Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Гриненко, О двойном конусе над поверхностью Веронезе, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 3, 5–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/im433>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:56:41

УДК 512.6

М. М. Гриненко

О двойном конусе над поверхностью Веронезе*К 80-летию Игоря Ростиславовича Шафаревича*

Изучается бирациональная геометрия трехмерного многообразия Фано, являющегося двойным накрытием конуса над поверхностью Веронезе с ветвлением в неособом сечении кубикой. В частности, обсуждается множество различных структур Мори, а также возможные типы максимальных особенностей линейных систем.

Библиография: 10 наименований.

§ 1. Предварительные замечания

Пусть $X_4 \subset \mathbb{P}^5$ – поверхность Веронезе (т.е. плоскость, вложенная в $\mathbb{P}^5$ при помощи полной линейной системы коник), $Q \subset \mathbb{P}^6$ – конус над ней с вершиной в точке Q_0 , $R \subset \mathbb{P}^6$ – кубическая гиперповерхность такая, что сечение $R_Q = R \cap Q$ неособо и не проходит через Q_0 . Легко видеть, что существует двойное накрытие $\varphi: V \xrightarrow{2:1} Q$ с ветвлением в дивизоре R_Q , V является многообразием Фано индекса 2 основной серии с $(-K_V)^3 = 8$. Точнее,

$$\mathrm{Pic}(V) = \mathbb{Z}H,$$

причем $K_V \sim -2H$, $H^3 = 1$. Поверхности класса H образуют двумерное семейство (т.е. $H^0(V, H) = 3$) поверхностей дель Пеццо степени 1. Точка $P \in V$, лежащая над вершиной конуса $Q_0 \in Q$, является единственной базисной точкой этого семейства. Класс l кривых на V , являющихся прообразами образующих конуса, порождает группу одномерных циклов. Легко видеть, что все эти кривые (а они составляют двумерное семейство $\mathcal{L}$, параметризованное X_4) неприводимы. Общий элемент семейства является неособой эллиптической кривой, а одномерное подсемейство вырождений представлено рациональными кривыми с нодальной либо каспидальной особенностью. Кривая из семейства $\mathcal{L}$ трансверсально пересекает в точке P любую поверхность класса H , не содержащую ее, и это – единственная точка их пересечения. Очевидно, $l \circ H = 1$.

Напомним, что трехмерное нормальное проективное многообразие U называется *расслоением Мори* относительно морфизма $\rho: U \rightarrow S$ на нормальное многообразие S размерности, строго меньшей, чем размерность U , если U имеет $\mathbb{Q}$ -факториальные терминальные особенности и ρ является экстремальным стягиванием

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке, Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 02-01-00441 и № 00-15-96085), NWO-RFBR № 047-008-005, INTAS № 00-0269 и № 00-0259.

расслоенного типа. Говорят также, что расслоения Мори $\rho: U \rightarrow S$ и $\rho': U' \rightarrow S'$ *бirationальны над базой*, или *имеют одну и ту же структуру Мори*, если:

1) при $\dim S > 0$ существуют бирациональные отображения $\chi: U \dashrightarrow U'$ и $\psi: S \dashrightarrow S'$ такие, что $\rho' \circ \chi = \psi \circ \rho$;

2) при $\dim S = 0$ многообразия U и U' бигеометрически изоморфны.

С точки зрения современного подхода, основная задача бирациональной классификации состоит в описании различных структур Мори для данного многообразия.

Заметим, что в рассматриваемом случае V само является расслоением Мори (со структурой многообразия Фано). Кроме того, существует также “двумерное семейство” расслоений Мори, “параметризованных” X_4 , следующего вида. Кривая $C \in \mathcal{L}$ совпадает с базисным множеством пучка $|H - C|$. Более того, C является полным пересечением любых двух элементов этого пучка. Пусть $V_C \rightarrow V$ – раздутие в кривой C . Тогда V_C является расслоением Мори на поверхности дель Педро степени 1 относительно естественной проекции на $\mathbb{P}^1$. Собственные прообразы элементов пучка $|H - C|$ будут слоями этой проекции. Очевидно, V_C неособо, если неособа C . Если C имеет нодальную особенность, то V_C имеет простейшую квадратичную особенность в некоторой точке. Наконец, если C имеет каспидальную особенность, то V_C имеет двойную точку, которая в подходящих локальных координатах задается уравнением $xy + z^2 + w^3 = 0$.

В обозначениях статьи [1, § 2], где описаны модели расслоений на поверхности дель Педро степени 1 при помощи двойных накрытий, расслоение $V_C \rightarrow \mathbb{P}^1$ имеет одни и те же структурные константы $(\varepsilon, n_1, n_2, n_3) = (0, 0, 1, 2)$ для всех кривых C , в том числе и особых. Отметим, что особые точки на V_C возникают из соответствующих двойных точек на дивизоре ветвления (если использовать упомянутую модель в виде двойного накрытия). Кроме того, неособые расслоения на поверхности дель Педро степени 1 обладают свойством единственности неособой модели в классе бирациональных отображений над базой (см. [2, следствие 4.5]). Все перечисленное выше может быть сформулировано в виде следующей гипотезы.

ГИПОТЕЗА 1.1. *Пусть V – неособое трехмерное многообразие Фано, являющееся двойным накрытием конуса над поверхностью Веронезе. Тогда множество*

$$\{V; V_C \rightarrow \mathbb{P}^1, C \in \mathcal{L}\}$$

исчерпывает все структуры Мори для V .

Первые шаги в направлении доказательства этой гипотезы¹ были сделаны в работах [3] и [6]. В [3] было показано, что кривые, являющиеся центрами максимальных особенностей линейных систем на V , исчерпываются семейством $\mathcal{L}$, что как раз соответствует переходу $V_C \rightarrow V$ на другую структуру Мори. Автор статьи [6] попытался доказать, что линейные системы не могут иметь максимальных особенностей над точками (и этого, с учетом результатов [1], почти достаточно для доказательства гипотезы), но предложенное им доказательство содержит серьезную

¹Примечание при корректуре. К моменту выхода настоящей статьи гипотеза 1.1 автором доказана и будет опубликована в ближайшее время.

ошибку. Точнее, исключая в [6, §3] бесконечно близкую максимальную особенность над особыми точками кривых из $\mathcal{L}$, он строит пробный класс, не являющийся таковым на самом деле. Если B_0 – особая точка кривой $C \in \mathcal{L}$, то единственный элемент из $|H - C|$, имеющий особую точку в B_0 , обязательно будет базисной компонентой для предлагаемого в [6] пробного класса (чего быть ни в коем случае не должно).

В настоящей статье предпринята попытка разобраться в этом вопросе. Выясняется, что линейные системы на V если и имеют максимальные особенности над точками, то очень простого и конкретного вида (см. п. 2) теоремы 3.1). При этом вопрос о существовании таких особенностей пока остается открытым.

