Общероссийский математический портал

А. Н. Тюрин, Модели Дельцана пространств модулей, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 2, 167–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/im430>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 06:37:59

УДК 512.723

А. Н. Тюрин

Модели Дельцана пространств модулей

Для каждого значения рода g строятся гладкое полное рациональное поляризованное алгебраическое многообразие (DM_g, H) и эффективный дивизор на нем с нормальными пересечениями компонент $D = \bigcup D_i$ такие, что для каждого пространства модулей $M_\Sigma(2, 0)$ полустабильных топологически тривиальных векторных расслоений ранга 2 на алгебраической кривой Σ рода g существует голоморфный изоморфизм $f: M_\Sigma(2, 0) \setminus K_g \rightarrow DM_g \setminus D$, где K_g – куммерово многообразие якобиана кривой Σ , переводящий поляризацию многообразия DM_g в тэта-дивизор $H^0(M_\Sigma(2, 0), \Theta^k) = H^0(DM_g, H^k)$.

Библиография: 12 наименований.

§ 1. Введение

На последней конференции GAEL¹ Б. Оксбери поставил вопрос о “топологической” идентификации многообразия модулей $M_\Sigma(2, 0)$ с трехмерным комплексным проективным пространством $\mathbb{CP}^3$ для любой кривой Σ рода 2. Чтобы понять сущность этой проблемы, напомним, что как вещественное многообразие это пространство модулей является пространством $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$ классов представлений фундаментальной группы кривой $\pi_1(\Sigma)$ в $SU(2)$. Проблема заключается в идентификации этого пространства с пространством $\mathbb{CP}^3$.

Известно, что комплексная структура на компактной римановой поверхности Σ рода 2 индуцирует комплексную структуру на $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$ как на пространстве модулей $M_\Sigma(2, 0)$ полустабильных ранга 2 голоморфных векторных расслоений с тривиальным детерминантом. В этой комплексной структуре пространство $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$ отождествляется с пространством $\mathbb{CP}^3$. Однако хотелось бы увидеть прямое отождествление пространства классов представлений $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$ с трехмерным проективным пространством.

В частности, для этого случая характерно, что:

- 1) многообразие модулей $M_\Sigma(2, 0)$ как алгебраическое многообразие не зависит от выбора комплексной структуры на Σ ;
- 2) многообразие модулей $M_\Sigma(2, 0)$ рационально;
- 3) пространство конформных блоков (т. е. голоморфных сечений поляризации) не зависит от модулей кривой.

¹Géométrie algébrique en liberté (9th edition, 19th–23rd March 2001), школа организована EAGER, EU project Contract No. HPRN-CT-2000-00099.

Пространство $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$ классов представлений фундаментальной группы $\pi_1(\Sigma)$ в $\text{SU}(2)$ допускает каноническую симплектическую форму Ω , которая определяется чисто топологически (см. [2]). Следовательно, в этой ситуации естественно привлечь технику симплектической геометрии, а точнее, технику гамильтоновых действий торов, т.е. *торической симплектической геометрии* (см. монографию [8] – основной источник для технических деталей).

Напомним основные конструкции теории торических многообразий. Пусть (M, ω) – симплектическое многообразие размерности $2n$ с гладким гамильтоновым действием n -мерного тора T^n , т.е. существует отображение $f: T^n \rightarrow \text{Diff } M$ такое, что действия образов сохраняют форму ω . Тогда координаты “действие – угол” определяют отображение моментов

$$\pi: M \rightarrow \Delta \subset \mathbb{R}^n,$$

образ которого есть выпуклый полиэдр Δ в евклидовом n -мерном пространстве. Этот полиэдр несет полную информацию о симплектической геометрии многообразия (M, ω) , т.е. полиэдр Δ определяет само многообразие, симплектическую форму и T^n -действие (см. [1]).

Более того, если на многообразии (M, ω) задана предквантизация (см. [8]) и M имеет структуру Ходжа, келеровой формой которой является ω , то эта ходжева структура также может быть реконструирована.

Пространство $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$ также допускает хорошо известное гамильтоново действие тора T^{3g-3} (см., например, [7]). Разница в свойствах этого действия и описанного выше стандартного гамильтонова действия тора кажется, на первый взгляд, ничтожной, а именно заключается в следующем:

1) при $g > 2$ пространство классов представлений $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$ особо, множеством особых точек является куммерово многообразие

$$\text{Sing } \text{ClRep}(\pi_1(\Sigma)) = K_g = R_g^{\text{U}(1)} / \pm \text{id},$$

т.е. пространство $\text{U}(1)$ -представлений фундаментальной группы $\pi_1(C)$ с точностью до $\pm \text{id}$;

2) действие $(3g-3)$ -тора гладко только над внутренними точками полиэдра Δ , хотя и непрерывно всюду.

