Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Я. Казарновский, с-вееры и многогранники Ньютона алгебраических многообразий, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 3, 23–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/im434>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 10:51:54

УДК 512.7+514.172

Б. Я. Казарновский

с-вееры и многогранники Ньютона алгебраических многообразий

К 80-летию Игоря Ростиславовича Шафаревича

Алгебраическому подмногообразию комплексного тора сопоставлен евклидов геометрический объект, называемый с-веером. Это сопоставление задает теорию пересечения алгебраических многообразий. с-вееры образуют градуированную коммутативную алгебру с наглядно определяемыми операциями. с-вееры алгебраических многообразий лежат в подкольце рациональных с-вееров. Видимо, другие подкольца могут служить для построения теории пересечений некоторых иных категорий аналитических многообразий. Выявлена связь одной старой проблемы теории выпуклых тел (так называемой проблемы Минковского) с кольцом с-вееров, что позволяет сопоставить любой алгебраической кривой выпуклый многогранник в пространстве характеров тора.

Библиография: 27 наименований.

§ 1. Введение

1.1. Кольца рациональных и евклидовых с-вееров. Инварианты алгебраического подмногообразия комплексного тора $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ (далее обозначаемого T), заданного как множество совместных нулей невырожденной системы уравнений, можно выразить на языке геометрии многогранников Ньютона [1]–[7]. При переходе к другой невырожденной системе уравнений многообразия изменение многогранников Ньютона практически (кроме случая гиперповерхности) не контролируемо. Инвариантом оказывается произведение многогранников Ньютона системы в определяемом ниже кольце с-вееров (с – начальная буква слова current).

Сопоставим (см. § 3) d -мерному алгебраическому подмногообразию тора M евклидов геометрический объект Σ_M , называемый d -мерным с-веером. с-веер – это почти (см. определение 1 в § 2) d -мерный веер рациональных конусов (см. замечание 1 в п. 1.5) с приписанными конусам размерности d целочисленными кратностями. При этом расстановка кратностей должна удовлетворять определенным линейным условиям. Кратности с-веера Σ_M положительны, что накладывает сильные ограничения на геометрию веера. с-веер гиперповерхности – это почти (см. п. 1.4) ее многогранник Ньютона. с-вееры образуют коммутативную градуированную $\mathbb{Z}$ -алгебру с наглядно определяемыми операциями. Если M задано как множество совместных нулей невырожденной системы с многогранниками Ньютона, то Σ_M – произведение этих многогранников. Отображение Σ_M задает (см. § 3) теорию пересечений алгебраических многообразий со значениями в кольце с-вееров.

Работа выполнена при поддержке грантов INTAS 00-259, NWO 047.008.005 и РФФИ № 99-01-00245.

Описанные выше s -вееры будем называть *рациональными*. Они расположены в пространстве с целочисленной решеткой, их конусы рациональны, а кратности конусов целочисленны.

Возможно построение кольца s -вееров в абстрактном вещественном векторном пространстве E (в контексте многогранников Ньютона это означает переход от полиномов к экспоненциальным суммам с вещественными показателями [15]–[19]). В этом случае кратность конуса K следует определять как нечетную форму объема на $E/E(K)$, где $E(K)$ – порожденное конусом подпространство E (см. § 7).

При наличии в E фиксированной целочисленной решетки задание нечетной формы объема на $E/E(K)$ эквивалентно (если конус K рационален) заданию кратности конуса K , равной интегралу формы по фундаментальному параллелепипеду решетки пространства $E/E(K)$. Абстрактные s -вееры, сосредоточенные на рациональных веерах конусов с заданными целочисленными кратностями, образуют $\mathbb{Z}$ -алгебру рациональных s -вееров. Евклидова метрика пространства E также позволяет заменить нечетную форму на $E/E(K)$ числовой (вещественной) кратностью, равной интегралу формы по единичному кубу пространства $E/E(K)$, что упрощает и геометризует описание операций с s -веерами. Такие s -вееры мы называем *евклидовыми*. Точное определение s -вееров и операций с ними приведены в § 2, 4–6. Описание свойств рациональных и евклидовых s -вееров проведем одновременно. Для их различения при необходимости используются выражения “в рациональном” или “в евклидовом случае”.

Кольца s -вееров по смыслу и структуре близки к кольцам когомологий торических многообразий [7]. В частности, $\mathbb{Z}$ -алгебра рациональных s -вееров была построена в [27] в контексте теории торических многообразий как реализация торического кольца Чжоу, т.е. индуктивного предела колец когомологий неособых торических многообразий (кратности конусов в [27] называются *весами Минковского*).

Сопоставление $M \rightarrow \Sigma_M$ строится непосредственно по идеалу многообразия, а также как асимптотическая плотность многообразия (см. § 3). Описание Σ_M на языке торических многообразий см. в п. 1.5.

В настоящее время известны различные реализации торического кольца Чжоу и его евклидовых аналогов [7], [8], [11] [26], [27]. s -вееры, а также их описание в виде дифференциальных форм (см. ниже п. 1.3) позволяют получить еще одну реализацию и еще один евклидов аналог торического кольца Чжоу. Некоторые возможные области применений s -вееров описаны в пп. 1.2, 1.3.

1.2. Проблема Минковского и многогранники Ньютона алгебраических многообразий. Кольца когомологий торических многообразий и их евклидовы аналоги оказались естественно связанными с гипотезой П. Макмюллена о числах Дена–Соммервиля простых многогранников и сыграли важную роль в ее доказательстве [10]–[13]. Понятие s -веера выявляет связь этой задачи с еще одной задачей геометрии выпуклых тел. Так называемая “проблема Минковского для промежуточных кривизн” в кусочно линейной постановке [22]–[24] прямо формулируется в виде вопроса о структуре кольца s -вееров (см. § 8). Приведем здесь утверждение об этом кольце, которое является переформулировкой результатов [20], [21].

Пусть $\mathcal{R}_+^k$ – множество однородных $(n - k)$ -мерных абстрактных s -вееров с положительными кратностями и носителями, не принадлежащими никакому собст-

венному подпространству E (как объяснено в п. 1.4 и § 7, $\mathcal{R}_+^1$ – это с-вееры, отвечающие полноразмерным выпуклым многогранникам в пространстве E^*).

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Отображение возведения в k -ю степень $d_k: \mathcal{R}_+^1 \rightarrow \mathcal{R}_+^k$ инъективно при $1 \leq k \leq n-1$ и биективно при $k = 1, n-1$.*

При $k = n-1$ приведенное утверждение – это теорема Минковского о выпуклых многогранниках (см. § 8). Напомним, теорема Минковского утверждает, что, сопоставляя выпуклому многограннику в $\mathbb{R}^n$ набор векторов, направленных по внешним нормальным граням размерности $n-1$ с длинами, равными площадям, мы (при $n > 1$) получаем взаимно однозначное соответствие между множеством полноразмерных выпуклых многогранников, заданных с точностью до сдвига, и множеством невырожденных (т.е. не принадлежащих подпространству) наборов попарно не сонаправленных векторов с нулевой суммой.

Проблема Минковского для промежуточных кривизн (в кусочно линейной постановке) состоит в описании образов отображений d_k , или, иначе говоря, описании степеней (см. ниже п. 1.4) выпуклых многогранников.

Назовем выпуклый многогранник Δ *многогранником Ньютона* $(n-k)$ -мерного алгебраического многообразия M , если с-веер Σ_M является k -ой степенью многогранника Δ . В контексте алгебраической геометрии проблема Минковского может быть сформулирована следующим образом. *Какие многообразия имеют многогранник Ньютона и какие многогранники, кроме многогранников с вершинами в целых точках, могут быть многогранниками Ньютона алгебраических многообразий?* У многогранника Ньютона $(n-k)$ -мерного алгебраического многообразия (см. п. 1.4) наклоны всех граней рациональны, а площади k -мерных граней целочисленны, если измерять их при помощи соответствующих k -мерных целочисленных решеток.

Как вытекает из теоремы Минковского (см. § 8), многогранник Ньютона имеется у любой алгебраической кривой, если эта кривая не лежит в сдвинутом подторе меньшей размерности. Многообразие, заданное как невырожденное пересечение k гиперповерхностей с одним и тем же многогранником Ньютона Δ , имеет многогранник Ньютона, совпадающий с Δ .

Кроме геометрической (старой) и алгебро-геометрической версий, в контексте с-вееров возникает также следующая интересная промежуточная постановка арифметической версии проблемы Минковского. Что можно сказать о выпуклом многограннике, если известно, что его k -я степень ($1 < k < n$) является рациональным с-веером? Пример – многогранник с вершинами в целых точках, умноженный на корень k -й степени из целого числа.

1.3. Кольцо, порожденное выпуклыми телами. с-вееры можно рассматривать (см. § 7) как потоки (т.е. функционалы на пространстве гладких финитных дифференциальных форм) в комплексификации пространства E . Построение с-веера Σ_M в виде потока описана в § 3 (теорема 1).

Многограннику сопоставлен поток $dd^c H$, где H – его опорная функция, продолженная до функции на $E + \sqrt{-1}E$ тождественно по мнимым частям. Будет показано (теорема 3), что рассматриваемые как потоки абстрактные с-вееры образуют кольцо, порожденное конечными линейными комбинациями мономов вида $dd^c H_1 \wedge \dots \wedge dd^c H_k$, где H_i – непрерывные кусочно линейные функции на пространстве E , продолженные до функций на $E + \sqrt{-1}E$ тождественно по мнимым частям. Это кольцо подходит для построения теории пересечений многообразий,

определяемых нулями конечных систем экспоненциальных сумм с вещественными показателями [15]–[19].