Статья организована следующим образом. В §2 напоминаются ставшие недавно известными результаты о структуре максимальных особенностей. В §3–5 приведено доказательство основного результата (теорема 3.1) работы. Статью завершает §6, где кратко обсуждаются вопросы, решение которых необходимо для доказательства гипотезы 1.1.

§2. О максимальных особенностях линейных систем

Предположим, что X является трехмерным проективным многообразием с $\mathbb{Q}$ -факториальными терминальными особенностями, $\mathcal{D}$ – линейная система без неподвижных компонент, имеющая максимальную особенность. Другими словами, существует нормирование ν поля функций на X такое, что для него выполнено неравенство Нётера–Фано

$$\nu(\mathcal{D}) > \mu\delta_\nu,$$

где δ_ν – каноническая кратность относительно ν , а μ – порог канонического присоединения. Это же можно выразить иначе: пара $K_X + \frac{1}{\mu}\mathcal{D}$ имеет неканонические особенности. Можно предполагать, что $\mathcal{D}$ является собственным прообразом некоторой (например, очень обильной) линейной системы при бирациональном отображении X на какое-то многообразие.

С точки зрения программы минимальных моделей, такая ситуация приводит к следующему [7, §2]. Пусть c – минимальное положительное число такое, что пара $K_X + \frac{1}{c}\mathcal{D}$ канонична, $e(X, \mathcal{D})$ – число всех различных нормирований поля функций X , относительно которых кратность $K_X + \frac{1}{c}\mathcal{D}$ равна нулю. Заметим, что $c > \mu$ по условию. Тогда существует максимальное крепантное разрешение $\varphi: Y \rightarrow X$ такое, что $K_Y + \frac{1}{c}\mathcal{D}_Y = \varphi^*(K_X + \frac{1}{c}\mathcal{D})$ и $\rho(Y/X) = e(X, \mathcal{D})$. Другими словами, φ “вытягивает” только дивизоры с нулевыми дискрепантностями для пары $K_X + \frac{1}{c}\mathcal{D}$. Далее, относительная программа минимальных моделей для Y/X (относительно K_Y) должна оборваться через конечное число шагов, и последним шагом будет экстремальное дивизориальное стягивание $\psi: Z \rightarrow X$. Заметим, что морфизм ψ является крепантным для $K_Z + \frac{1}{c}\mathcal{D}_Z$, т.е. $K_Z + \frac{1}{c}\mathcal{D}_Z = \psi^*(K_X + \frac{1}{c}\mathcal{D})$. Поскольку $c > \mu$, то исключительный дивизор E стягивания ψ реализует нормирование поля функций X , относительно которого пара $K_X + \frac{1}{\mu}\mathcal{D}$ неканонична, т.е. имеет максимальную особенность. Таким образом, в методе максимальных особенностей линейных систем можно использовать следующий принцип.

Пусть линейная система $\mathcal{D}$ имеет максимальную особенность относительно некоторого нормирования ν поля функций на X . Тогда существует нормирование ν' ,

реализуемое экстремальным раздутием в категории Мори, относительно которого $\mathcal{D}$ также имеет максимальную особенность. Другими словами, можно сразу предполагать, что максимальная особенность линейной системы есть экстремальное дивизориальное раздутие, относительно которого пара $K_X + \frac{1}{\mu}\mathcal{D}$ неканонична.

Недавно был получен важный результат о структуре дивизориальных стягиваний в неособые точки [8].

Предложение 2.1. *Пусть $\psi: Z \rightarrow X$ – экстремальное стягивание (в категории Мори) дивизора E в неособую точку $P \in X$. Тогда для подходящих локальных координат (x, y, z) на X морфизм ψ является взвешенным раздутием с весами $(1, L, N)$, $L \leq N$, числа L и N взаимно просты.*

В виде гипотезы этот результат был предположен в [7, п. 4.7]. Его важность заключается в следующем. Если линейная система $\mathcal{D}$ без неподвижных компонент имеет максимальную особенность указанного вида, то неравенство Нётера–Фано для нее выглядит следующим образом:

$$\nu_E(\mathcal{D}) > \mu(N + L).$$

Тогда для общих элементов D_1 и D_2 линейной системы имеем

$$\text{mult}_P D_1 \circ D_2 \geq \nu_E(\mathcal{D})^2 E^2 > \mu^2 \frac{(N + L)^2}{NL} \geq 4\mu^2.$$

Отсюда, в частности, немедленно следует результат Исковских и Манина о нерациональности гладкой трехмерной кватрики.

Другое важное следствие предложения 2.1 касается структуры графа Γ максимальной особенности. Напомним, что любое нормирование ν поля функций может быть реализовано цепочкой раздутий

$$X_N \xrightarrow{\varphi_N} X_{N-1} \xrightarrow{\varphi_{N-1}} \dots \xrightarrow{\varphi_2} X_1 \xrightarrow{\varphi_1} X_0 = X$$

с исключительными дивизорами $E_i \subset X_i$ и центрами раздутий $B_i \subset E_i$. Таким образом, можно полагать, что $B_0, B_1, \dots, B_{L-1}$ – точки, $B_L, \dots, B_{N-1}$ – кривые. Дивизор E_N реализует нормирование ν . Граф Γ является ориентированным графом, состоящим из N вершин. По определению в Γ *существует стрелка $j \rightarrow i$* , если $j > i$ и $B_{j-1} \subset E_i^{j-1}$ (верхние индексы обозначают собственные прообразы на соответствующих этажах цепочки раздутий). Заметим, что всегда существуют стрелки $i + 1 \rightarrow i$.

Предположим теперь, что граф Γ соответствует взвешенному раздутию точки B_0 при подходящем выборе локальных координат (x, y, z) на X , $B_0 = \{x = y = z = 0\}$. Тогда нетрудно видеть, что Γ является цепочкой, т.е. существуют только стрелки $i + 1 \rightarrow i$, а взвешенное раздутие имеет веса $(1, L, N)$. Кроме того, кривые $B_{L+1}, \dots, B_{N-1}$ есть сечения соответствующих линейчатых поверхностей $E_{L+1}, \dots, E_{N-1}$, а $B_L \subset E_L \cong \mathbb{P}^2$ является прямой.

В локальных координатах уравнением $z = 0$ определяется росток неособого в точке B_0 дивизора, собственные прообразы которого содержат все центры раздутий B_i . Уравнением $y = 0$ на этом дивизоре высекается росток неособой кривой, проходящей через все (бесконечно близкие) точки $B_1, \dots, B_{L-1}$.

