Общероссийский математический портал

С. А. Кудрявцев, Классификация исключительных логповерхностей дель Пеццо с $\delta = 1$, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 3, 45–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/im435>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 06:40:24

УДК 512.7

С. А. Кудрявцев

Классификация исключительных логповерхностей дель Пеццо с $\delta = 1$

*К 80-летию Игоря Ростиславовича Шафаревича*Классифицированы исключительные логповерхности дель Пеццо с $\delta = 1$.

Библиография: 20 наименований.

Введение

В настоящее время основной задачей в логпрограмме минимальных моделей является задача классификации возникающих экстремальных стягиваний и особенностей. При ее решении очень важный шаг, впервые сделанный при классификации трехмерных неособых многообразий Фано, – это нахождение “хорошего” дивизора в кратной антиканонической линейной системе. В. В. Шокуров в работе [19] предложил индуктивный метод построения “хорошего” дивизора $D \in |-nK_X|$, называемого *n-дополнением*. Суть этого метода состоит в следующем индуктивном переходе: нахождение *n-дополнения* *m*-мерного экстремального стягивания $X \rightarrow Z$ локального типа (т. е. когда $\dim Z > 0$) или особенности (т. е. когда $Z = X$) следует из нахождения *n-дополнения* $(m - 1)$ -мерного логмногообразия. Проиллюстрируем это на примере особенностей.

Пусть $(X \ni P)$ – логтерминальная особенность. Тогда для нее существует чисто логтерминальное раздутие $f: (Y, S) \rightarrow (X \ni P)$ [11, теорема 1.5], т. е. $S = \text{Exs } f$ – неприводимый *f*-антиобильный дивизор и пара (Y, S) чисто логтерминальна. Тогда *n-дополнение* дивизора $K_S + \text{Diff}_S(0)$ продолжается до *n-дополнения* $K_Y + S$, а затем его образ будет *n-дополнением* дивизора K_X . Верно и обратное утверждение, т. е. *n-дополнение* дивизора K_X индуцирует *n-дополнения* дивизоров $K_Y + S$ и $K_S + \text{Diff}_S(0)$. Также следует отметить, что коэффициенты дифференциалов $\text{Diff}_S(0)$ являются стандартными, т. е. имеют вид $\frac{k_i - 1}{k_i}$, где $k_i \in \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}$. (В случае гиперповерхностных особенностей реализация этого подхода приведена в работе [12], см. также далее примеры 2.9–2.11.) Поэтому при изучении трехмерных стягиваний и особенностей возникает важнейшая проблема.

ПРОБЛЕМА. Описать классы логповерхностей дель Пеццо, расслоений на рациональные кривые и эллиптических расслоений со стандартными коэффициентами, возникающие при чисто логтерминальных раздутиях трехмерных логканонических особенностей.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований № 02-01-00441, Ведущих научных школ № 00-15-96085 и INTAS-OPEN № 2000#269.

Следующим важным понятием при нахождении дополнения является *исключительность многообразий*, которая сохраняется при индуктивном переходе от экстремального стягивания $X \rightarrow Z$ локального типа к логмногообразию $(S, \text{Diff}_S(0))$. Важность разделения стягиваний и логмногообразий на исключительные и неисключительные следует из двух свойств:

- 1) если многообразие или экстремальное стягивание является неисключительным, то для него можно найти n -дополнение при небольших значениях n (например, для двумерных логканонических особенностей $n \in \{1, 2\}$ [19, пример 5.2], а для трехмерных логканонических особенностей $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ [20, теорема 7.1]);
- 2) исключительные многообразия и стягивания являются “ограниченными” (это позволяет дать их подробное описание).

Свойство ограниченности относится к некоторым инвариантам многообразий, например к минимальным логдискрепантностям (см. [20, § 7]). Гипотетически для исключительных особенностей ограниченность означает следующее: $(S, \text{Diff}_S(0))$ принадлежит конечному числу алгебраических семейств. Для трехмерных исключительных логканонических гиперповерхностных особенностей это было проверено в [12]. Другие результаты об ограниченности инвариантов и ссылки на них можно найти в [17] и [16].

В силу сказанного выше для классификации трехмерных экстремальных стягиваний и особенностей необходимо знать классификацию исключительных логповерхностей (S, D) , где D – граница со стандартными коэффициентами, дивизор $-(K_S + D)$ обилен и для любого дополнения D^+ дивизора $K_S + D$ пара (S, D^+) логтерминальна по Кавамате.

Определим следующий инвариант:

$$\delta(S, D) = \# \left\{ E \mid E - \text{дивизор с дискрепантностью } a(E, D) \leq -\frac{6}{7} \right\}.$$

В [20, теорема 5.1] доказано, что $\delta(S, D) \leq 2$. Классификация поверхностей в случае $\delta(S, D) = 2$ была получена в [20, § 5]. Основной результат настоящей работы – это классификация поверхностей в случае $\delta(S, D) = 1$. Из перечисленных результатов вытекает классификация важного класса поверхностей – логповерхностей Энриквеса с $\delta(S, D) = 1, 2$ (см. [13], [14]).

Отметим, что поверхности с $\delta(S, D) = 1$ изучались ранее. Случай “эллиптической кривой” был разобран в препринте [1]. Оставшиеся случаи изучались в диссертации [2], где полученный ответ не был обоснован и является неверным.

Другой подход к изучению исключительных логповерхностей дель Пеццо был предложен в [7].

Статья организована следующим образом. В § 1 даны предварительные сведения и результаты. В § 2 приведена формулировка основной классификационной теоремы и доказаны ее следствия. В § 3 вводятся основные определения и конструкции для доказательства основной теоремы. Классификация завершается в § 4–7.

Автор признателен Ю. Г. Прохорову за ряд ценных советов.

§ 1. Предварительные сведения и результаты

Все многообразия рассматриваются над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Основные определения, обозначения и понятия, использованные в статье, приведены в [8], [17].

Через E_0 и E_∞ будем обозначать соответственно нулевое и минимальное сечения линейчатой поверхности $\mathbb{F}_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$, а через f – ее слой.

Координаты взвешенного проективного пространства $\mathbb{P} = \mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)$ будем обозначать через $x_1, \dots, x_n$, общую гиперповерхность степени d в $\mathbb{P}$ – через X_d . Во многих случаях достаточно требовать только неприводимость и приведенность гиперповерхности X_d .

Через $S(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_5)$ будем обозначать логповерхность дель Пеццо с $\rho(S) = 1$. В скобках выписываются ее особенности. В рассматриваемом случае это особенности $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_5$.

Положим $\Phi_{\text{sm}} = \{1 - 1/m \mid m \in \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\}\}$ и $\Phi_m = \Phi_{\text{sm}} \cup [6/7, 1]$. Коэффициент d называется *стандартным*, если $d \in \Phi_{\text{sm}}$.

Знак $\cong_{\text{an}}$ обозначает аналитический изоморфизм.

Через $(D_1 \cdot D_2)_P$ обозначим индекс пересечения D_1 и D_2 в точке P , а через $\rho_a(D)$ – арифметический род D .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $(X/Z \ni P, D)$ – стягивание многообразий. Тогда $\mathbb{Q}$ -*дополнением* этого стягивания называется эффективный $\mathbb{Q}$ -дивизор D' такой, что $D' \geq D$, дивизор $K_X + D'$ логканоничен и $K_X + D' \sim_{\mathbb{Q}} 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть X – нормальное многообразие, а дивизор $D = S + B$ является субграницей, где S – его целая эффективная часть и $\lfloor B \rfloor \leq 0$. Дивизор $K_X + D$ называется *n-дополняемым*, если существует $\mathbb{Q}$ -дивизор D^+ , называемый *n-дополнением*, который удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) $n(K_X + D^+) \sim 0$;
- 2) дивизор $K_X + D^+$ логканоничен;
- 3) $nD^+ \geq nS + \lfloor (n+1)B \rfloor$.

ТЕОРЕМА 1.3 [20, теорема 3.1]. Пусть $(X/Z \ni P, D)$ – двумерное логмногообразие, где $f: X \rightarrow (Z \ni P)$ – стягивание локального типа (т. е. Z не является точкой). Предположим, что $-(K_X + D)$ f -численно эффективен и дивизор $K_X + D$ логканоничен. Тогда существует 1-, 2-, 3-, 4- или 6-дополнение дивизора $K_X + D$ в некоторой окрестности $f^{-1}(P)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пусть $(X/Z \ni P, D)$ – стягивание многообразий. При $\dim Z \neq 0$ стягивание называется *исключительным*, если для любого $\mathbb{Q}$ -дополнения D существует не более одного дивизора E (не обязательно исключительного) такого, что $a(E, D') = -1$. При $\dim Z = 0$ логмногообразие называется *исключительным*, если для любого $\mathbb{Q}$ -дополнения D' пара (X, D') логтерминальна по Кавамате.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Пара (X, D) называется *логповерхностью дель Пеццо*, если выполнены следующие условия:

- 1) все коэффициенты границы D принадлежат Φ_m ;
- 2) $-(K_X + D)$ – численно эффективный дивизор;
- 3) $K_X + D$ – логканонический дивизор;
- 4) существует $\mathbb{Q}$ -дополнение для $K_X + D$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. Условия, приведенные в определении 1.5, являются очень удобными для изучения поверхностей, хотя их можно заменить на другие (см. [20, теорема 4.1, предложение 4.6]). В частности, из определения 1.5 следует, что дивизор $-(K_X + D)$ является полуобильным и существует дополнение для $K_X + D$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Положим

$$\delta(X, D) = \# \left\{ E \mid E - \text{дивизор (не обязательно исключительный)} \right. \\ \left. \text{с дискрепантностью } a(E, D) \leq -\frac{6}{7} \right\}.$$

ТЕОРЕМА 1.8 [20, теорема 5.1]. Пусть (X, D) – исключительная логповерхность дель Пеццо. Тогда $\delta(X, D) \leq 2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. Пусть $(X \ni P, D)$, где $D = bC + \sum_{i=1}^k b_i B_i$, – росток двумерной логповерхности. Предположим, что $b \geq 6/7$, $b_i \in \Phi_m$ и дивизор $K_X + D$ является $\frac{1}{7}$ -логтерминальным. Тогда $k = 1$ и имеем один из следующих случаев:

- 1) $(X \ni P, D) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, b\{x + y^2 = 0\} + \frac{1}{2}\{x = 0\})$, где $b < \frac{13}{14}$;
- 2) $(X \ni P, D) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, b\{x = 0\} + b_1\{y = 0\})$, где $b + b_1 < \frac{13}{7}$.
- 3) $(X \ni P, D) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, b\{x = 0\} + b_1\{y = 0\})/\mathbb{Z}_n(q, 1)$, где $\frac{n/7-1+b_1}{1-b} < q \leq n-1$ и $(q, n) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [20, предложение 5.2] пара $(X \ni P, C + \sum_{i=1}^k b_i B_i)$ чисто логтерминальна, кроме случая 1). Если $(X \ni P)$ – неособая точка, то получаем случай 2). Пусть $(X \ni P)$ – особая точка. Тогда из классификации двумерных особенностей [17, теорема 2.1.3] следует

$$(X \ni P, C) \cong_{\text{an}} (\mathbb{C}^2 \ni 0, \{x = 0\})/\mathbb{Z}_n(q, 1).$$

Рассмотрим циклическое накрытие $\psi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_n(q, 1)$ степени n . Из п. 2) следует, что $k = 1$ и $\psi^{-1}(C)$ имеет простые нормальные пересечения с $\psi^{-1}(B_1)$. Поэтому получаем случай 3).

Рассмотрим взвешенное раздутие с весами $(\frac{q}{n}, \frac{1}{n})$. Пусть E – соответствующий исключительный дивизор. Условие $a(E, D) > -6/7$ выписано в случае 3). Докажем, что оно достаточно. Пусть $\varphi: (Y, E') \rightarrow (X \ni P)$ – другое раздутие, причем $a(E', D) \leq -6/7$. Можно считать, что φ пропускается через минимальное разрешение $\tilde{X} \rightarrow (X \ni P)$, т.е. имеем $\tilde{X} \rightarrow Y \rightarrow X$. Тогда при раздутии с весами $(\frac{q_1}{n_1}, \frac{1}{n_1})$ циклической особенности $\frac{1}{n_1}(q_1, 1)$ в точке $P = E' \cap C_Y$ имеем $a(\cdot, a(E', D)E' + bC_Y) \leq -6/7$, где C_Y – собственный прообраз C на Y . Повторяя процедуру, получаем $a(E, D) \leq -6/7$. Противоречие.