Например, при $g = 2$ пространство $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$ допускает действие T^3 , отображение моментов которого имеет в качестве образа Δ стандартный тетраэдр

$$0 \leq t_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \quad |t_1 - t_2| \leq t_3 \leq \min(t_1 + t_2, 2 - t_1 - t_2) \quad (1.1)$$

в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами t_1, t_2, t_3 . Это – частный случай дельцановского полиэдра (см. [8]), который однозначно определяет дельцановское ходжево многообразие DM_2 . В этом случае оно совпадает с $\mathbb{CP}^3$, а выделенным дивизором $\bigcup \mathbb{CP}_i^2$ для $i = 0, 1, 2, 3$ является объединение четырех

плоскостей в общем положении. Назовем это проективное пространство *моделью Дельцана* пространства $\mathrm{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$.

Используя комплексную структуру на $\mathrm{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$, задаваемую комплексной структурой на Σ , и эквивариантную версию теоремы Дарбу–Вайнштейна, получим голоморфное отображение

$$f: DM_2 \setminus \bigcup_{i=0}^4 \mathbb{CP}_i^2 \rightarrow M_\Sigma(2, 0) \setminus K_2. \quad (1.2)$$

Несмотря на то, что многообразия DM_2 и $M_\Sigma(2, 0)$ как рациональные алгебраические многообразия изоморфны $\mathbb{P}^3$, биголоморфное отображение f (1.2) не может быть продолжено до голоморфного отождествления $\mathbb{CP}^3 = DM_2 = M_\Sigma(2, 0)$, т. е. мы оказываемся в условиях ситуации бирациональной (симплектической) геометрии.

Цель настоящей работы – построить модель Дельцана для кривой произвольного рода с набором свойств, перечисленных в аннотации. Случай кривых рода 2 указывает нам для этого путь. Кроме того, рассматриваемая конструкция дает конечную цепочку элементарных “бirationальных” преобразований (флипов), переводящих модель Дельцана DM_g в рациональное многообразие $(\mathbb{CP}^3)^{g-1}$, в точности такую же, как та, что возникает для торических многообразий в алгебраической геометрии при перестройках полиэдров (см. [5]).

Идея построить модель, родственную дельцановской, восходит к Дональдсону, в работе [3] которого родственное к DM_g многообразие построено для нечетного (гладкого) случая $M_\Sigma(2, 1)$ как имитация многообразия модулей для объяснения появления чисел Бернулли в формулах Верлинде.

В четном (негладком) случае наша конструкция близка к конструкции Джеффри и Уртюбиз из работы [12]. На самом деле, почти очевидно, что многообразие DM_g совпадает с многообразием P^D Уртюбиза и Джеффри, но прямое доказательство этого факта пока не опубликовано.

§ 2. Торическая структура на $\mathrm{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$

Пусть Σ – гладкая риманова поверхность рода g с фундаментальной группой $\pi_1(\Sigma)$ и C – простая замкнутая кривая на Σ . Гомотопический класс такой кривой определяет так называемую *функцию Голдмана* на $\mathrm{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$:

$$c_C: \mathrm{ClRep}(\pi_1(\Sigma)) \rightarrow [0, 1] \subset \mathbb{R},$$

сопоставляющую представлению $\rho \in \mathrm{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$ число

$$\frac{1}{\pi} \cos^{-1} \left(\frac{1}{2} \mathrm{Tr}(\rho([C])) \right) \in [0, 1],$$

где $[C]$ – гомотопический класс кривой C . В. Голдман [2] показал, что функция c_C – гамильтониан $U(1)$ -действия на $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$ относительно симплектической структуры Ω . (Точная формула для этого действия в геометрических терминах приведена, например, в [3].) Более того, если C_1 и C_2 – две непересекающиеся кривые, то

$$\{c_{C_1}, c_{C_2}\} = 0,$$

где скобки Пуассона определяются симплектической структурой Ω ; в частности, если $[C_1] \neq [C_2]$, то мы получаем гамильтоново действие двумерного тора $T^2 = U(1) \times U(1)$ на пространстве $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$. Добавляя третью кривую, получаем действие трехмерного тора и т.д. Конечно, этот процесс остановится, так как хорошо известно, что каждое максимальное множество непересекающихся и гомотопически неэквивалентных окружностей содержит $3g - 3$ кривые. Фиксируем любое из таких множеств:

$$\{C_1, \dots, C_{3g-3}\}.$$

Класс изотопии такого множества окружностей называется *разметкой* римановой поверхности. Легко видеть, что дополнение такого множества – это объединение

$$\Sigma_g \setminus \{C_1, \dots, C_{3g-3}\} = \coprod_{i=1}^{2g-2} P_i$$

$2g - 2$ тринионов P_i , а каждый *тринион* является 2-сферой с тремя удаленными непересекающимися дисками:

$$P_i = S^2 \setminus (D_1 \cup D_2 \cup D_3). \quad (2.1)$$

Такое представление римановой поверхности называется *тринионным разложением*.

