $f_k \neq 0$. Тогда функция $u(t) = e^{\lambda_k t} f_k$ будет нетривиальным решением однородной задачи (4). Таким образом, необходимость в теореме 2 проверяется непосредственно.

Достаточность. Пусть ни один нуль $\lambda_k \in \Lambda_L$ характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (6) не является собственным значением оператора A . Рассмотрим обобщенное решение $u(t)$ однородной нелокальной задачи (4) и покажем, что $u(t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$. Для удобства чтения и последующих ссылок доказательство разобьем на пункты.

1°. Определим векторную целую функцию

$$f(\lambda) = \int_0^T e^{-\lambda s} u(s) ds, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Для произведения $L(\lambda)f(\lambda)$ выпишем представление:

$$L(\lambda)f(\lambda) \equiv \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \int_0^T e^{-\lambda s} u(s) ds = g_0(\lambda) + e^{-\lambda T} g_1(\lambda), \quad (11)$$

где

$$g_0(\lambda) = \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \int_0^t e^{-\lambda s} u(s) ds, \quad g_1(\lambda) = \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \int_t^T e^{\lambda(T-s)} u(s) ds. \quad (12)$$

Поскольку $u(t)$ – обобщенное решение нелокальной задачи (4), то, воспользовавшись соотношениями (8), (10), получим

$$\begin{aligned}(A - \lambda)g_0(\lambda) &= \int_0^T e^{\lambda t} (e^{-\lambda t} u(t) - u(0)) d\mu(t) \\ &= \int_0^T u(t) d\mu(t) - \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \cdot u(0) = 0 - L(\lambda)u(0).\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}(A - \lambda)g_1(\lambda) &= \int_0^T e^{\lambda t} e^{\lambda T} (e^{-\lambda T} u(T) - e^{-\lambda t} u(t)) d\mu(t) \\ &= \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \cdot u(T) - e^{\lambda T} \int_0^T u(t) d\mu(t) = L(\lambda)u(T) - 0.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(A - \lambda)g_0(\lambda) = -L(\lambda)u(0), \quad (A - \lambda)g_1(\lambda) = L(\lambda)u(T). \quad (13)$$

Векторные функции $g_0(\lambda)$, $g_1(\lambda)$ являются целыми по переменной $\lambda \in \mathbb{C}$. Дифференцируя соотношения (13) (с учетом замкнутости оператора A), получаем

$$\begin{aligned}Ag_0^{(n)}(\lambda) &= \lambda g_0^{(n)}(\lambda) + n g_0^{(n-1)}(\lambda) - L^{(n)}(\lambda)u(0), \\ Ag_1^{(n)}(\lambda) &= \lambda g_1^{(n)}(\lambda) + n g_1^{(n-1)}(\lambda) + L^{(n)}(\lambda)u(T),\end{aligned} \quad (14)$$

где $n = 1, 2, \dots$. Рассмотрим значение λ , совпадающее с каким-либо нулем λ_k характеристической функции $L(\lambda)$. По предположению число λ_k не является собственным значением оператора A . Тогда из (13) следует, что $g_0(\lambda_k) = g_1(\lambda_k) = 0$. Более того, если λ_k – кратный нуль $L(\lambda)$, то из (14) по индукции заключаем, что λ_k будет нулем не меньшей кратности для векторных целых функций $g_0(\lambda)$, $g_1(\lambda)$.

Итак, при сделанных предположениях всякий нуль $\lambda_k \in \Lambda_L$ характеристической функции $L(\lambda)$ будет нулем не меньшей кратности для векторных целых функций $g_0(\lambda)$, $g_1(\lambda)$, определенных в (12). Именно на этот вывод (и только на него) будут опираться последующие рассуждения.

2°. Заменим векторную ситуацию скалярной. Пусть f^* – линейный непрерывный функционал на пространстве E (т.е. $f^* \in E^*$). Определим непрерывную скалярную функцию $\varphi(t) \equiv f^*(u(t))$ на $[0, T]$. Положим также

$$F(\lambda) \equiv f^*(f(\lambda)) = \int_0^T e^{-\lambda s} \varphi(s) ds, \quad (15)$$

$$G_0(\lambda) \equiv f^*(g_0(\lambda)) = \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \int_0^t e^{-\lambda s} \varphi(s) ds, \quad (16)$$

$$G_1(\lambda) \equiv f^*(g_1(\lambda)) = \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \int_t^T e^{\lambda(T-s)} \varphi(s) ds. \quad (17)$$

При применении функционала f^* кратности нулей функций $g_0(\lambda)$, $g_1(\lambda)$ могли только возрасти. Поэтому согласно выводу п. 1° всякий нуль $\lambda_k \in \Lambda_L$ характеристической функции $L(\lambda)$ является нулем не меньшей кратности для (обычных) целых функций $G_0(\lambda)$, $G_1(\lambda)$. Следовательно, отношения

$$Q_0(\lambda) = G_0(\lambda)/L(\lambda), \quad Q_1(\lambda) = G_1(\lambda)/L(\lambda) \quad (18)$$

определяют некоторые целые функции $Q_0(\lambda)$, $Q_1(\lambda)$.

Под действием функционала f^* равенство (11) преобразуется к виду

$$L(\lambda)F(\lambda) = G_0(\lambda) + e^{-\lambda T}G_1(\lambda).$$

Подставляя выражения $G_0(\lambda) = L(\lambda)Q_0(\lambda)$, $G_1(\lambda) = L(\lambda)Q_1(\lambda)$ и сокращая на $L(\lambda)$, приходим к тождеству

$$F(\lambda) = Q_0(\lambda) + e^{-\lambda T}Q_1(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (19)$$

Итак, функция $F(\lambda)$, определенная в (15), выражается через целые функции $Q_0(\lambda)$, $Q_1(\lambda)$ по формуле (19).

Дальнейший анализ соотношения (19) основан на технике из теории целых функций. Все необходимые сведения можно найти в книгах [17], [18].

3°. С помощью “метода частных” [18, с. 540–542, с. 606, 607] покажем, что целые функции $Q_0(\lambda) = G_0(\lambda)/L(\lambda)$, $Q_1(\lambda) = G_1(\lambda)/L(\lambda)$ имеют *минимальный тип* при порядке единица (точнее, растут не выше первого порядка и минимального типа). В оценках используется вспомогательная функция

$$H(\theta) \equiv \frac{T}{2} (|\cos \theta| + \cos \theta) = \begin{cases} T \cos \theta, & \cos \theta \geq 0, \\ 0, & \cos \theta < 0. \end{cases}$$

Для характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (6) рассмотрим индикатор роста

$$h_L(\theta) \equiv \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |L(re^{i\theta})|}{r}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Свойства данного индикатора хорошо изучены (начиная с основополагающей работы [14]). Воспользуемся леммой 3 из § 2 работы [19], где фигурирует функция, аналогичная $L(\lambda)$ из формулы (6), но с интегралом по отрезку $[-qi, qi]$ мнимой оси. С помощью элементарных преобразований сведем нужную часть этой леммы к нашей ситуации. Утверждается, что

$$h_L(\theta) \equiv \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |L(re^{i\theta})|}{r} = \frac{T}{2} (|\cos \theta| + \cos \theta) \equiv H(\theta). \quad (20)$$

Здесь для почти всех $\theta \in [0, 2\pi)$ существует не только верхний, но и обычный предел. Оценка $h_L(\theta) \leq H(\theta)$ проверяется непосредственно, исходя из формулы (6). Но по условию $t = 0$ и $t = T$ – точки вариации меры $d\mu(t)$. Поэтому справедливо равенство $h_L(\theta) = H(\theta)$. (Подробное доказательство см. в [19, с. 280–283] или [17, с. 106–110].)

Оценим теперь индикаторы функций $G_0(\lambda)$, $G_1(\lambda)$ из (16), (17). После элементарных преобразований получим

$$G_0(\lambda) = \int_0^T d\mu(t) \int_0^t e^{\lambda s} \varphi(t-s) ds, \quad G_1(\lambda) = \int_0^T d\mu(t) \int_t^T e^{\lambda s} \varphi(T+t-s) ds.$$

Пусть $\lambda = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Тогда $|e^{\lambda s}| = e^{(r \cos \theta)s} \leq e^{rH(\theta)}$ при $0 \leq s \leq T$. Отсюда $|G_k(\lambda)| \leq Ce^{rH(\theta)}$ для $k = 0, 1$ с константой

$$C = \text{Var}\{\mu(t)\} \Big|_0^T \int_0^T |\varphi(s)| ds.$$

Это означает, что

$$h_{G_k}(\theta) \equiv \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |G_k(re^{i\theta})|}{r} \leq H(\theta) \equiv \frac{T}{2}(|\cos \theta| + \cos \theta), \quad k = 0, 1. \quad (21)$$

Рассмотрим целые функции $Q_0(\lambda) = G_0(\lambda)/L(\lambda)$, $Q_1(\lambda) = G_1(\lambda)/L(\lambda)$. Поскольку у индикатора $h_L(\theta)$ для почти всех θ существует не только верхний, но и обычный предел (20), то индикатор частного $G_k(\lambda)/L(\lambda)$ равен разности соответствующих индикаторов. Учитывая (20) и (21), получаем

$$h_{Q_k}(\theta) = h_{G_k}(\theta) - h_L(\theta) \leq H(\theta) - H(\theta) = 0, \quad k = 0, 1.$$

Как известно [18, с. 98], тип целой функции совпадает с максимумом ее индикатора. Таким образом, функции $Q_0(\lambda)$, $Q_1(\lambda)$ имеют минимальный тип при порядке единица.

4°. Тожество (19) связывает функцию $F(\lambda)$ из формулы (15) с целыми функциями минимального типа $Q_0(\lambda)$, $Q_1(\lambda)$, определенными в (18).

Подставим в (19) значения λ , равные $\zeta_k = 2k\pi i/T$, $k \in \mathbb{Z}$. Получим

$$Q_0(\zeta_k) + Q_1(\zeta_k) = F(\zeta_k) = \int_0^T e^{-\zeta_k s} \varphi(s) ds \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Отсюда видно, что целая функция минимального типа $Q_0(\lambda) + Q_1(\lambda)$ ограничена на последовательности точек $\zeta_k = 2k\pi i/T$, образующих двустороннюю арифметическую прогрессию. Согласно известной теореме Г. Поля [20] (см. также [3, с. 118] и [18, с. 269]) такая функция может быть только константой, а точнее, нулем, ибо $Q_0(\zeta_k) + Q_1(\zeta_k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Тем самым, $Q_0(\lambda) + Q_1(\lambda) \equiv 0$ в плоскости $\mathbb{C}$.

Аналогично, подставляя в (19) значения λ , равные $\zeta'_k = (2k+1)\pi i/T$, $k \in \mathbb{Z}$, получим

$$Q_0(\zeta'_k) - Q_1(\zeta'_k) = F(\zeta'_k) = \int_0^T e^{-\zeta'_k s} \varphi(s) ds \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Отсюда заключаем, что $Q_0(\lambda) - Q_1(\lambda) \equiv 0$ в плоскости $\mathbb{C}$.