Мономы с H_i , принимающими целочисленные значения на целочисленной решетке пространства E , порождают $\mathbb{Z}$ -алгебру рациональных s -вееров. Это последнее утверждение можно доказать, используя описание кольца когомологий торического многообразия (см. ниже п. 1.5). В § 7 доказано только, что s -вееры принадлежат $\mathbb{Q}$ -алгебре, порожденной мономами с H_i , принимающими рациональные значения на целочисленной решетке.

Если в качестве H_i рассмотреть опорные функции произвольных выпуклых тел, продолженные тождественно по мнимым частям, то получим кольцо, порожденное выпуклыми телами в двойственном пространстве E^* . Возможно, это кольцо подходит для построения аналога теории пересечения многообразий, определяемых как корни систем функций, являющихся преобразованиями Фурье обобщенных функций с компактными носителями. В этом случае роль “многогранника Ньютона обобщенной функции” выполняет выпуклая оболочка ее носителя.

Если в качестве H_i взять произвольные кусочно линейные функции в комплексном векторном пространстве, то соответствующее кольцо, видимо [17], [18], пригодено для построения теории пересечения многообразий, определяемых как корни систем экспоненциальных сумм с комплексными показателями.

1.4. Примеры. Здесь описаны сопоставление $M \rightarrow \Sigma_M$ для многообразий размерности 0, 1, $n - 1$, n , связь между $(n - 1)$ -мерными s -веерами и выпуклыми многогранниками, а также правило возведения многогранника в степень.

ПРИМЕР 1 (размерности 0, n). Если M – конечное множество точек с кратностями, то Σ_M – точка нуль с кратностью, равной количеству точек M . Если M – это m экземпляров T , то Σ_M – все пространство с кратностью m .

ПРИМЕР 2 (кривые). Если M – кривая, то Σ_M – конечное множество рациональных лучей и точка нуль. По направлениям лучей происходят выходы кривой на бесконечность. Приписанная лучу кратность – количество выходов кривой на бесконечность вдоль соответствующего лучу направления.

Рациональный луч с кратностью m можно рассматривать как умноженный на m минимальный целочисленный вектор на луче. Сумма всех (сопоставленных кривой) векторов нулевая (ср. ограничение на кратности из § 2). Таким образом, s -веер кривой – это конечный набор целочисленных векторов с нулевой суммой.

Для плоских кривых эти векторы являются сторонами определенного с точностью до сдвига выпуклого многоугольника (многоугольника Ньютона кривой). Произведение двух s -вееров – точка нуль с кратностью, равной удвоенной смешанной площади соответствующих многоугольников. Отсюда алгоритм возведения такого s -веера в квадрат – это алгоритм вычисления площади выпуклого многоугольника по его сторонам.

ПРИМЕР 3 (гиперповерхности и степени многогранников). По выпуклому многограннику Λ с вершинами в целых точках (в евклидовом случае – по любому выпуклому многограннику) строится $(n - 1)$ -мерный s -веер Σ_Λ ; s -веер гиперповерхности строится по ее многограннику Ньютона.

Носитель s -веера Σ_Λ – веер, образованный конусами, двойственными граням Λ ненулевой размерности. Любой конус старшей размерности такого веера двойствен ребру Λ . Приписанная этому конусу кратность – число, на единицу меньшее

количества лежащих на двойственном ребре точек с целочисленными координатами, или (в евклидовом случае) длина ребра. В § 2 доказано, что Σ_Λ с построенными кратностями, действительно, является с-веером (предложение 3).

Обозначим через Σ_Λ^k $(n - k)$ -мерный веер конусов, двойственных граням Λ размерности k и выше, с приписанными конусам размерности $n - k$ кратностями, равными умноженным на $k!$ площадям (в рациональном случае площадь грани измеряется при помощи k -мерной целочисленной решетки) двойственных им k -мерных граней (по определению $\Sigma_\Lambda = \Sigma_\Lambda^1$ и $\Sigma_\Lambda^k = 0$ при $k > n$). В § 7 доказано, что Σ_Λ^k является k -й степенью с-веера Σ_Λ в кольце с-вееров (предложение 12). Ниже мы иногда называем с-веер Σ_Λ^k *k -й степенью многогранника Λ* .

Из сказанного вытекает, что n -я степень многогранника (т.е. Σ_Λ^n) – точка 0 с кратностью, равной умноженному на $n!$ объему многогранника. Отсюда следует, что (ср. [3]) произведение n многогранников есть точка нуль с кратностью, равной их смешанному объему, умноженному на $n!$.

ПРИМЕР 4 (с-вееры многогранников и кусочно линейные функции). Пусть E – n -мерное векторное пространство с фиксированной целочисленной решеткой или метрикой. Непрерывная функция в E называется *кусочно линейной*, если она линейна в каждом из конусов некоторого полного веера конусов. Если целочисленная решетка фиксирована, то предполагается, что функция принимает на ней целые значения.

Если функция H кусочно линейна и $\mathcal{K}$ – соответствующий веер конусов, то при следующем ниже правиле расстановки кратностей на $(n - 1)$ -остове веера $\mathcal{K}$ возникает структура с-веера. Функция H является опорной функцией выпуклого многогранника, если и только если эти кратности окажутся не отрицательными. Обратное, любой $(n - 1)$ -мерный с-веер получается таким образом. Функция определяется по с-вееру однозначно с точностью до линейного слагаемого (все эти утверждения доказаны в § 7).

Правило расстановки кратностей состоит в следующем. Пусть K , A_1 , A_2 – $(n - 1)$ -мерный и примыкающие n -мерные конусы веера $\mathcal{K}$ и h_1 , h_2 – точки E^* , определяющие функцию H в конусах A_1 , A_2 . Припишем конусу K кратность, модуль которой равен (целочисленной или евклидовой) длине вектора $h_2 - h_1$. На гиперплоскости конуса K имеются две коориентации. Первая коориентация задается упорядоченной парой полупространств, содержащих A_1 , A_2 , вторая – вектором $h_2 - h_1$. Припишем кратности знак $+$, если эти ориентации совпадают, и знак $-$, если они различны.

1.5. Связь с торическими многообразиями.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Напомню, что конечное множество многогранных выпуклых конусов размерностей от нуля до d в вещественном векторном пространстве называется *d -мерным веером конусов* (в пространстве с фиксированной целочисленной решеткой конусы предполагаются *рациональными*), если:

- 1) все конусы открыты в порождаемых ими подпространствах;
- 2) любая грань любого из конусов также является конусом этого веера;
- 3) пересечение замыканий любых двух конусов веера является их общей гранью.

Конус веера минимальной размерности является подпространством. Веер называется *острым*, если это подпространство нульмерно. Носитель веера – объединение конусов. Веер называется *полным*, если его носитель – все пространство.

Конус K острого рационального веера называется *простым*, если примитивные целочисленные векторы, лежащие на ребрах, образуют базис целочисленной решетки пространства $E(K)$. Веер простых конусов называется *простым*.

Острому рациональному вееру конусов отвечает торическое многообразие [1], [7]. Многообразие, отвечающее полному вееру, компактно, простому – неособо.

Интерпретация алгебро-геометрической части результатов работы на языке торической геометрии состоит в сопоставлении многообразию M торической когомологии, ее выражении в терминах s -вееров и вычислении через многогранники Ньютона.

Замыкание M в неособом торическом многообразии задает цикл, пересечение с которым определяет когомологию. Эти когомологии вместе образуют элемент $\sigma(M)$ индуктивного предела колец когомологий проективной системы неособых торических многообразий, т.е. элемент торического кольца Чжоу [7]. Если M, N – многообразия, заданные как множества совместных нулей двух невырожденных систем k уравнений с одинаковыми наборами многогранников Ньютона [4], то $\sigma(M) = \sigma(N)$. Таким образом, мы получаем симметричную полиаддитивную k -форму $\sigma(\Delta_1, \dots, \Delta_k)$ от выпуклых многогранников с вершинами в целых точках, принимающую значения в однородной компоненте торического кольца Чжоу. Эта форма равна произведению многогранников в определяемом ниже кольце s -вееров (изоморфном кольцу Чжоу). При $k = n$ функция $\sigma(M)$ числовая, ее значение равно числу точек конечного множества M , а $\sigma(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ равно произведению смешанного объема многогранников и $n!$ [4].

s -веер Σ_M может быть определен на языке торических многообразий следующим образом. Назовем острый веер *достаточным* для d -мерного M , если замыкание многообразия $M \subset \mathbb{T}$ в соответствующем торическом многообразии компактно. Веер достаточен для M , если и только если его носитель содержит определенное в § 3 множество $\mathfrak{R}_M$.

Рассмотрим острый веер с носителем $\mathfrak{R}_M$ и соответствующее торическое многообразие (как отмечено в § 3, такой веер существует и любой конус такого веера полностью размещается в одной из камер укорочений). Предположим, что этот веер прост (любой веер можно разбить до простого).

Пусть K – d -мерный конус веера и F_K – замыкание соответствующего конусу K вклеенного $(n - d)$ -мерного тора. Сопоставим K кратность, равную индексу пересечения замыкания M с F_K . Можно проверить, что кратности конусов, лежащих в одной камере укорочения, одинаковы, и ограничение на кратности, приведенное в § 2, выполняется. Если многообразие M равноразмерно, полученный s -веер совпадает со строящимся в § 3 s -веером Σ_M . Кроме того, Σ_M может быть получен непосредственной геометрической конструкцией как “асимптотическая плотность” многообразия (теорема 1 в § 3).