Таким образом, любое тринионное разложение поверхности Σ задается выбором максимального множества непересекающихся, нестягиваемых, попарно негомотопных гладких окружностей на Σ , содержащего $3g - 3$ таких окружностей $C_1, \dots, C_{3g-3} \subset \Sigma_g$, дополнение к которым состоит из $2g - 2$ тринионов P_j . Тип разложения задан его *дуальным тривалентным графом* $\Gamma(\{C_i\})$, каждая вершина которого ассоциирована с тринионом P_i , а ребро, соединяющее P_i и P_j , ассоциировано с их общей границей C_l – окружностью такой, что $C_l \subset \partial P_i \cap \partial P_j$. Таким образом, изотопический класс тринионного разложения однозначно задан тривалентным графом Γ рода g .

С другой стороны, любой тривалентный граф Γ с множеством вершин $V(\Gamma)$ и множеством ребер $E(\Gamma)$ определяет тело с ручками $\tilde{\Gamma}$, т.е. 3-многообразие с границей $\partial \tilde{\Gamma} = \Sigma_\Gamma$ (римановой поверхностью рода g с тринионным разложением), при помощи “раздутия” (см. [4]): раздуваем ребра графа Γ до трубок и вершины – до маленьких 2-сфер. Получим риманову поверхность Σ_Γ рода g с трубкой $\tilde{e}$ вместо

каждого ребра $e \in E(\Gamma)$ и тринионом $\tilde{v}$ вместо каждой вершины $v \in V(\Gamma)$. Изотопические классы меридианов трубок определяют $3g - 3$ непересекающихся, нестягиваемых, попарно неизотопных окружностей $\{C_e\}$ для $e \in E(\Gamma)$ и тринионное разложение поверхности Σ .

Таким образом, геометрически каждая риманова поверхность с разметкой $\{C_i\}$ эквивалентна тривалентному графу Γ ; будем обозначать ее символом Σ_Γ . Для такой поверхности имеем отображение пространства классов представлений в евклидово пространство

$$c_\Gamma: \text{ClRep}(\pi_1(\Sigma)) \rightarrow \mathbb{R}^{3g-3} = \mathbb{R}^{E(\Gamma)} \quad (2.2)$$

с фиксированными координатами $(c_1, \dots, c_{3g-3})$, пронумерованными элементами множества $E(\Gamma)$, задаваемое формулами $c_i = c_{C_i}$.

Тогда:

- 1) отображение c_Γ – вещественная поляризация динамической системы с фазовым пространством $(\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma)), k \cdot \Omega)$;
- 2) c_i – координаты действия гамильтоновой системы;
- 3) c_Γ – отображение моментов для гамильтонова (но не всюду гладкого) действия тора T^{3g-3} на $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$:

$$\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma)) \times T^{3g-3} \rightarrow \text{ClRep}(\pi_1(\Sigma)),$$

описанного в работе [7];

- 4) образ пространства $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$ относительно отображения c_Γ – выпуклый полиэдр $\Delta_\Gamma \subset [0, 1]^{3g-3}$;

- 5) симплектический объем пространства $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$ равен евклидову объему полиэдра Δ_Γ :

$$\int_{\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))} \Omega^{3g-3} = \text{Vol } \Delta_\Gamma = \frac{2\zeta(2g-2)}{(2\pi)^{g-1}}.$$

Функции c_i непрерывны на всем пространстве $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$ и гладки над $(0, 1)$. Напомним, что такое гамильтоново действие тора на $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$ задано замкнутым тривалентным графом Γ рода g и приводит к следующему набору геометрических объектов:

- 1) выпуклый полиэдр $\Delta_\Gamma \subset [0, 1]^{3g-3}$;
- 2) часть границы $P_r = \partial\Delta_\Gamma \cap \partial[0, 1]^{3g-3} \subset \partial\Delta_\Gamma$;
- 3) часть границы выпуклого полиэдра $P_K = c_\Gamma(K_g) \subset \Delta_\Gamma$;
- 4) открытое подмножество $\Delta_\Gamma^0 = \Delta_\Gamma \setminus (P_r \cup P_K) \subset [0, 1]^{3g-3}$;
- 5) открытое торическое пространство

$$c_\Gamma^{-1}(\Delta_\Gamma^0) = \text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))^0 \subset \text{ClRep}(\pi_1(\Sigma)),$$

относительно компактное при отображении моментов $c_\Gamma: \text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))^0 \rightarrow \Delta_\Gamma^0$.

Опишем эти геометрические объекты в следующем параграфе.

§ 3. Комбинаторные конструкции

Будем пользоваться понятиями и обозначениями, введенными в [6]. Напомним, что любой замкнутый тривалентный граф Γ задается множеством вершин $V(\Gamma)$ и “квадратичной формой инциденции”. Пусть $\mathbb{Z}^{V(\Gamma)}$ – свободный $\mathbb{Z}$ -модуль всех формальных линейных комбинаций вершин с коэффициентами из $\mathbb{Z}$. (Конечно, множество вершин является выделенным базисом этого модуля.) Тогда матрица инциденции q_Γ – симметрическая матрица с элементами α_{v_i, v_j} , равными числу ребер между вершинами $v_i, v_j \in V(\Gamma)$.