Так как $Q_0(\lambda) + Q_1(\lambda) \equiv 0$ и $Q_0(\lambda) - Q_1(\lambda) \equiv 0$, то $Q_0(\lambda) \equiv 0$ и $Q_1(\lambda) \equiv 0$. Из тождества (19) видно, что тогда $F(\lambda) \equiv 0$. Но $F(\lambda)$ – преобразование Лапласа (15) от непрерывной скалярной функции $\varphi(t) = f^*(u(t))$. Поэтому $f^*(u(t)) \equiv 0$ на $[0, T]$. Выбор функционала f^* был произвольным, и по теореме Хана–Банаха $u(t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$.

Итак, если предполагать, что ни один нуль характеристической функции $L(\lambda)$ не является собственным значением оператора A , то обобщенное решение нелокальной задачи (4) может быть только тривиальным. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. После того как это доказательство было получено, автор обнаружил, что часть рассуждений можно заменить ссылкой на работу А. Ф. Леонтьева [19]. Один из результатов [19] (сформулированный там в других обозначениях) утверждает, что если функция

$$Q_0(\lambda) \equiv \frac{\int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \int_0^t e^{-\lambda s} \varphi(s) ds}{\int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t)}$$

является целой по переменной $\lambda \in \mathbb{C}$, то $\varphi(t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$. Аналогичный факт независимо установлен в пп. 3°, 4° нашего доказательства.

Не углубляясь в детали, отметим, что цитированный результат А. Ф. Леонтьева играет большую роль в теории негармонических рядов Фурье. Он связан с предыдущими исследованиями Л. Шварца, Ж.-П. Кахана, П. Кусиса (ссылки см. в [19]). Ввиду такой важности в [19] предложены два различных доказательства. Первое доказательство (см. [19, лемма 4, § 3]) не подходит для наших целей, ибо содержит дополнительное требование о наличии “периодических в среднем” сдвигов у функции $\varphi(t)$. Второе доказательство (см. [19, теорема 7, § 9]) является полным. Оно получается ссылкой на фундаментальную теорему Л. Шварца (уточненную А. Ф. Леонтьевым) о суммируемости по Абелю негармонических рядов Фурье (см. [19, § 9] или [17, теорема 6.4.1]). Теорема Шварца относится к наиболее глубоким фактам теории: не только доказательство, но и сама ее формулировка довольно сложна. Поэтому автор решил привести свое независимое рассуждение, не использующее столь тонких понятий, как суммируемость по Абелю негармонических рядов Фурье. Основной выигрыш достигается за счет введения дополнительной функции

$$Q_1(\lambda) \equiv \frac{\int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \int_t^T e^{\lambda(T-s)} \varphi(s) ds}{\int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t)},$$

отсутствовавшей в предыдущих работах. С помощью функции $Q_1(\lambda)$ удалось получить представление (19) и воспользоваться на последнем этапе доказательства замечательной теоремой Г. Поля [20].

§ 3. Дополнения и уточнения

Доказанный критерий единственности можно сформулировать так.

Пусть A – линейный замкнутый оператор в E , а $t = 0$ и $t = T$ – точки вариации меры $d\mu(t)$. Для того чтобы однородная нелокальная задача (4) на конечном отрезке $[0, T]$ имела нетривиальные обобщенные решения, необходимо и достаточно, чтобы она имела хотя бы одно экспоненциальное решение

$$u(t) = e^{\lambda_k t} f_k, \quad f_k \neq 0. \quad (22)$$

Решение (22) отвечает некоторому нулю λ_k характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (6) и собственному вектору f_k оператора A с собственным значением λ_k .

Предположение о *конечности* отрезка $[0, T]$ постоянно использовалось в доказательстве. Покажем, что это связано не только с нашими методами, но и с самим существом вопроса. Не анализируя подробно случаи бесконечных промежутков $[0, \infty)$ и $(-\infty, \infty)$, выявим лишь возникающие трудности.

Для определенности рассмотрим нелокальную задачу

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \int_0^\infty u(t)\omega(t) dt = 0 \quad (23)$$

с заданной скалярной функцией $\omega(t)$.

Заметим, во-первых, что сама постановка задачи (23) требует специального уточнения, ибо уравнение $u'(t) = Au(t)$ может иметь решения, неинтегрируемые на $[0, \infty)$ с весом $\omega(t)$. Во-вторых, даже в классе интегрируемых решений вопрос о единственности не всегда выражается в терминах экспоненциальных решений (22). В некоторых простых ситуациях характеристическая функция

$$L(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} \omega(t) dt$$

совсем не имеет нулей. Это означает, что у нелокальной задачи (23) нет экспоненциальных решений (22). Но здесь уже нельзя исключать того, что существуют другие нетривиальные решения $u(t) \not\equiv 0$.

ПРИМЕР 1. В банаховом пространстве $E = L^1(\mathbb{R}_+)$ с нормой

$$\|f\| = \int_0^\infty |f(x)| dx$$

зададим линейный замкнутый оператор $A = -d/dx$ на области $D(A)$, состоящей из абсолютно непрерывных функций $f = f(x)$, у которых $\|f\| < \infty$ и $\|f'\| < \infty$. Положим $\omega(t) = e^{-t}$ и рассмотрим нелокальную задачу (23). Характеристическая функция

$$L(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda t} e^{-t} dt = \frac{1}{1-\lambda}$$

определена при $\operatorname{Re} \lambda < 1$ и, очевидно, не имеет нулей. Следовательно, у нелокальной задачи (23) с $\omega(t) = e^{-t}$ нет экспоненциальных решений (22).

Построим нетривиальное решение этой задачи. Выберем в $C^\infty(\mathbb{R})$ вспомогательную функцию $\psi(s)$ с непустым компактным носителем, расположенным при $s \leq 0$, так, чтобы

$$\int_{-\infty}^\infty \psi(s) e^s ds = 0.$$

Пусть $u(x, t) = \psi(x - t)$ при $x, t \geq 0$. Тогда $u(x, t)$ при каждом t есть элемент банахова пространства E , причем

$$\|u(\cdot, t)\| = \int_0^\infty |u(x, t)| dx = \int_0^\infty |\psi(x - t)| dx \leq \int_{-\infty}^\infty |\psi(s)| ds \equiv C.$$

Функция $u = u(\cdot, t)$ является классическим решением абстрактного дифференциального уравнения $u'(t) = Au(t)$ с оператором $A = -d/dx$ в пространстве $E = L^1(\mathbb{R}_+)$. Так как $\|u(\cdot, t)\|e^{-t} \leq Ce^{-t}$, то векторный интеграл в (23) с $\omega(t) = e^{-t}$ сходится абсолютно. Вычисляя его значение при каждом $x \geq 0$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty u(x, t)e^{-t} dt &= \int_0^\infty \psi(x-t)e^{-t} dt = \int_{-\infty}^x \psi(s)e^{s-x} ds \\ &= e^{-x} \int_{-\infty}^\infty \psi(s)e^s ds \equiv 0. \end{aligned}$$

Нетривиальность решения $u(x, t) = \psi(x-t)$ следует из того, что $\psi(s) \not\equiv 0$ при $s \leq 0$. Тем самым, для нелокальной задачи (23) построен пример неединственности, несмотря на отсутствие экспоненциальных решений (22).

Конечно, этот пример не исчерпывает проблемы. Он лишь показывает, что исследование нелокальных задач на бесконечных промежутках $[0, \infty)$ и $(-\infty, \infty)$ требует своих специфических методов (выходящих за рамки статьи).

Кроме конечности отрезка $[0, T]$, в теоремах 1 и 2 предполагалось также, что граничные точки $t = 0$ и $t = T$ являются точками вариации меры $d\mu(t)$. Это условие может показаться формальным, тем более, что в доказательстве оно использовалось единственный раз, при обосновании равенства (20) для индикатора характеристической функции $L(\lambda)$. Поясним содержательную сторону указанного требования.

Пусть хотя бы одна из точек $t = 0$ или $t = T$ не является точкой вариации меры $d\mu(t)$. Тогда носитель меры ограничивается меньшим промежутком, например $[t_0, t_1] \subset [0, T]$. На промежутке $[t_0, t_1]$ единственность решения нелокальной задачи будет по-прежнему гарантирована при условии, что нули характеристической функции $L(\lambda)$ не совпадают с собственными значениями оператора A . Однако вне $[t_0, t_1]$ единственность решения может нарушаться даже при полном отсутствии собственных значений оператора A .

ПРИМЕР 2. Рассмотрим однородную нелокальную задачу (4) на фиксированном отрезке $[0, T]$. Пусть $t = 0$ не является точкой вариации меры $d\mu(t)$. Тогда функция $\mu(t)$ постоянна в некоторой окрестности точки $t = 0$ и нелокальное условие (10) можно записать в виде

$$\int_\delta^T u(t) d\mu(t) = 0 \quad (24)$$

с достаточно малым $\delta > 0$. Выберем банахово пространство $E = L^1[0, \delta]$. Зададим линейный замкнутый оператор $A = -d/dx$ на области $D(A)$, состоящей из абсолютно непрерывных функций $f = f(x)$ на $[0, \delta]$, у которых $f(0) = 0$. Оператор A не имеет собственных значений, более того, вся плоскость $\mathbb{C}$ принадлежит его резольвентному множеству.

Выберем в $C^\infty(\mathbb{R})$ вспомогательную функцию $\psi(s)$ с непустым компактным носителем $0 \leq s \leq \delta$ и определим $u(x, t) = \psi(x-t)$ для $0 \leq x \leq \delta$, $0 \leq t \leq T$.

Функция $u = u(\cdot, t)$ служит классическим решением дифференциального уравнения $u'(t) = Au(t)$ в пространстве $E = L^1[0, \delta]$ с оператором $A = -d/dx$. Из ограничений на носитель $\psi(s)$ следует, что $u \neq 0$ при $0 \leq t \leq \delta$ и $u \equiv 0$ при $t \geq \delta$. Поэтому $u = u(\cdot, t)$ – нетривиальное решение, удовлетворяющее условию (24), а значит, и самой задаче (4) на исходном отрезке $[0, T]$. Таким образом, единственность решения нелокальной задачи (4) на $[0, T]$ нарушается, несмотря на отсутствие собственных значений оператора A . (Аналогичный пример с точкой “невариации” $t = T$ получается очевидными изменениями.)

При построении примера использована известная идея: решение дифференциального уравнения (1) может обращаться в нуль при некоторых значениях t , не будучи равным нулю тождественно. Те же соображения показывают, что в абстрактной задаче Коши возможна неединственность решения [4]. В таких случаях говорят, что абстрактная задача Коши является *недетерминированной* [5, с. 6]. В примере 2 недетерминированной будет обратная задача Коши для уравнения $u'(t) = Au(t)$ на $[0, T]$ с условием $u(T) = 0$.