Связь кольца s -вееров с кольцами когомологий торических многообразий объясняется следующим образом. Пусть $\mathcal{K}$ – веер двойственных конусов простого многогранника Δ , X – соответствующее проективное неособое торическое многообразие. Любому k -мерному конусу $K \in \mathcal{K}$ отвечает $2(n - k)$ -мерный цикл F_K , определяемый как замыкание соответствующего конусу K вклеенного тора. Таким образом, любому элементу $\sigma \in H^{2(n-k)}(X, \mathbb{Z})$ можно сопоставить набор кратностей $\{m(K) = \sigma(F_K)\}$, приписанных конусам старшей размерности k -мерного остова веера $\mathcal{K}$. Связь кольца s -вееров с когомологиями торических многообразий объясняет следующий факт (см., например, [27]). *Выделяемые та-*

ким способом наборы кратностей – это наборы, удовлетворяющие ограничению на кратности из § 2.

Таким образом, при проверке корректности операций и аксиом кольца рациональных с-вееров можно пользоваться когомологиями торических многообразий. Однако при таком не прямом подходе происходят геометрические потери.

Содержание статьи: в § 2 дано определение с-веера; в § 3 приведено построение отображения $M \rightarrow \Sigma_M$ и предварительное обоснование теории пересечений; в § 4–6 рассматриваются сложение, проекции и произведение с-вееров; в § 7 дано представление евклидовых с-вееров в виде потоков и некоторые свойства кольца, порожденного выпуклыми телами; в § 8 рассмотрены абстрактные с-вееры и проблема Минковского.

Автор благодарит рецензента за конструктивную критику первого варианта текста.

§ 2. Определение с-веера

Пусть $\mathcal{K}$ – d -мерный веер конусов с приписанными конусам размерности d вещественными числовыми кратностями, расположенный в n -мерном вещественном векторном пространстве E , в котором фиксирована евклидова метрика или целочисленная решетка. В рациональном случае все рассматриваемые ниже подпространства E предполагаются рациональными (т.е. порожденными векторами целочисленной решетки), а кратности конусов – целочисленными.

Будем называть $\mathcal{K}$ d -мерным пред-с-веером, если:

- 1) любой из его конусов является гранью некоторого d -мерного конуса (это свойство мы называем в дальнейшем *условием однородности*);
- 2) кратности конусов удовлетворяют формулируемому ниже *ограничению на кратности*.

Носителем d -мерного пред-с-веера будем называть замыкание объединения d -мерных конусов, снабженных *ненулевыми* кратностями.

Для формулировки ограничения на кратности определим функцию $\xi(A, B)$ на парах подпространств E как коэффициент искажения площади пространства $A/(A \cap B)$ при проекции $\pi: E/(A \cap B) \rightarrow E/B$. Это означает, что для любой области $U \subset A/(A \cap B)$ площадь $\pi(U)$ равна произведению площади U на $\xi(A, B)$ (площади в факторпространствах измеряются при помощи факторметрик или факторрешеток). Если $A \cup B$ принадлежит собственному подпространству E , то $\xi(A, B) = 0$ (в этом случае $\dim A/(A \cap B) < \dim E/B$).

Перечислим (без доказательства) несколько простых свойств функции ξ .

ЛЕММА 1. 1) $\xi(A, B) = \xi(B, A)$.

2) Если $\dim A + \dim B = \dim E$, то $\xi(A, B)$ равно объему параллелепипеда, составленного из фундаментальных параллелепипедов решеток или (в евклидовом случае) ортов этих подпространств.

3) Функция $\Xi(A, B, C) = \xi(A, B)\xi(A \cap B, C)$ не меняется при перестановках аргументов.

Продолжим функцию на сдвиги подпространств $\xi(a + A, b + B) = \xi(A, B)$ и определим для d -мерного веера конусов $\mathcal{K}$ с приписанными конусам размерности d кратностями $m(K)$ функцию на множестве $(n - d)$ -мерных аффинных подпро-

пространств E как

$$\xi_{\mathcal{K}}(A) = \sum \xi(A, E(K))m(K),$$

где суммирование идет по конусам веера старшей размерности, пересекающимся с A , а через $E(K)$ обозначено порожденное конусом K d -мерное подпространство E .

ОГРАНИЧЕНИЯ НА КРАТНОСТИ. Для любого $(n-d)$ -мерного подпространства A функция $\xi_{\mathcal{K}}$ постоянна на множестве всех параллельных A аффинных подпространств, не пересекающих $(d-1)$ -мерного остова веера $\mathcal{K}$.

Два d -мерных пред-с-веера с одним и тем же носителем назовем *эквивалентными*, если любым двум имеющим d -мерное пересечение конусам приписаны одинаковые кратности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. d -мерным с-веером (или однородным с-веером степени $n-d$) называется класс эквивалентности d -мерных пред-с-вееров; с-веер – формальная сумма однородных с-вееров разных степеней.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть T_1, T_2 – подторы T_0 . В общем случае $T_1 \cap T_2$ является объединением конечного числа сдвигов некоторого подтора коразмерности, равной $\text{codim } T_1 + \text{codim } T_2$. Причина появления функции ξ в том, что количество этих сдвигов равно $\xi(\tau_1, \tau_2)$, где τ_i – мнимое подпространство алгебры Ли тора T_i , а объемлющее пространство E с фиксированной целочисленной решеткой совпадает с τ_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Ограничения на кратности тесно связаны с условиями Минковского для выпуклых многогранников (см. далее).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Именно ограничения на кратности позволяют дать корректные определения таких операций с с-веерами, как проекции и умножение (см. § 5, 6). Сами по себе они являются условиями корректности определяемого в § 6 умножения с-веера на подпространство (рассматриваемое как с-веер) дополнительной размерности.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Ассоциативность умножения с-вееров основана на приведенном в утверждении 3) леммы 1 “тождестве ассоциативности” для функции ξ , которое само по себе является утверждением об ассоциативности умножения рассматриваемых как с-вееры подпространств (следствие 2).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $v_1, \dots, v_N$ – примитивные целочисленные векторы или векторы единичной длины (в евклидовом случае) на лучах некоторого одномерного веера конусов с кратностями $m_1, \dots, m_N$. Тогда ограничение на кратности эквивалентно равенству $m_1 v_1 + \dots + m_N v_N = 0$, т.е. одномерные с-вееры с положительными кратностями – конечные наборы попарно не сонаправленных векторов с нулевой суммой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если A – нулевое подпространство функционала $\varphi \in E^*$, то легко проверить, что ограничение на кратности для сдвигов A эквивалентно равенству $m_1 \varphi(v_1) + \dots + m_N \varphi(v_N) = 0$.

Проверка ограничений на кратности сводится к проверке таких ограничений для одномерных вееров следующим способом. Пусть φ принадлежит $(d-1)$ -мерному конусу d -мерного веера $\mathcal{K}$ с кратностями $\{m_i\}$ Локализация $\mathcal{K}^\varphi$ (см. далее

замечание 6) является веером типа d -мерная книга, т.е. состоит из d -мерных полупространств $K_1, \dots, K_N$ с кратностями $m_1, \dots, m_N$, пересекающихся по общему $(d-1)$ -мерному подпространству H . Ограничения на кратности для такого веера эквивалентны ограничениям на кратности для его веера-факторизации (см. ниже замечание 6), т.е. для одномерного веера.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Ограничения на кратности для d -мерного веера $\mathcal{K}$ выполнены тогда и только тогда, когда они выполнены для всех имеющих тип d -мерная книга локализаций веера $\mathcal{K}$, или, что то же самое, для всех одномерных вееров, полученных как факторизации этих локализаций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно заметить, что:

- 1) множество аффинных подпространств с фиксированной $(n-d)$ -мерной базой, не пересекающихся с $(d-2)$ -мерным остовом d -мерного веера, связно;
- 2) при прохождении подпространством $(d-1)$ -мерного конуса сохранение значения функции $\xi_{\mathcal{K}}$ обеспечивается ограничениями на кратности для соответствующей d -мерной книги.

Пусть $\Lambda \in E^*$ – полноразмерный выпуклый многогранник, $v_{\Delta} \in E$ – вектор единичной внешней нормали и m_{Δ} – площадь его $(n-1)$ -мерной грани Δ . В рациональном случае предполагается, что $(n-1)$ -мерные грани Λ лежат на сдвигах рациональных подпространств. Площади k -мерных граней такого многогранника можно измерять при помощи целочисленных решеток в порожденных гранями рациональных подпространств, а *вектором нормали* грани Δ назовем тот примитивный вектор целочисленной решетки в E , который (как функционал, ограниченный на многогранник) достигает максимума во всех точках грани одновременно. Легко проверяемое равенство $\sum_{\Delta} m_{\Delta} v_{\Delta} = 0$ назовем *условием Минковского* для многогранника Λ .

Проверим ограничения на кратности для (определенного в п. 1.4) s -веера Σ_{Λ}^k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Σ_{Λ}^k является s -веером.

Действительно, из предложения 2 вытекает, что ограничения на кратности для Σ_{Λ}^k представляют собой совокупность условий Минковского для $(k+1)$ -мерных граней многогранника Λ , рассматриваемых как полноразмерные выпуклые многогранники в порождаемых ими подпространствах.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Напомним о двух простых связанных с веерами и переносимых на s -вееры конструкций. Если вектор φ принадлежит замыканию снабженного кратностью t конуса K , то снабдим конус $K^{\varphi} = \{k + \mu\varphi : k \in K, \mu \in \mathbb{R}\}$ той же кратностью и назовем его φ -локализацией K . Если φ не принадлежит замыканию K , то положим $K^{\varphi} = \emptyset$ с кратностью нуль. Для снабженного кратностями веера конусов $\mathcal{K}$ его φ -локализация $\mathcal{K}^{\varphi}$ – это образующее веер множество конусов вида $\{K^{\varphi} : K \in \mathcal{K}\}$ (этот веер не является острым) с определенными выше кратностями.