Конечно, группа перестановок множества $V(\Gamma)$ действует на такие матрицы перестановками строк и столбцов.

Напомним (см. [6]), что граф Γ называется *гиперболическим*, если существуют два подмножества $V_+, V_- \subset V(\Gamma)$ такие, что подпространства $\mathbb{Z}^{V_\pm}$ изотопны относительно формы q_Γ . Матрицы форм таких графов имеют блочный вид:

$$q_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

где блоки

$$\begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^{V_+}, \mathbb{Z}^{V_-}) \quad (3.2)$$

задают отождествление

$$*: V_+ \leftrightarrow V_-. \quad (3.3)$$

Множество ребер гиперболического графа $E(\Gamma)$ может быть представлено как объединение непересекающихся троек с общими вершинами:

$$E(\Gamma) = \bigcup_{v \in V_+} E(\Gamma)_v,$$

где $E(\Gamma)_v$ – три ребра из вершины $v \in V_+$.

Далее рассмотрим риманову поверхность Σ_Γ как результат раздутия графа $E(\Gamma)$ и подмножество

$$\Sigma_+ = \bigcup_{v \in V_+} \tilde{v} \subset \Sigma_\Gamma = \bigcup_{v \in V_+ \cup V_- = V(\Gamma)} \tilde{v},$$

которое назовем *половиной римановой поверхности* Σ_Γ (см. [6]).

Все эти конструкции применимы к любому тривалентному графу, в том числе и к несвязному. В частности, рассмотрим несвязное объединение

$$\Theta^{g-1} = \Theta \sqcup \dots \sqcup \Theta.$$

Этот тривалентный граф рода g определяет риманову поверхность

$$\Sigma_{\Theta^{g-1}} = \Sigma_\Theta \sqcup \dots \sqcup \Sigma_\Theta$$

– несвязное объединение $g - 1$ копии римановой поверхности рода 2 со стандартным тринионным разложением, соответствующим графу Θ .

Фиксируем один тринион в тринионном разложении каждой копии поверхности Σ_Θ и обозначим соответствующее множество вершин символом $V_+ \subset V(\Theta^{g-1})$, а его дополнение – символом V_- . На эти множества натягиваются изотропные относительно $q_{\Theta^{g-1}}$ подмодули. Следовательно, граф Θ^{g-1} гиперболический с естественной идентификацией $*$, сопоставляющей триниону $\tilde{v}$ с $v \in V_+$ второй тринион компоненты Σ_Θ .

Далее, половина римановой поверхности Θ^{g-1} есть объединение

$$\Sigma_+ = \bigcup_{v \in V_+} \tilde{v} \subset \Sigma_{\Theta^{g-1}},$$

которое в точности совпадает с половиной римановой поверхности Σ_Γ :

$$\Sigma_\Gamma \supset \Sigma_+ \subset \Sigma_{\Theta^{g-1}}.$$

§ 4. Пространства классов представлений

Пространства $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$ и $(\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma)))^{g-1}$ – симплектические с торическими структурами, определяемыми графами Γ и Θ^{g-1} (см. § 1), с отображениями моментов

$$\begin{aligned} c_\Gamma &: \text{ClRep}(\pi_1(\Sigma)) \rightarrow \Delta_\Gamma, \\ c_{\Theta^{g-1}} &: (\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma)))^{g-1} \rightarrow \Delta_{\Theta^{g-1}}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Полиэдр $\Delta_{\Theta^{g-1}}$ есть прямое произведение $g - 1$ копии тетраэдра Δ_Θ :*

$$\Delta_{\Theta^{g-1}} = \prod_{v \in V_+} \Delta_\Theta.$$

Более того, пусть $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma_+))$ – пространство классов $\text{SU}(2)$ -представлений фундаментальной группы половины римановой поверхности $\Sigma_{\Theta^{g-1}}$; это пространство допускает отображение

$$c_{\partial\Sigma_+} : \text{ClRep}(\pi_1(\Sigma_+)) \rightarrow \Delta_{\Theta^{g-1}}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Отображение $c_{\partial\Sigma_+}$ является изоморфизмом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО для случая $g = 2$ содержится в доказательстве предложения 3.1 из [7]. Таким образом, утверждение проверяется для каждой компоненты несвязного графа, а тем самым, и для любого рода.