Тем же способом, что и в [10], можно показать (с учетом свойств графа Γ), что для общих элементов D_1 и D_2 линейной системы $\mathcal{D}$ без неподвижных компонент, имеющей максимальную особенность с графом Γ , выполнено

$$\sum_{i=0}^{L-1} \text{mult}_{B_i}(D_1 \circ D_2)^i \geq \sum_{i=1}^N \nu_i^2,$$

где $\nu_i = \text{mult}_{B_{i-1}} \mathcal{D}^{i-1}$. Неравенство Нётера–Фано в этом случае выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=1}^N \nu_i > \mu(L + N). \quad (2.1)$$

Отсюда легко вывести квадратичное неравенство метода максимальных особенностей:

$$\sum_{i=0}^{L-1} \text{mult}_{B_i}(D_1 \circ D_2)^i > 4\mu^2 L + \mu^2 \frac{(N - L)^2}{N}. \quad (2.2)$$

Наконец, заметим, что конфигурация центров раздутий и исключительных дивизоров обладает еще одним важным свойством, а именно можно полагать, что кривая B_{L+1} (если она существует) не пересекает собственный прообраз E_L , т. е. $B_{L+1} \cap E_L^{L+1} = \emptyset$.

Действительно, в противном случае легко видеть, что $\nu_{L-1} \geq \nu_L + \nu_{L+1} > 2\mu$, откуда $\nu_1 > 2\mu$, т. е. мы уже имеем простейшее нормирование, реализуемое обыкновенным раздутием точки B_0 , относительно которого $\mathcal{D}$ имеет максимальную особенность.

§ 3. Формулировка основного результата и начало его доказательства

Пусть V – двойной конус над поверхностью Веронезе, $\text{Pic}(V) = \mathbb{Z}H$, $K_V \sim -2H$, группа $A^2(V)$ одномерных циклов порождена классом l , т. е. $A^2(V) = \mathbb{Z}l$, $\mathcal{L}$ – двумерное семейство кривых класса l .

Предположим, что существует бирациональное отображение $\chi: V \dashrightarrow U$ на расслоение Мори $\rho: U \rightarrow S$. Пусть $\mathcal{D}_U = |r'(-K_U) + \rho^*(A)|$ – очень обильная линейная система на U , A – обильный дивизор на S и $\mathcal{D} = \chi_*^{-1} \mathcal{D}_U$ – собственный прообраз $\mathcal{D}_U$ на V . Можно полагать, что $\mathcal{D} \subset |r(-K_V)|$. Тогда, как это следует из [7, теорема 4.2], $r \geq r'$, и если χ не изоморфизм, то $r > r'$. Следовательно, пара $K_V + \frac{1}{r} \mathcal{D}$ неканонична, т. е. $\mathcal{D}$ имеет максимальную особенность относительно некоторого нормирования ν поля функций на V . Положим $n = 2r$, так что $\mathcal{D} \subset |nH|$.

Пусть B_0 является центром ν на V . Можно полагать, что ν реализуется экстремальным дивизориальным раздутием $\psi: Z \rightarrow X$. Обозначим Γ граф максимальной особенности, B_i – центры соответствующих раздутий. Если B_0 – кривая, то ψ не что иное, как обыкновенное раздутие кривой (по крайней мере, в неособой части B_0). Если же B_0 – точка, то полагаем ψ взвешенным раздутием с весами $(1, L, N)$, так что Γ имеет N вершин, из которых первые L соответствуют раздутиям точек $B_0, \dots, B_{L-1}$, а последние $N - L$ – раздутиям кривых $B_L, \dots, B_{N-1}$. Напомним, что Γ не имеет инцидентностей, т. е. существуют только стрелки $i + 1 \rightarrow i$.

ТЕОРЕМА 3.1. 1) *Предположим, что B_0 – кривая. Тогда $B_0 \in \mathcal{L}$, ψ – раздутие пучка идеалов B_0 (напомним, что B_0 является полным пересечением в этом случае), Z – одно из расслоений Мори на поверхности дель Пеццо степени 1, описанных в гипотезе 1.1.*

2) *Предположим, что B_0 – точка и $\mathcal{D}$ не имеет максимальных особенностей вдоль кривых. Тогда $B_0 \neq P = \text{Bas } |H|$, поэтому существует единственная кривая $l_0 \in \mathcal{L}$, содержащая B_0 . Далее, l_0 имеет особенность в B_0 , причем:*

- а) *если B_0 – нодальная точка l_0 , то $L = 1$ и $2 \leq N \leq 5$;*
- б) *если B_0 – каспидальная точка l_0 , то $L = 1$ и $N = 2$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Возможно, п. 2) теоремы 3.1 лишний, т.е. максимальных особенностей указанного вида не существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай 1), т.е. когда B_0 – кривая, был разобран в работе [3]. В дальнейшем будем предполагать, что B_0 – точка.

Покажем сначала, что $B_0 \neq P$. В рассматриваемом случае порог канонического присоединения есть $r = \frac{1}{2}n$, так что согласно формулам из §2 для общих элементов D_1 и D_2 линейной системы $\mathcal{D}$ выполнено

$$\text{mult}_{B_0} D_1 \circ D_2 > \left(\frac{n}{2}\right)^2 \frac{(L+N)^2}{LN} > n^2,$$

откуда если $B_0 = P$, то из пересечения D_1 и D_2 с общим элементом $S \in |H|$ (напомним, что $P = \text{Bas } |H|$) получаем

$$n^2 = D_1 \circ D_2 \circ S \geq \text{mult}_{B_0} D_1 \circ D_2 > n^2.$$

Противоречие.

Итак, $B_0 \neq P$, и существует единственная кривая $l_0 \in \mathcal{L}$, содержащая точку B_0 . Положим

$$D_1 \circ D_2 = \alpha l_0 + Z_0,$$

где Z_0 – эффективный 1-цикл, $l_0 \not\subset \text{Supp } Z_0$. Поскольку $D_1 \circ D_2 \sim n^2 l$, то, очевидно, $Z_0 \sim (n^2 - \alpha) l_0$. Заметим, что для общего элемента $S \in |H - B_0|$ имеем

$$\text{mult}_{B_0} Z_0 \leq Z_0 \circ S = n^2 - \alpha.$$

Предположим, что B_0 – неособая точка l_0 . Тогда

$$\text{mult}_{B_0} D_1 \circ D_2 \leq \alpha + n^2 - \alpha = n^2.$$

С другой стороны, из квадратичного неравенства (2.2) следует, что

$$\text{mult}_{B_0} D_1 \circ D_2 > 4 \left(\frac{n}{2}\right)^2 = n^2.$$

Таким образом, B_0 должна быть особой точкой l_0 . Предположим вначале, что взвешенное раздутие ψ имеет веса $(1, 1, 1)$, т.е. $L = N = 1$. Нетрудно видеть, что $|H - B_0|$ содержит единственный элемент, скажем S , имеющий особую точку

в B_0 . Общий дивизор $G \sim 2H$, проходящий через точку B_0 , высекает на S неприводимую кривую C класса $2l$, причем C имеет двойную точку в B_0 . Неравенство Нётера–Фано для указанного раздутия имеет вид $\nu_1 > n$, и мы для общего $D \in \mathcal{D}$ получаем

$$2n = C \circ D \geq \text{mult}_{B_0} C \cdot \text{mult}_{B_0} D = 2\nu_1 > 2n.$$

Противоречие.