Нетрудно убедиться в том, что φ -локализации эквивалентных пред- s -вееров эквивалентны и ограничение на кратности сохраняется. Таким образом, мы получаем корректно определенную операцию φ -локализации однородного s -веера.

Еще одна полезная операция – факторизация не острого веера. Если (рациональное в случае рациональных s -вееров) подпространство $E_1 \subset E$ принадлежит минимальному конусу веера, то образ веера при отображении факторизации

$E \rightarrow E/E_1$ также является веером конусов. Скажем, что s -веер *не острый*, если имеется представляющий его не острый пред- s -веер. Легко проверить, что факторизация не острого s -веера определена корректно.

§ 3. s -веер полиномиального идеала

Проще всего (без учета обоснования) определить сопоставляемый равноразмерному алгебраическому многообразию $M \subset \mathbb{T}$ объект Σ_M в виде потока на алгебре Ли тора $\mathbb{T}$ (интерпретация s -вееров как потоков содержится в § 7). Пусть $\mathcal{M}_k$ – поток, заданный как интегрирование по экспоненциальному прообразу алгебраического многообразия, образованного корнями k -й степени из принадлежащих M элементов тора.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\dim M = d$; тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{M}_k / k^{n-d} = \Sigma_M$.

Доказательство здесь не приводится. Оно вытекает из теоремы 2 и интерпретации s -вееров как потоков.

Конструкция s -веера, сопоставленного идеалу I кольца полиномов Лорана (т.е. кольца регулярных функций на торе) приведена (без учета кратностей) и обоснована в [14] (анонсирована в [15]). Здесь мы воспроизведем (без обоснования) эту конструкцию с необходимыми пояснениями.

Пусть A – кольцо полиномов Лорана. Обозначим через E n -мерное вещественное пространство, сопряженное пространству, содержащему решетку характеров тора $\mathbb{T}$, с двойственной целочисленной решеткой (удобны отождествления $\mathbb{T} = (\mathbb{C} \setminus 0)^n$ и $E = \operatorname{Re} \mathbb{C}^n$). Множество характеров, входящих в полином Лорана f с ненулевыми коэффициентами, называется *носителем полинома*. При $\varphi \in E$ определим φ -*степень* полинома как максимальное значение φ на носителе f . Старшая φ -однородная компонента f называется φ -*укорочением* и обозначается через f_φ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. φ -*укорочением идеала* I кольца A называется идеал I_φ , порожденный полиномами $\{f_\varphi, f \in I\}$; φ -*укорочением алгебраического многообразия* M *нулей идеала* I называется многообразие M_φ нулей идеала-укорочения I_φ .

В определении 2 и всюду далее в этом параграфе предполагается, что соответствие $\{\text{идеалы}\} \leftrightarrow \{\text{многообразия}\}$ учитывает кратности компонент.

Обозначим через $\mathfrak{R}_I$ или $\mathfrak{R}_M$ подмножество точек $\varphi \in E$, для которых $I_\varphi \neq A$. Зададим в $\mathfrak{R}_I$ соотношение эквивалентности $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow I_\varphi = I_\psi$. Связные компоненты классов этой эквивалентности называются *камерами укорочений* идеала (или многообразия).

Множество камер укорочения конечно, а их объединение замкнуто. Каждая камера является открытым коническим подмножеством некоторого рационального подпространства E . Максимальная размерность камеры укорочения равна $\dim M$, а соответствующее многообразие-укорочение является объединением конечного числа сдвигов подтора размерности $\dim M$, что позволяет приписать камерам максимальной размерности целые положительные кратности.

Существуют d -мерные ($d = \dim M$) вееры конусов с носителем $\mathfrak{R}_M$. Такие вееры строятся по некоторым специальным системам образующих идеала I , доказательство существования которых – основной технический результат работы [14]. Кроме того, верно, что любая камера укорочения составлена целиком из конусов любого веера с носителем $\mathfrak{R}_M$ [14]. Поэтому d -мерные конусы любого такого веера

можно снабдить целыми неотрицательными кратностями. Если M равноразмерно, то любая камера укорочения принадлежит замыканию одной из камер максимальной размерности, что гарантирует для таких вееров выполнение условия однородности (см. определение пред-с-веера в начале § 2).

ТЕОРЕМА 2. Пусть многообразие M равноразмерно и d -мерно. Тогда приведенная конструкция определяет d -мерный с-веер Σ_M с носителем $\mathfrak{R}_M$.

Доказательство части теоремы, не затрагивающей ограничения на кратности, полностью приведено в [14]. Ограничение на кратности является следствием теорем 3 и 4 из [14] и геометрическим отражением того факта, что взятое с кратностями количество точек в слое некоторого разветвленного накрытия над связной базой постоянно. Это накрытие возникает при ограничении на M отображения факторизации $\mathbb{T}$ по $(n - d)$ -мерному подтору, алгебра Ли которого порождается фигурирующим в формулировке ограничений на кратности подпространством A (если A трансверсально всем d -мерным камерам, то это отображение собственно и сюръективно).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. При $\dim M = 1, n - 1$ камеры укорочений сами являются конусами и образуют веер конусов. Это остается верным для неприводимых двумерных многообразий [14].

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Камеры укорочений не всегда выпуклы. Например, если M — объединение двух 2-мерных подторов 4-мерного тора, то существуют три камеры: точка нуль и две 2-мерных плоскости без точки нуль, имеющие кратность 1.

Из работы [14, теорема 2] вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любого $\varphi \in \mathfrak{R}_M$ φ -локализация Σ_M^φ с-веера Σ_M совпадает с с-веером многообразия-укорочения Σ_{M_φ} .

Приведем утверждения теории пересечений со значениями в кольце с-вееров:

- 1) $\Sigma_M \cup \Sigma_N = \Sigma_M + \Sigma_N$;
- 2) $\Sigma_M \cap_{gN} = \Sigma_M \Sigma_N$ при любом $g \in \mathbb{T} \setminus D(M, N)$, где $D(M, N)$ — некоторое зависящее от M и N собственное алгебраическое подмногообразие тора, пустое для пары многообразий общего положения (см. предложение 5);
- 3) для любого подтора $\mathbb{T}_1 \subset \mathbb{T}$ коразмерности, большей или равной d , определен согласованный с проекциями алгебраических многообразий гомоморфизм аддитивной группы однородных d -мерных с-вееров в аддитивную группу однородных d -мерных с-вееров, построенных по тору $\mathbb{T}/\mathbb{T}_1$.

Все эти утверждения вытекают из результатов работы [14] и приведенных в § 4–6 определений операций с с-веерами. Коротко объяснение свойств с-веера многообразия-пересечения состоит в следующем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для любых равноразмерных алгебраических подмногообразий M, N тора существует такое дискриминантное подмногообразие $D(M, N) \subset \mathbb{T}$, что при $\tau \notin D(M, N)$ с-вееры многообразий $M \cap (\tau N)$ одинаковы. Если камеры укорочений многообразий M, N пересекаются трансверсально, то $D(M, N) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $\dim M + \dim N \leq n$ утверждение очевидно. Пусть $\mathbb{T}_\varphi^M = \{t \in \mathbb{T}: tM_\varphi = M_\varphi\}$, т.е. $\mathbb{T}_\varphi^M$ – стабилизатор многообразия-укорочения M_φ . Алгебра Ли подтора $\mathbb{T}_\varphi^M$ – подпространство, порожденное векторами содержащей φ камеры укорочения. Многообразие-укорочение M_φ является прообразом некоторого равноразмерного подмногообразия фактортора $\mathbb{T}/\mathbb{T}_\varphi^M$ коразмерности, равной коразмерности M [14].

При ненулевом $\varphi \in \mathfrak{R}_M \cap \mathfrak{R}_N$ размерность подтора $\mathbb{T}_\varphi = \mathbb{T}_\varphi^M \cap \mathbb{T}_\varphi^N$ равна размерности пересечения содержащих φ камер укорочения M и N . Обозначим через M^φ, N^φ образы многообразий-укорочений при проекции $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}/\mathbb{T}_\varphi$, и пусть $D_\varphi(M, N)$ – прообраз дискриминантного многообразия $D(M^\varphi, N^\varphi)$. Из результатов [14] вытекает, что можно положить (используя индукцию по размерности тора) $D(M, N) = \cup_\varphi D_\varphi(M, N)$, где суммирование идет по конечному множеству ненулевых φ , выбранных по одному в каждом непустом попарном пересечении камер укорочения многообразий M, N .

При большом *допустимом* (см. § 6) значении $\operatorname{Re} \log \tau$ нетрудно проследить (используя определения § 6), что с-веер $\Sigma_{M \cap \tau N}$ равен произведению с-вееров $\Sigma_M \Sigma_N$.

§ 4. Сложение с-вееров

Пусть $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ – d -мерные вееры с превращающими их в пред-с-вееры кратностями k и l соответственно. Объединение их носителей распадается в объединение попарно непересекающихся подмножеств трех видов:

$$\{K \cap L: K \in \mathcal{K}, L \in \mathcal{L}\}, \quad \{K \setminus \operatorname{supp} \mathcal{L}: K \in \mathcal{K}\}, \quad \{L \setminus \operatorname{supp} \mathcal{K}: L \in \mathcal{L}\}.$$

Подмножества первого вида – конусы, второго и третьего – открытые области конусов. Припишем d -мерным подмножествам трех указанных видов кратности $k(K) + l(L)$, $k(K)$ и $l(L)$ соответственно.