Вложение $\Sigma_+ \hookrightarrow \Sigma_\Gamma$ индуцирует отображение ограничения

$$r : \text{ClRep}(\pi_1(\Sigma)) \rightarrow \text{ClRep}(\pi_1(\Sigma_+)),$$

а отображение c_Γ раскладывается в композицию:

$$c_\Gamma = r \circ c_{\partial\Sigma_+},$$

так как граница половины $\partial\Sigma_+$ совпадает с полным набором $\{C_e\}$ для $e \in E(\Gamma)$. Отсюда получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Полиэдр Δ_Γ содержится в образе отображения $c_{\partial\Sigma_+}$. Следовательно, $\Delta_\Gamma \subset (\Delta_\Theta)^{g-1}$.*

Теперь уже легко проверить следующее хорошо известное утверждение (см., например, [9, предложение 33.5]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Для описания полиэдра Δ_Γ необходимо:*

- 1) *рассмотреть произведение всех тетраэдров, соответствующих тринионам;*
- 2) *наложить линейные условия, соответствующие равенствам склейки тринионов.*

СЛЕДСТВИЕ 4.5. 1) *Шаг 1) предложения 4.4 для Δ_Γ не отличается от соответствующего шага для $(\Delta_\Theta)^2$.*

2) *При шаге 2) предложения 4.4 заменяем равенства соответствующими неравенствами.*

Для описания модели Дельцана необходимо элементарными преобразованиями перестроить полиэдр Δ_Γ в $(\Delta_\Theta)^{g-1}$. Комбинация этих преобразований соответствует индукции по роду.

§ 5. Перестройки полиэдров

Ограничимся специальным графом рода g , так называемым графом *мультитэта* $g\Theta$ (см. рис. 1–3 из работы [6]). Это – вертикальный овал O с $g-1$ горизонтальной перемычкой

$$\{e_{g-1}, e_g, \dots, e_{2g-3}\}. \quad (5.1)$$

Этот граф симметричен относительно вертикальной оси a_0 , и мы обозначим символом $i_0: g\Theta \rightarrow g\Theta$ отражение относительно этой оси. На левой стороне графа лежат пронумерованные сверху вниз вершины

$$v_1, \dots, v_{g-1}. \quad (5.2)$$

Выберем половину множества вершин следующим образом:

$$V_+ = \{v_1, i_0(v_2), v_3, i_0(v_4), \dots\}. \quad (5.3)$$

Дополнительную половину множества вершин зададим равенством $V_- = i_0(V_+)$. При таком делении вершин граф $g\Theta$ становится гиперболическим вида (3.1) с изотропными подпространствами $\mathbb{Z}^{V_\pm}$ и инволюцией отождествления $*$ = i_0 (3.3). Форма графа выделяет подмножество ребер на левой стороне овала O :

$$\{e_1, e_2, \dots, e_{g-2} \mid e_i = \partial(v_i) \cap \partial(i_0(v_{i+1}))\}, \quad (5.4)$$

и показывает, что только эти ребра графа $\{e_1, e_2, \dots, e_{g-2}\}$ участвуют в конструкции нетривиальных комбинаторных флипов. Каждое такое ребро e_i определяет координату t_3^i в $\mathbb{R}_i^3$ и координату t_3^{i+1} в $\mathbb{R}_{i+1}^3$.

Рассмотрим случай $g = 3$.

В этом случае множество горизонтальных ребер (5.1) – это $\{e_2, e_3\}$, а множество вершин (5.2) есть $\{v_1, v_2\}$. Множество вершин (5.3) – это

$$V_+ = \{v_1, i_0(v_2), v_3, i_0(v_4)\},$$

а множество (5.4) есть $\{e_1\}$, $e_1 = \partial(v_1) \cap \partial(i_0(v_2))$.

Теперь опишем ограничения 2) следствия 4.5. Рассмотрим следующие инволюции пространства $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_2^3$:

- 1) перестановку трехмерных компонент: $i_{12}(\mathbb{R}_1^3) = \mathbb{R}_2^3$;
- 2) перестановку двух координат в каждом из трехмерных пространств $\mathbb{R}_1^3$ и $\mathbb{R}_2^3$: $i_{e_1}(t_3^1) = (t_3^2)$.

Напомним, что ограничения 1) предложения 4.4 уже учтены:

$$|t_1^i - t_2^i| \leq t_3^i \leq t_1^i + t_2^i, \quad i = 1, 2.$$

Теперь склеим тринионы v_1 и v_2 вдоль e_1 . Легко видеть, что верно следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Ограничения 2) следствия 4.5 эквивалентны условиям*

$$|t_1^i - t_2^i| \leq t_3^j \leq t_1^i + t_2^i, \quad i \neq j. \quad (5.5)$$

Отсюда немедленно получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.2. *Полиэдр моментов задается условиями*

$$\Delta_{3\Theta} = (\Delta_\Theta)^2 \cap i_{e_1}((\Delta_\Theta)^2). \quad (5.6)$$

Действительно, инволюция i_{12} сохраняет полиэдр $(\Delta_\Theta)^2$. Следовательно, условие (5.6) является геометрической интерпретацией неравенств (5.5).

Напомним, что тетраэдр Δ_Θ – это выпуклая линейная оболочка множества S , состоящего из четырех точек в $\mathbb{R}^3$:

$$\Delta_\Theta = \langle (0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle.$$

Следовательно, $(\Delta_\Theta)^2$ также является выпуклой оболочкой шестнадцати точек $S_1 \times S_2$ в $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}_1^3 \times \mathbb{R}_2^3$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. *Полиэдр $\Delta_{3\Theta}$ есть выпуклая линейная оболочка точек*

$$\{(*, *, 0, *, *, 0)\} \cup \{(*, *, 1, *, *, 1)\}. \quad (5.7)$$

Здесь символ $*$ означает свободный выбор из множеств $* = \{0, 1\}$ и $*' = \{0, 1\}$. Действительно, неравенства $t_3^1 \neq t_3^2$ индуцируют все эти запреты (5.5).