Напомним следующие известные утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. Пусть X – нормальная проективная поверхность с $h^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ и $H = \sum h_i H_i$ – эффективный дивизор Картье такой, что $\text{Supp } H \cap \text{Sing } X = \emptyset$. Предположим, что $p_a(H) = 0$, $p_a(H_i) = 0$ для всех i и H – численно эффективный дивизор. Тогда:

- 1) линейная система $|H|$ свободна и $\dim |H| = H^2 + 1$;
- 2) если $H^2 \geq 1$, то $|H|$ задает бирациональный морфизм $\psi: X \rightarrow X'$, при этом пара $(X', \psi(H))$ является одной из следующих: $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m))$, где $m = 1, 2$; $(\mathbb{F}_n, E_0 + mf)$, где $m \geq 1$; $(\mathbb{P}(n, 1, 1), X_n)$, где $n \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X(H) \rightarrow \mathcal{O}_H(H) \rightarrow 0$$

имеем

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(H)) \rightarrow H^0(H, \mathcal{O}_H(H)) \rightarrow 0.$$

Поскольку $H \cdot H_i \geq 0$, где H_i – произвольная компонента H , то линейная система $|H|_H$ свободна [3]. Поэтому $|H|$ – свободная линейная система и $\dim |H| = H^2 + 1$. Отсюда легко проверяется, что если $H^2 \geq 1$, то $|H|$ разделяет точки. При этом X' будет поверхностью минимальной степени. Все поверхности минимальной степени приведены в формулировке предложения (см. [5, гл. 4, § 3]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.11. Пусть X – нормальная проективная поверхность с $h^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ и H – неприводимая кривая с $p_a(H) = 1$. Предположим, что $H^2 \geq 3$ и $\text{Supp } H \cap \text{Sing } X = \emptyset$. Тогда линейная система $|H|$ задает бирациональный морфизм и $\dim |H| = H^2$.

Это предложение доказывается аналогично предложению 1.10.

§ 2. Классификация и ее следствия

В следующей теореме приведена классификация исключительных логповерхностей дель Пеццо с $\delta = 1$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть (X, D_X) , где $D_X = \sum d_i D_i$, – исключительная логповерхность дель Пеццо с $\delta(X, D_X) = 1$. Если $d_i < 6/7$ для всех i , то пусть $\tau: X' \rightarrow X$ – раздутие исключительной кривой E с дискрепантностью $a(E, D_X) \leq -6/7$: $E \cdot \tau^* = E$ и $K_{X'} + D_{X'} = \tau^*(K_X + D_X)$, что изображено на диаграмме

$$\begin{array}{ccc} & X' & \\ \tau \swarrow & & \searrow g \\ X & & S \end{array}$$

Если $d_i \geq 6/7$ для некоторого i , то положим $X' = X$. Тогда существует бирациональное стягивание $g: X' \rightarrow S$ со следующими свойствами: $\rho(S) = 1$ и g не стягивает кривую E .

Пусть $D = g(D_{X'})$. Тогда (S, D) – исключительная логповерхность дель Пеццо с теми же дополнениями, что и (X, D_X) (т. е. образ n -дополнения дивизора $K_X + D_X$ является n -дополнением дивизора $K_S + D$).

Положим $D = tC + \sum b_i B_i$, где $6/7 \leq t < 1$, $b_i \in \Phi_{\text{sm}}$, $C = g(E)$. Тогда пара (S, D) является одной из следующих¹:

1) $S = \mathbb{P}^2$, для D имеем следующие возможности:

$$1(+4) \ D = tX_2 + \frac{1}{2}X_1 + \frac{k-1}{k}X_1, \text{ где } k = 3, 4 \text{ и } t \in [\frac{6}{7}, \frac{3}{4} + \frac{1}{2k}];$$

$$2(+1) \ D = tX_1 + \frac{1}{2}X_1 + \frac{3}{4}X_1 + \frac{k-1}{k}X_1, \text{ где } k = 5, 6 \text{ и } t \in [\frac{6}{7}, \frac{3}{4} + \frac{1}{k}];$$

$$3(+1) \ D = tX_1 + \frac{1}{2}X_1 + \frac{4}{5}X_1 + \frac{4}{5}X_1 \text{ и } t \in [\frac{6}{7}, \frac{9}{10}];$$

$$4(+1) \ D = tX_1 + \frac{2}{3}X_2 + \frac{k-1}{k}X_1, \text{ где } k = 4, 5 \text{ и } t \in [\frac{6}{7}, \frac{2}{3} + \frac{1}{k}]; \text{ при } k = 5 \text{ прямая } X_1 \text{ не касается } X_2; \text{ возможно, что вместо } X_2 \text{ будет } X_1 + X_1;$$

2) $S = \mathbb{P}(1, 1, 2)$, для D имеем следующие возможности:

¹Условия, налагаемые на C и B_i , приведены в замечании 2.2.

- 1(ell) $D = tX_4 + \frac{1}{2}X_1$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$;
 2(+4) $D = tX_3 + \frac{2}{3}X_2$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{8}{9}]$;
 3(+2) $D = tX_2 + \frac{5}{6}X_2 + \frac{1}{2}X_1$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{11}{12}]$;
 4(+2) $D = tX_2 + \frac{4}{5}X_2 + \frac{k-1}{k}X_1$, где $k = 2, 3$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{6}{5} - \frac{k-1}{2k}]$;
 5(+2) $D = tX_2 + \frac{3}{4}X_2 + \frac{k-1}{k}X_1$, где $k = 3, 4$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{5}{4} - \frac{k-1}{2k}]$;
 6(+2) $D = tX_2 + \frac{2}{3}X_2 + \frac{k-1}{k}X_1$, где $k = 4, 5, 6$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{4}{3} - \frac{k-1}{2k}]$;
 7(+2) $D = tX_2 + \frac{1}{2}X_3 + \frac{k-1}{k}X_1$, где $k = 3, 4$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{5}{4} - \frac{k-1}{2k}]$; возможно, что вместо X_3 будет $X_2 + X_1$;
 8(0) $D = tX_1 + \frac{1}{2}X_2 + \frac{2}{3}X_2 + \frac{k-1}{k}X_1$, где $k = 4, 5$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{2}{3} + \frac{1}{k}]$;
 9(0) $D = tX_1 + \frac{1}{2}X_3 + \frac{4}{5}X_2$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{9}{10}]$; возможно, что вместо X_3 будет $X_2 + X_1$; отметим, что X_1 и X_3 пересекаются в двух различных точках;
 10(0) $D = tX_1 + \frac{3}{4}X_2 + \frac{4}{5}X_2$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{9}{10}]$;
 3) $S = \mathbb{P}(1, 1, 3)$, для D имеем следующие возможности:
 1(+5) $D = tX_4 + \frac{1}{2}X_3$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$;
 2(+3) $D = tX_3 + \frac{k-1}{k}X_3$, где $k = 4, 5$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{5}{3} - \frac{k-1}{k}]$;
 3(+3) $D = tX_3 + \frac{1}{2}X_3 + \frac{k-1}{k}X_1$, где $k = 3, 4, 5, 6$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{5}{6} + \frac{1}{3k}]$;
 4) (+4) $S = \mathbb{P}(1, 1, 4)$ у $D = tX_4 + \frac{1}{2}X_5$, где $t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$; возможно, что вместо X_5 будет $X_4 + X_1$;
 5) (+5) $S = \mathbb{P}(1, 1, 5)$, $D = tX_5 + \frac{1}{2}X_5$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{9}{10}]$;
 6) $S = \mathbb{P}(1, 2, 3)$, для D имеем следующие возможности:
 1(ell) $D = tX_6 + \frac{k-1}{k}X_1$, $t \in [\frac{6}{7}, 1 - \frac{k-1}{6k}]$ у $2 \leq k \leq 6$;
 2(ell) $D = \frac{6}{7}X_7$;
 3(+3) $D = tX_5 + \frac{1}{2}X_3$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{9}{10}]$;
 4(+2) $D = tX_4 + \frac{k-1}{k}X_3$, где $k = 4, 5, 6$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{3}{4} + \frac{3}{4k}]$;
 5(+2) $D = tX_4 + \frac{1}{2}X_5$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$; возможно, что вместо X_5 будет $X_3 + X_2$;
 6(+1) $D = tX_3 + \frac{k_1-1}{k_1}X_3 + \frac{k_2-1}{k_2}X_2$, где $(k_1, k_2) = (2, 5), (2, 6), (3, 3), (4, 2), (5, 2)$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{1}{3} + \frac{1}{k_1} + \frac{2}{3k_2}]$;
 7(+1) $D = tX_3 + \frac{1}{2}X_4 + \frac{2}{3}X_2$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{8}{9}]$;
 8(+1) $D = tX_3 + \frac{2}{3}X_5$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{8}{9}]$;
 9(+1) $D = tX_3 + \frac{2}{3}X_4 + \frac{1}{2}X_1$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{17}{18}]$;
 10(+1) $D = tX_3 + \frac{k-1}{k}X_4$, где $k = 5, 6$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{2}{3} + \frac{4}{3k}]$;
 11(0) $D = tX_2 + \frac{1}{2}X_3 + \frac{2}{3}X_4$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{11}{12}]$;
 12(0) $D = tX_2 + \frac{3}{4}X_3 + \frac{1}{2}X_4$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$;
 13(0) $D = tX_2 + \frac{2}{3}X_3 + \frac{3}{4}X_3$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$;
 7) $S = \mathbb{P}(1, 2, 5)$, для D имеем следующие возможности:
 1(+3) $D = tX_6 + \frac{1}{2}X_5$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{11}{12}]$;
 2(+2) $D = tX_5 + \frac{2}{3}X_5$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{14}{15}]$;
 3(+2) $D = tX_5 + \frac{1}{2}X_7$ у $t \in [\frac{6}{7}, \frac{9}{10}]$; возможно, что вместо X_7 будет $X_5 + X_2$;

- $4(+2) \ D = tX_5 + \frac{1}{2}X_6 + \frac{1}{2}X_1 \ u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{9}{10}]$;
 $5(0) \ D = tX_2 + \frac{1}{2}X_5 + \frac{3}{4}X_5 \ u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$;
 8) $S = \mathbb{P}(1, 3, 4)$, для D имеем следующие возможности:
 $1(\text{ell}) \ D = tX_9 \ u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{8}{9}]$;
 $2(+3) \ D = \frac{6}{7}X_7 + \frac{1}{2}X_4$;
 $3(+1) \ D = tX_4 + \frac{k_1-1}{k_1}X_4 + \frac{k_2-1}{k_2}X_3$, где $(k_1, k_2) = (2, 4), (2, 5), (2, 6)$,
 $(3, 2)$; $t \in [\frac{6}{7}, \frac{3}{4} + \frac{3}{4k_2}]$ при $k_1 = 2$ $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{19}{21}]$ при $k_1 = 3$;
 $4(+1) \ D = tX_4 + \frac{1}{2}X_9 \ u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$; возможно, что вместо X_9 будет $X_6 + X_3$;
 $5(+1) \ D = tX_4 + \frac{3}{4}X_6 \ u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$;
 $6(0) \ D = tX_3 + \frac{1}{2}X_4 + \frac{k-1}{k}X_4$, где $k = 5, 6$ $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{2}{3} + \frac{4}{3k}]$;
 $7(0) \ D = tX_3 + \frac{2}{3}X_8 \ u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{8}{9}]$; возможно, что вместо X_8 будет $X_4 + X_4$;
 9) $S = \mathbb{P}(1, 3, 5)$, для D имеем следующие возможности:
 $1(\text{ell}) \ D = tX_{10} \ u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{9}{10}]$;
 $2(+2) \ D = tX_6 + \frac{k-1}{k}X_5$, где $k = 3, 4$ $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{2}{3} + \frac{5}{6k}]$;
 $3(+1) \ D = tX_5 + \frac{1}{2}X_9 \ u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{9}{10}]$; возможно, что в записи X_9 будет отсутствовать моном $x_1x_2x_3$ или вместо X_9 будет $X_6 + X_3$;
 $4(+1) \ D = tX_5 + \frac{3}{4}X_6 \ u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{9}{10}]$;
 $5(0) \ D = tX_3 + \frac{2}{3}X_5 + \frac{1}{2}X_6 \ u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{8}{9}]$;
 $6(0) \ D = tX_3 + \frac{1}{2}X_5 + \frac{3}{4}X_5 \ u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{11}{12}]$;
 10) $S = \mathbb{P}(1, 2, 7)$, для D имеем следующие возможности:
 $1(+3) \ D = \frac{6}{7}X_7 + \frac{1}{2}X_8$;
 $2(+3) \ D = tX_7 + \frac{1}{2}X_7 \ u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{13}{14}]$;
 $3(0) \ D = tX_2 + \frac{1}{2}X_7 + \frac{2}{3}X_7 \ u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{11}{12}]$; допускается случай $(B_1 \cdot B_2)_{(0:1:0)} = 3/2$;
 11) $S = \mathbb{P}(1, 4, 5)$, для D имеем следующие возможности:
 $1(+1) \ D = tX_5 + \frac{1}{2}X_5 + \frac{k-1}{k}X_4$, где $k = 3, 4, 5$; $t \in [\frac{6}{7}, \frac{19}{21}]$ при $k = 3$ и $t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{10} + \frac{4}{5k}]$ при $k \geq 4$;
 $2(+1) \ D = tX_5 + \frac{2}{3}X_8 \ u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{14}{15}]$;
 $3(0) \ D = tX_4 + \frac{1}{2}X_5 + \frac{k-1}{k}X_5$, где $k = 4, 5$ $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{5}{8} + \frac{5}{4k}]$;
 12) $S = \mathbb{P}(2, 3, 5)$, для D имеем следующие возможности:
 $1(+1) \ D = tX_8 + \frac{1}{2}X_5 \ u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{15}{16}]$;
 $2(0) \ D = tX_5 + \frac{1}{2}X_{11} \ u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{9}{10}]$; возможно, что вместо X_{11} будет $X_6 + X_5$;
 $3(0) \ D = tX_5 + \frac{2}{3}X_8 \ u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{19}{21}]$;
 13) $S = \mathbb{P}(1, 3, 7)$, для D имеем следующие возможности:
 $1(+2) \ D = tX_7 + \frac{2}{3}X_7 \ u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{19}{21}]$;
 $2(+2) \ D = \frac{6}{7}X_7 + \frac{1}{2}X_{10}$; возможно, что вместо X_{10} будет $X_7 + X_3$;