Итак, показано, что B_0 является двойной точкой l_0 (нодальной либо каспидальной) и взвешенное раздутие ψ не может иметь веса $(1, 1, 1)$. Таким образом, в дальнейшем полагаем $1 \leq L < N$ (напомним, что L и N должны быть взаимно просты).

Обозначим при $1 \leq i \leq L$

$$c_i = \text{mult}_{B_{i-1}} Z_0^{i-1},$$

где Z_0^j – собственные прообразы Z_0 на соответствующих этажах цепочки раздутий. Очевидно, $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_L$. Далее, положим

$$k = \max_{1 \leq i \leq L} \{i : B_{i-1} \in l_0^{i-1}\}.$$

Заметим, что для общего элемента $S \in |H - B_0| = |H - l_0|$ имеем $B_{k-1} \in S^{k-1}$, так что

$$c_1 + \dots + c_k \leq Z_0 \circ S = n^2 - \alpha. \quad (3.1)$$

В любом случае выполняется $c_i \leq n^2 - \alpha$.

Поскольку B_0 является двойной точкой l_0 , неравенство (2.2) перепишется в виде

$$(k+1)\alpha + c_1 + \dots + c_L > n^2 L + \frac{n^2 (N-L)^2}{4N}. \quad (3.2)$$

Предположим, что $k < L$. Поскольку $c_i \leq n^2 - \alpha$, то из неравенства (3.2) следует

$$Ln^2 \geq (k+1)\alpha + L(n^2 - \alpha) > Ln^2.$$

Противоречие.

В дальнейшем будем всегда полагать $k = L$. В силу неравенств (3.1) и (3.2) имеем

$$(L+1)\alpha + n^2 - \alpha > n^2 L + \frac{n^2 (N-L)^2}{4N},$$

откуда получаем необходимое для дальнейших рассуждений основное неравенство

$$\alpha > \frac{(L-1)}{L} n^2 + n^2 \frac{(N-L)^2}{4NL}. \quad (3.3)$$

§ 4. Продолжение доказательства основной теоремы.
Случай l_0 с нодальной особой точкой, $k = L < N$

В этом параграфе предполагаем, что $B_0 \in l_0$ является “нодой”, т. е. обыкновенной двойной точкой.

Пусть $k = L = 1$. Тогда, как это видно из (3.3), при $N \geq 6$ достигается противоречие с условием $\alpha \leq n^2$. Чтобы завершить доказательство п. 2), а) теоремы 3.1, остается показать, что случаи $k = L > 1$ не реализуются. Будем использовать оценки сверху усредненных кратностей

$$\theta_i = \frac{1}{i}(\nu_1 + \dots + \nu_i).$$

Заметим, что $\nu_1 = \theta_1 \geq \theta_2 \geq \theta_3 \geq \dots$. Необходимые нам оценки получаются из следующих соображений.

Выберем общие элементы $S \in |H - l_0|$ и $D \in \mathcal{D}$. Заметим, что

$$\mu \stackrel{\text{def}}{=} \text{mult}_{l_0} D = \text{ord}_{l_0} D|_S.$$

По условию линейная система $\mathcal{D}$ не имеет максимальных особенностей вдоль кривых, поэтому далее будем предполагать, что $\mu \leq \frac{n}{2}$. Положим

$$D|_S = \mu l_0 + C,$$

где $l_0 \not\subset \text{Supp } C$. Далее, на многообразии V_1 имеем

$$D^1|_{S^1} = \mu l_0^1 + C^1 + m_1 e_1,$$

где $e_1 = E_1 \cap S^1$ и $m_1 \geq 0$. Продолжая таким образом, на многообразии V_i , $i \leq L - 1$, будем иметь

$$D^i|_{S^i} = \mu l_0^i + C^i + m_1 e_1^i + \dots + m_{i-1} e_{i-1}^i + m_i e_i,$$

где $e_j = E_j \cap S^j$ и $m_j = \text{ord}_{e_j} D^j|_{S^j}$. Поскольку граф Γ не имеет инцидентностей, конфигурация исключительных кривых $\{e_1^i, e_2^i, \dots, e_i^i\}$ на S^i имеет вид цепочки, так что $B_i \in e_i$ и $B_i \notin e_1^i \cup e_2^i \cup \dots \cup e_{i-1}^i$.

Обозначим $\alpha_i = \text{mult}_{B_i} C^i$ и $\tilde{\nu}_i = \text{mult}_{B_{i-1}} D^{i-1}|_{S^{i-1}}$. Легко видеть, что $\tilde{\nu}_i = \nu_i + m_i$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_1 &= 2\mu + \alpha_0, \\ \tilde{\nu}_2 &= \mu + \alpha_1 + m_1, \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{\nu}_L &= \mu + \alpha_{L-1} + m_{L-1}. \end{aligned}$$

Графически многообразия V_i , $i = 0, \dots, L - 1$, представлены на рис. 1. Отметим, что $m_i = \text{ord}_{e_i} D^i|_{S^i} = \text{mult}_{e_i} D^i$ при $i \leq k$ ввиду выбора общей поверхности $S \in |H - l_0|$.

Суммируя приведенные выше равенства, находим

$$\nu_1 + \dots + \nu_L \leq \nu_1 + \dots + \nu_L + m_L = (L + 1)\mu + \alpha_0 + \dots + \alpha_{L-1}. \quad (4.1)$$

Рис. 1

Кроме того, поскольку $\alpha_0 \geq \alpha_1 \geq \dots$ и $n - \mu = C \circ l_0 = 2\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{L-1}$, получаем

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{L-1} \leq \frac{L}{L+1}(n - \mu) \leq (n - \mu). \quad (4.2)$$

Рассмотрим многообразие V_L (см. рис. 2, а). Дальнейшие рассуждения зависят от того, как расположена прямая $B_L \subset E_L \cong \mathbb{P}^2$.

Рис. 2

Предположим сначала, что точка $A = l_0^L \cap e_L$ лежит вне B_L . Тогда из пересечения общей прямой, лежащей на E_L и проходящей через точку A , и дивизора D получаем, что $\nu_L \geq \nu_{L+1} + \mu$. Из оценок (4.1) и (4.2) видно, что

$$L\theta_L = \nu_1 + \dots + \nu_L \leq (L+1)\mu + n - \mu = L\mu + n,$$

т. е. $\theta_L \leq \mu + \frac{1}{2}n$. Однако $\nu_L \leq \theta_L$, так что

$$\frac{n}{2} < \nu_{L+1} \leq \nu_L - \mu \leq \theta_L - \mu \leq \frac{n}{L},$$

что противоречит условию $L > 1$.