Возникает гипотеза: требование, предъявляемое к точкам $t = 0$ и $t = T$ в критерии единственности для нелокальной задачи, обусловлено исключительно тем, что соответствующая задача Коши может оказаться недетерминированной. Для формулировки точного утверждения введем следующую (рабочую) терминологию.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (1) с линейным замкнутым оператором A . Назовем оператор A *детерминирующим будущее* (соответственно, *прошлого*), если для любого классического решения уравнения (1) на произвольном интервале $J \subset \mathbb{R}$ из соотношения $u(t_0) = 0$ при некотором $t_0 \in J$ следует, что $u(t) \equiv 0$ при всех $t \geq t_0$ (при всех $t \leq t_0$) из интервала J .

Это определение легко сводится к следующему. Оператор A детерминирует будущее (прошлое), если всякое классическое решение уравнения (1) на любом отрезке $[0, T]$ однозначно определяется своим начальным значением $u(0)$ (финальным значением $u(T)$), т.е. если прямая (обратная) задача Коши для дифференциального уравнения (1) детерминирована на конечном отрезке $[0, T]$.

Оговорка о классичности решения $u(t)$ здесь несущественна. Пусть, например, оператор A детерминирует будущее и $u_0(t)$ – обобщенное решение уравнения (1) на интервале J такое, что $u_0(t_0) = 0$ при некотором $t_0 \in J$. Тогда функция

$$u_1(t) = \int_{t_0}^t u_0(s) ds$$

будет классическим решением уравнения (1) с тем же условием $u_1(t_0) = 0$. Поэтому $u_1(t) \equiv 0$ при $t \geq t_0$, откуда $u_0(t) \equiv 0$ при $t \geq t_0$ для всех t из интервала J .

Итак, требуя в определении, чтобы оператор A детерминировал классические решения, автоматически получаем, что A будет детерминировать решения обобщенные. В дальнейшем этот факт используется без оговорок.

Наконец, назовем оператор A *абсолютно детерминирующим*, если он детерминирует и прошлое, и будущее. Всякое ненулевое решение уравнения (1) с таким оператором A нигде не обращается в нуль.

ТЕОРЕМА 3. Пусть A – линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве E . Пусть $\mu(t)$ – скалярная функция ограниченной вариации на $[0, T]$. Предположим, что выполнено любое из следующих условий:

- 1) оператор A детерминирует будущее и $t = 0$ – точка вариации меры $d\mu(t)$;
- 2) оператор A детерминирует прошлое и $t = T$ – точка вариации меры $d\mu(t)$;
- 3) оператор A абсолютно детерминирующий и мера $d\mu(t)$ имеет хотя бы одну точку вариации на $[0, T]$.

Тогда справедлив критерий единственности: для того чтобы нелокальная задача (4) имела только тривиальное обобщенное решение $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль $\lambda_k \in \Lambda_L$ характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (6) не являлся собственным значением оператора A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о необходимости очевидно.

Достаточность. Предположим, что ни один нуль характеристической функции $L(\lambda)$ не является собственным значением оператора A . Рассмотрим решение $u(t)$ нелокальной задачи (4) и покажем, что $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$.

Случаи 1)–3) однотипны, разберем только первый из них. Пусть оператор A детерминирует будущее и $t = 0$ – точка вариации меры $d\mu(t)$. Множество всех точек вариации меры замкнуто (ибо дополнение к нему открыто). Следовательно, существует наибольшая точка вариации $t = t_1 \in [0, T]$.

Случай $t_1 = T$ рассмотрен в теореме 2.

Случай $t_1 = 0$ элементарен. Здесь $\mu(t)$ – функция скачка в точке $t = 0$. Примем величину скачка за $C \neq 0$. Характеристическая функция $L(\lambda) \equiv C$ вообще не имеет нулей. Нелокальное условие сводится к виду $Cu(0) = 0$. Так как оператор A детерминирует будущее, то $u(t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$.

Пусть $0 < t_1 < T$. Переопределив при необходимости значение $\mu(t)$ в точке $t = t_1$, добьемся того, чтобы $\mu(t_1) = \mu(t_1 + 0)$. Это не повлияет на интегралы с мерой $d\mu(t)$ по отрезку $[0, T]$, но теперь их можно заменять интегралами с той же мерой по отрезку $[0, t_1]$. Функция $u(t)$ является решением нелокальной задачи

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \int_0^{t_1} u(t) d\mu(t) = \int_0^T u(t) d\mu(t) = 0,$$

рассматриваемой на $[0, t_1]$. Поскольку $t = 0$ и $t = t_1$ – точки вариации меры $d\mu(t)$, то к этой нелокальной задаче применима теорема 2. По предположению ни один нуль характеристической функции

$$L_1(\lambda) \equiv \int_0^{t_1} e^{\lambda t} d\mu(t) = \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \equiv L(\lambda)$$

не является собственным значением оператора A . На основании теоремы 2 заключаем, что $u(t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq t_1$. Но оператор A детерминирует будущее, поэтому $u(t) \equiv 0$ при $t_1 \leq t \leq T$. Теорема доказана.

К сожалению, в общем случае линейного замкнутого оператора A неизвестны исчерпывающие условия, гарантирующие детерминированность абстрактной задачи Коши (см. введение). Поэтому проиллюстрируем теорему 3 только в нескольких типичных ситуациях.

Пусть A порождает C_0 -полугруппу линейных ограниченных операторов $U(t)$, $t \geq 0$. Всякое классическое решение уравнения (1), определенное на интервале J , удовлетворяет при $t_1 > t_0$ соотношению $u(t_1) = U(t_1 - t_0)u(t_0)$ [3, с. 634]. Поэтому производящий оператор A заведомо детерминирует будущее. Для того чтобы A детерминировал прошлое, необходимо и достаточно, чтобы операторы $U(t)$ имели нулевое ядро при каждом (что эквивалентно, при одном) значении $t > 0$. В таком случае говорят, что сама полугруппа имеет нулевое ядро. Последнее заведомо выполняется для аналитической полугруппы $U(t)$, или для однопараметрической группы $U(t)$, определенной при $-\infty < t < \infty$. Соберем в одном утверждении все указанные возможности.

ТЕОРЕМА 4. Пусть оператор A порождает C_0 -полугруппу $U(t)$ в банаховом пространстве E . Пусть $\mu(t)$ – скалярная функция ограниченной вариации на $[0, T]$. Предположим, что выполнено любое из условий:

- 1) $t = 0$ – точка вариации меры $d\mu(t)$;
- 2) полугруппа $U(t)$ имеет нулевое ядро и мера $d\mu(t)$ имеет хотя бы одну точку вариации на $[0, T]$;
- 3) полугруппа $U(t)$ аналитическая при $t > 0$ и мера $d\mu(t)$ имеет хотя бы одну точку вариации на $[0, T]$;
- 4) полугруппа $U(t)$ продолжается до однопараметрической группы при $t < 0$ и мера $d\mu(t)$ имеет хотя бы одну точку вариации на $[0, T]$.

Тогда для нелокальной задачи (4) справедлив критерий единственности, как в теореме 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 3.

Для полноты изложения материала отметим следующий результат.

ТЕОРЕМА 5. Пусть A – линейный ограниченный оператор в банаховом пространстве E . Пусть $\mu(t)$ – скалярная функция ограниченной вариации на $[0, T]$, отличная от тождественной константы. Тогда для нелокальной задачи (4) справедлив критерий единственности, как в теореме 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограниченный оператор A порождает аналитическую группу $U(t) = \exp(tA)$. Поскольку скалярная функция $\mu(t)$ отлична от константы, то мера $d\mu(t)$ имеет хотя бы одну точку вариации на $[0, T]$. Остается воспользоваться теоремой 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 5 “элементарна” в том смысле, что ее доказательство можно получить с помощью операторного исчисления для ограниченных операторов в банаховом пространстве. Соответствующий аппарат предоставляют теоремы 5.17.7 из [12] и 5.12.2 из [3].

Отдельно рассмотрим случай гильбертова пространства E с симметрическим оператором A , т.е. таким, что $(Af, g) = (f, Ag)$ для любых $f, g \in D(A)$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть E – гильбертово пространство и A – линейный замкнутый симметрический оператор в E . Пусть $\mu(t)$ – скалярная функция ограниченной вариации на $[0, T]$, отличная от тождественной константы. Тогда для нелокальной задачи (4) справедлив критерий единственности, как в теореме 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всякий симметрический оператор является абсолютно детерминирующим: решение $u(t)$ уравнения (1), равное нулю при некотором t_0 , будет равно нулю тождественно. Этот известный факт следует из оценки

$$\|u(t_\lambda)\| \leq \|u(t_0)\|^{1-\lambda} \|u(t_1)\|^\lambda, \quad t_\lambda = (1-\lambda)t_0 + \lambda t_1, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

получаемой по свойству логарифмической выпуклости [21]. Можно, однако, не прибегать к подобной оценке и дать совсем простое доказательство. Следующее рассуждение, видимо, также известно, но автор не встречал его в научной литературе.

Достаточно установить, что если решение $u(t)$ уравнения (1) обращается в нуль в какой-нибудь точке t_0 , то оно обязательно равно нулю в некоторой окрестности этой точки. Пусть, например, $u(t)$ – классическое решение уравнения (1) на $[0, T]$ и $u(0) = 0$. Выберем произвольную точку $t_1 \in (0, T]$ и определим числовую функцию $\psi(s) \equiv (u(s), u(t_1 - s))$ при $0 \leq s \leq t_1$. Продифференцируем $\psi(s)$ по s . Имеем

$$\begin{aligned} \psi'(s) &= (u'(s), u(t_1 - s)) - (u(s), u'(t_1 - s)) \\ &= (Au(s), u(t_1 - s)) - (u(s), Au(t_1 - s)) \equiv 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\psi(s) \equiv \text{const}$. Но тогда

$$\|u(t_1/2)\|^2 = (u(t_1/2), u(t_1/2)) = \psi(t_1/2) = \psi(0) = (u(0), u(t_1)) = 0.$$

Итак, $u(t_1/2) = 0$ для любого $t_1 \in (0, T]$. Поэтому $u(t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T/2$, т.е. функция $u(t)$ действительно равна нулю в окрестности точки $t = 0$. Общий случай решения $u(t)$ в интервале J с условием $u(t_0) = 0$ сводится к рассмотренному. Таким образом, симметрический оператор A является абсолютно детерминирующим. Применяя теорему 3, п. 3), получаем требуемый результат.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Теорема 6 справедлива для любого симметрического оператора A без всяких ограничений. Не требуется даже плотности в E области $D(A)$, что обычно предполагается в определении симметрического оператора. В случае, когда оператор A является самосопряженным, теорему 6 можно, по-видимому, получить с помощью операторного исчисления. Подобные соображения есть, например, в работе [22, с. 1616–1618]. Хотя там рассматривается другая ситуация (линейная обратная задача), но рассуждения легко адаптировать к нелокальной задаче (4) с абсолютно непрерывной мерой $d\mu(t) = \omega(t) dt$. Впрочем, наш новый подход показывает, что техника, связанная с природой оператора A , не слишком существенна в вопросе единственности для нелокальной задачи.