- 3(+2) $D = tX_7 + \frac{1}{2}X_9$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{13}{14}]$;
 4(0) $D = tX_3 + \frac{1}{2}X_7 + \frac{2}{3}X_7$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{17}{18}]$;
 14) $S = \mathbb{P}(1, 3, 8)$, для D имеем следующие возможности:
 1(+3) $D = tX_9 + \frac{1}{2}X_8$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{8}{9}]$;
 2(+2) $D = tX_8 + \frac{1}{2}X_9$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{15}{16}]$;
 3(0) $D = tX_3 + \frac{1}{2}X_8 + \frac{2}{3}X_8$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{8}{9}]$;
 15) $S = \mathbb{P}(1, 4, 7)$, для D имеем следующие возможности:
 1(+2) $D = tX_8 + \frac{2}{3}X_7$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{11}{12}]$;
 2(+1) $D = \frac{6}{7}X_7 + \frac{1}{2}X_{12}$; возможно, что вместо X_{12} будет $X_8 + X_4$;
 3(+1) $D = tX_7 + \frac{k-1}{k}X_8$, где $k = 3, 4$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{4}{7} + \frac{8}{7k}]$;
 16) (0) $S = \mathbb{P}(1, 5, 6)$, $D = tX_5 + \frac{1}{2}X_6 + \frac{3}{4}X_6$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{9}{10}]$;
 17) $S = \mathbb{P}(2, 3, 7)$, для D имеем следующие возможности:
 1(+1) $D = tX_9 + \frac{1}{2}X_7$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{17}{18}]$;
 2(0) $D = \frac{6}{7}X_7 + \frac{1}{2}X_{12}$;
 3(0) $D = \frac{6}{7}X_7 + \frac{2}{3}X_9$;
 4(-1) $D = tX_3 + \frac{2}{3}X_{14}$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{8}{9}]$;
 18) $S = \mathbb{P}(3, 4, 5)$, для D имеем следующие возможности:
 1(+1) $D = tX_{13}$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{12}{13}]$;
 2(0) $D = tX_9 + \frac{1}{2}X_8$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{8}{9}]$;
 3(0) $D = tX_8 + \frac{1}{2}X_9$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{25}{28}]$;
 4(0) $D = tX_8 + \frac{1}{2}X_{10}$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$;
 5(-1) $D = tX_5 + \frac{1}{2}X_{15}$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{9}{10}]$;
 19) (ell) $S = \mathbb{P}(1, 5, 7)$, $D = tX_{15}$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{13}{15}]$;
 20) (+3) $S = \mathbb{P}(1, 3, 10)$, $D = tX_{10} + \frac{1}{2}X_{10}$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{9}{10}]$;
 21) $S = \mathbb{P}(1, 4, 9)$, для D имеем следующие возможности:
 1(+2) $D = tX_9 + \frac{1}{2}X_{12}$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{8}{9}]$;
 2(0) $D = tX_4 + \frac{1}{2}X_9 + \frac{2}{3}X_9$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$;
 22) $S = \mathbb{P}(1, 5, 8)$, для D имеем следующие возможности:
 1(ell) $D = tX_{16}$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$;
 2(+1) $D = tX_8 + \frac{2}{3}X_{10}$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{11}{12}]$;
 23) (0) $S = \mathbb{P}(3, 4, 7)$, $D = tX_7 + \frac{1}{2}X_{15}$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{13}{14}]$;
 24) (+1) $S = \mathbb{P}(1, 5, 9)$, $D = tX_9 + \frac{2}{3}X_{10}$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{25}{27}]$;
 25) $S = \mathbb{P}(3, 5, 7)$, для D имеем следующие возможности:
 1(+1) $D = tX_{17}$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{15}{17}]$;
 2(-1) $D = tX_5 + \frac{1}{2}X_{21}$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{9}{10}]$;
 26) (+2) $S = \mathbb{P}(1, 4, 11)$, $D = tX_{11} + \frac{1}{2}X_{12}$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{10}{11}]$;
 27) (+1) $S = \mathbb{P}(2, 3, 11)$, $D = tX_{11} + \frac{1}{2}X_{11}$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{21}{22}]$;
 28) (0) $S = \mathbb{P}(2, 5, 9)$, $D = tX_9 + \frac{1}{2}X_{15}$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{17}{18}]$;
 29) (+3) $S = \mathbb{P}(1, 4, 13)$, $D = tX_{13} + \frac{1}{2}X_{13}$ $u t \in [\frac{6}{7}, \frac{23}{26}]$;

- 30) (+1) $S = \mathbb{P}(1, 6, 11)$, $D = tX_{11} + \frac{2}{3}X_{12}$ $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{10}{11}]$;
- 31) (0) $S = \mathbb{P}(2, 5, 11)$, $D = tX_{11} + \frac{1}{2}X_{15}$ $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{21}{22}]$;
- 32) (0) $S = \mathbb{P}(3, 4, 11)$, $D = tX_{11} + \frac{1}{2}X_{15}$ $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{21}{22}]$;
- 33) (-1) $S = \mathbb{P}(3, 7, 8)$, $D = \frac{6}{7}X_7 + \frac{1}{2}X_{24}$;
- 34) (+2) $S = \mathbb{P}(1, 5, 13)$, $D = tX_{13} + \frac{1}{2}X_{15}$ $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{23}{26}]$;
- 35) (ell) $S = \mathbb{P}(1, 7, 11)$, $D = tX_{22}$ $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{19}{22}]$;
- 36) (+2) $S = \mathbb{P}(1, 5, 14)$, $D = tX_{14} + \frac{1}{2}X_{15}$ $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{25}{28}]$;
- 37) (0) $S = \mathbb{P}(2, 5, 13)$, $D = tX_{13} + \frac{1}{2}X_{15}$ $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{25}{26}]$;
- 38) (0) $S = \mathbb{P}(3, 4, 13)$, $D = tX_{13} + \frac{1}{2}X_{16}$ $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{12}{13}]$;
- 39) (-1) $S = \mathbb{P}(4, 5, 11)$, $D = tX_{11} + \frac{1}{2}X_{20}$ $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{10}{11}]$;
- 40) (+2) $S = \mathbb{P}(1, 6, 17)$, $D = tX_{17} + \frac{1}{2}X_{18}$ $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{15}{17}]$;
- 41) (0) $S = \mathbb{P}(3, 5, 17)$, $D = tX_{17} + \frac{1}{2}X_{20}$ $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{15}{17}]$;
- 42) (+1) $S = \mathbb{P}(3, 4, 19)$, $D = tX_{19} + \frac{1}{2}X_{19}$ $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{33}{38}]$;
- 43) (+1) $S = S(\mathbb{A}_1 + \frac{1}{4}(1, 1) + \frac{1}{14}(9, 1))$ – торическая поверхность, $D = tC + \frac{1}{2}B_1$, где $C \sim B_1$ – замыкание одномерной орбиты, проходящее через первые две особые точки, $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{13}{14}]$;
- 44) (+1) $S = S(\frac{1}{3}(1, 1) + \frac{1}{3}(1, 1) + \frac{1}{15}(11, 1))$ – торическая поверхность, $D = tC + \frac{1}{2}B_1$, где $C \sim B_1$ – замыкание одномерной орбиты, проходящее через первые две особые точки, $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{9}{10}]$;
- 45) (+1) $S = S(\frac{1}{3}(1, 1) + \mathbb{A}_2 + \frac{1}{9}(4, 1))$ – торическая поверхность, $D = tC + \frac{1}{2}B_1$, где B_1 – замыкание одномерной орбиты, проходящее через первые две особые точки, а $C \sim B_1 + T$, где T – замыкание одномерной орбиты, проходящее через вторую и третью точки (на минимальном разрешении поверхности S собственный прообраз C проходит через две (-3) -кривые), $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$;
- 46) (+1) $S = S(\frac{1}{4}(1, 1) + \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_5)$ – торическая поверхность, $D = tC + \frac{1}{2}B_1$; строение C и B_1 аналогично 45(+1), $a \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{9}{10}]$;
- 47) $S = S(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_3)$ – торическая поверхность, для D имеем следующие возможности:
- 1(+1) $D = tC + \frac{2}{3}B_1$, строение C и B_1 аналогично 45(+1), $a \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{8}{9}]$;
- 2(0) $D = tC + \frac{3}{4}B_1$, где C – замыкание одномерной орбиты, проходящее через первые две особые точки, а $B_1 \sim 3T$, где T – замыкание одномерной орбиты, проходящее через первую и третью точки, $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$;
- 48) (+1) $S = S(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_1 + \frac{1}{8}(5, 1))$ – торическая поверхность, $D = tC + \frac{1}{2}B_1$, где C – замыкание одномерной орбиты, проходящее через первые две особые точки, а $B_1 \sim C + T$, где T – замыкание одномерной орбиты, проходящее через вторую и третью точки, $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$;
- 49) (0) $S = S(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_5 + \frac{1}{16}(11, 1))$ – торическая поверхность, $D = tC + \frac{1}{2}B_1$, где C – замыкание одномерной орбиты, проходящее через первые две особые точки, а $B_1 \sim 3T$, где T – замыкание одномерной орбиты, проходящее через первую и третью точки, $u \ t \in [\frac{6}{7}, \frac{15}{16}]$;
- 50) (0) $S = S(\frac{1}{4}(1, 1) + \mathbb{A}_3 + \frac{1}{16}(13, 1))$ – торическая поверхность, $D = tC + \frac{1}{2}B_1$, где C – замыкание одномерной орбиты, проходящее через первые две

особые точки, а $B_1 \sim 5T$, где T – замыкание одномерной орбиты, проходящее через первую и третью точки, и $t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$;

51) минимальное разрешение S является одним из следующих:

1(ell) $D = tC + \frac{k-1}{k}B_1$, где $k = 2, 3$ и $t \in [\frac{6}{7}, 1 - \frac{k-1}{5k}]$;

2(ell) $D = tC + \frac{k-1}{k}B_1$, где $k = 1, 2$ и $t \in [\frac{6}{7}, \frac{10}{11} - \frac{k-1}{11k}]$;

3(ell) $D = tC$, где $t \in [\frac{6}{7}, \frac{15}{17}]$;

4(ell) $D = tC$, где $t \in [\frac{6}{7}, \frac{20}{23}]$;

5(ell) $D = tC$, где $t \in [\frac{6}{7}, \frac{25}{29}]$;

6(ell) $D = tC$, где $t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$;

52) минимальное разрешение торической поверхности S является одним из следующих:

1(ell) $D = tC + \frac{1}{2}B_1$, где $t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$;

2(ell) $D = \frac{6}{7}C$; отметим, что $S = \mathbb{P}(2, 3, 7)$;

53) минимальное разрешение S является одним из следующих:

1(ell) $D = tC + \frac{1}{2}B_1$, где $t \in [\frac{6}{7}, \frac{7}{8}]$;

2(ell) $D = tC$, где $t \in [\frac{6}{7}, \frac{8}{9}]$;

54) минимальное разрешение S является следующим:

$$(\text{ell}) \ D = \frac{6}{7}C;$$

55) минимальное разрешение S является следующим:

$$(0) \ D = tC, \text{ где } t \in \left[\frac{6}{7}, \frac{10}{11}\right];$$

56) минимальное разрешение S является следующим:

$$(0) \ D = \frac{6}{7}C.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В эллиптическом случае ($p_a(C) = 1$) всегда предполагаем, что особая точка кривой C (если она существует) – это обыкновенная двойная точка и через нее не проходит ни одна из B_i .