Описание этой ситуации станет более понятным, если привлечь вещественную алгебраическую геометрию. А именно, пусть C – вещественная алгебраическая кривая рода $g = 2$ с вещественной тэта-характеристикой; ее куммерова поверхность является вещественной кватрикой K_2 с шестнадцатью комплексно-сопряженными двойными особыми точками $\{p_1, \dots, p_{16}\}$, называемыми *нодами*, в $\mathbb{CP}^3$. В аффинной части вокруг вещественной линейной оболочки этих нод-точек пространство $\mathbb{CP}^3$ представляется как $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times i\mathbb{R}^3$. Тогда выпуклая оболочка

$$\langle p_1, \dots, p_{16} \rangle = \Delta_{\Theta^2} = \Delta_{\Theta} \times \Delta_{\Theta} \subset \mathbb{R}^6$$

есть дельцановский полиэдр многообразия $(\mathbb{CP}^3)^2$ с естественным действием тора. Напомним, что через каждую вершину p_i проходят шесть прямых с шестью вершинами на каждой, как и предписывает классическая конфигурация Куммера 16₆. Из этого описания ясно видны восемь вершин выпуклого полиэдра $\Delta_{3\Theta}$. Понятно, как сделать эти полиэдры целыми.

Проведем индукцию по g .

Дальнейшая стратегия теперь проста и естественна – строим последовательность полиэдров как последовательность аппроксимаций полиэдра $\Delta_{g\Theta}$:

- 1) первую аппроксимацию $(\Delta_{\Theta})^{g-1}$;
- 2) вторую аппроксимацию $(\Delta_{\Theta})^{g-3} \times \Delta_{3\Theta}$;
- 3) i -ю аппроксимацию $(\Delta_{\Theta})^{g-i} \times \Delta_{i\Theta}$;
- 4) и, наконец, последнюю $(g-1)$ -ю аппроксимацию, совпадающую с самим полиэдром $\Delta_{g\Theta}$.

Так шаг за шагом мы продвигаемся к полиэдру с номером g . Заметим, что на предпоследнем шаге мы имеем:

- 1) полиэдр $\Delta_{\Theta} \times \Delta_{(g-2)\Theta} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{3(g-2)}$, соответствующий несвязному объединению $\Theta \cup (g-2)\Theta$;
- 2) во второй компоненте $\Delta_{(g-2)\Theta}$ тринион v_l , выделенный на предыдущем шаге индукции как самый нижний тринион в $\Delta_{(g-3)\Theta}$, т. е. имеем разложение $\mathbb{R}^{3(g-2)} = \mathbb{R}_l^3 \times \mathbb{R}^{3(g-3)}$;
- 3) выделенные ребра $e \in E(\Theta)$ и $e \in E_{v_l}((g-3)\Theta)$, вдоль которых склеиваем поверхности Σ_{Θ} и $\Sigma_{(g-1)\Theta}$;
- 4) выделенные координатные оси: t_3 -ось в $\mathbb{R}^3$ и t_3^l -ось в $\mathbb{R}_l^3$, соответствующие ребру e , в разных трехмерных пространствах со стандартными координатами (t_1, t_2, t_3) в $\mathbb{R}^3$ и (t_1^l, t_2^l, t_3^l) в $\mathbb{R}_l^3$.

Теперь ограничения склейки в точности такие же, как в (5.5): в только что описанных обозначениях

$$|t_1 - t_2| \leq t_3^l \leq t_1 + t_2, \quad |t_1^l - t_2^l| \leq t_3 \leq t_1^l + t_2^l.$$

Используя те же аргументы, что при доказательстве предложения 5.1, получаем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Полиэдр $\Delta_{g\Theta}$ – это выпуклая оболочка 2^g точек

$$\{(*, *, 0, *, *, 0, *, \dots, *)\} \cup \{(*, *, 1, *, *, 1, *, \dots, *)\} \subset \mathbb{R}^{3(g-1)}$$

с тем же описанием $*$, $*$ ' и остальных символов, что в формуле (5.7).

Другое описание полиэдра моментов как подполиэдра в Δ_{Θ}^{g-1} дал Флорентино в работе [10].

Напомним (см., например, [8]), что выпуклый полиэдр $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ дельцановский, если для каждой вершины v существует целочисленная $(n \times n)$ -матрица A с детерминантом ± 1 такая, что отображение

$$t \in \mathbb{R}^n \rightarrow At - v$$

переводит окрестность вершины $v \in \Delta$ в окрестность нуля в $\mathbb{R}^n$.