§ 4. Достаточные признаки единственности

При применении критерия единственности к нелокальной задаче могут возникать трудности, связанные с нахождением собственных значений оператора A и нулей характеристической функции $L(\lambda)$. Часто на практике собственные значения и нули не вычисляются явно, а удовлетворяют лишь некоторым приближенным оценкам. Если эти оценки согласованы так, чтобы в область, содержащую нули характеристической функции $L(\lambda)$, не попадали собственные значения оператора A , то на основании теоремы 1 (или эквивалентной ей теоремы 2) получаем утверждение о единственности решения нелокальной задачи. Сформулируем несколько подобных признаков единственности в терминах однородной задачи (4).

Здесь и в дальнейшем под монотонной функцией на интервале $J \subset \mathbb{R}$ понимается вещественная неубывающая или невозрастающая функция, определенная всюду на J . В частности, монотонная функция на отрезке $[0, T]$ конечна во всех точках отрезка и имеет ограниченную вариацию на $[0, T]$.

Начнем с простого следствия теоремы 2.

ТЕОРЕМА 7. Пусть A – линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве E и все собственные значения A вещественны. Пусть $\mu(t)$ – монотонная функция на отрезке $[0, T]$, причем $t = 0$ и $t = T$ – точки вариации меры $d\mu(t)$. Тогда однородная нелокальная задача (4) имеет на $[0, T]$ только тривиальное обобщенное решение $u(t) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как мера $d\mu(t)$ знакопостоянна на $[0, T]$, то характеристическая функция (6) не имеет вещественных нулей. Но собственные значения A вещественны. Поэтому ни один нуль функции (6) не является собственным значением оператора A . По теореме 2 нелокальная задача (4) имеет на $[0, T]$ только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$. Доказательство завершено.

В качестве примера оператора без комплексных собственных значений рассмотрим симметрический оператор A в гильбертовом пространстве E . С учетом теоремы 6 здесь можно ослабить требование на точки вариации меры $d\mu(t)$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть E – гильбертово пространство и A – линейный замкнутый симметрический оператор в E . Пусть $\mu(t)$ – монотонная функция на $[0, T]$, отличная от тождественной константы. Тогда однородная нелокальная задача (4) имеет на $[0, T]$ только тривиальное обобщенное решение $u(t) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство теоремы 7 со ссылкой на теорему 6 вместо теоремы 2.

Более тонкие результаты получаются для абсолютно непрерывной меры $d\mu(t) = \omega(t) dt$. Выпишем нелокальную задачу (4) в виде

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \int_0^T u(t)\omega(t) dt = 0 \quad (25)$$

с характеристической функцией

$$L(\lambda) = \int_0^T e^{\lambda t} \omega(t) dt, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (26)$$

Здесь $\omega(t)$ – скалярная функция, суммируемая в интервале $(0, T)$. Векторный интеграл в (25) понимается, вообще говоря, по Бохнеру [3]. Если $\omega(t)$ непрерывна на $[0, T]$, то этот интеграл можно понимать по Риману. Нелокальная задача (25) рассматривается на конечном отрезке $[0, T]$. Понятия обобщенного и классического решений вводятся для (25) так же, как и для исходной нелокальной задачи (4).

Требование того, что $t = 0$ и $t = T$ суть точки вариации меры $d\mu(t) = \omega(t) dt$, эквивалентно тому, что

$$\int_0^\varepsilon |\omega(t)| dt > 0, \quad \int_{T-\varepsilon}^T |\omega(t)| dt > 0$$

при любом малом $\varepsilon > 0$. Это заведомо выполняется для строго положительной функции $\omega(t)$.

Итак, пусть $\omega(t) > 0$ при $0 < t < T$. В случае монотонного поведения $\omega(t)$ вопрос о распределении нулей $L(\lambda)$ исследовал Г. Полия [13]. Он показал [13, § 1], что если $\omega(t)$ является неубывающей на $(0, T)$ (допускается $\omega(T) = \infty$), то все нули функции (26) расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Если же $\omega(t)$ является невозрастающей на $(0, T)$ (допускается $\omega(0) = \infty$), то все нули функции (26) расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ (см. также [23, отд. V, № 177] и [16, гл. 2]).

Применим эти соображения к исследованию нелокальной задачи (25). Следующие теоремы 9–11 существенно дополняют (в вопросе единственности) предыдущую заметку автора [24]. Имеется “параллельная” теория, построенная недавно для линейной обратной задачи (см. [25]).

ТЕОРЕМА 9. Пусть A – линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве E . Пусть $\omega(t)$ – суммируемая функция на $(0, T)$, строго положительная при $0 < t < T$. Предположим, что выполнено любое из условий:

- 1) функция $\omega(t)$ неубывающая на $(0, T)$ и оператор A не имеет комплексных собственных значений в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$;
- 2) функция $\omega(t)$ невозрастающая на $(0, T)$ и оператор A не имеет комплексных собственных значений в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$.

Тогда однородная нелокальная задача (25) имеет на $[0, T]$ только тривиальное обобщенное решение $u(t) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай 1). Здесь $\omega(t)$ – положительная и неубывающая на $(0, T)$ функция. По теореме Г. Полия [13] нули характеристической функции (26) расположены в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ и (очевидно) являются комплексными. По предположению 1) среди таких нулей нет собственных значений оператора A . Воспользуемся теоремой 2. Учтем, что $t = 0$ и $t = T$ – точки вариации меры $d\mu(t) = \omega(t) dt$. Получаем, что нелокальная задача (25) имеет на $[0, T]$ только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$. Случай 2) исследуется аналогично. Теорема доказана.

Вопрос о попадании нулей $L(\lambda)$ на мнимую ось решается с помощью понятия *исключительной функции* (по Полия). Функцию $\omega(t)$ назовем *исключительной* на интервале $(0, T)$, если она кусочно постоянна на $(0, T)$, число ее точек разрыва не более чем конечно и все точки разрыва имеют вид $t_k = r_k T$ при рациональных $r_k \in (0, 1)$. Постоянные функции (константы) причисляются к исключительным

функциям. Как показано в [13, § 1], для того чтобы целая функция (26) с положительной и монотонной $\omega(t)$ имела нули на мнимой оси $\operatorname{Re} \lambda = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\omega(t)$ была исключительной на $(0, T)$. Отсюда, например, следует, что при строгом возрастании (строгом убывании) функции $\omega(t)$ все нули характеристической функции (26) попадают в открытую полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda < 0$ (соответственно, $\operatorname{Re} \lambda > 0$).

Уточним теорему 9 с помощью понятия исключительной функции (по Поля). Следующий результат применим, в частности, для строго монотонных $\omega(t)$.

ТЕОРЕМА 10. Пусть A – линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве E . Пусть $\omega(t)$ – суммируемая функция на $(0, T)$, строго положительная при $0 < t < T$. Предположим, что $\omega(t)$ не является исключительной на $(0, T)$, и пусть выполнено любое из условий:

- 1) функция $\omega(t)$ неубывающая на $(0, T)$, оператор A не имеет комплексных собственных значений в открытой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$;
- 2) функция $\omega(t)$ невозрастающая на $(0, T)$, оператор A не имеет комплексных собственных значений в открытой полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Тогда однородная нелокальная задача (25) имеет на $[0, T]$ только тривиальное обобщенное решение $u(t) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\omega(t)$ не является исключительной на $(0, T)$, то согласно [13, § 1] ни один нуль характеристической функции $L(\lambda)$ не попадает на мнимую ось $\operatorname{Re} \lambda = 0$. Повторяя с учетом этого обстоятельства доказательство теоремы 9, получаем требуемый результат.

Г. Поля заметил также [13, § 4], что его результаты применимы к функции (26) в случае, когда монотонной является функция $e^{\gamma t} \omega(t)$ с какой-нибудь константой $\gamma \in \mathbb{R}$. Действительно,

$$L(\lambda) \equiv \int_0^T e^{\lambda t} \omega(t) dt = \int_0^T e^{(\lambda - \gamma)t} (e^{\gamma t} \omega(t)) dt,$$

и ситуация сводится к предыдущей заменой $\lambda - \gamma = \lambda_1$. Воспользуемся теоремой [13, § 4] для доказательства такого утверждения.

ТЕОРЕМА 11. Пусть A – линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве E . Пусть $\omega(t)$ – суммируемая функция на $(0, T)$, непрерывная и строго положительная при $0 < t < T$. Пусть эта функция дифференцируема всюду, кроме, может быть, конечного числа точек $(0, T)$. Определим величины

$$\alpha \equiv \inf_{(0, T)} (-\omega'(t)/\omega(t)), \quad \beta \equiv \sup_{(0, T)} (-\omega'(t)/\omega(t)) \quad (27)$$

и предположим, что оператор A не имеет комплексных собственных значений на множестве

$$-\infty \leq \alpha < \operatorname{Re} \lambda < \beta \leq \infty. \quad (28)$$

Исключительным считается случай $\omega(t) = e^{ct+d}$ (c, d – вещественные константы), когда $\alpha = \beta = -c$. Здесь требуется, чтобы ни одно число $\lambda_k = -c + 2k\pi i/T$ с целым $k \neq 0$ не являлось собственным значением оператора A .

При указанных условиях однородная нелокальная задача (25) имеет на $[0, T]$ только тривиальное обобщенное решение $u(t) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\omega(t) = e^{ct+d}$, то нули характеристической функции (26) вычисляются явно и равны $\lambda_k = -c + 2k\pi i/T$ с целыми $k \neq 0$. Для остальных $\omega(t)$ эти нули принадлежат множеству (28), где α и β определены по формулам (27) (см. [13, § 4] или [16, § 2.1]). Так как $\omega(t) > 0$, то нули являются комплексными. По предположению ни один такой нуль не может быть собственным значением оператора A . Применяя критерий единственности из теоремы 2, получаем требуемый результат.

Вновь вернемся к общей нелокальной задаче (4). Отдельно рассмотрим случай, когда оператор A вообще не имеет собственных значений. Такая ситуация встречается в приложениях, например, для оператора Лапласа $A = \Delta$ в пространствах $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $1 \leq p < \infty$.