Кратность пересечения C и B_i в неособой точке поверхности не превосходит 2, если $b_i = 1/2$, и равно 1, если $b_i \geq 2/3$. В особой точке поверхности кривые C и B_i всегда являются различными компонентами торической границы, т. е. в окрестности точки $K_S + B_i + C \sim 0$ – логканонический дивизор (см. предложение 1.9).

Во многих случаях достаточно требовать неприводимость и приведенность X_d (в каждом случае легко найти нужные условия). Варианты для D , которые ведут к различным $\widehat{D}$ (определение $\widehat{D}$ см. в §3), даны в теореме (см., например, случай 9), $3(+1)$). Минимальный индекс дополняемости (S, D) также несложно подсчитать.

Если в скобках записано ell, то $p_a(C) = 1$. Если записано число q , то $p_a(C) = 0$ и индекс самопересечения собственного прообраза C на минимальном разрешении S равен q .

В теореме 2.1 приведены торические поверхности, не являющиеся взвешенными проективными пространствами. Без особого труда можно построить их минимальные разрешения. Так же по числам q и r , где r – число особенностей S , лежащих на C , можно найти рассматриваемую поверхность S в тексте настоящей работы.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. В обозначениях теоремы 2.1 поверхность S будет торической, кроме случаев 51), 53)–56).

Из теоремы 2.1 и работы [20, §5] вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть (X, D_X) – исключительная логповерхность дель Пеццо с инвариантом $\delta(X, D_X) \geq 1$. Тогда минимальный индекс дополняемости $\text{Compl}(X, D_X)$ не больше 66, где $\text{Compl}(X, D_X) = \min\{n \mid \text{дивизор } K_X + D_X \text{ } n\text{-дополняем}\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Заметим, что возможность $\text{Compl}(X, D_X) = 66$ реализуется в случае $(X, D_X) = (\mathbb{P}^2, \frac{1}{2}L_1 + \frac{2}{3}L_2 + \frac{10}{11}L_3 + \frac{12}{13}L_4)$, где L_i – прямые в общем положении. Рассмотренная логповерхность получается при чисто логтерминальном раздутии трехмерной исключительной канонической гиперповерхностной особенности $x_1^2 + x_2^3 + x_3^{11} + x_4^{13} = 0 \subset (\mathbb{C}^4, 0)$. Гипотетически $\text{Compl}(X, D_X) \leq 66$ для любой логповерхности дель Пеццо со стандартными коэффициентами. В частности, отсюда будет следовать такое же ограничение на минимальный индекс дополняемости для трехмерных стягиваний локального типа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.6. Логканонический порог пары (X, D) в точке P обозначим через $c_P(X, D)$. Для каждого $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ определим множество $\mathcal{T}_n \subset [0, 1]$,

$$\mathcal{T}_n = \left\{ c_P(X, D) \left| \begin{array}{l} \dim X = n, (X \ni P) \text{ имеет логканонические} \\ \text{особенности и } D \neq 0 \text{ – эффективный дивизор} \\ \text{Вейля, являющийся } \mathbb{Q}\text{-картье дивизором} \end{array} \right. \right\}.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.7 [9, § 5]. Имеем $\mathcal{T}_3 \cap (\frac{41}{42}, 1) = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $6/7 \leq c = c_P(X, D) < 1$. Рассмотрим индуктивное раздутие $\psi: Y \rightarrow X$ пары (X, cD) [11, теорема 1.5]. Тогда $K_Y + E + cD_Y = \psi^*(K_X + cD)$. Пара $(E, \text{Diff}_E(cD_Y))$ является логповерхностью дель Пеццо по следствию 3.10 из [19]. Если она неисклнучительна, то по теореме 2.3 из [20] существует 1-, 2-, 3-, 4- или 6-дополнение, т. е. имеем противоречие с тем, что $c < 1$.

Итак, паре (X, D) ставится в соответствие единственная исключительная логповерхность дель Пеццо с $\delta \geq 1$. Единственность вытекает из единственности индуктивного раздутия исключительной пары. Также имеем $\psi(E) = P$ (ср. следствие 1.7 и предложение 1.8 из [11]). Теперь перебором всех случаев из теоремы 2.1 и [20, § 5] получаем утверждение следствия.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Используя теорему 2.1 и результаты статьи [20, § 5], можно легко описать конечное множество $\mathcal{T}_3 \cap [\frac{6}{7}, 1)$.

Приведем некоторые примеры из [12], наглядно иллюстрирующие связь логповерхностей дель Пеццо с трехмерными особенностями. Подробности вычислений можно найти в [12].

ПРИМЕР 2.9. Рассмотрим исключительную каноническую особенность $(X \ni 0) = (t^2 + z^3 + x^7y^4 + az^8y + by^{12} = 0 \subset (\mathbb{C}^4, 0))$, где $|a| + |b| \neq 0$, которая 7-дополняема [12]. Взвешенное раздутие $\mathbb{C}^4$ с весами $(42, 28, 8, 7)$ индуцирует чисто логтерминальное раздутие $(Y, E) \rightarrow (X \ni 0)$. Тогда

$$\begin{aligned} (E, \text{Diff}_E(0)) &= (t^2 + z^3 + xy^2 + az^4y + by^6 \subset \mathbb{P}(3, 2, 4, 1), \\ &\quad (6/7)\{x = 0\} + (1/2)\{y = 0\}). \end{aligned}$$

Особенность E – это $(x_1^2 + x_2^3 + x_3^2 = 0 \subset (\mathbb{C}^3, 0))/\mathbb{Z}_4(3, 2, 1) = \mathbb{D}_5$ (см. [18, п. 4.10]). Поскольку $K_E^2 = 4$, то $K_{\tilde{E}}^2 = 4$, где $\tilde{E}$ – минимальное разрешение E . Из формулы Нётера $\rho(\tilde{E}) = 6$ и $\rho(E) = 1$. Кривая $\{x = 0\}$ является эллиптической. Получили $E = S(\mathbb{D}_5)$. Это случай 53), 1(ell).

ПРИМЕР 2.10. Рассмотрим исключительную каноническую особенность $(X \ni 0) = (f = t^2 + z^3x + x^7y - z^2y^4 = 0 \subset (\mathbb{C}^4, 0))$, которая 9-дополняема [12]. Аналогично предыдущему примеру $(E, \text{Diff}_E(0)) = (f \subset \mathbb{P}(43, 25, 11, 9), 0)$. Особенности E – это $\frac{1}{25}(2, 1)$, $\frac{1}{11}(1, 8)$ и $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^7 = 0 \subset (\mathbb{C}^3, 0))/\mathbb{Z}_9(7, 7, 2) = \frac{1}{63}(55, 1)$. Вычисляя $K_E^2 = \frac{8}{25 \cdot 11 \cdot 9}$ и $K_E^2 = -11$, получим, что $\rho(E) = 2$. Поскольку $\delta(E, 0) = 1$, то рассмотрим $E' \rightarrow E$ – раздутие кривой C' с дискрепантностью $a(C', 0) = -\frac{22}{25} \leq -\frac{6}{7}$. Кривая $\{x = 0\}$ имеет две неприводимые компоненты: $\{x = 0\} = \{x = t - zy^2 = 0\} \cup \{x = t + zy^2 = 0\} = C_1 \cup C_2$. Минимальное разрешение $\tilde{E} \rightarrow E$ является следующим:

Стянем собственные прообразы C_1 и C_2 на E' . Получим $\psi: E' \rightarrow S$. Тогда $p_a(\psi(C')) = 1$. Получили поверхность из п. 51), 2(ell).

ПРИМЕР 2.11. Рассмотрим исключительную каноническую особенность $(X \ni 0) = (t^2 + z^3 + x^9y + x^4y^n = 0 \subset (\mathbb{C}^4, 0))$, где $n = 7, 9$. Она 18-, 30-дополняема при $n = 7, 9$ соответственно [12]. Тогда

$$(E, \text{Diff}_E(0)) = (t + z + x^9y + x^4y^n \subset \mathbb{P}(9n - 4, 9n - 4, n - 1, 5), \\ (1/2)\{t = 0\} + (2/3)\{z = 0\}) = (\mathbb{P}(9n - 4, n - 1, 5), \text{Diff}_E(0)).$$

Особенности E – это $\frac{1}{n-1}(1, 1)$, A_4 , $\frac{1}{9n-4}(2n - 1, 1)$ и $\delta(E, \text{Diff}_E(0)) = 2$. Раздуем две кривые с дискрепантностями $\frac{5}{6n-6} - 1 \leq -\frac{6}{7}$ и $-\frac{14}{15} \leq -\frac{6}{7}$. После стягивания собственных прообразов $\{x = 0\}$ и $\{y = 0\}$ получим $\mathbb{P}^2$. Это тип A_2^1 [20, § 5].

§ 3. Начало доказательства основной теоремы

Существование морфизма $g: X' \rightarrow S$ с требуемыми свойствами доказано в [20, § 4, 5]. Введем основные понятия и обозначения, которые будут использоваться в дальнейшем.

Будем предполагать, что $(S, D = tC + \sum b_i B_i)$ – исключительная логповерхность дель Пешо с $\delta(S, D) = 1$, $6/7 \leq t < 1$, $b_i \in \Phi_{\text{sm}}$ и $\rho(S) = 1$. Понятно, что S – рациональная поверхность.

Определим рациональное число b из соотношения $K_S + D' \stackrel{\text{def}}{=} K_S + bC + \sum b_i B_i \equiv 0$. Может случиться, что $\delta(S, D') = 2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Пусть $g': S^{\min} \rightarrow S$ – минимальное разрешение особенностей $P_{i_1}, \dots, P_{i_m}$, лежащих на C . Стянем все кривые из $\text{Exc } g'$, которые не пересекают собственный прообраз C на $S^{\min}$. Получим $S^{\min} \rightarrow \tilde{S} \xrightarrow{f} S$. Поверхность $\tilde{S}$ называется *частичным разрешением S вдоль C , взятым в точках $P_{i_1}, \dots, P_{i_m}$* . Если $P_{i_1}, \dots, P_{i_m}$ – все особенности S , лежащие на C , то поверхность $\tilde{S}$ называется *частичным разрешением S вдоль C* .

Собственный прообраз C на $\tilde{S}$ обозначим через $\tilde{C}$, а собственный прообраз B_i обозначим через $\tilde{B}_i$.

Пусть $\tilde{S}$ – частичное разрешение S вдоль C (см. рис. 1). Через $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_r$ обозначим исключительные неприводимые кривые из $\text{Exc } f$. Ясно, что r – число особенностей поверхности S , лежащих на C . По предложению 1.9 это особенности $\mathbb{C}_{x,y}^2/\mathbb{Z}_{n_i}(q_i, 1)$, где $i = 1, \dots, r$. Кривая C в точках P_i задается уравнением $x = 0$.

Рис. 1

Имеем

$$K_{\tilde{S}} + b\tilde{C} + \sum b_i \tilde{B}_i + \sum_{i=1}^r a_i \tilde{E}_i = f^* \left(K_S + bC + \sum b_i B_i \right).$$

В случае $p_a(C) = 1$ и в случае $p_a(C) = 0$, $\tilde{C}^2 \geq 1$, построим бирациональный морфизм $h: \tilde{S} \rightarrow \hat{S}$, где $\hat{S}$ окажется известной поверхностью. Морфизм h будет задаваться линейной системой $|\tilde{C}|$.