Пусть теперь $B_L = e_L$, т.е. $B_L = S^L \cap E_L$. Тогда $m_L = \nu_{L+1}$, откуда $\nu_{L+1} + \nu_L = \nu_L + m_L = \mu + \alpha_{L-1} + m_{L-1}$. Из неравенств (4.1) и (4.2) получаем

$$\nu_1 + \dots + \nu_L + \nu_{L+1} \leq (L+1)\mu + \frac{L}{L+1}(n - \mu),$$

так что

$$\theta_{L+1} \leq \mu + \frac{L}{(L+1)^2}(n - \mu),$$

и при $L \geq 2$ имеем

$$\theta_{L+1} \leq \frac{2}{9}n + \frac{7}{9}\mu \leq \frac{2}{9}n + \frac{7}{18}n = \frac{11}{18}n.$$

Эта оценка противоречит требованию $\theta_i > \frac{5}{8}n$ для всех i . Действительно, если $\theta_i \leq \frac{5}{8}n$, неравенство Нётера–Фано (2.1) влечет

$$\frac{5}{8}nN > \frac{n}{2}(L + N),$$

т.е. $N > 4L$, и тогда в силу оценки (3.3) при $L \geq 2$ получаем

$$\alpha > \frac{L-1}{L}n^2 + \frac{9}{16}n^2 > n^2.$$

Противоречие.

Итак, нам осталось предположить, что $A \in B_L \neq e_L$. Геометрическая ситуация в этом случае (при $L = 2$) изображена на рис. 2, б.

Отметим сначала, что $N > L + 1$. Действительно, если $N = L + 1$, то из неравенства Нётера–Фано находим, что при $L \geq 2$

$$\theta_{L+1} > \frac{n}{2} \cdot \frac{2L+1}{L+1} \geq \frac{5}{6}n.$$

С другой стороны, из оценок (4.1) и (4.2) следует, что

$$\theta_{L+1} \leq \mu + \frac{n}{L+1} \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{3} = \frac{5}{6}n.$$

Итак, $N > L + 1$, т.е. существует кривая B_{L+1} . По замечанию, приведенному в конце §2, $B_{L+1} \cap E_L^{L+1} = \emptyset$, поэтому точка $\tilde{O} = B_{L+1} \cap E_{L-1}^{L+1}$ не лежит на дивизоре E_L^{L+1} . Тогда очевидно, что существует семейство неприводимых коник на E_{L-1} , проходящих через точки B_{L-1} , O и $\tilde{O}$, откуда вытекает важное для дальнейших рассуждений неравенство

$$2\nu_{L-1} \geq \nu_L + \nu_{L+1} + \nu_{L+2}. \quad (4.3)$$

Имеем два варианта взаимного расположения B_{L+1} и l_0^{L+1} :

- 1) либо $B_{L+1} \cap l_0^{L+1} \neq \emptyset$ (пересекаются в некоторой точке $\tilde{B}_{L+1}$, лежащей на S^{L+1});
- 2) либо $B_{L+1} \cap l_0^{L+1} = \emptyset$.

Предположим сначала, что $B_{L+1} \cap l_0^{L+1} \neq \emptyset$. Тогда

$$\tilde{\nu}_{L+2} = \text{mult}_{\tilde{B}_{L+1}} D^{L+1}|_{S^{L+1}} = \mu + \alpha_{L+1} + m_{L+1},$$

где, как и выше, $m_{L+1} = \tilde{\nu}_{L+1} - \nu_{L+1}$. Следовательно,

$$\nu_1 + \dots + \nu_{L+2} \leq (L+3)\mu + \alpha_0 + \dots + \alpha_{L+1} \leq (L+3)\mu + \frac{L+2}{L+3}(n-\mu).$$

С другой стороны, пусть $2\beta = \nu_{L+1} + \nu_{L+2}$. Тогда из неравенства (4.3) следует, что $2\nu_{L-1} \geq 3\beta$, и так как $\nu_1 + \dots + \nu_{L+2} \geq (L-1)\nu_{L-1} + \nu_L + \nu_{L+1} + \nu_{L+2}$, находим

$$\frac{3}{2}(L+1)\beta \leq (L+3)\mu + \frac{L+2}{L+3}(n-\mu),$$

откуда, учитывая то, что $\mu \leq \frac{n}{2}$, получаем

$$\beta \leq \frac{L+4}{3(L+1)}n.$$

Ранее мы использовали оценку

$$\theta_L \leq \mu + \frac{n}{L} \leq \left(\frac{L+2}{2L}\right)n.$$

Из неравенства Нётера–Фано $\nu_1 + \dots + \nu_N > \frac{n}{2}(L+N)$ следует, что

$$L\theta_L + (N-L)\beta > \frac{n}{2}(L+N).$$

Подставляя сюда оценки для θ_L и β , находим

$$\frac{5-L}{6(L+1)}N > \left(\frac{L+4}{3L+3}\right)L - 1,$$

что возможно только при $L = 2$. Но в этом случае можно усилить наши оценки. В самом деле, из рис. 2, б видно, что l_0^2 и E_1^2 пересекаются в точке O' , поэтому можно выбрать семейство неприводимых коник на E_1 , проходящих через точки B_1 , O , $\tilde{O}$ и O' , откуда получаем

$$2\nu_1 \geq \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \mu.$$

Пусть $3\beta = \nu_2 + \nu_3 + \nu_4$, и предположим, что $\beta > \frac{4}{7}n$. Тогда $2n \geq 2\nu_1 \geq 3\beta + \mu > \frac{12}{7}n + \mu$, так что $\mu < \frac{2}{7}n$. В этом случае

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \leq 4\mu + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \leq 4\mu + \frac{3}{4}(n-\mu) < \frac{47}{28}n,$$

т.е. $\theta_3 < \frac{47}{84}n$, что противоречит ранее доказанному условию $\theta_i > \frac{5}{8}n$ для всех i . Таким образом, $\beta \leq \frac{4}{7}n$. Из неравенства Нётера–Фано $\nu_1 + \dots + \nu_N > \frac{n}{2}(N+2)$ и условия $\nu_1 \leq n$ находим, что

$$(N-1)\beta \geq \nu_2 + \dots + \nu_N > \frac{n}{2}N,$$

откуда $N > 8$. Подставив в квадратичное неравенство (3.3) условия $L = 2$, $N > 8$, получаем

$$\alpha > \frac{1}{2}n^2 + \frac{(N-2)^2}{8N}n^2 > \frac{1}{2}n^2 + \frac{36}{64}n^2 > n^2.$$

Противоречие.