Пусть $\mathcal{P}$ – веер конусов, носитель которого есть объединение носителей $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}$, такой, что каждое из указанных выше подмножеств является объединением конусов $\mathcal{P}$ (очевидно, что такие вееры существуют). Припишем d -мерным конусам $\mathcal{P}$ кратности содержащих их подмножеств. Тогда, как нетрудно проверить, мы получим пред-с-веер $\tilde{\mathcal{P}}$. Если взять другой веер $\mathcal{Q}$ с теми же свойствами, то пред-с-вееры $\tilde{\mathcal{P}}$ и $\tilde{\mathcal{Q}}$ эквивалентны. Кроме того, если заменить пред-с-вееры $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ на эквивалентные, то класс эквивалентности $\tilde{\mathcal{P}}$ останется прежним.

Таким образом, мы определили сложение однородных с-вееров одинаковой степени. Ясно, что эта операция ассоциативна и коммутативна, и при переходе к обратному элементу конусы сохраняются, а кратности умножаются на -1 .

Напомним, что сложение с-вееров разных степеней определено формально.

Приведем пример сложения 1-мерных с-вееров на плоскости:

$$\begin{array}{c} \uparrow 1 \\ \leftarrow -2 \\ \downarrow 1 \end{array} + \begin{array}{c} \swarrow 1 \\ \searrow 2 \end{array} = -2 \begin{array}{c} \uparrow 1 \\ \leftarrow -2 \\ \downarrow 1 \end{array}$$

§ 5. Проекции с-вееров

Пусть $\mathcal{K}$ – d -мерный пред-с-веер, $\{m\}$ – набор кратностей его d -мерных конусов, $\pi: E \rightarrow E/H$, где H – подпространство E размерности, меньшей или равной $n - d$. Векторы из $\pi(\operatorname{supp} \mathcal{K})$ назовем *эквивалентными*, если их прообразы пересека-

ются с одинаковыми наборами конусов веера $\mathcal{K}$. Ясно, что на носителе $\pi(\text{supp } \mathcal{K})$ можно построить веер $\mathcal{K}_\pi$, каждый конус которого лежит в своем классе эквивалентности. Покажем, как снабдить d -мерные конусы этого веера кратностями m_π .

Пусть K_π — d -мерный конус веера $\mathcal{K}_\pi$. Положим $m_\pi(K_\pi) = \sum \mu(E(K), H) \times m(K)$, где суммирование идет по конусам K веера $\mathcal{K}$, пересекающимся с $\pi^{-1}(K_\pi)$, а μ — коэффициент искажения площади пространства $E(K)$ при отображении π .

Если $\dim H = n - d$, то $\mu(E(K), H) = \xi(E(K), H)$, и ограничения на кратности $\{m_\pi\}$ (состоящие в том, что все кратности одинаковы) в точности эквивалентны ограничениям на кратности для исходного с-веера $\mathcal{K}$, примененным к сдвигам подпространства H . Поэтому мы получаем с-веер степени d в пространстве E/H , т.е. конус, совпадающий со всем пространством E/H , и приписанную ему кратность. Если кратности исходного с-веера положительны и хотя бы один из его d -мерных конусов проектируется без ядра, то эта кратность ненулевая. Если $\dim H < n - d$, то ограничения на кратности $\{m_\pi\}$ вытекают из ограничений на кратности пред-с-веера $\mathcal{K}$, примененных к сдвигам содержащих H подпространств.

Для веера-проекции может не выполняться условие однородности, так как при проекциях алгебраических многообразий свойство равноразмерности не сохраняется. Для его восстановления следует исключить из веера-проекции все конусы, не лежащие в замыкании d -мерных конусов.

§ 6. Умножение с-вееров

Операция умножения является переносом на с-вееры операции с веерами конусов, которую мы назовем *устойчивым пересечением вееров*. Операция устойчивого пересечения вееров, вообще говоря, не является ассоциативной.

Если $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — подмножества векторного пространства E , то точку $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ назовем *устойчивой*, если ее любая окрестность при достаточно малом $e \in E$ пересекается с $\mathcal{A} \cap (\mathcal{B} + e)$. Множество устойчивых точек пересечения обозначим через $\mathcal{A} \cap^s \mathcal{B}$. Например, если $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — подпространства E , то $\mathcal{A} \cap^s \mathcal{B}$ или совпадает с $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ (если пересечение трансверсально), или пусто.

Если $\mathcal{K}, \mathcal{N}$ — вееры конусов, то их пересечение $\mathcal{K} \cap \mathcal{N}$ можно определить как веер, образованный конусами $\{K \cap N : K \in \mathcal{K}, N \in \mathcal{N}\}$. Определим веер $\mathcal{K} \cap^s \mathcal{N}$, который назовем *устойчивым пересечением вееров*, следующим образом:

- 1) носитель веера $\mathcal{K} \cap^s \mathcal{N}$ — устойчивое пересечение носителей $\text{supp } \mathcal{K} \cap^s \text{supp } \mathcal{N}$;
- 2) конусы $\mathcal{K} \cap^s \mathcal{N}$ — множество $\{K \wedge^s N = K \cap N \cap (\text{supp}(\mathcal{K} \cap^s \mathcal{N})) : K \in \mathcal{K}, N \in \mathcal{N}\}$.

Легко заметить, что множество $K \wedge^s N$ или пусто, или совпадает с $K \cap N$, т.е. является конусом веера-пересечения $\mathcal{K} \cap \mathcal{N}$. Устойчивое пересечение замкнутых множеств замкнуто, поэтому объединение конусов вида $K \wedge^s N$ замкнуто и, значит, $\mathcal{K} \cap^s \mathcal{N}$, действительно, является веером конусов.

В следующей ниже лемме перечислено несколько простых используемых далее свойств устойчивых пересечений вееров.

ЛЕММА 2. 1) *Операция устойчивого пересечения вееров перестановочна с локализацией, т.е. если $K \cap N$ содержит ненулевой вектор φ , то $\mathcal{K}^\varphi \cap^s \mathcal{N}^\varphi$*

$\mathcal{N}^\varphi = (\mathcal{K} \cap^s \mathcal{N})^\varphi$, а $K \wedge^s N = (K \cap N) \cap (K^\varphi \wedge^s N^\varphi)$.

2) Операция устойчивого пересечения перестановочна с факторизацией, т.е. если K, N – минимальные конусы вееров $\mathcal{K}, \mathcal{N}$, то $K \wedge^s N$ является прообразом минимального конуса устойчивого пересечения профакторизованных по $K \cap N$ вееров при отображении факторизации $E \rightarrow E/(K \cap N)$.

3) Если сумма размерностей вееров равна $n+k$, то размерность их устойчивого пересечения не превосходит k .

Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ – k -мерный и l -мерный вееры с превращающими их в пред-с-вееры кратностями p и q , а $\tilde{\mathcal{P}}$ и $\tilde{\mathcal{Q}}$ – соответствующие с-вееры. Назовем точку $e \in E$ допустимой для пары вееров, если множество $D(e) = \text{supp } \mathcal{P} \cap (e + \text{supp } \mathcal{Q})$ состоит только из трансверсальных пересечений конусов.

При $k+l < n$ положим $\tilde{\mathcal{P}}\tilde{\mathcal{Q}} = 0$.

При $k+l = n$ произведение $\tilde{\mathcal{P}}\tilde{\mathcal{Q}}$ – это 0-мерный с-веер, т.е. точка нуль, взятая с целочисленной кратностью $m(0)$.

Кратности при $k+l = n$ задаются следующим образом. Выбрав некоторую допустимую точку $e \in E$, положим

$$m(0) = \sum_{x \in D(e), x=P \cap (Q+e)} \xi(E(P), E(Q))p(P)q(Q).$$

Напомним, что $E(K)$ – порожденное конусом K подпространство E , а функция ξ определена в § 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть E_1, E_2 – подпространства E дополнительной размерности, рассматриваемые как с-вееры. Тогда их произведение – точка нуль с кратностью $\xi(E_1, E_2)$.

Приведем пример умножения 1-мерных с-вееров на плоскости:

$$\begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \\ 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \times \begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ -1 \mid \rightarrow -1 \\ \downarrow \\ 1 \end{array} = \begin{array}{c} 1 \\ \swarrow \\ 2 \\ \searrow \\ 1 \end{array} \times \left(\begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ 1 \\ \downarrow \end{array} + \begin{array}{c} \leftarrow 1 \rightarrow -1 \end{array} \right) = 2 - 1 = 1$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Кратность $m(0)$ не зависит от произвола в выборе допустимой точки e .

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Этот факт можно понимать как наличие индекса пересечения с-вееров дополнительных размерностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 6 вытекает из следующих соображений.

1. Рассмотрим множество $\mathcal{D}$ всех таких точек $e \in E$, что пересечение $\text{supp } \mathcal{P} \cap (e + \text{supp } \mathcal{Q})$, кроме точек пересечения конусов старших размерностей, содержит только точки дискретного пересечения конусов суммарной размерности $n-1$.

2. При непрерывном изменении e (в области допустимых точек) $m(0)$ не изменяется. Любые две допустимые точки можно соединить лежащей в $\mathcal{D}$ кривой, содержащей только конечное число недопустимых точек.

3. Ограничения на кратности (в локальной форме; см. § 2) гарантируют, что изменения $m(0)$ как функции на кривой не происходит также при проходе через не допустимую точку кривой.

При $k + l = n + d$, $d > 0$, конструкция умножения пред-с-вееров состоит из:

1) *правила задания кратностей* d -мерных конусов веера $\mathcal{P} \cap^s \mathcal{Q}$ (это определенное выше устойчивое произведение вееров);

2) проверки ограничения на кратности.