В случае $p_a(C) = 0$ и $\tilde{C}^2 = 0$ бирациональный морфизм f является композицией частичных разрешений. Бирациональный морфизм h будет задаваться линейной системой $|\tilde{E}_1 + m\tilde{C}|$, где $m \gg 0$.

В случае $p_a(C) = 0$ и $\tilde{C}^2 = -1$ поверхность $\tilde{S}$ строится следующим образом: $S \xrightarrow{\varphi} S^\circ \xrightarrow{\psi} \tilde{S}$, где φ – композиция частичных разрешений, а ψ – стягивание собственного прообраза C . Бирациональный морфизм h также будет задаваться конкретной линейной системой.

В первых двух случаях бирациональный морфизм h не стягивает $\tilde{C}$ и $\tilde{E}_i$ для всех i . Имеем

$$\begin{aligned} K_{\tilde{S}} + b\tilde{C} + \sum b_i \tilde{B}_i + \sum_{i=1}^r a_i \tilde{E}_i &= h^* \left(K_{\hat{S}} + b\hat{C} + \sum b_i \hat{B}_i + \sum_{i=1}^r a_i \hat{E}_i \right) \\ &= h^* (K_{\hat{S}} + \hat{D}). \end{aligned}$$

Отметим, что морфизм h может стягивать некоторые $\tilde{B}_i$.

Ясно, что логповерхность $(\hat{S}, t\hat{C} + \sum b_i \hat{B}_i + \sum_{i=1}^r a_i \hat{E}_i)$ исключительна. Из предложения 1.9 легко вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 3.2. *Имеем $a(\tilde{E}_i, bC) = 1 - \frac{(1-b)q_i+1}{n_i}$. Отсюда $a_i \geq 3/7$, и если $a_i = 3/7$, то $n_i = 2$, $q_i = 1$, $b = 6/7$ и $P_i \notin \text{Supp } B_k$ для всех k .*

Идея классификации является следующей (ср. [13], [14]): зная структуру поверхности $\hat{S}$, сначала перебираем все варианты для $\hat{D}$, затем для каждого случая описываем всевозможные бирациональные морфизмы h и f . Из конструкции видно, что любой исключительный дивизор E для h имеет дискрепантность $a(E, \hat{D})$, равную 0 или $(\frac{1}{n} - 1)$, а f должен стягивать все собственные прообразы дивизоров из $\hat{D}$ с нестандартными коэффициентами, кроме собственного прообраза $\hat{C}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Бирациональный морфизм h назовем *выделением*, кривую из $\text{Exs } h$ – *выделенной кривой*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4 [20, предложение 5.4]. *Имеем $p_a(C) \leq 1$.*

В §4 разбирается эллиптический случай, т.е. когда $p_a(C) = 1$. В §5–7 разбирается рациональный случай, т.е. когда $p_a(C) = 0$. При этом $\tilde{C}^2 \geq 1$, $\tilde{C}^2 = 0$, $\tilde{C}^2 = -1$ соответственно.

§4. Случай эллиптической кривой: $p_a(C) = 1$

Пусть $p_a(C) = 1$. Согласно предложению 1.9 особенностью кривой C может быть только обыкновенная двойная точка.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Имеем $\deg \text{Diff}_C(0) = \sum_{i=1}^r (1 - 1/n_i)$ и*

$$C^2 = \frac{\deg \text{Diff}_C(0) + \sum b_i(B_i \cdot C)}{1 - b}, \quad \tilde{C}^2 = C^2 - \sum_{i=1}^r \frac{q_i}{n_i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы присоединения имеем

$$\begin{aligned} \deg \text{Diff}_C(0) &= (K_S + C) \cdot C \\ &= \left(K_S + bC + \sum b_i B_i \right) \cdot C + \left((1 - b)C - \sum b_i B_i \right) \cdot C \\ &= (1 - b)C^2 - \sum b_i (B_i \cdot C). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Имеем $\tilde{C}^2 \geq 3$, и, следовательно, по предложению 1.11 линейная система $|\tilde{C}|$ задает бирациональный морфизм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{Diff}_C(0) \neq \emptyset$, то

$$\tilde{C}^2 \geq C^2 - \sum_{i=1}^r \frac{n_i - 1}{n_i} \geq 6 \sum_{i=1}^r \frac{n_i - 1}{n_i} \geq 3.$$

Если $\text{Diff}_C(0) = \emptyset$, то $\tilde{C}^2 \geq 7 \sum b_i (B_i \cdot C) \geq 7/2$ и, следовательно, $\tilde{C}^2 \geq 4$.

На рис. 1 бирациональный морфизм h задается линейной системой $|\tilde{C}|$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Имеем $r \leq 2$. Более того, $r = 0$ тогда и только тогда, когда $\tilde{C}$ – очень обильный дивизор.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r \geq 3$. Тогда, как и в следствии 4.2, получаем $\tilde{C}^2 \geq 6 \sum_{i=1}^r \frac{n_i - 1}{n_i} \geq 9$. Пусть $\bar{S}$ – минимальная модель для $S^{\min}$, и пусть $\bar{C}$, $\bar{E}_i$ – образы соответственно C , E_i на $\bar{S}$. Поскольку $p_a(\bar{C}) = 1$ [20, предложение 5.4], то $\bar{S} = \mathbb{P}^2, \mathbb{F}_n$, где $n = 0, 2$, и $\bar{C} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$, $2E_0 + 2f$, $2E_0$ соответственно. Из того, что $\text{Supp } \tilde{C} \cap \text{Sing } \tilde{S} = \emptyset$, имеем $\bar{C}^2 \geq 9$. Поэтому $\bar{S} = \mathbb{P}^2$, $\bar{C}^2 = 9$ и, следовательно, собственные прообразы кривых $\tilde{E}_i$ не стягиваются при переходе к минимальной модели. По лемме 3.2 получили противоречие с тем, что $-(K_{\mathbb{P}^2} + b\bar{C} + \sum_{i=1}^3 a_i \bar{E}_i)$ – численно эффективный дивизор.

Если $r = 0$, то $S = \tilde{S} = \hat{S}$. Пусть теперь $\tilde{C}$ – очень обильный дивизор и $r \geq 1$. Тогда, как и выше, $p_a(\bar{C}) = 1$, поэтому каждая (-1) -кривая пересекает $\tilde{C}$ ровно в одной точке при переходе к минимальной модели $\bar{S}$. Отсюда $K_{S^{\min}} + C_{S^{\min}} = \psi^*(K_{\bar{S}} + \bar{C}) \equiv 0$, где $\psi: S^{\min} \rightarrow \bar{S}$. Получили противоречие: $0 \geq 2 + (E_i^{\min})^2 = -K_{S^{\min}} \cdot E_i^{\min} = C_{S^{\min}} \cdot E_i^{\min} = 1$, где $E_i^{\min}$ – собственный прообраз E_i .

СЛЕДСТВИЕ 4.4. *Возможны только следующие случаи:*

- 1) $r \leq 2$ и $\rho(\hat{S}) = 1$;
- 2) $r = 2$ и $\rho(\hat{S}) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $r \leq 2$, то $\rho(\hat{S}) \leq 3$. Если $\rho(\hat{S}) = 3$, то $r = 2$ и, следовательно, $\tilde{C}$ — очень обильный дивизор. Противоречие. Аналогично, если $\rho(\hat{S}) = 2$, то $r \neq 0, 1$. Отсюда $r = 2$.

Рассмотрим первый случай: $\rho(\hat{S}) = 1$ и $r \leq 2$.

Имеем $(K_{\hat{S}} + \hat{C}) \cdot \hat{C} = 0$. Поэтому $-K_{\hat{S}} \sim \hat{C}$ — дивизор Картье, т.е. $\hat{S}$ — поверхность дель Пешо с дювалевскими особенностями. Поскольку $K_{\hat{S}}^2 \geq 3$, то $\hat{S} = \mathbb{P}^2, \mathbb{P}(1, 1, 2), \mathbb{P}(1, 2, 3), S(\mathbb{A}_4), S(2\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_3), S(\mathbb{D}_5), S(3\mathbb{A}_2), S(\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_5), S(\mathbb{E}_6)$ [4]. Из равенства $\hat{C} \cdot \hat{E}_i = 1$ следует, что $\hat{E}_i$ станут (-1) -кривыми на минимальном разрешении $\hat{S}$. Поэтому r не превосходит числа (-1) -кривых на минимальном разрешении $\hat{S}$.

ЛЕММА 4.5. *Предположим, что $\tilde{C}^2 \leq 6$, т.е. $\hat{S} \neq \mathbb{P}^2, \mathbb{P}(1, 1, 2)$, и пусть $\hat{B}_i \neq 0$. Тогда $\hat{B}_i \cdot \hat{C} = 1$ и $\hat{B}_i$ станет (-1) -кривой на минимальном разрешении $\hat{S}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $\hat{B}_i \cdot \hat{C} \geq 2$, то $\tilde{C}^2 \geq 7 - \frac{n_1 - 1}{n_1}$ по предложению 4.1. Отсюда $\tilde{C}^2 \geq 7$. Противоречие.

Рассмотрим по порядку все возможности для $\hat{S}$.

А) $\hat{S} = \mathbb{P}^2$. Тогда $r = 0$. Возможность не реализуется.

В) $\hat{S} = \mathbb{P}(1, 1, 2)$. Тогда $r = 0$. Имеем только один случай 2), 1(ell).

С) $\hat{S} = \mathbb{P}(1, 2, 3)$. Тогда $r = 0, 1$. Если $r = 0$, то имеем случай 6), 1(ell). Пусть $r = 1$. Из леммы 3.2 имеем $\hat{D} = b\hat{C} + 6(1 - b)\hat{E}_1$, где $\hat{C}_1 = X_6$ и $\hat{E}_1 = X_1$. Если $b = 6/7$, то $6(1 - b) = 6/7$. Поэтому предположим, что $b > 6/7$. Задача свелась к описанию следующих процедур. Сначала строим раздутие $h: \tilde{S} \rightarrow \hat{S}$ с одним исключительным дивизором E и дискрепантностью $a(E, 6(1 - b)\hat{E}_1)$, равной 0 или $\frac{1}{n} - 1$. Требуем, чтобы кривая $\tilde{E}_1$ имела индекс самопересечения не больше -2 на минимальном разрешении $\tilde{S}$. Затем стягиваем $\tilde{E}_1$. Полученная поверхность будет искомой. В рассматриваемом случае выделение нужной кривой может произойти только в особенностях $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2$ (см. случаи I, II).

I. Рассмотрим пару $(\mathbb{C}^2, 6(1 - b)\{x = 0\})/\mathbb{Z}_2(1, 1)$. Выделение требуемой кривой с учетом условия $b > 6/7$ показано на следующей диаграмме:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.6. Приведем описание диаграмм такого типа. Числа над кружками обозначают индексы самопересечения исключительных кривых. Числа над квадратами обозначают, насколько изменились индексы самопересечения соответствующих кривых. Числа снизу обозначают соответствующие дискрепантности, взятые для удобства с противоположным знаком. Искомые кривые пронумерованы.

Пусть пронумеровано k кривых. Если требуется выделить k' кривых, то необходимо стянуть оставшиеся кривые (в том числе $k - k'$ оставшихся пронумерованных кривых). Получим $C_k^{k'}$ различных случаев.

Если не будет оговорено противное, считаем, что пронумерованные кривые выделяются с дискрепантностью 0.

Если выделена кривая 1 (тогда $b = 8/9$), то имеем случай 8), 1(ell). Если выделена кривая 2 (тогда $b = 13/15$), то имеем случай 19) (ell). Полученные поверхности S будут торическими. Чтобы каждый раз не проверять сохранение торичности при раздутиях и стягиваниях можно воспользоваться критерием торичности.

ТЕОРЕМА 4.7 [20, теорема 6.4]. *Нормальная проективная поверхность X является торической тогда и только тогда, когда существует граница $D_X = \sum_{i=1}^m D_i$ такая, что дивизор $K_X + D_X \equiv 0$ логканоничен и $\rho(X) = m - 2$.*

В рассмотренных случаях возьмем на $\hat{S}$ обычную торическую границу $T = \sum_{i=1}^3 \{x_i = 0\}$. При раздутии h появится исключительный дивизор с дискрепантностью $a(\cdot, T) = -1$. После стягивания f получим искомую границу, состоящую из требуемых трех дивизоров. Отсюда S – торическая поверхность.