Осталось рассмотреть случай $B_{L+1} \cap l_0^{L+1} = \emptyset$, который исключается точно такими же рассуждениями, с той лишь разницей, что $\tilde{\nu}_{L+2} = \alpha_{L+1} + m_{L+1}$, причем $\alpha_{L+1} \leq \frac{n-\mu}{L+1}$. Нетрудно заметить, что получаемые оценки при этом сильнее, чем в случае $B_{L+1} \cap l_0^{L+1} \neq \emptyset$.

Утверждение 2), а) теоремы 3.1 полностью доказано.

§ 5. Завершение доказательства основной теоремы.

Случай l_0 с каспидальной особой точкой, $k = L < N$

В этом параграфе предполагаем, что l_0 имеет каспидальную особую точку. Будем использовать обозначения, введенные в § 4.

Выберем общий элемент $D \in \mathcal{D}$ и рассмотрим ограничения $D^i|_{S^i}$, где S^i – собственные прообразы общего элемента $S \in |H - l_0|$. Графически многообразия V_0 , V_1 и V_2 представлены на рис. 3.

Рис. 3

Предположим сначала, что $L \geq 3$. Тогда, поскольку граф Γ не имеет инцидентностей, $B_2 \notin E_1^2$. Обозначая, как и ранее, $e_i = E_i|_{S^i}$, имеем $B_2 \notin e_2$, и тогда из рис. 3 видно, что

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_1 &= 2\mu + \alpha_0, \\ \tilde{\nu}_2 &= \mu + \alpha_1 + m_1, \\ \tilde{\nu}_3 &= \alpha_2 + m_2.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \leq 3\mu + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \leq 3\mu + 2\alpha_0 + \alpha_1 \leq 2\mu + n \leq 2n,$$

откуда $\theta_2 \leq \frac{2}{3}n$. Тогда из неравенства Нётера–Фано имеем

$$\frac{2}{3}N > \frac{n}{2}(L + N),$$

так что $N > 3L$. Подставляя это в (3.3), при $L \geq 3$ получаем

$$\alpha > \left(\frac{L-1}{L}\right)n^2 + \frac{1}{3}n^2 \geq n^2.$$

Противоречие.

Итак, полагаем $L \leq 2$. Пусть сначала $L = 2$ (см. рис. 4).

Рис. 4

Возможны три случая: $A \notin B_2$, $A \in B_2 = e_2$ и $A \in B_2 \neq e_2$.

Пусть $A \notin B_2$. Тогда из пересечения D^2 с общей прямой на E_2 , проходящей через точку A , находим

$$\nu_2 \geq \nu_3 + \mu.$$

С другой стороны, $\nu_1 + \nu_2 \leq 3\mu + \alpha_0 + \alpha_1 \leq 3\mu + n - \mu = n + 2\mu$, откуда $\theta_2 \leq \mu + \frac{n}{2}$. Тогда

$$\frac{n}{2} < \nu_3 \leq \nu_2 - \mu \leq \theta_2 - \mu \leq \frac{n}{2}.$$

Пусть теперь $B_2 = e_2 = S^2 \cap E_2$. Заметим, что при общем выборе поверхности S

$$m_2 = \text{ord}_{e_2} D^2|_{S^2} = \text{mult}_{e_2} D^2 = \nu_3.$$

Однако

$$\nu_1 + \nu_2 + m_2 = 3\mu + \alpha_0 + \alpha_1,$$

так что

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \leq 3\mu + \frac{2}{3}(n - \mu) \leq \frac{11}{6}n,$$

и мы получаем $\theta_3 \leq \frac{11}{18}n$. Подставляя это в неравенство Нётера–Фано, находим

$$\frac{11}{18}nN > \frac{n}{2}(N + 2),$$

т. е. $N > 9$, и из неравенства (3.3) при $L = 2$, $N \geq 9$ получаем

$$\alpha > \frac{1}{2}n^2 + \frac{49}{72}n^2 > n^2.$$

Противоречие.

Пусть, наконец, $A \in B_2 \neq e_2$. Случай $N \geq 9$ исключается неравенством (3.3), так что ввиду взаимной простоты $L = 2$ и N рассмотрим лишь случаи $N \in \{3, 5, 7\}$. Предположим, что $N = 3$. Пусть A' – точка пересечения l_0^3 и E_3 . Тогда нетрудно убедиться в том, что на E_1 существует семейство неприводимых коник, проходящих через точки B_1 , A и A' , и из пересечения такой коники с D^3 находим

$$2\nu_1 \geq \nu_2 + \nu_3 + \mu.$$

С другой стороны, $\tilde{\nu}_3 = \mu + m_1 + m_2$, так что

$$2\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \leq 6\mu + 2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \leq 6\mu + n - \mu = n + 5\mu,$$

откуда $2(\nu_2 + \nu_3) \leq n + 4\mu \leq 3n$, т. е. $\nu_2 + \nu_3 \leq \frac{3}{2}n$. Однако из неравенства Нётера–Фано имеем оценку

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 > \frac{5}{2}n,$$

откуда получаем противоречие: $\nu_1 > n$. Пусть теперь $N = 5$ или $N = 7$. Нас интересуют следующие случаи взаимного расположения кривых B_3 , e_1^3 , l_0^3 :

- 1) $B_3 \cap l_0^3 \neq \emptyset$;
- 2) $B_3 \cap e_1^3 \neq \emptyset$;
- 3) $B_3 \cap l_0^3 = \emptyset$, $B_3 \cap e_1^3 = \emptyset$.

Напомним, что кривая B_2 проходит через точку A (рис. 4).

Сначала предположим, что существует точка $A' = B_3 \cap l_0^3$. Тогда, очевидно, на многообразии V_4 существует точка пересечения $A'' = E_4 \cap l_0^4$. Набор (B_1, A, A', A'') можно рассматривать как конфигурацию из четырех (бесконечно близких) точек на $E_1 \cong \mathbb{P}^2$ и нетрудно убедиться в том, что эта конфигурация определяет одномерное семейство коник на E_1 с неприводимым общим элементом T , откуда получаем неравенство

$$2\nu_1 = D^1 \circ T \geq \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \mu.$$

Учитывая, что $\tilde{\nu}_4 = \mu + \alpha_3 + m_3$, находим

$$2\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 \leq 7\mu + 2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 7\mu + n - \mu = n + 6\mu,$$

а так как $2\nu_1 \geq \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \mu$, то

$$2(\nu_2 + \nu_3 + \nu_4) \leq n + 5\mu \leq \frac{7}{2}n.$$

Положим $\beta_i = \frac{1}{i}(\nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_{i+1})$. Заметим, что $\beta_2 \geq \beta_3 \geq \beta_4 \geq \dots$.