ТЕОРЕМА 12. Пусть A – линейный замкнутый оператор в E , не имеющий собственных значений. Пусть $\mu(t)$ – скалярная функция ограниченной вариации на $[0, T]$, причем $t = 0$ и $t = T$ – точки вариации меры $d\mu(t)$. Тогда однородная нелокальная задача (4) имеет на $[0, T]$ только тривиальное обобщенное решение $u(t) \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теоремы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пример 2 из § 3 показывает, что требование о точках вариации $t = 0$ и $t = T$ существенно для теоремы 12. Ослабления здесь допустимы, если оператор A является детерминирующим (см. § 3). Аналогичные уточнения можно внести в теоремы 7, 9–11. Рассмотрим, например, ситуацию теоремы 9. Потребуем дополнительно, чтобы оператор A был абсолютно детерминирующим. Тогда вместо строгой положительности $\omega(t)$ достаточно считать, что $\omega(t)$ неотрицательна на $(0, T)$ и отлична от тождественного нуля.

Рассмотрим теперь теорему 12 с другой точки зрения. Пусть оператор A не имеет собственных значений. Тогда, как утверждает теорема 12, ненулевое решение $u(t)$ дифференциального уравнения (1) не может быть решением однородной нелокальной задачи (4). Другими словами, для такой функции $u(t)$ интеграл в нелокальном условии (9) должен быть отличен от нуля. Точный результат выглядит следующим образом.

ТЕОРЕМА 13. Пусть A – линейный замкнутый оператор в E , не имеющий собственных значений. Пусть $u(t)$ – обобщенное решение уравнения (1) на интервале $J \subset \mathbb{R}$ такое, что $\|u(t)\| > 0$ при всех $t \in J$. Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2} u(t) d\mu(t) \neq 0 \quad (29)$$

для любого отрезка $[t_1, t_2] \subset J$ и любой функции $\mu(t)$ ограниченной вариации на $[t_1, t_2]$, отличной от тождественной константы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mu(t)$ – функция скачка в какой-то одной точке $t_0 \in [t_1, t_2]$, то интеграл в (29) равен $u(t_0)$ и отличен от нуля. Здесь соотношение (29) очевидно. Пусть мера $d\mu(t)$ имеет хотя бы две точки вариации на $[t_1, t_2]$. Без ограничения общности можно считать такими точками сами t_1, t_2 . Применим теорему 12 к промежутку $[t_1, t_2]$ вместо стандартного $[0, T]$. Если (29) не выполняется, то $u(t) \equiv 0$ на $[t_1, t_2]$. Последнее противоречит условию. Доказательство завершено.

Частным случаем теоремы 13 является такое утверждение.

ТЕОРЕМА 14. Пусть A – линейный замкнутый оператор в E , не имеющий собственных значений. Пусть $u(t)$ – обобщенное решение уравнения (1) на интервале $J \subset \mathbb{R}$ такое, что $\|u(t)\| > 0$ при всех $t \in J$. Зададим конечный или счетный набор различных точек $\{\tau_k\}$ на некотором отрезке $[t_1, t_2] \subset J$. Тогда

$$\sum_k \alpha_k u(\tau_k) \neq 0 \quad (30)$$

при любых коэффициентах $\alpha_k \in \mathbb{C}$ таких, что $0 < \sum |\alpha_k| < \infty$. В частности, множество элементов $\{u(t) : t \in J\}$, образующих данное решение $u(t)$, является линейно независимым в пространстве E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема получается из теоремы 13, если $\mu(t)$ – функция скачков в точках $\tau_k \in [t_1, t_2]$ с величинами скачков α_k . Соотношение (29) переходит в (30). Доказательство остального очевидно.

Теоремы 13, 14 характеризуют *структурные свойства* решений дифференциального уравнения (1) с оператором A без собственных значений. Показано, что всякое нетривиальное решение такого уравнения подчинено обязательным закономерностям: их выражают соотношения (29), (30).

§ 5. Более общее уравнение

По-прежнему E – комплексное банахово пространство. Пусть A, B – линейные замкнутые операторы в E с областями определения $D(A), D(B)$ соответственно. Никаких других ограничений на операторы A, B не налагается.

Рассмотрим на интервале $J \subset \mathbb{R}$ уравнение

$$B \frac{du(t)}{dt} = Au(t). \quad (31)$$

Функцию $u: J \rightarrow E$ назовем *классическим решением* уравнения (31), если эта функция непрерывно дифференцируема в норме E на интервале J , ее значения $u(t)$ принадлежат $D(A)$, значения ее производной $u'(t)$ принадлежат $D(B)$, функции $Au, Bu': J \rightarrow E$ непрерывны в норме E на интервале J и равенство $Au(t) = Bu'(t)$ выполняется всюду на J . Для уравнения (31) по схеме § 1 нетрудно ввести понятие обобщенного решения. Но чтобы сократить изложение, будем рассматривать только классические решения.

Уравнение (31) было предметом многих исследований. Конечномерная теория для $E = \mathbb{R}^n$ изложена в книге [26, гл. XII]. Обзор работ по абстрактному случаю

имеется в [8, с. 177–180]. Ограничимся этими ссылками, так как пока требуется лишь минимум предварительных сведений.

Для уравнения (31) на конечном отрезке $[0, T]$ рассмотрим задачу с нелокальным условием (9). *Решением* этой задачи назовем функцию $u: [0, T] \rightarrow E$, определяющую на $[0, T]$ классическое решение уравнения (31) и удовлетворяющую условию (9) при заданном элементе $u_1 \in E$.

Поскольку нас интересует единственность решения, перейдем к однородной нелокальной задаче

$$B \frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \int_0^T u(t) d\mu(t) = 0. \quad (32)$$

Введем по формуле (6) характеристическую функцию $L(\lambda)$. Множество ее нулей по-прежнему обозначаем $\Lambda_L = \{\lambda_k\}$. Однако теперь будем сравнивать нули λ_k не с собственными значениями оператора A , а с собственными значениями операторного пучка $A - \lambda B$. Так называются значения $\lambda \in \mathbb{C}$, при которых уравнение $Af = \lambda Bf$ имеет ненулевые решения $f \in D(A) \cap D(B)$. Эти элементы f называются собственными векторами пучка $A - \lambda B$ с соответствующими собственными значениями λ .

Следует иметь в виду, что при фиксированном $\lambda \neq 0$ оператор $A - \lambda B$ на области $D(A) \cap D(B)$ может быть незамкнутым и даже незамыкаемым в E [3, с. 58, 59].

Для нелокальной задачи (32) докажем лишь основной критерий единственности. Теория, развитая в § 3, 4, повторяется с очевидными изменениями.

ТЕОРЕМА 15. Пусть A, B – линейные замкнутые операторы в банаховом пространстве E . Пусть $\mu(t)$ – скалярная функция ограниченной вариации на $[0, T]$, причем $t = 0$ и $t = T$ – точки вариации меры $d\mu(t)$. Для того чтобы нелокальная задача (32) имела только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль $\lambda_k \in \Lambda_L$ характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (6) не являлся собственным значением операторного пучка $A - \lambda B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Необходимость.* Пусть некоторый нуль $\lambda_k \in \Lambda_L$ характеристической функции $L(\lambda)$ является собственным значением пучка $A - \lambda B$ с собственным вектором $f_k \in D(A) \cap D(B)$. Это означает, что $f_k \neq 0$ и $Af_k = \lambda_k Bf_k$. Тогда функция $u(t) = e^{\lambda_k t} f_k$ будет нетривиальным решением задачи (32).

Достаточность. Пусть ни один нуль $\lambda_k \in \Lambda_L$ характеристической функции $L(\lambda)$ из формулы (6) не является собственным значением пучка $A - \lambda B$. Рассмотрим решение $u(t)$ нелокальной задачи (32) и покажем, что $u(t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$.

Как и в доказательстве теоремы 2, рассмотрим представление (11) с функциями $g_0(\lambda), g_1(\lambda)$, определенными в (12). Используя то, что $u(t)$ – решение (32), учитывая замкнутость операторов A, B , получаем

$$\begin{aligned} Ag_0(\lambda) &= \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \int_0^t e^{-\lambda s} Au(s) ds = \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \int_0^t e^{-\lambda s} Bu'(s) ds \\ &= B \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \int_0^t e^{-\lambda s} u'(s) ds \\ &= B \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \left(e^{-\lambda t} u(t) - u(0) + \lambda \int_0^t e^{-\lambda s} u(s) ds \right) \\ &= B(-L(\lambda)u(0) + \lambda g_0(\lambda)). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
 Ag_1(\lambda) &= \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \int_t^T e^{\lambda(T-s)} Au(s) ds = \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \int_t^T e^{\lambda(T-s)} Bu'(s) ds \\
 &= B \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \int_t^T e^{\lambda(T-s)} u'(s) ds \\
 &= B \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \left(u(T) - e^{\lambda(T-t)} u(t) + \lambda \int_t^T e^{\lambda(T-s)} u(s) ds \right) \\
 &= B(L(\lambda)u(T) + \lambda g_1(\lambda)).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$Ag_0(\lambda) = B(\lambda g_0(\lambda) - L(\lambda)u(0)), \quad Ag_1(\lambda) = B(\lambda g_1(\lambda) + L(\lambda)u(T)). \quad (33)$$

Векторные функции $g_0(\lambda)$, $g_1(\lambda)$, $\lambda g_0(\lambda) - L(\lambda)u(0)$, $\lambda g_1(\lambda) + L(\lambda)u(T)$, а также

$$\begin{aligned}
 Ag_0(\lambda) &= \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \int_0^t e^{-\lambda s} Au(s) ds, \\
 Ag_1(\lambda) &= \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t) \int_t^T e^{\lambda(T-s)} Au(s) ds
 \end{aligned}$$

являются целыми по переменной $\lambda \in \mathbb{C}$. Поэтому соотношения (33) можно дифференцировать по λ любое число раз и вносить производную под замкнутые операторы A, B . Получаем

$$\begin{aligned}
 Ag_0^{(n)}(\lambda) &= B(\lambda g_0^{(n)}(\lambda) + n g_0^{(n-1)}(\lambda) - L^{(n)}(\lambda)u(0)), \\
 Ag_1^{(n)}(\lambda) &= B(\lambda g_1^{(n)}(\lambda) + n g_1^{(n-1)}(\lambda) + L^{(n)}(\lambda)u(T)),
 \end{aligned} \quad (34)$$

где $n = 1, 2, \dots$.

Рассмотрим значение λ , совпадающее с нулем λ_k характеристической функции $L(\lambda)$. По предположению λ_k не является собственным значением пучка $A - \lambda B$. Из (33) следует, что $g_0(\lambda_k) = g_1(\lambda_k) = 0$. Если λ_k – кратный нуль $L(\lambda)$, то из (34) по индукции заключаем, что λ_k – нуль не меньшей кратности для векторных целых функций $g_0(\lambda)$, $g_1(\lambda)$.

Итак, при сделанных предположениях всякий нуль $\lambda_k \in \Lambda_L$ характеристической функции $L(\lambda)$ будет нулем не меньшей кратности для векторных целых функций $g_0(\lambda)$, $g_1(\lambda)$, определенных в (12). Этот вывод совпадает с выводом п. 1° в доказательстве из § 2. Далее дословно повторяются рассуждения пп. 2°–4°. Теорема доказана.