II. Рассмотрим пару $(\mathbb{C}^2, 6(1-b)\{x=0\})/\mathbb{Z}_3(2,1)$. Тогда имеем следующую диаграмму:

Если выделена кривая 1, то имеем случай 9), 1(ell). Если выделена кривая 2, то имеем случай 22), 1(ell). Если выделена кривая 3, то имеем случай 35(ell).

D) $\hat{S} = S(\mathbb{A}_4)$. Тогда $r = 0, 1$. Если $r = 0$, то по лемме 4.5 имеем случай 51), 1(ell). Пусть $r = 1$. Тогда $\hat{D} = b\hat{C} + 5(1-b)\hat{E}_1$. Если $b = 6/7$, то $\delta(\hat{S}, \hat{D}) = 2$ (на диаграмме исключительный дивизор с дискрепантностью $-6/7$ – это (-6) -кривая). Поэтому $b > 6/7$. Имеем следующую диаграмму:

Если выделена кривая с номером, равным $k - 1$, то имеем случай 51), k (ell). Кривая 1 выделяется с дискрепантностью 0 или $-1/2$.

E) $\hat{S} = S(2\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_3)$. Тогда $r = 0, 1, 2$. Если $r = 0$, то по лемме 4.5 имеем случай 52), 1(ell). Пусть $r = 1$. Тогда $\hat{D} = b\hat{C} + 4(1-b)\hat{E}_1$. Выделение требуемой кривой возможно только для двух точек: $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_3$. В точке $\mathbb{A}_1$ выделение отсутствует. Для точки $\mathbb{A}_3$ имеем следующую диаграмму:

Получили случай 52), 2(ell). Пусть $r = 2$. Тогда $a_1 + a_2 = 4(1-b) \leq 4/7$. Противоречие с леммой 3.2.

F) $\hat{S} = S(\mathbb{D}_5)$. Тогда $r = 0, 1$. Если $r = 0$, то по лемме 4.5 имеем случай 53), 1(ell). Пусть $r = 1$. Тогда $\hat{D} = b\hat{C} + 4(1-b)\hat{E}_1$. Если $b = 6/7$, то $\delta(\hat{S}, \hat{D}) = 2$ (на диаграмме исключительный дивизор с дискрепантностью $-6/7$ – это центральная кривая). Поэтому $b > 6/7$. Имеем следующую диаграмму:

Получили случай 53), 2(ell).

Г) $\hat{S} = S(3A_2)$. Тогда $r = 0, 1$. Если $r = 0$, то из доказательства следствия 4.2 следует, что $\tilde{C}^2 \geq 4$. Поэтому случай $r = 0$ невозможен. Пусть $r = 1$. Тогда также нет случаев, поскольку для пары $(\mathbb{C}^2, 3(1-b)\{x=0\})/\mathbb{Z}_3(2,1)$ не существует выделения кривой с нужной дискрепантностью.

Н) $\hat{S} = S(A_1 + A_5)$. Аналогично п. Г) имеем $r = 1, 2$. Как и в п. Е), $r \neq 2$. Пусть $r = 1$. Тогда $\hat{D} = b\hat{C} + 3(1-b)\hat{E}_1 = \frac{6}{7}\hat{C} + \frac{3}{7}\hat{E}_1$ (см. лемму 3.2), где $\hat{E}_1$ является одной из двух (-1) -кривых на минимальном разрешении. Выделение может произойти только тогда, когда $\hat{E}_1$ является (-1) -кривой, не проходящей через A_1 :

Получили случай 54)(ell).

И) $\hat{S} = S(E_6)$. Аналогично предыдущему случаю $r = 1$ и $b = 6/7$. Тогда $\hat{D} = \frac{6}{7}\hat{C} + \frac{3}{7}\hat{E}_1$ и $\delta(\hat{S}, \hat{D}) = 2$. Действительно, при раздутии $\mathbb{C}^3$ с весами $(3, 2, 2)$ для пары

$$(\hat{S}, (3/7)\hat{E}_1) \cong_{\text{an}} (x^2 + y^3 + z^3 = 0 \subset \mathbb{C}^3, (3/7)\{z=0\})$$

появится исключительный дивизор с дискрепантностью $a(\cdot, \frac{3}{7}\hat{E}_1) = -\frac{6}{7}$, поэтому этот случай не реализуется.

Рассмотрим второй случай: $\rho(\hat{S}) = 2$ и $r = 2$.

Согласно предложению 4.1 $\tilde{C}^2 \geq 7$, кроме случая $n_1 = n_2 = 2$, $b = 6/7$ и $B = 0$.

ЛЕММА 4.8. Пусть $\tilde{C}^2 \geq 7$. Тогда поверхность $\hat{S}$ получается обыкновенным раздутием точки на конусе $\mathbb{P}(1, 1, 2)$, не являющейся его вершиной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi: \hat{S}^{\min} \rightarrow \hat{S}$ – минимальное разрешение, а $\bar{S}$ – минимальная модель для $\hat{S}^{\min}$. Все случаи для $\bar{S}$ описаны в доказательстве предложения 4.3. Поэтому если $\rho(\hat{S}^{\min}) \geq 4$, то имеем противоречие с тем, что $\bar{C}^2 \geq 11 - \rho(\bar{S})$, где $\bar{C}$ – образ $\hat{C}$.

Если $\rho(\hat{S}^{\min}) = 3$, то имеем случай из формулировки леммы. При этом $\tilde{C}^2 = 7$ и на C лежат особые точки A_1 и A_2 .

Если $\rho(\hat{S}^{\min}) = 2$, то $\hat{S} = \mathbb{F}_0$, так как $\hat{C}$ – очень обильный дивизор. Дивизор $-(K_{\mathbb{F}_0} + b\hat{C} + (3/7)\hat{E}_1 + (3/7)\hat{E}_2)$ не численно эффективный. Противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 4.9. Если $\tilde{C}^2 \geq 7$, то (S, D) – логповерхность из п. 6), 2(ell).

Пусть теперь $n_1 = n_2 = 2$, $b = 6/7$ и $B = 0$. Тогда докажем, что этот случай не реализуется. Аналогично лемме 4.8, $\rho(\hat{S}^{\min}) = 2, 3, 4$ и случай $\rho(\hat{S}^{\min}) = 2$ невозможен. Если $\rho(\hat{S}^{\min}) = 3$, то $\bar{C}^2 = 9 - \rho(\bar{S})$. Противоречие.

Пусть $\rho(\widehat{S}^{\min}) = 4$. Тогда $\mathbb{F}_2$ является минимальной моделью $\widehat{S}^{\min}$ и $\varphi: \widehat{S}^{\min} \rightarrow \mathbb{F}_2 = \overline{S}$. Имеем два случая: собственные прообразы $\widehat{E}_1$ и $\widehat{E}_2$ не стягиваются φ ; собственный прообраз $\widehat{E}_1$ стягивается φ , а собственный прообраз $\widehat{E}_2$ не стягивается φ . В первом случае дивизор $-(K_{\mathbb{F}_2} + \frac{6}{7}(2E_0) + \frac{3}{7}\overline{E}_1 + \frac{3}{7}\overline{E}_2)$ не численно эффективный. Противоречие. Во втором случае на $\widehat{S}^{\min}$ должна существовать исключительная кривая Γ с $a(\Gamma) = a(\Gamma, (6/7)\widehat{C} + (3/7)\widehat{E}_1 + (3/7)\widehat{E}_2) < 0$.

ЛЕММА 4.10. *Существует исключительная кривая Γ с $a(\Gamma) \leq -3/14$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\psi(\Gamma) \in \text{Supp } \widehat{D}$, то аналогично лемме 3.2 имеем требуемую оценку. Если $\psi(\Gamma) \notin \text{Supp } \widehat{D}$, то $\psi(\Gamma) \in \widehat{S}$ — не дювалевская особенность. Поэтому $a(\Gamma) \leq -1/3$ [10, предложение 2.4.8].

Дивизор $-(K_{\mathbb{F}_2} + \frac{6}{7}(2E_0) + \frac{3}{7}\overline{E}_2 + \frac{3}{14}\overline{\Gamma})$ не численно эффективный. Противоречие.

§ 5. Случай $p_a(C) = 0$ и $\widetilde{C}^2 \geq 1$

Пусть $p_a(C) = 0$. Аналогично предложению 4.1 доказывается следующее утверждение. ■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Имеем $\deg \text{Diff}_C(0) = \sum_{i=1}^r (1 - 1/n_i)$ и*

$$C^2 = \frac{-2 + \deg \text{Diff}_C(0) + \sum b_i(B_i \cdot C)}{1 - b}, \quad \widetilde{C}^2 = C^2 - \sum_{i=1}^r \frac{q_i}{n_i}.$$

СЛЕДСТВИЕ 5.2. *Имеем $\widetilde{C}^2 \geq -1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 5.1 получаем

$$\begin{aligned} \widetilde{C}^2 &\geq 7 \left(-2 + \text{Diff}_C(0) + \sum b_i(B_i \cdot C) \right) - \text{Diff}_C(0) \\ &= 6 \left(-2 + \text{Diff}_C(0) + \sum b_i(B_i \cdot C) \right) - 2 + \sum b_i(B_i \cdot C) \\ &> -2 + \sum b_i(B_i \cdot C) \geq -2. \end{aligned}$$

Рассмотрим первый случай $\widetilde{C}^2 \geq 1$. По предложению 1.10 линейная система $|\widetilde{C}|$ задает бирациональный морфизм h и $\widehat{S} = \mathbb{P}(1, 1, n), \mathbb{F}_n$.

ТЕОРЕМА 5.3. *Пусть $(\widehat{S}, \widehat{C}) \simeq (\mathbb{F}_n, E_0 + kf)$. Тогда $n = 1, 2, 3$; $k = 1$ и получаем четыре случая из теоремы 2.1: 2), 2(+4); 3), 1(+5); 6), 3(+3); 8), 2(+3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n \neq 0$. Поскольку $\widehat{E}_i \cdot \widehat{C} = 1$, то либо $\widehat{E}_i \sim f$ для всех i , либо $\widehat{E}_1 = E_\infty$, $\widehat{E}_i \sim f$ для всех $i \geq 2$ и $k = 1$.

Рассмотрим первый случай. Тогда в окрестности слоя f' для дивизора

$$K_{\widehat{S}} + b\widehat{C} + \sum_{i=1}^r a_i \widehat{E}_i + \sum b_i \widehat{B}_i \sim_{\mathbb{Q}} 0 \quad (5.1)$$

по теореме 1.3 существует 1-, 2-, 3-, 4- или 6-дополнение $D^+ \geq \widehat{C} + \sum b_i \widehat{B}_i$. Из (5.1) получаем $(K_{\widehat{S}} + D^+) \cdot f' > 0$. Противоречие.

Рассмотрим второй случай. Тогда дивизор из (5.1) $\mathbb{Q}$ -линейно эквивалентен дивизору

$$K_{\widehat{S}} + b(E_0 + f) + a_1 E_\infty + \sum_{i \geq 2} a_i f + \sum b_i (k_i E_0 + l_i f) \sim_{\mathbb{Q}} 0.$$

Понятно, что существует i_0 , для которого $k_{i_0} \neq 0$. Поскольку

$$0 \leq -(K_{\widehat{S}} + (6/7)(E_0 + f) + (1/2)E_0) \cdot E_0 = 8/7 - (5/14)n,$$

то $n \leq 3$.

Пусть $n = 3$. Тогда $\widehat{D} = (7/8)\widehat{C} + (5/8)\widehat{E}_1 + (1/2)B_1$, где $B_1 \sim E_0$. Отсюда $r = 1$, $\widehat{S} = \widehat{S}$. Получили случай 3), 1(+5).

Пусть $n = 2$. Тогда $\widehat{D} = (8/9)\widehat{C} + (4/9)\widehat{E}_1 + (2/3)B_1$ или $\widehat{D} = (6/7)\widehat{C} + (9/14)\widehat{E}_1 + (3/7)\widehat{E}_2 + (1/2)B_1$, где $B_1 \sim E_0$. В первом случае $r = 1$ и получаем случай 2), 2(+4). Во втором случае $r = 2$. Выделение искомой кривой может произойти только в точке $\widehat{E}_1 \cap \widehat{E}_2$. Легко проверить, что такого выделения нет.