Задание кратностей при $k + l = n + d$, $d > 0$, сводится к случаю $k + l = n$ при помощи локализации и факторизации. Пусть K – d -мерный конус веера $\mathcal{P} \cap^s \mathcal{Q}$, $\varphi \in K$ и $\mathcal{P}^\varphi$, $\mathcal{Q}^\varphi$ – локализации вееров $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$. Минимальные конусы этих вееров содержат подпространство $E(K)$. Обозначим через $\mathcal{P}_f^\varphi$, $\mathcal{Q}_f^\varphi$ результат факторизации вееров-локализаций по подпространству $E(K)$. Согласно изложенному в § 2, рассматриваемые как вееры с кратностями, они являются пред-с-веерами в пространстве $E/E(K)$. Поскольку веер $(\mathcal{P} \cap^s \mathcal{Q})_f^\varphi$ – точка нуль, то согласно лемме 2 $\mathcal{P}_f^\varphi \cap^s \mathcal{Q}_f^\varphi = (0)$. Ранее для подобного случая построена кратность $m(0)$. Эту кратность и припишем конусу K .

Для проверки ограничений на кратности при $k + l = n + d$, $d > 0$, в локальной форме (предложение 2) или, иначе говоря, в окрестности любого $(d - 1)$ -мерного конуса H веера $\mathcal{P} \cap^s \mathcal{Q}$, можно, выбрав $\varphi \in H$, заменить $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ сначала на их φ -локализации, а затем на факторизации по пространству $E(H)$. Таким образом, проверка ограничений сведена к случаю $k + l = n + 1$, при котором веер $\mathcal{P} \cap^s \mathcal{Q}$ одномерен.

В этом случае достаточно (ср. предложение 1) проверить ограничения на кратности для сдвигов гиперплоскости A , трансверсальной любому из ненулевых конусов вееров $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \cap^s \mathcal{Q}$. Пусть $h \in E^*$ – уравнение гиперплоскости A . Если точка e допустима, то множество $D(e) = \supp \mathcal{P} \cap (e + \supp \mathcal{Q})$ состоит из трансверсальных пересечений конусов, сумма размерностей которых равна n или $n + 1$, т.е. $D(e)$ – конечно-звенная ломаная линия. Каждое из звеньев – пересечение конусов суммарной размерности $n + 1$. Звену $\lambda = P \cap Q$ припишем кратность $m(\lambda) = \xi(E(P), E(Q))$, где ξ – функция на парах подпространств, определенная в § 2.

ЛЕММА 3. Пусть γ – вершина ломаной $D(e)$. Обозначим через $\{\alpha_-\}$ и $\{\alpha_+\}$ множества звеньев ломаной, выходящих из вершины γ в область соответственно меньших и больших значений h . Тогда

$$\sum_{\alpha_-} m(\alpha_-) \xi(E(\alpha_-), A) = \sum_{\alpha_+} m(\alpha_+) \xi(E(\alpha_+), A).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть γ является пересечением конусов $P \in \mathcal{P}$, $Q \in \mathcal{Q}$ размерностей $k - 1$, l , а $\{P_+\}$ и $\{P_-\}$ – множества k -мерных конусов веера $\mathcal{P}$, содержащих звенья ломаной, направленные от γ в область соответственно больших и меньших значений h .

Используя утверждение 3) леммы 1, можем переписать слагаемые обеих частей в виде $m(\alpha_\pm) \xi(E(\alpha_\pm), A) = \xi(A, E(Q)) \xi(A \cap E(Q), E(P_\pm))$. После сокращения на $\xi(A, E(Q))$ приходим к локальным ограничениям на кратности веера $\mathcal{P}$ (предложение 2)

$$\sum_{P_+} \xi(A \cap E(Q), E(P_+)) = \sum_{P_-} \xi(A \cap E(Q), E(P_-))$$

в окрестности конуса P для подпространства $A \cap E(Q)$.

Пересечение $D(e)$ с областью достаточно больших положительных значений h состоит из конечного набора лучей $\{\kappa_+\}$ (эти лучи – куски звеньев ломаной), параллельных лежащим в полупространстве $h > 0$ одномерным конусам веера $\mathcal{P} \cap^s \mathcal{Q}$. Положим $m_+ = \sum_{\kappa_+} m(\kappa_+) \xi(E(\kappa_+), A)$.

Как следует из правила задания кратностей с-веера-произведения, проверяемые ограничения на кратности – это вытекающее из утверждения леммы 3 равенство $m_+ = m_-$, где m_- определяется аналогично m_+ с использованием области достаточно больших *отрицательных* значений h .

Нетрудно убедиться в том, что, при замене исходных пред-с-вееров на эквивалентные результат остается в своем классе эквивалентности пред-с-вееров.

Скажем несколько слов об ассоциативности операции умножения. Пусть $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ – с-вееры размерностей k_0, k_1, k_2 . Так же, как и выше, проверка ограничений на кратности сводится к проверке равенства $\mathcal{P}_0(\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2) = (\mathcal{P}_0 \mathcal{P}_1) \mathcal{P}_2$ в случае $k_0 + k_1 + k_2 = 2n$. Пару точек e_1, e_2 назовем *допустимой*, если при всех $K_i \in \mathcal{P}_i$ тройные пересечения конусов $K_0 \cap (e_1 + K_1) \cap (e_2 + K_2)$ трансверсальны. Точке такого тройного пересечения припишем кратность (см. лемму 1) $\Xi(E(K_0), E(K_1), E(K_2))$ и обозначим сумму всех кратностей через μ . Так же, как при выводе предложения 6, можно проверить, что μ не зависит от выбора допустимой пары e_1, e_2 .

Проверка того, что тройное произведение вееров, независимо от расстановки скобок, есть точка нуль с кратностью μ , основана на свойстве симметричности функции трех аргументов Ξ (см. лемму 1). Детали этой проверки (близкой к доказательству леммы 3) не приводим, так как ассоциативность умножения с-вееров вытекает из содержащейся в § 7, 8 интерпретации этого умножения как умножения дифференциальных форм.

Построение кольца с-вееров закончено. Приведем два используемых ниже очевидных свойства этого кольца.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. 1) При $\varphi \in E$ отображение φ -локализации – эндоморфизм кольца с-вееров.

2) Пусть $\mathcal{A}^\psi$ – подкольцо кольца с-вееров, представимых пред-с-веерами, минимальный конус которых содержит прямую ψ . Тогда отображение факторизации задает гомоморфизм кольца $\mathcal{A}^\psi$ в кольцо с-вееров пространства E/ψ .

§ 7. с-вееры как дифференциальные формы

Отождествим n -мерное евклидово векторное пространство E с пространством $\operatorname{Re} \mathbb{C}^n$. Пусть $f, g, \dots$ – непрерывные кусочно линейные функции на $\mathbb{C}^n$, постоянные вдоль пространства мнимых частей $\operatorname{Im} \mathbb{C}^n$. Обозначим через $\mathcal{F}$ кольцо дифференциальных форм на $\mathbb{C}^n$, порожденное над $\mathbb{R}$ 2-формами вида $dd^c f$ (напомним, что d^c – разность голоморфной и антиголоморфной частей дифференциала).

Корректность определения $\mathcal{F}$ нуждается в обосновании, поскольку $dd^c f$ – форма с обобщенными коэффициентами (т.е. так называемый поток). Известно [25], что $dd^c f_1 \wedge \dots \wedge dd^c f_k$ является корректно определенным потоком, если $f_1, \dots, f_k$ – непрерывные плюрисубгармонические (в частности, выпуклые) функции на $\mathbb{C}^n$. Это означает, что если последовательность наборов k гладких плюрисубгармонических функций сходится к $\{f_1, \dots, f_k\}$ локально равномерно, то соответствующая последовательность дифференциальных форм слабо сходится к не зависящему

от выбора последовательности потока. О предельном потоке известно, что он (как функционал) определен на финитных формах с локально интегрируемыми коэффициентами и принимает неотрицательные значения на положительных формах, т.е. является неотрицательным потоком типа меры. Теперь корректность определения $\mathcal{F}$ вытекает из того, что любая кусочно линейная функция представима как разность двух выпуклых.

Ниже описано, как k -мерному s -вееру $\mathcal{K}$ сопоставить однородный поток $W(\mathcal{K})$ бистепени (k, k) , т.е. обращающийся в нуль на биоднородных формах, включающих отличное от $n - k$ количество голоморфных или антиголоморфных дифференциалов.

ТЕОРЕМА 3. *Отображение W устанавливает изоморфизм кольца евклидовых s -вееров $\mathcal{A}$ и кольца $\mathcal{F}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Доказательство теоремы не использует свойства ассоциативности умножения s -вееров. Поэтому эта ассоциативность – следствие теоремы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Если изменить определение рациональных s -вееров, допуская рациональные, а не только целочисленные значения кратностей, то все используемые ниже аргументы остаются верными и приводят к следующему результату. Отображение W является изоморфизмом этого кольца на кольцо, порожденное над $\mathbb{Q}$ формами вида $dd^c H$, где H – опорная функция выпуклого многогранника с вершинами в точках с рациональными координатами.

Соответствующий k -мерному s -вееру $\mathcal{K}$ поток $W(\mathcal{K})$ определяется следующим образом:

$$W(\mathcal{K})(\varphi) = \sum_K \int_{(K + \text{Im } \mathbb{C}^n)} \omega_K \wedge \varphi, \quad (1)$$

где φ – дифференциальная форма степени $2k$ в $\mathbb{C}^n$ с компактным носителем (аргумент потока), суммирование идет по k -мерным конусам s -веера, а ω_K – определенная ниже нечетная $(n - k)$ -форма на пространстве $E(K) + \text{Im } \mathbb{C}^n$.

Напомним, что нечетная форма – это внешняя форма в векторном пространстве со знаком, меняющимся при смене ориентации (т.е. нечетная функция на множестве ориентаций). Внешнее произведение нечетной формы на четную – нечетная форма. Нечетная форма объема в векторном пространстве однозначно определяется объемом некоторой фиксированной ограниченной области этого пространства.