§ 6. Более общее нелокальное условие

Пусть E – комплексное банахово пространство. Пусть A – линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A) \subset E$.

Для уравнения (1) на конечном отрезке $[0, T]$ рассмотрим задачу с нелокальным условием

$$\int_0^T u(t) d\mu_0(t) + \int_0^T \frac{du(t)}{dt} d\mu_1(t) = u_1. \quad (35)$$

Здесь u_1 – заданный элемент E . Скалярные функции $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ имеют ограниченные вариации на $[0, T]$.

Решением задачи (1), (35) назовем функцию $u: [0, T] \rightarrow E$, определяющую классическое решение уравнения (1) на отрезке $[0, T]$ и удовлетворяющую условию (35) при заданном элементе $u_1 \in E$. Использование только классических решений оправдано: в условии (35) помимо интеграла от $u(t)$ есть интеграл от производной $u'(t)$.

Соответствующая однородная задача имеет вид

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad \int_0^T u(t) d\mu_0(t) + \int_0^T \frac{du(t)}{dt} d\mu_1(t) = 0. \quad (36)$$

Покажем, что изучение нелокальной задачи (36) можно свести к изучению первоначальной нелокальной задачи (4).

Начнем с предварительного анализа. Введем оператор нелокального условия

$$\Gamma(u(t)) \equiv \int_0^T u(t) d\mu_0(t) + \int_0^T \frac{du(t)}{dt} d\mu_1(t) \quad (37)$$

с характеристической функцией

$$M(\lambda) = \int_0^T e^{\lambda t} d\mu_0(t) + \lambda \int_0^T e^{\lambda t} d\mu_1(t), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (38)$$

Функция $M(\lambda)$ получается из (37) при замене $u(t)$ на $e^{\lambda t}$.

Сразу заметим, что при определенном сочетании функций $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ нелокальный оператор (37) может вырождаться. Например,

$$\Gamma(u(t)) \equiv u(T) - u(0) - \int_0^T \frac{du(t)}{dt} dt \equiv 0$$

(тривиальный случай) или

$$\Gamma(u(t)) \equiv u(T) - \int_0^T \frac{du(t)}{dt} dt = u(0)$$

(оператор Коши) и т.д. Во избежание подобных ситуаций введем понятие невырожденного нелокального оператора (37).

Нелокальный оператор (37) назовем *невырожденным*, если его характеристическая функция $M(\lambda)$ из формулы (38) имеет бесконечно много различных нулей (и не равна нулю тождественно). Во всех остальных случаях (т.е. когда нулей совсем нет, либо когда число их конечно, либо когда $M(\lambda) \equiv 0$) нелокальный оператор (37) назовем *вырожденным*. При этом вырожденным считается также соответствующее условие (35). Полное описание вырожденных нелокальных условий выглядит следующим образом.

ЛЕММА 2. Пусть скалярные функции $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ имеют ограниченные вариации на $[0, T]$ и определяют нелокальный оператор $\Gamma(u(t))$ по формуле (37). Следующие предположения эквивалентны:

- 1) нелокальный оператор (37) является вырожденным;
- 2) характеристическая функция (38) представима в виде

$$M(\lambda) = (C_0 + C_1\lambda)e^{a\lambda}, \quad C_0, C_1 \in \mathbb{C}, \quad a \in [0, T]; \quad (39)$$

3) существует значение $a \in [0, T]$ такое, что на каждом из промежутков $[0, a]$ и $[a, T]$ функция $\mu_1(t)$, продолженная по непрерывности в точку $t = a$, является абсолютно непрерывной и удовлетворяет соотношениям $\mu'_1(t) = \mu_0(t) - \mu_0(0)$ при п.в. $t \in [0, a]$ и $\mu'_1(t) = \mu_0(t) - \mu_0(T)$ при п.в. $t \in [a, T]$;

4) нелокальный оператор (37) (быть может, после каких-то эквивалентных преобразований) имеет вид $\Gamma(u(t)) = C_0u(a) + C_1u'(a)$ с теми же значениями a , C_0 , C_1 , что и в (39).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Разъясним условие 3). Если $a \in (0, T)$, то абсолютно непрерывными предполагаются функции

$$\mu_{1,0}(t) \equiv \begin{cases} \mu_1(t), & 0 \leq t < a, \\ \mu_1(a-0), & t = a, \end{cases} \quad \mu_{1,1}(t) \equiv \begin{cases} \mu_1(a+0), & t = a, \\ \mu_1(t), & a < t \leq T, \end{cases}$$

на промежутках $[0, a]$ и $[a, T]$ соответственно. При $a = T$ или $a = 0$ только одна из этих функций считается абсолютно непрерывной (на всем $[0, T]$), а другая вырождается и не рассматривается. Заметим, что в самой точке $t = a$ исходная функция $\mu_1(t)$ может иметь скачок (разрыв), величина которого совпадает со значением $C_1 \in \mathbb{C}$ из пп. 2) и 4). Вторая константа $C_0 \in \mathbb{C}$ определяется равенством $C_0 = \mu_0(T) - \mu_0(0)$ (см. доказательство леммы 2).

Лемма 2 и две следующие леммы 3, 4 имеют чисто технический характер. Чтобы упростить сейчас изложение, их доказательства собраны вместе в конце настоящего параграфа.

Согласно п. 4) леммы 2 исследование нелокальной задачи с вырожденным оператором (37) сводится к задаче типа задачи Коши. Здесь нелокальное условие сосредоточено в одной точке $t = a$, т.е. не является собственно “нелокальным”. Эта ситуация выходит за пределы интересов настоящей статьи. Будем рассматривать только невырожденный случай. Он полностью определяется тем, что функции $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$, задающие нелокальный оператор (37), не подчиняются требованию п. 3) леммы 2 ни при каком $a \in [0, T]$. Другими словами, при каждом $a \in [0, T]$ хотя бы что-нибудь из этого требования не выполняется.

Пусть $\Lambda_M = \{\lambda_k\}$ – счетное множество нулей характеристической функции $M(\lambda)$ из формулы (38). Фиксируем один такой нуль, обозначив его λ_0 .

ЛЕММА 3. *Предположим, что скалярные функции $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ имеют ограниченные вариации на $[0, T]$ и определяют невырожденный нелокальный оператор $\Gamma(u(t))$ по формуле (37). Пусть $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ – нуль характеристической функции $M(\lambda)$ из формулы (38). Введем новую функцию*

$$\mu(t) = \int_0^t e^{\lambda_0(s-t)} (\mu_0(s) - \mu_0(0)) ds - \int_0^t e^{\lambda_0(s-t)} d(\mu_1(s) - \mu_1(0)), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (40)$$

считая по определению $\mu(0) = 0$. Тогда для любого классического решения $u(t)$ уравнения (1) на $[0, T]$ справедливо соотношение

$$\Gamma(u(t)) = (\lambda_0 - A) \int_0^T u(t) d\mu(t). \quad (41)$$

Характеристическая функция $M(\lambda)$ представима в виде

$$M(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda) \int_0^T e^{\lambda t} d\mu(t), \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (42)$$

(При этом функция $\mu(t)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, T]$ и значения $\mu(t)$ в каждой внутренней точке $t \in (0, T)$ совпадают с одним из пределов $\mu(t+0)$ или $\mu(t-0)$.)

Лемма 3 подсказана нам работой [27]. Формула (42) непосредственно восходит к этой работе, а предыдущая формула (41) дает простое, но полезное обобщение. С помощью (41) будет осуществлен переход от нелокальной задачи (36) к исходной нелокальной задаче (4). Охарактеризуем еще поведение функции $\mu(t)$ на границах отрезка $[0, T]$.

ЛЕММА 4. В условиях леммы 3 считаем, что функции $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ определяют функцию $\mu(t)$ формулой (40). Тогда:

- 1) для того чтобы $\mu(t) \equiv \mu(0)$ при всех $t \in [0, \varepsilon]$ с каким-нибудь значением $\varepsilon > 0$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\mu_1(t)$ была абсолютно непрерывной на $[0, \varepsilon]$ и чтобы $\mu_1'(t) = \mu_0(t) - \mu_0(0)$ при п.в. $t \in [0, \varepsilon]$;
- 2) для того чтобы $\mu(t) \equiv \mu(T)$ при всех $t \in [T - \varepsilon, T]$ с каким-нибудь значением $\varepsilon > 0$, необходимо и достаточно, чтобы функция $\mu_1(t)$ была абсолютно непрерывной на $[T - \varepsilon, T]$ и чтобы $\mu_1'(t) = \mu_0(t) - \mu_0(T)$ при п.в. $t \in [T - \varepsilon, T]$.

Таким образом, $t = 0$ является точкой вариации меры $d\mu(t)$ тогда и только тогда, когда функции $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ ни при каком $\varepsilon > 0$ не подчиняются требованию п. 1) леммы 4. Коротко этот факт будем записывать так:

$$d\mu_1(t) \not\equiv (\mu_0(t) - \mu_0(0)) dt \text{ при } t \rightarrow 0+. \quad (43)$$

Аналогично, $t = T$ является точкой вариации меры $d\mu(t)$ тогда и только тогда, когда функции $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ ни при каком $\varepsilon > 0$ не подчиняются требованию п. 2) леммы 4. Краткая запись для этого факта следующая:

$$d\mu_1(t) \not\equiv (\mu_0(t) - \mu_0(T)) dt \text{ при } t \rightarrow T-. \quad (44)$$

Перейдем к основному результату настоящего параграфа.

ТЕОРЕМА 16. Пусть A – линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве E . Пусть $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ – скалярные функции ограниченной вариации на $[0, T]$ и выполнены соотношения (43), (44). Для того чтобы нелокальная задача (36) имела только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль $\lambda_k \in \Lambda_M$ характеристической функции $M(\lambda)$ из формулы (38) не являлся собственным значением оператора A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть некоторый нуль $\lambda_k \in \Lambda_M$ является собственным значением оператора A с собственным вектором $f_k \in D(A)$, $f_k \neq 0$. Непосредственно проверяется, что функция $u(t) = e^{\lambda_k t} f_k$ является нетривиальным решением нелокальной задачи (36).

Достаточность. Из соотношений (43), (44) следует, что условие 3) леммы 2 не может быть выполнено ни при каком $a \in [0, T]$. Поэтому нелокальный оператор (37) является невырожденным и характеристическая функция $M(\lambda)$ имеет бесконечно много нулей. Пусть ни один нуль $\lambda_k \in \Lambda_M$ не является собственным значением оператора A . Рассмотрим решение $u(t)$ нелокальной задачи (36). Покажем, что $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$.