Пусть $n = 1$. Тогда $r \leq 2$ и $\widehat{D} = (6/7 + a)\widehat{C} + (9/14 - a)\widehat{E}_1 + (11/14 - 2a)\widehat{E}_2 + (1/2)B_1$ или $\widehat{D} = (6/7 + a)\widehat{C} + (10/21 - a)\widehat{E}_1 + (13/21 - 2a)\widehat{E}_2 + (2/3)B_1$, где $B_1 \sim E_0$ и $a \in [0, \frac{1}{7}]$. В обоих случаях $r = 2$ и надо раздувать точку $\widehat{E}_1 \cap \widehat{E}_2$. Для пары $(\mathbb{C}_{x,y}^2, (9/14 - a)\{x = 0\} + (11/14 - 2a)\{y = 0\})$ можно выделить дивизор только с дискрепантностью 0. Легко подсчитать, что это происходит при взвешенных раздутиях с весами $(\alpha, \beta) = (1, 2), (1, 3), (2, 1)$. Получили случаи 6), 3(+3) и 8), 2(+3) соответственно в первом и во втором случаях для (α, β) . Случай $(2, 1)$ не реализуется, так как на минимальном разрешении собственный прообраз $\widehat{E}_2$ — это (-1) -кривая. По этой же причине $(\beta = 1)$ второй случай для $\widehat{D}$ не реализуется.

Пусть $n = 0$. Тогда число точек пересечения между $\widehat{E}_i$ не должно превосходить $r - 1$. Поэтому, не ограничивая общности, предположим, что $\widehat{E}_1 \sim E_0$, $\widehat{E}_i \sim f$ для $i \geq 2$. Аналогично проверяется, что сделать все $\widehat{E}_i$ $(-k_i)$ -кривыми на минимальном разрешении невозможно, где $k_i \geq 2$. Поэтому случай не реализуется.

Предложение 5.4. Пусть $(\widehat{S}, \widehat{C}) = (\mathbb{P}(1, 1, n), X_n)$. Тогда $n \leq 5$ и $\widehat{E}_i$ являются образующими конуса.

Доказательство. Поскольку $\widehat{E}_i \cdot \widehat{C} = 1$, то $\widehat{E}_i$ являются образующими конуса. Очевидно, что в вершине конуса дивизор $K_{\widehat{S}} + \widehat{D}$ $\frac{1}{7}$ -логтерминален. Пусть $n \geq 6$ и $\mathbb{F}_n \rightarrow \widehat{S}$ — минимальное разрешение. Собственный прообраз $\widehat{B}_i$ обозначим через $\overline{B}_i$. Тогда $\overline{B}_i \sim f$ для всех i . Действительно, если $\overline{B}_i \sim l_i E_0 + k_i f$, где $l_i \geq 1$, то дивизор $-(K_{\widehat{S}} + (6/7)\widehat{C} + (1/2)\widehat{B}_i)$ будет не численно эффективным. Противоречие. Отсюда дивизор $K_{\widehat{S}} + \widehat{D}$ не $\frac{1}{7}$ -логтерминален в вершине конуса.

Рассмотрим по порядку все случаи. Требование $\frac{1}{7}$ -логтерминальности в вершине конуса ($n \geq 2$) влечет существование такого i_0 , что $(\widehat{B}_{i_0} - X_n)$ — численно эффективный дивизор. Положим $i_0 = 1$.

А) $\widehat{S} = \mathbb{P}(1, 1, 5)$. Имеем $r = 0$ и случай 5) (+5).

В) $\widehat{S} = \mathbb{P}(1, 1, 4)$. Тогда $r = 0, 1$, и если $r = 0$, то имеем случай 4) (+4). Пусть $r = 1$. Тогда $\widehat{D} = b\widehat{C} + (1/2)\widehat{B}_1 + (4 - 4b)\widehat{E}_1$, где $\widehat{B}_1 = X_4$. Выделение требуемой

кривой возможно только в точке $\widehat{E}_1 \cap \widehat{B}_1$ и в вершине конуса. Легко проверить, что этот случай не реализуется.

С) $\widehat{S} = \mathbb{P}(1, 1, 3)$. Имеем следующие варианты для $\widehat{D}$:

- 1) $\widehat{D} = (\frac{5}{3} - \frac{k-1}{k})\widehat{C} + \frac{k-1}{k}\widehat{B}_1$, где $k = 4, 5$; случай 3), 2(+3);
- 2) $\widehat{D} = \frac{6}{7}\widehat{C} + \frac{2}{3}\widehat{B}_1 + \frac{3}{7}\widehat{E}_1$; возможность не реализуется;
- 3) $\widehat{D} = \frac{6}{7}\widehat{C} + \frac{1}{2}\widehat{B}_1 + \frac{1}{2}\widehat{B}_2 + \frac{3}{7}\widehat{E}_1$; случай 10), 1(+3);
- 4) $\widehat{D} = b\widehat{C} + \frac{1}{2}\widehat{B}_1 + a_1\widehat{E}_1 + a_2\widehat{E}_2$; возможность не реализуется;
- 5) $\widehat{D} = (\frac{5}{6} + \frac{1}{3k})\widehat{C} + \frac{1}{2}\widehat{B}_1 + \frac{k-1}{k}\widehat{B}_2$, где $k = 3, 4, 5, 6$; случай 3), 3(+3);
- 6) $\widehat{D} = b\widehat{C} + \frac{1}{2}\widehat{B}_1 + (\frac{7}{2} - 3b)\widehat{E}_1$; случаи 7), 1(+3); 14), 1(+3); 10), 2(+3); 20) (+3); 29) (+3).

Здесь $\widehat{B}_1 = X_3$, $\widehat{B}_2 = X_1$, $a_1 + a_2 = 7/2 - 3b$. В третьем случае возможно, что $\widehat{B}_3 = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2$ будет неприводимой кривой X_4 .

Легко проверить, что варианты 2), 4) не реализуются. В варианте 3) выделение возможно, когда $\widehat{B}_3 \cap \widehat{E}_1 = P$, где P – вершина конуса. Это случай 10), 1(+3). Вычисления аналогичны варианту 6).

В варианте 6) $r = 1$ и выделение требуемой кривой возможно в точке $Q = \widehat{E}_1 \cap \widehat{B}_1$ и в вершине конуса. Рассмотрим точку Q . Пусть $h: \widetilde{S} \rightarrow (\widehat{S} \ni Q)$ – требуемое раздутие. Тогда условие $\delta(S, D) = 1$ накладывает следующее требование: на минимальном разрешении поверхности $\widetilde{S}$ собственный прообраз $\widetilde{E}_1$ является кривой с индексом самопересечения $k = -2, -3$ (см. предложение 1.9) и на $\widehat{E}_1$ лежит только одна особая точка $\widetilde{S}$, являющаяся вершиной конуса. Для пары $(\mathbb{C}_{x,y}^2, \frac{1}{2}\{x=0\} + (\frac{7}{2} - 3b)\{y=0\})$ эти два варианта соответствуют взвешенным раздутиям с весами (1,2) и (1,3). Получили случаи 7), 1(+3); 14), 1(+3).

Рассмотрим теперь вершину конуса. Аналогично, по предложению 1.9 на $\widetilde{E}_1$ не лежат особые точки $\widetilde{S}$ и $\widetilde{E}_1^2 = -2, -3, -4$. Реализация этих трех типов показана на следующей диаграмме:

Получили случаи 10), 2(+3); 20) (+3); 29) (+3).

D) $\widehat{S} = \mathbb{P}(1, 1, 2)$. Имеем следующие варианты для $\widehat{D}$ (здесь $\widehat{B}_1 = X_2$, $\widehat{B}_2 = X_1$, $\widehat{B}_3 = X_3$ и $\widehat{B}_4 = X_1$).

- 1) $\widehat{D} = \frac{11}{12}\widehat{C} + \frac{5}{6}\widehat{B}_1 + \frac{1}{2}\widehat{B}_2$. Получили случай 2), 3(+2).
- 2) $\widehat{D} = b\widehat{C} + \frac{5}{6}\widehat{B}_1 + (\frac{7}{3} - 2b)\widehat{E}_1$. Выделение происходит только в точке $\widehat{B}_1 \cap \widehat{E}_1$.

Приведем рассуждение, которое в дальнейшем будем опускать. Оно позволяет сократить количество вычислений.

Итак, рассмотрим пару $(\mathbb{C}_{x,y}^2, (\frac{7}{3} - 2b)\{x=0\} + \frac{5}{6}\{y=0\})$.

ЛЕММА 5.5. *Выделение нужной кривой происходит только при раздутии с весами (2, 1). Это случай 6), 4(+2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что выделение дивизора с дискрепантностью $1/\vartheta - 1$ может реализовываться только торическим раздутием, т. е. раздутием с весами (α, β) . Условие на то, что при этом раздутии $\tilde{E}_1$ станет на минимальном разрешении $\tilde{S}$ не (-1) -кривой, — это $\tilde{E}_1^2 < -1$, т. е. $-\alpha/\beta < -1$. Отсюда $\alpha \geq \beta + 1$. Решая систему

$$\begin{cases} \alpha(12b - 8) + \beta = \frac{6}{\vartheta} \\ \alpha \geq \beta + 1 \\ \alpha, \beta, \vartheta \in \mathbb{Z}_{>0}, \quad (\alpha, \beta) = 1, \quad b \in [\frac{6}{7}, 1), \end{cases}$$

получаем $(\alpha, \beta) = (2, 1)$, $\vartheta = 1$, $b = 7/8$.

3) $\hat{D} = (\frac{6}{5} - \frac{k-1}{2k})\hat{C} + \frac{4}{5}\hat{B}_1 + \frac{k-1}{k}\hat{B}_2$, где $k = 2, 3$. Случай 2), 4(+2).

4) $\hat{D} = b\hat{C} + \frac{4}{5}\hat{B}_1 + (\frac{12}{5} - 2b)\hat{E}_1$. Выделение происходит только в точке $\hat{B}_1 \cap \hat{E}_1$. Аналогично п. 2) это раздутие с весами $(2, 1)$, $b = 9/10$ и $\vartheta = 1$. Случай 6), 4(+2).

5) $\hat{D} = (\frac{5}{4} - \frac{k-1}{2k})\hat{C} + \frac{3}{4}\hat{B}_1 + \frac{k-1}{k}\hat{B}_2$, где $k = 3, 4$. Случай 2), 5(+2).

6) $\hat{D} = b\hat{C} + \frac{3}{4}\hat{B}_1 + (\frac{5}{2} - 2b)\hat{E}_1$. Выделение происходит только в точке $\hat{B}_1 \cap \hat{E}_1$. Аналогично п. 2) выделения реализуются только раздутиями с весами $(2, 1)$, $(3, 1)$ и $\vartheta = 1$. Получили случаи 6), 4(+2) и 9), 2(+2).

7) $\hat{D} = (\frac{4}{3} - \frac{k-1}{2k})\hat{C} + \frac{2}{3}\hat{B}_1 + \frac{k-1}{k}\hat{B}_2$, где $k = 4, 5, 6$. Случай 2), 6(+2).

8) $\hat{D} = b\hat{C} + \frac{2}{3}\hat{B}_1 + (\frac{8}{3} - 2b)\hat{E}_1$. Рассмотрим выделение в вершине конуса. Условие $\delta(S, D) = 1$ влечет (см. предложение 1.9) $\tilde{E}_1 \cap \text{Sing } \tilde{S} = \emptyset$ и $\tilde{E}_1^2 = -2, -3$. Эти случаи показаны на диаграмме

Получили случаи 7), 2(+2); 13), 1(+2). Если в последнем случае $t = 19/21$, то $\delta(S, D) = 2$.

Рассмотрим выделение в точке $\hat{B}_1 \cap \hat{E}_1$. Условие $\delta(S, D) = 1$ влечет (см. предложение 1.9) $\tilde{E}_1 \cap \text{Sing } \tilde{S} = P$, где P — вершина конуса, $\vartheta = 1$ и $\tilde{E}_1^2 = -2 + \frac{1}{2}, -3 + \frac{1}{2}, -4 + \frac{1}{2}$. Случай $\tilde{E}_1^2 = -2 + \frac{1}{2}$ не реализуется, поскольку тогда $b = 1$. Другие два случая реализуются раздутиями с весами $(3, 1)$ и $(4, 1)$. Получили 9), 2(+2); 15), 1(+2).

9) $\hat{D} = b\hat{C} + \frac{2}{3}\hat{B}_1 + a_1\hat{E}_1 + a_2\hat{E}_2$, где $a_1 + a_2 = 8/3 - 2b$. Легко проверить, что случай не реализуется.