Иначе говоря, полиэдр $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ – дельцановский, если:

1) его 1-остов (объединение ребер) есть n -валентный граф Γ (топологическое условие);

2) множество $E(\Gamma)_v \subset E(\Gamma)$ ребер, проходящих через вершину $v \in V(\Gamma)$, составляет рациональный базис в $\mathbb{R}^n$.

Конечно, прямое произведение дельцановских полиэдров является дельцановским.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Полиэдр $\Delta_{g\Theta} \subset \mathbb{R}^{3g-3}$ – дельцановский.

Для доказательства предложения мы опять используем индукцию по роду g . На самом деле, и для шага индукции, и для базы достаточно рассмотреть случай $g = 2$. Здесь мы имеем единичный куб $C = [0, 1]^3$ с восемью вершинами. Чтобы построить из них тетраэдр Δ_2 , рассмотрим начало координат $(0, 0, 0)$ и выберем все вершины на расстоянии $\sqrt{2}$ от начала. Выпуклая линейная оболочка этих четырех вершин и есть тетраэдр Δ_2 . Та же конструкция применима для $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$: выбираем вершины куба на расстоянии 2 от начала и берем выпуклую оболочку, и так далее. Наконец, для рода g полиэдр $\Delta_{g\Theta} \subset \mathbb{R}^{3g-3}$ есть выпуклая оболочка вершин единичного куба в $\mathbb{R}^{3g-3}$, находящихся на расстоянии $\sqrt{2g-2}$ от начала координат. Так мы получаем все полиэдры.

§ 6. Дельцановская модель

Теперь мы имеем точное описание образа отображения моментов гамильтонова действия тора на $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$. Оказалось, что это – дельцановский полиэдр. Следовательно, согласно основной теореме теории Дельцана существует гладкое алгебраическое многообразие DM_g с регулярным гамильтоновым действием на нем тора T^{3g-3} .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Гладкое алгебраическое многообразие с ходжевой метрикой DM_g называется моделью Дельцана пространства $\text{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$ (или $M_C(2, 0)$).

Прямая конструкция этого рационального многообразия описана во многих работах, но книга [8] является лучшим источником этого описания.

Хорошо известен набор его характеристических свойств:

1) гладкое алгебраическое многообразие DM_g имеет каноническую поляризацию H ;

2) размерность пространства сечений $H^0(DM_g, H^k)$ может быть вычислена как число $\frac{1}{2k}$ -целых точек (т.е. точек с рациональными координатами, знаменатели которых равны $2k$) полиэдра $\Delta_{g\Theta}$ по формуле Дюстермана–Экмана [8, гл. 3]; это число есть число Верлинде и равно размерности пространства конформных блоков уровня k и рода g ;

3) само же множество точек $(\Delta_{g\Theta})_{2k} = \frac{1}{2k} \mathbb{Z}^{3g-3} \cap \Delta_{g\Theta} = BS_k$ совпадает с множеством бор-зоммерфельдовых слоев расслоения $c_{\Delta_{g\Theta}}$ (2.2) уровня k .

В рамках симплектической геометрии мы имеем известную ситуацию: два расслоения с лагранжевыми слоями над одной и той же базой:

$$\mathrm{ClRep}(\pi_1(\Sigma)) \xrightarrow{c_{\Delta_{g\Theta}}} \Delta_{g\Theta} \xleftarrow{m} DM_g, \quad (6.2)$$

где m – отображение моментов для регулярного действия тора многообразия Дельцана.

Такую конфигурацию уместно сравнить с “зеркальными расслоениями”.

Напомним, что гипотетически SYZ-зеркальная конструкция [11] также состоит из двух (дуальных) лагранжевых расслоений над одной и той же базой. Как и в нашем случае, можно рассматривать оба расслоения как семейства лагранжевых циклов с вырождениями.

Левое семейство

$$\mathrm{ClRep}(\pi_1(\Sigma)) \xrightarrow{c_{\Delta_{g\Theta}}} \Delta_{g\Theta}$$

имеет слои одинаковой размерности с особыми слоями над $(3g - 4)$ -остовом базы.

Правое семейство

$$DM_g \xrightarrow{m} \Delta_{g\Theta}$$

имеет слоями торы разной размерности. А именно, если $\mathrm{sk}_i(\Delta_{g\Theta})$ – i -мерный остов в $\partial\Delta_{g\Theta}$, то

$$p \in \mathrm{sk}_i(\Delta_{g\Theta}) \setminus \mathrm{sk}_{i+1}(\Delta_{g\Theta}) \implies m^{-1}(p) = T^i$$

есть i -мерный тор. Более того, каждая i -мерная грань F_i определяет проективное подпространство $\mathbb{P}^i(F_i) \subset DM_g$ с действием i -тора, которое само есть пространство Дельцана. Следовательно, в дельцановской модели DM_g лежит конфигурация проективных подпространств, соответствующих уменьшению размерности слоя. Это – типичное поведение изотропных слоев предквантованной динамической системы.