Фиксируем какой-нибудь нуль характеристической функции $M(\lambda)$, обозначив его λ_0 . При помощи (40) определим на $[0, T]$ функцию $\mu(t)$. По лемме 4 $t = 0$ и $t = T$ – точки вариации меры $d\mu(t)$. Воспользуемся леммой 3. Имеем соотношение (41), где $\Gamma(u(t)) = 0$ по определению решения $u(t)$. Так как λ_0 не является собственным значением A , то из (41) следует равенство

$$\int_0^T u(t) d\mu(t) = 0.$$

Но это в точности условие (10). Таким образом, функция $u(t)$ является классическим решением однородной нелокальной задачи (4) с $\mu(t)$ из формулы (40). Для этой задачи (4) определим при помощи (6) характеристическую функцию $L(\lambda)$. Соотношение (42) показывает, что все нули функции $L(\lambda)$ будут нулями функции $M(\lambda)$. Следовательно, ни один нуль характеристической функции $L(\lambda)$ не является собственным значением оператора A . По теореме 2, примененной к полученной задаче (4), заключаем, что $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, что и требовалось доказать.

Теорему 16 можно уточнить так же, как в § 3, с помощью дополнительных ограничений на оператор A . Отметим для примера такой результат.

ТЕОРЕМА 17. Пусть A – линейный замкнутый оператор в банаховом пространстве E . Пусть $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ – скалярные функции ограниченной вариации на $[0, T]$, определяющие невырожденный нелокальный оператор (37). Предположим, что выполнено любое из следующих условий:

- 1) оператор A детерминирует будущее, функции $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ удовлетворяют требованию (43);
- 2) оператор A детерминирует прошлое, функции $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ удовлетворяют требованию (44);
- 3) оператор A абсолютно детерминирующий.

Тогда справедлив критерий единственности: для того чтобы нелокальная задача (36) имела только тривиальное решение $u(t) \equiv 0$ на $[0, T]$, необходимо и достаточно, чтобы ни один нуль $\lambda_k \in \Lambda_M$ характеристической функции $M(\lambda)$ из формулы (38) не являлся собственным значением оператора A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Укажем лишь отличия от доказательства теоремы 16. Суть их проста: ситуация сводится не к теореме 2, а к уточненной теореме 3. Вначале точно так же по формуле (40) строится функция $\mu(t)$. Вводится нелокальная

задача (4) с характеристической функцией $L(\lambda)$ из формулы (6). По условию нелокальный оператор (37) является невырожденным. Его характеристическая функция $M(\lambda) \not\equiv 0$ имеет бесконечно много нулей. В силу (42) бесконечно много нулей будет также у функции $L(\lambda) \not\equiv 0$. Поэтому мера $d\mu(t)$ имеет точки вариации на $[0, T]$. В условиях п. 1) такой точкой вариации будет $t = 0$, в условиях п. 2) – точка $t = T$ (оба раза по лемме 4), а в условиях п. 3) достаточно самого утверждения о наличии точек вариации. Теперь к нелокальной задаче (4) применима теорема 3. Отсюда, с учетом остальных рассуждений из доказательства теоремы 16, следует искомый результат для задачи (36).

Осталось доказать леммы 2–4, на которых основаны рассуждения, приведенные выше.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть нелокальный оператор (37) является вырожденным. Рассмотрим характеристическую функцию (38). Если $M(\lambda) \equiv 0$, то соотношение (39) выполняется при $C_0 = C_1 = 0$ с произвольным $a \in [0, T]$. Если $M(\lambda) \not\equiv 0$, то это – целая функция порядка не больше 1 с конечным числом нулей (или совсем без них). Всякая такая функция представима в виде $M(\lambda) = P(\lambda)e^{a\lambda}$, где $P(\lambda)$ – полином, не равный тождественно нулю, и $a \in \mathbb{C}$. Используя явный вид (38), замечаем, что $|M(\lambda)/\lambda| = O(1)$ при $\lambda = iy \rightarrow \infty$, $y \in \mathbb{R}$. Поэтому $a \in \mathbb{R}$ и $P(\lambda) = C_0 + C_1\lambda$. Соотношения $a \geq 0$ и $a \leq T$ следуют из оценок роста для (38) на вещественной оси $\lambda = x$, $x \in \mathbb{R}$. Первая импликация леммы доказана.

2) $\Rightarrow$ 3). Рассмотрим представление (39) с некоторыми $C_0, C_1 \in \mathbb{C}$ и $a \in [0, T]$. Для данного a введем на $[0, T]$ вспомогательную функцию $\eta_a(t)$, выражающую единичный скачок в точке $t = a$ (точнее, если $a = 0$, то $\eta_a(t) = 0$ при $t = 0$ и $\eta_a(t) = 1$ при $0 < t \leq T$; если $a \in (0, T)$, то $\eta_a(t) = 0$ при $0 \leq t \leq a$ и $\eta_a(t) = 1$ при $a < t \leq T$; если $a = T$, то $\eta_a(t) = 0$ при $0 \leq t < T$ и $\eta_a(t) = 1$ при $t = T$).

С помощью $\eta_a(t)$ запишем (39) в виде

$$M(\lambda) \equiv \int_0^T e^{\lambda t} d\mu_0(t) + \lambda \int_0^T e^{\lambda t} d\mu_1(t) = C_0 \int_0^T e^{\lambda t} d\eta_a(t) + C_1 \lambda \int_0^T e^{\lambda t} d\eta_a(t).$$

Интегрируя по частям первый и третий интегралы этого выражения, получим

$$\begin{aligned} e^{\lambda T} \mu_0(T) - \mu_0(0) - \lambda \int_0^T e^{\lambda t} \mu_0(t) dt + \lambda \int_0^T e^{\lambda t} d\mu_1(t) \\ = C_0 e^{\lambda T} - C_0 \lambda \int_0^T e^{\lambda t} \eta_a(t) dt + C_1 \lambda \int_0^T e^{\lambda t} d\eta_a(t). \end{aligned}$$

Перенесем слагаемые в левую часть и заменим $e^{\lambda T}$ по правилу

$$e^{\lambda T} = \lambda \int_0^T e^{\lambda t} dt + 1.$$

После элементарных подсчетов имеем

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^T e^{\lambda t} \{d\mu_1(t) - [\mu_0(t) - \mu_0(T) + C_0 - C_0\eta_a(t)] dt - C_1 d\eta_a(t)\} \\ + \{\mu_0(T) - \mu_0(0) - C_0\} = 0. \end{aligned}$$

Равенство нулю выполнено при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Отсюда ясно, что

$$\begin{aligned}\mu_0(T) - \mu_0(0) &= C_0, \\ d\mu_1(t) &\equiv [\mu_0(t) - \mu_0(T) + C_0 - C_0\eta_a(t)] dt + C_1 d\eta_a(t).\end{aligned}$$

Подставим первое соотношение во второе. Результат запишем в виде

$$d\mu_1(t) \equiv [\mu_0(t) - \{\mu_0(0) + (\mu_0(T) - \mu_0(0))\eta_a(t)\}] dt + C_1 d\eta_a(t).$$

Это тождество дает искомое утверждение 3). Необходимо учесть только определение функции $\eta_a(t)$ и замечание 5.

3) $\Rightarrow$ 4). Пусть функции $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ удовлетворяют условию 3) леммы 2 с некоторым $a \in [0, T]$. Заметим, что при $t = a$ функция $\mu_1(t)$ может иметь скачок, величину которого обозначим как C_1 ($C_1 \in \mathbb{C}$).

Воспользуемся условием 3) для преобразований нелокального оператора:

$$\begin{aligned}\Gamma(u(t)) &\equiv \int_0^T u(t) d\mu_0(t) + \int_0^T u'(t) d\mu_1(t) = \int_0^T u(t) d\mu_0(t) \\ &\quad + \int_0^a u'(t)(\mu_0(t) - \mu_0(0)) dt + \int_a^T u'(t)(\mu_0(t) - \mu_0(T)) dt + C_1 u'(a).\end{aligned}$$

Интегрируя по частям интегралы, содержащие $u'(t)$, получим

$$\begin{aligned}\Gamma(u(t)) &= \int_0^T u(t) d\mu_0(t) + (\mu_0(a) - \mu_0(0))u(a) - \int_0^a u(t) d\mu_0(t) \\ &\quad - (\mu_0(a) - \mu_0(T))u(a) - \int_a^T u(t) d\mu_0(t) + C_1 u'(a).\end{aligned}$$

После сокращений имеем

$$\Gamma(u(t)) = (\mu_0(T) - \mu_0(0))u(a) + C_1 u'(a) = C_0 u(a) + C_1 u'(a),$$

где $C_0 \equiv \mu_0(T) - \mu_0(0)$. В выкладках предполагалось, что a – внутренняя точка $(0, T)$. Если a совпадает с одной из границ $t = 0$ или $t = T$, то рассуждения соответственно упрощаются. Импликация 3) $\Rightarrow$ 4) доказана.

4) $\Rightarrow$ 1). Пусть нелокальный оператор (37) с помощью эквивалентных преобразований приводится к виду $\Gamma(u(t)) = C_0 u(a) + C_1 u'(a)$. Те же преобразования, примененные к характеристической функции (38), дадут соотношение $M(\lambda) = (C_0 + C_1 \lambda)e^{a\lambda}$. Положение с нулями у такой функции $M(\lambda)$ соответствует вырожденному случаю.

Лемма 2 полностью доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Определим на $[0, T]$ функцию $\mu(t)$ формулой (40). Интегрируем в (40) по частям второй интеграл:

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \int_0^t e^{\lambda_0(s-t)}(\mu_0(s) - \mu_0(0)) ds \\ &\quad + \lambda_0 \int_0^t e^{\lambda_0(s-t)}(\mu_1(s) - \mu_1(0)) ds - (\mu_1(t) - \mu_1(0)).\end{aligned}\quad (45)$$

Два первых слагаемых в (45) абсолютно непрерывны, а последнее имеет тот же характер, что и $\mu_1(t)$. Это означает, что $\mu(t)$ – функция с ограниченной вариацией на $[0, T]$. Значение $\mu(t)$ в каждой внутренней точке $t \in (0, T)$ совпадает с одним из пределов $\mu(t+0)$ или $\mu(t-0)$ (что следует из аналогичных предположений для $\mu_1(t)$, оговоренных в § 1).

Пусть $u(t)$ – классическое решение уравнения (1) на $[0, T]$. Докажем соотношение (41). В нем фигурирует интеграл

$$\int_0^T u(t) d\mu(t) \quad (46)$$

с определенной выше функцией $\mu(t)$. Выразим (46) через интегралы с исходными функциями $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$.