Для m -мерного конуса $K \in \mathcal{K}$ с приписанной ему кратностью m_K построим нечетную форму объема u_K на $E/E(K)$, полагая объем единичного куба евклидовой метрики пространства $E/E(K)$ равным m_K . Для любого конуса K в пространстве E определим отображение $\rho_K: (E(K) + \text{Im } \mathbb{C}^n) \rightarrow E/E(K)$ как композицию умножения на $\sqrt{-1}$ и факторизации по подпространству $E(K) + \sqrt{-1}E(K)$. Положим $\omega_K = \rho_K^*(u_K)$, где необходимое для определения прообраза нечетной формы согласование ориентаций пространств $E(K) + \text{Im } \mathbb{C}^n$ и $E/E(K)$ устанавливается, исходя из ориентации ядра отображения ρ_K как *комплексного* векторного пространства.

При выводе теоремы 3 нам потребуется переформулировка ограничений на кратности из § 2 в терминах определенных выше форм u_K . Согласуем ориентации k -мерного конуса K и его $(k - 1)$ -мерной грани L при помощи “вектора внутренней нормали”. Такое согласование позволяет рассмотреть нечетную $(n - k)$ -форму

u_K^L – обратный образ u_K при отображении проекции $E/E(L) \rightarrow E/E(K)$. Переформулируем локальные ограничения на кратности (предложение 2) следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Для любого $(k-1)$ -мерного конуса L , k -мерного пред-с-веера $\mathcal{H}$ справедливо равенство $\sum_K u_K^L = 0$, где суммирование идет по всем k -мерным конусам пред-с-веера, имеющим L своей гранью.*

Пусть $\Delta \subset E^*$ – выпуклый многогранник, K_Γ – двойственный конус его грани Γ , u_Γ – нечетная форма на пространстве $E/E(K_\Gamma)$, построенная описанным выше способом по кратности, равной площади грани Γ , и u_Γ^Λ – прообраз нечетной формы u_Γ на пространстве $E/E(K_\Lambda)$, где Λ – содержащая Γ грань на единицу большей размерности. Применяя предложение 8 к определенному в п. 1.4 пред-с-вееру Σ_Δ^k , получаем (это объяснено в конце § 2) переформулировку условий Минковского для $(n-k+1)$ -мерных граней многогранника Δ .

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для любой $(n-k+1)$ -мерной грани Λ многогранника Δ справедливо равенство $\sum_\Gamma u_\Gamma^\Lambda = 0$, где суммирование идет по $(n-k)$ -мерным граням Λ .*

Приведем (без доказательства) еще один, нужный для вывода теоремы 3, набор тождеств, связывающих нечетные формы u_Γ^Λ . Эти тождества эквивалентны формуле объема многогранника как суммы площадей его граней, умноженных на длины опущенных на них высот, если применить ее к $(n-k+1)$ -мерной грани Λ многогранника Δ .

ЛЕММА 4. *Пусть $h_D \in E^*$ – точка, принадлежащая аффинному подпространству, порожденному гранью D многогранника Δ . Тогда для любой $(n-k+1)$ -мерной грани Λ многогранника Δ (в обозначениях следствия 2) $u_\Lambda = \sum_\Gamma h_\Gamma \wedge u_\Gamma^\Lambda$.*

Теперь сформулируем утверждения, разбивающие утверждение теоремы 3 на части.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Отображение W устанавливает изоморфизм колец $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{F}$, где $\mathcal{A}_0$ – подкольцо кольца $\mathcal{A}$, порожденное с-веерами первой степени.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Кольцо с-вееров порождено элементами первой степени, т.е. $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0$.*

Поскольку отображение W , очевидно, мономорфно и сохраняет операцию сложения, то предложение 9 вытекает из (см. ниже) предложения 11 и описанного в п. 1.4 правила возведения многогранника в степень (его обоснование помещено в следующем ниже предложении 12). Действительно, так как любая кусочно линейная функция является разностью двух выпуклых, то, применяя формулу поляризации, любой элемент $f \in \mathcal{F}$ степени m можно представить в виде $\sum_\Delta \pm (dd^c H_\Delta)^m$, где H_Δ – опорная функция многогранника Δ . Поэтому (см. предложение 11) $f = \sum_\Delta \pm W(\Sigma_\Delta^m)$. Теперь из предложения 12 (см. ниже) получаем, что $f = \sum_\Delta \pm W(\Sigma_\Delta)^m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Выполнено равенство $(dd^c H_\Delta)^m = W(\Sigma_\Delta^m)$, где Σ_Δ^m – определенный в п. 1.4 с-веер.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя тождество (верное для любой функции H и гладкой финитной функции φ)

$$(dd^c H)^m(\varphi) = (dd^c H)^{m-1}(Hdd^c \varphi)$$

и индуктивное предположение (Σ^0 – это с-веер, состоящий из одного совпадающего с E конуса с кратностью единица), получаем $(dd^c H)^m(\varphi) = W(\Sigma_\Delta^{m-1})(Hdd^c \varphi)$. Поэтому согласно (1)

$$(dd^c H)^m(\varphi) = \sum_{L \in \Sigma_\Delta^{m-1}, \dim L = n-m+1} \int_{(L + \text{Im } \mathbb{C}^n)} \omega_L \wedge (Hdd^c \varphi).$$

Представим подынтегральное выражение в виде сумм двух слагаемых $d(H_L \omega_L \wedge d^c \varphi)$ и $-\omega_L \wedge dH_L \wedge d^c \varphi$, где H_L – любая точка двойственной конусу L грани многогранника Δ , рассматриваемая как вещественная линейная функция на $\mathbb{C}^n$ (такая функция совпадает с H на области интегрирования $L + \text{Im } \mathbb{C}^n$).

ЛЕММА 5. 1) Сумма интегралов первого слагаемого нулевая.

2) Второе слагаемое при ограничении на области интегрирования $L + \text{Im } \mathbb{C}^n$ становится равным $d(\omega_L \wedge d^c H_L \wedge \varphi)$.

Первое утверждение леммы – следствие приведенных выше ограничений на кратности, записанных для с-веера Σ_Δ^{m-1} . Второе – следствие двух фактов:

- а) компонента бистепени $(n-m+1, n-m+1)$ формы $dH_L \wedge d^c \varphi + d^c H_L \wedge d\varphi$ на принадлежащем ядру формы ω_L подпространстве $E(L) + \sqrt{-1}E(L)$ нулевая;
- б) форма $d^c H_L$ замкнута.

Применяя формулу Стокса к интегралам второго слагаемого, приходим к выражению $(dd^c H)^m(\varphi)$ в виде суммы интегралов по областям $L + \text{Im } \mathbb{C}^n$, где суммирование идет по $(n-m)$ -мерным конусам L веера Σ_Δ^{m-1} . При этом по области $L + \text{Im } \mathbb{C}^n$ интегрируется форма вида $(\sum_K \omega_K \wedge d^c H_K) \wedge \varphi$, где суммирование ведется по $(n-m+1)$ -мерным конусам K веера Σ_Δ^{m-1} , имеющих L своей гранью. Теперь из утверждения леммы 4 (см. также приведенное выше определение формы ω_L) вытекает, что эта форма равна ω_K , что и требовалось доказать. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. $\Sigma_\Delta^k \Sigma_\Delta^p = \Sigma_\Delta^{k+p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из приведенного в § 6 правила задания кратностей вытекает, что равенство $\Sigma_\Delta^l \Sigma_\Delta^m = \Sigma_\Delta^{l+m}$ достаточно проверить в случае $l+m = n$. Пусть H – опорная функция многогранника Δ и $H_e(x) = H(x+e)$. Применяя утверждения предложения 11 и приведенной ниже леммы 6, получаем

$$W(\Sigma_\Delta^l \Sigma_\Delta^m) = \lim_{e \rightarrow 0} (dd^c H)^l \wedge (dd^c H_e)^m = (dd^c H)^n = W(\Sigma_\Delta^n).$$

ЛЕММА 6. Пусть $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ – с-вееры дополнительных размерностей. Тогда $W(\mathcal{P}\mathcal{Q}) = \lim_{e \rightarrow 0} W(\mathcal{P})W_e(\mathcal{Q})$, где $W_e(\mathcal{Q})$ – сдвиг потока $W(\mathcal{Q})$ на допустимую (см. § 6) точку e .

Утверждение леммы легко получить из соображений непрерывности или при помощи прямого вычисления. Детали доказательства мы опускаем.

Пусть $\mathcal{K}$ – веер конусов, двойственных граням простого многогранника Δ (это означает, что все конусы веера $\mathcal{K}$ симплицильны); $\mathcal{B}$ – кольцо всех с-вееров с конусами из $\mathcal{K}$ и $\mathcal{B}^k$ – однородные с-вееры $\mathcal{B}$ степени k (или, что то же самое, $(n-k)$ -мерные с-вееры).

- ТЕОРЕМА 4. 1) Кольцо $\mathcal{B}$ порождено элементами первой степени.
 2) Умножение с-вееров задает невырожденное спаривание $\mathcal{B}^k \oplus \mathcal{B}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$.

Любой с-веер содержится в каком-нибудь кольце такого вида. Поэтому предложение 10, а с ним теорема 3 вытекают из теоремы 4. Объединим два утверждения теоремы 4 следующим образом.