Итак, $\beta_3 \leq \frac{7}{12}n$. С другой стороны, из неравенства Нётера–Фано следует, что $\nu_1 + 4\beta_4 > \frac{7}{2}n$ при $N = 5$ и $\nu_1 + 6\beta_4 > \frac{9}{2}n$ при $N = 7$. Однако $\nu_1 \leq n$, откуда $\beta_4 > \frac{5}{8}n$

при $N = 5$ и $\beta_6 > \frac{7}{12}n$ при $N = 7$. Обе оценки снизу противоречат полученному условию $\beta_3 \leq \frac{7}{12}n$.

Теперь предположим, что существует точка пересечения $A'' = B_3 \cap e_1^3$, и обозначим $A' = l_0^3 \cap E_3$. Поскольку $e_1^3 \cap l_0^3 = \emptyset$, а точки A' и A'' лежат в одном слое линейчатой поверхности E_3 , то A' не лежит на кривой B_3 , являющейся сечением E_3 . Далее, обозначим s и f классы исключительного сечения и слоя поверхности E_3 , имеющей тип $\mathbb{F}_2$. Нетрудно вычислить, что

$$D^3|_{E_3} \sim \nu_3 s + (\nu_2 + \nu_3) f.$$

Заметим, что эффективный цикл $D_3|_{E_3}$ содержит кривую $B_3 \sim s + 2f$ с кратностью не ниже ν_4 . Выберем общую кривую $T \sim s + 2f$, проходящую через точку A' . Поскольку $A' \notin B_3$, кривая T пересечет B_3 в двух отличных от A' точках. Тогда имеем

$$\nu_2 + \nu_3 = D^3|_{E_3} \circ T = D^3 \circ T \geq 2\nu_4 + \mu.$$

Далее, кривая B_2 не содержится ни в E_1^2 , ни в S^2 и проходит через точку A , общую для E_1^2 и S^2 , поэтому E_1^3 и S^3 высекают на E_3 один и тот же слой, так что $A' \in E_1^3$. Таким образом, через точки B_1 , A и A' , рассматриваемые как (бесконечно близкие) точки на E_1 , можно провести неприводимую конику, и из пересечения общей такой коники с D^1 находим, что

$$2\nu_1 \geq \nu_2 + \nu_3 + \mu.$$

Это неравенство и полученное выше неравенство $\nu_2 + \nu_3 \geq 2\nu_4 + \mu$ дают третье необходимое нам неравенство $\nu_1 \geq \nu_4 + \mu$.

Поскольку $\nu_1 + m_1 = 2\mu + \alpha_0 \leq \frac{n}{2} + \frac{3}{2}\mu$, то $\nu_4 + m_1 \leq \frac{n}{2} + \frac{\mu}{2} \leq \frac{3}{4}n$, откуда $m_1 < \frac{n}{4}$ ввиду того, что $\nu_4 > \frac{n}{2}$. Далее,

$$\frac{1}{2}(n - \mu) \geq \alpha_0 = e_1 \circ C^1 \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3,$$

так что $\alpha_3 \leq \frac{1}{6}(n - \mu)$. Кроме того, $2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \leq C \circ l_0 = n - \mu$. Наконец, $\tilde{\nu}_4 = \alpha_3 + m_1 + m_3$, и мы имеем

$$2\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 \leq 6\mu + 2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + m_1 \leq 6\mu + \frac{7}{6}(n - \mu) + m_1.$$

Учитывая, что $2\nu_1 \geq \nu_2 + \nu_3 + \mu$ и $\nu_2 + \nu_3 \geq 2\nu_4 + \mu \geq \nu_4 + \nu_5 + \mu$, находим

$$2\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 \geq 4\beta_4 + 2\mu + \nu_4,$$

где согласно обозначениям, введенным выше, $\beta_4 = \frac{1}{4}(\nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5)$. Тогда имеем

$$4\beta_4 + \nu_4 \leq 4\mu + \frac{7}{6}(n - \mu) + m_1 < \frac{7}{6}n + \frac{17}{6}\mu + \frac{n}{4} \leq \frac{17}{6}n.$$

Однако $\nu_4 > \frac{n}{2}$, и тогда $\beta_4 < \frac{7}{12}n$, но ранее уже показывалось, что $\beta_4 > \frac{5}{8}n$ при $N = 5$ и $\beta_6 > \frac{7}{12}n$ при $N = 7$. Таким образом, ситуация $B_3 \cap e_1^3 \neq \emptyset$ также невозможна.

При $L = 2$ осталось рассмотреть последний случай, когда $B_3 \cap l_0^3 = \emptyset$ и $B_3 \cap e_1^3 = \emptyset$. Кроме того, $B_3 \cap E_2^3 = \emptyset$ по свойству конфигурации центров раздутий и исключительных дивизоров, отмеченному в конце § 2. Имеем $\frac{1}{2}(n - \mu) \geq \alpha_0 \geq \alpha_1 + \alpha_2 \geq 2\alpha_3$, т. е. $\alpha_3 \leq \frac{1}{4}(n - \mu)$. Далее, $2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \leq n - \mu$, и поскольку $\tilde{\nu}_4 = \alpha_3 + m_3$ в рассматриваемом случае, то

$$2\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 \leq 6\mu + 2\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq 6\mu + \frac{5}{4}(n - \mu).$$

Рассуждая так же, как в предыдущем случае, можно получить неравенства $2\nu_1 \geq \nu_2 + \nu_3 + \mu$ и $\nu_2 + \nu_3 \geq 2\nu_4 + \mu$, так что остается верным условие

$$2\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 \geq 4\beta_4 + 2\mu + \nu_4.$$

Таким образом,

$$4\beta_4 + \nu_4 \leq 4\mu + \frac{5}{4}(n - \mu) \leq \frac{21}{8}n,$$

и поскольку $\nu_4 > \frac{n}{2}$, то $\beta_4 < \frac{17}{32}n$, что, как и прежде, противоречит оценкам снизу на β_i при $N = 5$ и $N = 7$.

Итак, случай $L = 2$ исключен полностью.

Для завершения доказательства утверждения 2), б) теоремы 3.1 остается показать, что ситуации $L = 1$, $N > 2$ не реализуются. Как и ранее, пусть $e_1 = E_1 \cap S^1$, и положим $A = l_0^1 \cap E_1$. Заметим, что l_0^1 касается E_1 в точке A . Наши рассуждения зависят от взаимного расположения кривых B_1 и e_1 и точки A .