Для сокращения записей положим

$$\sigma_k(t) = \int_0^t e^{\lambda_0(s-t)} d\mu_k(s), \quad k = 0, 1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Уточним, что $\sigma_k(0) = 0$. Заметим, что $\sigma_0(T) + \lambda_0 \sigma_1(T) = M(\lambda_0)e^{-\lambda_0 T} = 0$, ибо λ_0 есть нуль функции $M(\lambda)$. Справедливы очевидные преобразования

$$\begin{aligned}\sigma_k(t) &\equiv \int_0^t e^{\lambda_0(s-t)} d\mu_k(s) = \int_0^t e^{\lambda_0(s-t)} d(\mu_k(s) - \mu_k(0)) \\ &= \mu_k(t) - \mu_k(0) - \lambda_0 \int_0^t e^{\lambda_0(s-t)}(\mu_k(s) - \mu_k(0)) ds \\ &= \frac{d}{dt} \int_0^t e^{\lambda_0(s-t)}(\mu_k(s) - \mu_k(0)) ds,\end{aligned}\quad (47)$$

где последнее равенство понимается при п.в. $0 \leq t \leq T$. Проанализируем (47). Предпоследняя часть этой формулы показывает, что функции $\sigma_0(t)$, $\sigma_1(t)$ имеют ограниченные вариации на $[0, T]$. Комбинируя предпоследнюю часть вместе с последней, получаем

$$\int_0^T u(t) d\sigma_k(t) = \int_0^T u(t) d\mu_k(t) - \lambda_0 \int_0^T u(t) \sigma_k(t) dt. \quad (48)$$

Наконец, из (47) следует, что можно выразить интеграл (46) по формуле

$$\int_0^T u(t) d\mu(t) = \int_0^T u(t) \sigma_0(t) dt + \lambda_0 \int_0^T u(t) \sigma_1(t) dt - \int_0^T u(t) d\mu_1(t). \quad (49)$$

Для доказательства (49) достаточно сравнить (45) и последнюю часть в (47).

Применим к (49) оператор A , проинтегрируем два слагаемых по частям и воспользуемся формулой (48). Последовательно получаем

$$\begin{aligned}
 A \int_0^T u(t) d\mu(t) &= \int_0^T u'(t) \sigma_0(t) dt + \lambda_0 \int_0^T u'(t) \sigma_1(t) dt - \int_0^T u'(t) d\mu_1(t) \\
 &= (\sigma_0(T) + \lambda_0 \sigma_1(T)) u(T) - \int_0^T u(t) d\sigma_0(t) \\
 &\quad - \lambda_0 \int_0^T u(t) d\sigma_1(t) - \int_0^T u'(t) d\mu_1(t) \\
 &= 0 \cdot u(T) - \int_0^T u(t) d\mu_0(t) + \lambda_0 \int_0^T u(t) \sigma_0(t) dt \\
 &\quad - \lambda_0 \int_0^T u(t) d\mu_1(t) + \lambda_0^2 \int_0^T u(t) \sigma_1(t) dt - \int_0^T u'(t) d\mu_1(t).
 \end{aligned}$$

После соответствующей группировки с учетом равенства (49) имеем

$$A \int_0^T u(t) d\mu(t) = -\Gamma(u(t)) + \lambda_0 \int_0^T u(t) d\mu(t).$$

Это искомое соотношение (41).

Предыдущие выкладки основаны лишь на том, что функция $u(t)$ непрерывно дифференцируема на $[0, T]$ и подчинена уравнению $u'(t) = Au(t)$ с таким символом A , что его можно вносить под знак интеграла. Функция $e^{\lambda t}$ удовлетворяет тем же условиям при $A = \lambda$ для любого $\lambda \in \mathbb{C}$. Заменим в (41) функцию $u(t)$ на $e^{\lambda t}$ и оператор A на λ . Получим равенство (42). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 4. Вновь определим функцию $\mu(t)$ формулой (40). Фиксируем произвольную точку $a \in [0, T]$ и рассмотрим условие: $\mu(t) \equiv \mu(a)$ в замкнутом интервале $J \subset [0, T]$, содержащем a . На основании (45) заключаем, что это условие эквивалентно соотношению

$$\begin{aligned}
 e^{\lambda_0 t} \mu(a) &= \int_0^t e^{\lambda_0 s} (\mu_0(s) - \mu_0(0)) ds \\
 &\quad + \lambda_0 \int_0^t e^{\lambda_0 s} (\mu_1(s) - \mu_1(0)) ds - e^{\lambda_0 t} (\mu_1(t) - \mu_1(0)), \quad (50)
 \end{aligned}$$

выполненному при всех $t \in J$. Заметим, что при $t = a$ равенство (50) выполняется по определению. Функция $e^{\lambda_0 t} \mu(a)$ и оба интеграла в (50) абсолютно непрерывны на J . Поэтому соотношение (50) эквивалентно абсолютной непрерывности функции $\mu_1(t)$ на J вместе с соотношением, полученным при дифференцировании:

$$\begin{aligned}
 \lambda_0 e^{\lambda_0 t} \mu(a) &= e^{\lambda_0 t} (\mu_0'(t) - \mu_0'(0)) + \lambda_0 e^{\lambda_0 t} (\mu_1'(t) - \mu_1'(0)) \\
 &\quad - \lambda_0 e^{\lambda_0 t} (\mu_1(t) - \mu_1(0)) - e^{\lambda_0 t} \mu_1'(t)
 \end{aligned}$$

для п.в. $t \in J$. После сокращений и преобразований имеем

$$\mu_1'(t) = \mu_0(t) - \mu_0(0) - \lambda_0 \mu(a). \quad (51)$$

Итак, для того чтобы $\mu(t) \equiv \mu(a)$ всюду на J , необходимо и достаточно, чтобы функция $\mu_1(t)$ была абсолютно непрерывной на J и чтобы соотношение (51) выполнялось при п.в. $t \in J$.

Пусть $a = 0$. Так как $\mu(0) = 0$ (по определению из леммы 3), то равенство (51) приходит к виду $\mu'_1(t) = \mu_0(t) - \mu_0(0)$. Таким образом, $\mu(t) \equiv \mu(0)$ при всех $t \in [0, \varepsilon]$ с каким-нибудь малым $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда функция $\mu_1(t)$ абсолютно непрерывна на $[0, \varepsilon]$ и $\mu'_1(t) = \mu_0(t) - \mu_0(0)$ при п.в. $t \in [0, \varepsilon]$.

Пусть $a = T$. Используя (40) и учитывая, что λ_0 — нуль функции $M(\lambda)$, получаем

$$\begin{aligned}\lambda_0 \mu(T) &= \lambda_0 \int_0^T e^{\lambda_0(s-T)} (\mu_0(s) - \mu_0(0)) ds - \lambda_0 \int_0^T e^{\lambda_0(s-T)} d(\mu_1(s) - \mu_1(0)) \\ &= \mu_0(T) - \mu_0(0) - \int_0^T e^{\lambda_0(s-T)} d\mu_0(s) - \lambda_0 \int_0^T e^{\lambda_0(s-T)} d\mu_1(s) \\ &= \mu_0(T) - \mu_0(0) - M(\lambda_0) e^{-\lambda_0 T} = \mu_0(T) - \mu_0(0).\end{aligned}$$

Равенство (51) приходит к виду

$$\mu'_1(t) = \mu_0(t) - \mu_0(0) - (\mu_0(T) - \mu_0(0)) = \mu_0(t) - \mu_0(T).$$

Таким образом, $\mu(t) \equiv \mu(T)$ при всех $t \in [T - \varepsilon, T]$ с каким-нибудь малым $\varepsilon > 0$ тогда и только тогда, когда функция $\mu_1(t)$ абсолютно непрерывна на $[T - \varepsilon, T]$ и $\mu'_1(t) = \mu_0(t) - \mu_0(T)$ при п.в. $t \in [T - \varepsilon, T]$. Лемма доказана.

Теоремы 16, 17 полностью обоснованы.

Автор благодарен А. И. Прилепко и Ю. С. Эйдельману, под влиянием которых сформировались многие идеи этой работы. Очень полезными были консультации А. М. Седлецкого. В частности, указание на заметку [27] позволило существенно упростить первоначальное изложение в § 6.

Список литературы

1. Hille E. The abstract Cauchy problem and Cauchy's problem for parabolic differential equations // J. d'Analyse Math. 1954. V. 3. P. 81–196.
2. Hille E. Some aspect of Cauchy's problem // Proc. Intern. Congr. of Math, Amsterdam (Sept. 2 – Sept. 9, 1954). V. 3. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1956. P. 109–116.
3. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
4. Любич Ю. И. К теореме единственности решения абстрактной задачи Коши // УМН. 1961. Т. 16. № 5. С. 181–182.
5. Любич Ю. И. Классическое и локальное преобразование Лапласа в абстрактной задаче Коши // УМН. 1966. Т. 21. № 3. С. 3–51.
6. Иванов В. К., Мельникова И. В., Филингов А. И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М.: Физматлит, 1995.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ИЛ, 1951.
8. Крейн С. Г., Хазан М. И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Итоги науки и техники. Математический анализ. Т. 21. М.: ВИНТИ, 1983. С. 130–264.
9. Шелухин В. В. Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений // Сиб. матем. журн. 1993. Т. 34. № 2. С. 191–207.
10. Дезин А. А. Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980.

11. *Vejvoda O. et. al.* Partial differential equations: time-periodic solutions. The Hague: Martinus Nijhoff Publishers, 1982.
12. *Хилл Э.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1951.
13. *Pólya G.* Über die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen // Math. Zeit. 1918. Bd. 2. № 3/4. S. 352–383.
14. *Titchmarsh E. C.* The zeros of certain integral functions // Proc. London Math. Soc. 1926. V. 25. № 4. P. 283–302.
15. *Cartwright M. L.* The zeros of certain integral functions // Quart. J. Math. 1930. V. 1. № 1. P. 38–59.
16. *Sedletskii A. M.* Fourier transforms and approximations. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 2000.
17. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М.: Наука, 1976.
18. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
19. *Леонтьев А. Ф.* О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1965. Т. 29. № 2. С. 269–328.
20. *Pólya G.* Über ganze Funktionen vom Minimaltypus der Ordnung 1 // Jahresbericht Deutsch. Math. Vereinigung. 1931. Bd. 40. Aufgaben und Lösungen. Aufgabe 105. S. 80; // Ibid. 1933. Bd. 43. Aufgaben und Lösungen. Lösungen der Aufgabe 105. S. 10–13.
21. *Крейн С. Г.* О классах корректности для некоторых граничных задач // ДАН СССР. 1957. Т. 114. № 6. С. 1162–1165.
22. *Орловский Д. Г.* К задаче определения параметра эволюционного уравнения // Дифф. уравнения. 1990. Т. 26. № 9. С. 1614–1621.
23. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. М.: Наука, 1978.
24. *Тихонов И. В.* О разрешимости задачи с нелокальным интегральным условием для дифференциального уравнения в банаховом пространстве // Дифф. уравн. 1998. Т. 34. № 6. С. 841–843.
25. *Тихонов И. В.* Соображения монотонности в обратной задаче для абстрактного дифференциального уравнения // Интегральные преобр. и спец. ф-ции. Информ. бюллетень. 2001. Т. 2. № 1. С. 119–128.
26. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967.
27. *Седлецкий А. М.* О полноте системы экспонент в пространствах дифференцируемых функций // Вопросы теории сигналов в радиотехнических системах. Тр. МЭИ. Тематический сб. Вып. 334. М., 1977. С. 98–103.

Поступило в редакцию
21.XI.2001