ЛЕММА 7. Пусть $\mathcal{B}_0^k$ – $\mathcal{B}^1$ -порожденная часть $\mathcal{B}^k$. Тогда при $0 \leq k \leq n$ спаривание $\mathcal{B}^k \oplus \mathcal{B}_0^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}$ невырождено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathcal{P} \in \mathcal{B}^k$ принадлежит ядру спаривания, т.е. при любом $\mathcal{Q} \in \mathcal{B}_0^{n-k}$ произведение $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ нулевое. Пусть k выбрано максимально большим, т.е. при $m > k$ ядро спаривания в $\mathcal{B}^m$ нулевое (очевидно, $k < n$). Тогда $\mathcal{P}\mathcal{R} = 0$ для любого $\mathcal{R} \in \mathcal{B}^1$. Пусть Λ – $(n-1)$ -мерная грань многогранника Δ с двойственным конусом $\varphi \subset \text{supp } \mathcal{P}$.

При $k < n-1$, применяя локализацию и факторизацию веера (предложение 7), сводим утверждение к случаю веера меньшей размерности (веер-факторизация является двойственным веером простого многогранника Λ).

При $k = n-1$ обозначим через Γ многогранник, полученный из Δ малым параллельным сдвигом грани Λ . Тогда (так как многогранник Δ простой) верно, что $(\Sigma_\Delta - \Sigma_\Gamma) \in \mathcal{B}^1$. Теперь, как нетрудно заметить, из равенства $(\Sigma_\Delta - \Sigma_\Gamma)\mathcal{P} = 0$ вытекает, что кратность, приписанная лучу φ в с-веере $\mathcal{P}$, нулевая.

§ 8. Абстрактные с-вееры и проблема Минковского

Кольцо потоков $\mathcal{F}$, в отличие от кольца евклидовых с-вееров, определено независимо от выбора метрики в $\text{Re } \mathbb{C}^n$. При инвариантном (не зависящем от метрики) определении с-вееров в вещественном векторном пространстве E следует рассматривать приписанную конусу K кратность как нечетную форму объема u_K на $E/E(K)$, где $E(K)$ – порожденное конусом подпространство E . Используя определение 1 и принимая утверждение предложения 8 за формулировку ограничения на кратности, получим определение абстрактного с-веера.

Для определения умножения (определение сложения очевидно) абстрактных с-вееров по правилам, приведенным в § 6, достаточно так же, как в евклидовом или рациональном случаях, построить это умножение для рассматриваемых как с-вееры подпространств E_1, E_2 с нечетными формами u_1, u_2 на факторпространствах $E/E_1, E/E_2$ (в евклидовом и рациональном случаях вместо форм задаются числовые кратности), т.е. нужно построить “произведение” форм u_1, u_2 – нечетную форму объема $u_{1,2}$ на пространстве $E/(E_1 \cap^s E_2)$, где $E_1 \cap^s E_2$ – устойчивое пересечение подпространств (см. § 6).

Если подпространства E_1, E_2 не трансверсальны, то положим $u_{1,2} = 0$. Если подпространства E_1, E_2 трансверсальны, то, выбрав ориентации пространств E/E_i и согласованную с этим выбором ориентацию $E/(E_1 \cap E_2)$ (в трансверсальном случае $E_1 \cap^s E_2 = E_1 \cap E_2$), положим $u_{1,2} = u_1^* \wedge u_2^*$, где u_i^* – прообраз u_i при проекции $E/(E_1 \cap E_2) \rightarrow E/E_i$. Форма $u_{1,2}$, действительно, является нечетной, т.е. меняет знак при смене ориентации (заметим, что u_1^* и u_2^* не являются нечетными формами).

Введем обозначения C_e, C_r, C_a для колец евклидовых, рациональных и абстрактных с-вееров. Изоморфизм W в § 7 строился как композиция отображений $C_e \rightarrow$

$C_a \rightarrow \mathcal{F}$. Поэтому кольца евклидовых и абстрактных с-вееров изоморфны. Сопоставляя рациональному конусу с кратностью $m(K)$ такую нечетную форму объема на пространстве $E/E(K)$, что объем фундаментального параллелепипеда целочисленной решетки равен $m(K)$, получаем вложение $C_r \rightarrow C_a$.

Сопоставление многограннику $\Delta \subset E^*$ с-веера Σ_Δ^k не зависит от выбора метрики или целочисленной решетки. Абстрактный с-веер Σ_Δ^k строится по выпуклому многограннику Δ следующим образом.

Ограниченной области A векторного пространства H можно сопоставить нечетную форму объема ψ_A в сопряженном пространстве H^* такую, что для любой области $U \subset H^*$ ее ψ_A -объем равен лиувиллеву объему области $A \oplus U \subset H \oplus H^*$. Абстрактный с-веер Σ_Δ^k — $(n - k)$ -мерный остов веера двойственных конусов с нечетными формами объема ψ_Λ , заданными на пространствах $E/E(K_\Lambda)$, где K_Λ — конус, двойственный k -мерной грани Λ . Таким образом, результаты о возведении многогранника в степень (в частности, теорему Минковского) можно формулировать без использования евклидовой метрики. Нетрудно проверить, что сформулированное в п. 1.2 утверждение о степенях многогранников действительно является переформулировкой результатов [20], [21].

Набор вида $\{v_i, m_i\}$, где v_i — примитивные целочисленные векторы в пространстве с решеткой E , а m_i — целые положительные числа такие, что $m_1 v_1 + \dots + m_N v_N = 0$, назовем *данными Минковского*. Тогда из теоремы Минковского о выпуклых многогранниках вытекает, что существует и единствен с точностью до сдвига выпуклый многогранник $\Delta \subset E^*$ такой, что:

- (i) количество $(n - 1)$ -мерных граней Δ равно N ;
- (ii) эти грани лежат на сдвигах рациональных подпространств;
- (iii) v_i — их единичные внешние нормали;
- (iv) m_i — их площади.

(Понятие внешней нормали и площади грани многогранника в пространстве с целочисленной решеткой определено в конце § 2.)

с-веер алгебраической кривой (см. п. 1.4) представляет собой данные Минковского. Таким образом, любой кривой может быть сопоставлен выпуклый многогранник.

Во всех известных автору примерах трехмерных многогранников с целочисленными данными Минковского длины их ребер, измеренные с помощью целочисленной решетки, являются суммами квадратичных иррациональностей.

Список литературы

1. *Kemph G., Knudsen F., Mumford D., Saint-Donat B.* Toroidal embeddings. 1 // Lect. Notes Math. № 339. N. Y.: Springer-Verlag, 1973.
2. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и особенности интегралов. М.: Наука, 1994.
3. *Бернштейн Д. Н.* Число корней системы уравнений // Функц. анализ и его прилож. 1975. Т. 9. №3. С. 1–4.
4. *Бернштейн Д. Н., Кушниренко А. Г., Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона // УМН. 1976. Т. 31. №3. С. 201.
5. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и торические многообразия // Функц. анализ и его прилож. 1977. Т. 11. №4. С. 56–64.
6. *Хованский А. Г.* Многогранники Ньютона и род полных пересечений // Функц. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. №1. С. 51–61.
7. *Данилов В. И.* Геометрия торических многообразий // УМН. 1978. Т. 33. №2. С. 85–134.

8. Пухликов А. В., Хованский А. Г. Конечно аддитивные меры виртуальных многогранников // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 2. С. 337–356.
9. Пухликов А. В., Хованский А. Г. Теорема Римана–Роха для интегралов и сумм квазиполиномов по виртуальным многогранникам // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. № 4. С. 188–216.
10. Stanley R. P. The number of faces of a simplicial convex polytope // Adv. Math. 1989. V. 35. P. 236–238.
11. McMullen P. The polytope algebra // Adv. Math. 1989. V. 78. P. 76–130.
12. McMullen P. On simple polytopes // Invent. Math. 1990. V. 113. P. 419–444.
13. Тиморин В. А. Аналог соотношений Ходжа–Римана для простых выпуклых многогранников // УМН. 1999. Т. 63. № 3. С. 113–162.
14. Казарновский Б. Я. Укорочения систем уравнений, идеалов и многообразий // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 63. № 3. С. 119–132; Письмо в редакцию // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 1. С. 224.
15. Казарновский Б. Я. Экспоненциальные аналитические множества // Функци. анализ и его прилож. 1997. Т. 31. № 2. С. 15–26.
16. Гельфонд О. А. О среднем числе корней систем голоморфных почти периодических уравнений // УМН. 1984. Т. 39. № 1. С. 123–124.
17. Казарновский Б. Я. О нулях экспоненциальных сумм // ДАН СССР. 1981. Т. 257. № 4. С. 804–808.
18. Казарновский Б. Я. Многогранники Ньютона и корни систем экспоненциальных сумм // Функци. анализ и его прилож. 1984. Т. 18. № 4. С. 40–49.
19. Хованский А. Г. Малочлены. М.: Фазис, 1997.
20. Minkowski H. Volumen und Oberfläche // Math. Ann. 1903. V. 57.
21. Александров А. Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел. 1 // Матем. сб. 1937. Т. 2. № 5. С. 947–972; 2 // Матем. сб. 1937. Т. 2. № 6. С. 1205–1238; 3 // Матем. сб. 1938. Т. 3. № 1. С. 27–46; 4 // Матем. сб. 1938. Т. 3. № 2. С. 227–251.
22. Исследования по метрической теории поверхностей (сборник переводов). М.: Мир, 1980.
23. Погорелов А. В. Многомерная проблема Минковского. М.: Наука, 1975.
24. Бурого Ю. Д. Геометрия поверхностей в евклидовых пространствах // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 48. М.: ВИНТИ, 1989.
25. Bedford E., Taylor B. A. The Dirichlet problem for a complex Monge–Ampère equations // Invent. Math. 1976. V. 37. № 2. P. 1–44.
26. Brion M. Piecewise polynomial functions, convex polytopes and enumerative geometry // Banach center publ. V. 36. Warszawa: Inst. of Math. Polish Acad. Sci., 1996. P. 25–44.
27. Fulton W., Sturmfels B. Intersection theory on toric varieties. <http://arxiv.org/abs/math/9403002>.