§ 7. Конформные блоки

Итак, для любой комплексной кривой Σ мы имеем два компактных комплексных поляризованных многообразия $(M_\Sigma(2, 0), \Theta)$ и (DM_g, H) с пространствами сечений $H^0(M_\Sigma(2, 0), \Theta^k)$ и $H^0(DM_g, H^k)$ одинаковой размерности.

Следующая конструкция устанавливает прямую связь между этими пространствами. Прежде всего отметим следующий простой геометрический факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Полиэдр $\Delta_{g\Theta}$ имеет один центр c_0 центральной симметрии.*

Очевидно, что слои обоих расслоений (6.2) над этим центром регулярны.

Вблизи регулярных слоев $c_{g\Theta}^{-1}(c_0)$, $m^{-1}(c_0)$ можно отождествить наши торические пространства с помощью эквивариантных координат Дарбу–Вайнштейна, в частности отождествить слои

$$c_{g\Theta}^{-1}(c_0) = m^{-1}(c_0) = T^{3g-3}. \quad (7.1)$$

Торы обоих семейств лагранжевы, так что ограничения поляризаций $\Theta|_{c_{g\Theta}^{-1}(c_0)}$ и $H|_{m^{-1}(c_0)}$ являются тривиальными линейными расслоениями с плоскими связностями, которые калибровочно эквивалентны между собой. (Легко видеть, что эквивариантная лемма Дарбу–Вайнштейна может быть продолжена до идентификации линейных расслоений с унитарными связностями при отождествлении (7.1).)

Учитывая все предыдущие факты, получим тор T_0^{3g-3} , снабженный тривиальным линейным расслоением с плоской связностью (L_0, a_0) (суперцикл) и лагранжевы вложения

$$\mathrm{ClRep}(\pi_1(\Sigma)) \supset c_{g\Theta}^{-1}(c_0) \hookrightarrow T_0^{3g-3} \hookrightarrow m^{-1}(c_0) \subset DM_g,$$

так что прообразы поляризаций Θ и H равны (L, a) .

Тогда отображения ограничений

$$H^0(M_\Sigma(2, 0), \Theta^k) \rightarrow \Gamma^\infty(L_0) \leftarrow H^0(DM_g, H^k)$$

являются вложениями и дают идентификацию пространств голоморфных сечений.

Следовательно, окрестности неособых точек пространства $\mathrm{ClRep}(\pi_1(\Sigma))$ с гладким действием тора моделируются линейным действием тора на комплексном проективном пространстве, как и предписывает эквивариантная лемма Дарбу–Вайнштейна. Для особых точек необходимо найти новые локальные модели, обобщающие случай $\mathbb{CP}^n$.

На связь неабелевых тэта-функций с теоремой Дельцана автору указал Ж. Мурао в процессе совместной работы (вместе с К. Флорентино и Ж. Нуњесом) над конструкцией неабелевых тэта-функций при помощи обобщенной конструкции Сигала CST. Автор выражает всем им глубокую благодарность, а также благодарит У. Оксбери и особенно М. Риду за уточнение условия (1.1) и Институт высших исследований Кореи (KIAS, Seoul) за поддержку и гостеприимство во время написания этой работы.

Список литературы

1. *Delzant T.* Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment // Bull. Soc. Math. France. 1988. V. 116. P. 315–339.
2. *Goldman W.* The symplectic nature of fundamental groups of surfaces // Adv. in Math. 1984. V. 54. P. 200–225.
3. *Donaldson S.* Gluing techniques in the cohomology of moduli spaces // Topological methods in modern mathematics (Stony Brook, 1991). Houston: Publish or Perish, 1993. P. 137–170.
4. *Tyurin A. N.* Three mathematical facets of $SU(2)$ -spin networks. Preprint 35/2000 of Instituto Superior Tecnico, Lisbon, math.DG/0011035.
5. *Fulton W.* Introduction to toric varieties // Ann. of Math. Studies. V. 131. Princeton: Princeton University Press, 1993.
6. *Tyurin A. N.* Lattice gauge theory and the Florentino conjecture. Preprint 5/2001 of Instituto Superior Tecnico, Lisbon, math.DG/0102118.
7. *Jeffrey L. C., Weitsman J.* Bohr–Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula // Commun. Math. Phys. 1992. V. 150. P. 593–630.
8. *Guillemin V.* Moment maps and combinatorial invariants of Hamiltonian T^n -spaces. Boston–Basel–Berlin: Birkhäuser, 1994.
9. *Audin M.* Lectures on gauge theory and integrable systems // Gauge theory and symplectic geometry (Montreal, 1995). Kluwer: NATO ASI Series, 1997. P. 1–48.
10. *Florentino C.* Symmetries and moment polyhedrons. Preprint. Stony–Brook, 1999.
11. *Strominger A., Yau S.-T., Zaslow E.* Mirror symmetry is T -duality // Nucl. Phys. 1996. V. 479. P. 243–259.
12. *Jeffrey L. C., Hurtubise J. C.* Representations with Weighted Frames and Framed Parabolic Bundles // Canad. J. Math. 2000. V. 52. № 6. P. 1235–1268.

Поступило в редакцию
10.IX.2001