Сначала предположим, что $A \in B_1$ и $B_1 \neq e_1$. Легко видеть, что после раздутия B_1 собственный прообраз общей прямой на E_1 , проходящей через точку A , будет пересекать собственный прообраз l_0^1 , откуда следует, что $\nu_1 \geq \nu_2 + \mu$. По замечанию, сделанному в конце § 2, $B_2 \cap E_1^2 = \emptyset$, так что

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_1 &= 2\mu + \alpha_0, \\ \tilde{\nu}_2 &= \mu + \alpha_1 + m_1, \\ \tilde{\nu}_3 &= \alpha_2 + m_2.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \leq 3\mu + \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 \leq 3\mu + n - \mu = n + 2\mu.$$

Поскольку $\nu_1 \geq \nu_2 + \mu$, то $2\nu_2 + \nu_3 \leq n + \mu \leq \frac{3}{2}n$, и мы получаем

$$\nu_3 \leq \frac{1}{3}(2\nu_2 + \nu_3) \leq \frac{n}{2}.$$

Противоречие.

Теперь предположим, что $B_1 = e_1$. Так как S выбрана общей, то $m_1 = \nu_2$. Кроме того, используя те же аргументы, что и выше, получим, что $\nu_1 \geq \nu_2 + \mu$. Поскольку $\nu_1 + m_1 = 2\mu + \alpha_0$, т. е. $\nu_1 + \nu_2 = 2\mu + \alpha_0$, находим, что $2\nu_2 \leq \mu + \alpha_0$. С другой стороны, $\alpha_0 \leq \frac{1}{2}(n - \mu)$. В итоге $2\nu_2 \leq \frac{1}{2}(n + \mu)$, откуда $\nu_2 \leq \frac{3}{8}n < \frac{n}{2}$, что невозможно.

Наконец, пусть $A \notin B_1$. Тогда

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}_1 &= 2\mu + \alpha_0, \\ \tilde{\nu}_2 &= \alpha_1 + m_1,\end{aligned}$$

откуда $\nu_1 + \nu_2 \leq 2\mu + \alpha_0 + \alpha_1 \leq 2\mu + n - \mu = n + \mu$. Из пересечения D и общей прямой на E_1 , проходящей через точку A , легко вывести, что $\nu_1 \geq \nu_2 + \mu$, и мы получаем противоречие: $2\nu_2 \leq n$. Из всего сказанного выше следует, что случай $L = 1$, $N = 2$ возможен только тогда, когда $A \in B_1 \neq e_1$.

Итак, утверждение 2), б), а вместе с ним и вся теорема 3.1 доказаны.

§ 6. Заключительные комментарии

В настоящей статье было показано, что линейные системы на V могут иметь максимальные особенности либо вдоль кривых семейства $\mathcal{L}$ (линейная система $|H - C|$, $C \in \mathcal{L}$, дает такой пример), либо над точками типов, перечисленных в пп. 2), а) и 2), б) теоремы 3.1.

Теперь ответим на вопрос: что же нужно, чтобы доказать гипотезу 1.1? Во-первых, либо исключить пп. 2), а) и 2), б) теоремы 3.1, либо предъявить соответствующие бирациональные автоморфизмы V , иначе гипотеза неверна и V содержит какие-то дополнительные структуры Мори. Затем, предполагая, что $\mathcal{D} \subset |nH|$ имеет максимальную особенность вдоль $C \in \mathcal{D}$ с кратностью $\mu > \frac{n}{2}$, мы должны рассмотреть расслоение Мори $V_C \rightarrow \mathbb{P}^1$, описанное в § 1, и показать, что собственный прообраз $\mathcal{D}_{V_C}$ системы $\mathcal{D}$ на V_C (а это подсистема в $|(n - \mu)(-K_{V_C}) + (2\mu - n)F|$, где F – класс слоя $V_C \rightarrow \mathbb{P}^1$) не имеет *сверхмаксимальных* особенностей. В случае, когда C неособа (а значит, и V_C неособо), это было доказано в [1].

Предположим, что V_C имеет особую точку. Из рассуждений, приведенных в [1], нетрудно вывести, что необходимо рассмотреть лишь случаи сверхмаксимальных особенностей над точками, лежащими над множеством особенностей специального дивизора $G_V \sim (-K_{V_C} - 2F)$, который расслоен над $\mathbb{P}^1$ на кривые, изоморфные C . Действительно, исключение сверхмаксимальных особенностей над гладкой частью V_C не должно вызвать серьезных затруднений. Для исключения максимальных особенностей над двойными точками V_C можно использовать следующий результат [9], [5].

Предложение 6.1. 1) Пусть $\varphi: Y \rightarrow X$ – дивизориальное стягивание в категории Мори в особую точку вида $xu + zw = 0$. Тогда φ является взвешенным раздутием с весами $(1, 1, 1, 1)$, т. е. φ – обыкновенное вложенное раздутие.

2) Пусть $\varphi: Y \rightarrow X$ – дивизориальное стягивание в категории Мори в особую точку вида $xu + z^2 + w^3 = 0$. Тогда φ является взвешенным раздутием с весами либо $(1, 1, 1, 1)$, либо $(1, 5, 3, 2)$.

Случай раздутия с весами $(1, 1, 1, 1)$ исключается весьма просто. С другой стороны, весьма проблематичным выглядит исключение максимальных особенностей, реализуемых раздутием с весами $(1, 5, 3, 2)$. Отметим также, что принцип замены максимальных особенностей дивизориальными раздутиями (см. § 2) может не быть верным для сверхмаксимальных особенностей.

Список литературы

1. *Гриненко М. М.* Бирациональные свойства пучков поверхностей дель Пеццо степеней 1 и 2 // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 5. С. 17–38.
2. *Гриненко М. М.* О расслоениях на поверхности дель Пеццо // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 4. С. 550–565.
3. *Исковских В. А.* Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Т. 12. М: ВИНТИ, 1979. С. 159–236.
4. *Пухликов А. В.* Бирациональные автоморфизмы трехмерных алгебраических многообразий с пучком поверхностей дель Пеццо // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 1. С. 123–164.
5. *Федоров И. Ю.* Дивизориальные стягивания в трехмерные cDv точки // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 7. С. 149–160.
6. *Хашиин С. И.* Бирациональные автоморфизмы двойного конуса Веронезе размерности три // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1984. № 1. С. 13–16.
7. *Corti A.* Factoring birational maps of threefolds after Sarkisov // J. Algebraic Geom. 1995. V. 4. P. 223–254.
8. *Kawakita M.* Divisorial contractions in dimension 3 which contract divisors to smooth points // Invent. Math. 2001. V. 145. № 1. P. 105–119.
9. *Kawakita M.* Divisorial contractions in dimension 3 which contract divisors to compound A_1 points // Compos. Math. 2002. V. 133. № 1. P. 95–116.
10. *Pukhlikov A. V.* Essentials of the method of maximal singularities // Explicit birational geometry of 3-folds. London Math. Soc. Lect. Note Ser. V. 281. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. P. 73–100.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: grin@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
 21.I.2003