10) $\hat{D} = (\frac{5}{4} - \frac{k-1}{2k})\hat{C} + \frac{1}{2}\hat{B}_3 + \frac{k-1}{k}\hat{B}_2$, где $k = 3, 4$. Возможно, что $\hat{B}_3 = \hat{B}_1 + \hat{B}_4$. Случай 2), 7(+2).

11) $\hat{D} = b\hat{C} + \frac{1}{2}\hat{B}_3 + (\frac{5}{2} - 2b)\hat{E}_1$. Возможно, что $\hat{B}_3 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2$.

Пусть $\hat{B}_3 \cap \hat{E}_1 \neq P$, где P — вершина конуса. Если $\hat{B}_3 = \hat{B}_1 + \hat{B}_2$, то это условие всегда выполняется. Рассматривая вершину конуса аналогично п. 8), получаем случаи 7), 3(+2); 13), 2(+2). Рассмотрим гладкую точку $\hat{S}$, где пересекаются $\hat{B}_3$ и $\hat{E}_1$. Аналогично получаем, что выделение возможно только при раздутии с весами $(2, 1)$. Это случай 6), 5(+2).

Пусть $\hat{B}_3 \cap \hat{E}_1 = P$. Тогда

В дальнейшем нужная кривая может выделиться только при взвешенном раздутии точки $\tilde{E}_1 \cap T$. Пусть ее дискрепантность, как и ранее, равна $1/\vartheta - 1$. Условие $\delta(S, D) = 1$ влечет, что $7/2 - 3b < 6/7$, т.е. $b > 37/42$. Аналогично лемме 5.5 мы должны решить уравнение $\alpha(4b - 3) + \beta(6b - 5) = 2/\vartheta$. Получаем $\vartheta = 2$ и $(\alpha, \beta) = (1, 1)$; $\vartheta = 1$ и $(\alpha, \beta) = (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 1), (2, 3), (3, 1)$. Соответственно, имеем 7), 4(+2); 14), 2(+2); 26)(+2); 36)(+2); 40)(+2); 13), 3(+2); 34)(+2); 21), 1(+2).

12) $\hat{D} = b\hat{C} + \frac{1}{2}\hat{B}_1 + \frac{k-1}{k}\hat{B}_2 + (2 + \frac{1}{k} - 2b)\hat{E}_1$, где $k = 3, 4, 5, 6$. Легко проверить, что случай не реализуется.

13) $\hat{D} = b\hat{C} + \frac{1}{2}\hat{B}_1 + a_1\hat{E}_1 + a_2\hat{E}_2$, где $a_1 + a_2 = 3 - 2b$. Легко проверить, что случай не реализуется.

14) $\hat{D} = \frac{6}{7}\hat{C} + \frac{1}{2}\hat{B}_1 + \frac{3}{7}\hat{E}_1 + \frac{3}{7}\hat{E}_2 + \frac{3}{7}\hat{E}_3$. Легко проверить, что случай не реализуется.

Е) $(\hat{S}, \hat{C}) = (\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$. Поскольку $\hat{E}_i \cdot \hat{C} = 1$, то $r = 0$. Случай 1), 1(+4).

Ф) $(\hat{S}, \hat{C}) = (\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$. Рассмотрим по порядку все случаи для $\hat{D}$.

І. Пусть $\text{Supp } \hat{D}$ состоит только из прямых и s -их число. Если $r = 0$, то имеем случаи 1), 2(+1); 1), 3(+1); 1), 4(+1).

Пусть $r = 1$. Тогда $s = 4, 5$. Рассмотрим сначала $s = 5$. Тогда по предложению 1.9 через некоторую точку на $\hat{E}_1$, не лежащую на $\hat{C}$, проходят три прямые. Пусть $\hat{B}_1$ и $\hat{B}_2$ среди них. Поскольку $b_1 + b_2 + b_3 = 3 - b - a_1 \leq 12/7$ (см. лемму 3.2), то $(b_1, b_2, b_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{k-1}{k})$, где $k = 2, 3$, или $(b_1, b_2, b_3) = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2})$. Поскольку $\hat{E}_1^2 \leq -2$, то $b_1 + b_2 + 3a_1 - 3 \geq 0$. Подставляя b_1, b_2, b_3 , получаем противоречие. Пусть теперь $s = 4$. Тогда все прямые из $\text{Supp } \hat{D}$ в общем положении. Из предложения 1.9 $\hat{E}_1^2 = -2, -3, -4$ и $\tilde{E}_1 \cap \text{Sing } \tilde{S} = \emptyset$, т.е. имеем выделение только при раздутиях с весами $(\alpha, 1)$, где $\alpha = 3, 4, 5$. Получили случаи 6), 6(+1); 8), 3(+1); 11), 1(+1).

Пусть $r = 2$. Тогда $s = 4, 5$. По тем же причинам случай $s = 5$ невозможен. Итак, $s = 4$ и все прямые из $\text{Supp } \hat{D}$ находятся в общем положении. Имеем два типа выделения, где $\tilde{\Gamma}_i$ – выделенные кривые:

Рассмотрим тип І. Из предложения 1.9 $\tilde{E}_i^2 = -n_i$, где $n_i = 2, 3, 4$, $\tilde{E}_i \cap \text{Sing } \tilde{S} =$

$\emptyset$ и дискрепантности $a(\tilde{\Gamma}_i, \hat{D}) = 0$. Итак,

$$3 = b + b_1 + a_1 + a_2 = b + b_1 + 1 + \frac{b + b_1 - 2}{n_1} + 1 + \frac{b + b_1 - 2}{n_2}. \quad (5.2)$$

Учитывая, что $6/7 \leq b < 1$, получаем $b_1 = 1/2$ и $(n_1, n_2) = (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)$. Два искомого торических раздутья имеют вид $(n_1 + 1, 1)$ и $(1, n_2 + 1)$. Получили случаи $27)(+1); 43)(+1); 44)(+1); 42)(+1)$.

Рассмотрим тип II. Из предложения 1.9 $\tilde{E}_2^2 = -(m - 1)$, где $m = 3, 4, 5$; $\tilde{E}_2 \cap \text{Sing } \tilde{S} = \emptyset$; $\tilde{E}_1 \cap \text{Sing } \tilde{S} = P$ и дискрепантности $a(\tilde{\Gamma}_i, \hat{D}) = 0$. Итак, в точке P поверхность $\tilde{S}$ имеет особенность $\mathbb{A}_{m-1}$ и кривая $\tilde{E}_1$ стягивается в особую точку $\frac{1}{km-m+1}(m, 1)$, где $k = -\tilde{E}_1^2 + \frac{m-1}{m}$. Условие $\delta(S, D) = 1$ влечет $m(k-2) < 6$. Отсюда $k = 2, 3$ и $m = 3, 4, 5$. Выписывая условие, аналогичное (5.2), получаем $17), 1(+1)$ и $(3, 3, 1/2); 12), 1(+1)$ и $(4, 2, 1/2); 45)(+1)$ и $(4, 3, 1/2); 46)(+1)$ и $(5, 2, 1/2); 47), 1(+1)$ и $(3, 2, 2/3)$, где тройки чисел обозначают (m, k, b_1) .

Пусть $r = 3$. Тогда $s = 4, 5$. По тем же причинам случай $s = 5$ невозможен. Итак, $s = 4$ и все прямые из $\text{Supp } \hat{D}$ находятся в общем положении. Выделение трех кривых показано на рис. 2.

Рис. 2

Из предложения 1.9 все кривые выделяются с дискрепантностью 0. Итак, $\text{Sing } \tilde{S} = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3$, на минимальном разрешении индексы самопересечения собственных прообразов $\tilde{E}_i$ равны $(-n_i)$. В точках Q_i имеем особенности $\mathbb{A}_{n_i-1}$ соответственно. Положим $n_1 \geq n_2 \geq n_3$. Условие $\delta(S, D) = 1$ влечет

$$n_1(n_2 - 2) < 6, \quad n_2(n_3 - 2) < 6, \quad n_3(n_1 - 2) < 6.$$

Учитывая условие, аналогичное (5.2), получаем $(n_1, n_2, n_3) = (3, 2, 2), (4, 2, 2)$. Получили случаи $18), 1(+1); 25), 1(+1)$.

II. В $\text{Supp } \hat{D}$ находится неприводимая коника. Если $r = 0$, то имеем случай 1), $4(+1)$.

Пусть $r = 1$. Имеем для $\hat{D}$ следующие возможности, где $\hat{B}_1 = X_2$ и $\hat{B}_2 = X_1$.

1) $\hat{D} = b\hat{C} + \frac{1}{2}\hat{B}_1 + \frac{1}{2}\hat{B}_2 + (\frac{3}{2} - b)\hat{E}_1$. Легко проверить, что выделение происходит только в случае, когда $\hat{E}_1$ касается $\hat{B}_1$, а $\hat{B}_2$ проходит через точку касания. Имеем пару $(\mathbb{C}^2, (\frac{3}{2} - b)\{x = 0\} + \frac{1}{2}\{x + y^2 = 0\} + \frac{1}{2}\{y = 0\})$. Для ней аналогично лемме 5.5 получаем $(\alpha, \beta) = (4, 1), (5, 2), (7, 3)$ и $\vartheta = 1$. Это случаи $8), 4(+1); 9), 3(+1); 15), 2(+1)$.

2) $\hat{D} = b\hat{C} + \frac{1}{2}\hat{B}_1 + \frac{2}{3}\hat{B}_2 + (\frac{4}{3} - b)\hat{E}_1$. Аналогично, $\hat{E}_1$ касается $\hat{B}_1$, а $\hat{B}_2$ проходит через точку касания. Получаем $(\alpha, \beta) = (3, 1)$ и $\vartheta = 1$, т.е. случай 6), $7(+1)$.

3) $\hat{D} = b\hat{C} + \frac{2}{3}\hat{B}_1 + (\frac{5}{3} - b)\hat{E}_1$. Пусть $\hat{E}_1$ не касается $\hat{B}_1$. Тогда, раздувая их точку пересечения, получаем $(\alpha, \beta) = (3, 1)$ и $\vartheta = 1$, т.е. случай 6), $8(+1)$.

Пусть $\widehat{E}_1$ касается $\widehat{B}_1$. При раздутии с весами $(2, 1)$ дискрепантность $a(\cdot, \widehat{D}) = 2b - 8/3 > -6/7$. Отсюда $b > 19/21$. Учитывая это, аналогично лемме 5.5 получаем $(3, 1)$ и $\vartheta = 2$; $(5, 1)$ и $\vartheta = 1$; $(7, 3)$ и $\vartheta = 1$; $(8, 3)$ и $\vartheta = 1$; $(9, 4)$ и $\vartheta = 1$; $(11, 5)$ и $\vartheta = 1$. Это случаи 6), $9(+1)$; 11), $2(+1)$; 15), $3(+1)$; 22), $2(+1)$; 24)(+1); 30)(+1) соответственно.

4) $\widehat{D} = b\widehat{C} + \frac{3}{4}\widehat{B}_1 + (\frac{3}{2} - b)\widehat{E}_1$. Аналогично, $\widehat{E}_1$ касается $\widehat{B}_1$. Тогда $\vartheta = 1$ и $(\alpha, \beta) = (4, 1)$, $(5, 2)$, $(7, 3)$. Это случаи 8), $5(+1)$; 9), $4(+1)$; 15), $3(+1)$ соответственно.

5) $\widehat{D} = b\widehat{C} + \frac{k-1}{k}\widehat{B}_1 + (1 + \frac{2}{k} - b)\widehat{E}_1$, где $k = 5, 6$. Аналогично, $\widehat{E}_1$ касается $\widehat{B}_1$. Тогда $\vartheta = 1$ и $(\alpha, \beta) = (3, 1)$. Это случай 6), $10(+1)$.

Пусть $r = 2$. Тогда $\widehat{D} = b\widehat{C} + \frac{1}{2}\widehat{B}_1 + a_1\widehat{E}_1 + a_2\widehat{E}_2$, где $a_1 + a_2 = 2 - b$. Аналогично, $\widehat{E}_1$ касается $\widehat{B}_1$, а $\widehat{E}_2$ проходит через точку касания P . При этом две выделенные кривые стягиваются в P . Как и в лемме 5.5, получаем, что эти раздутия соответствуют весам $(3, 1)$, $(1, 3)$, а дискрепантности равны 0. Это случай 48)(+1).

III. В $\text{Supp } \widehat{D}$ находится неприводимая кубика B' . Тогда $\widehat{D} = b\widehat{C} + \frac{1}{2}B' + (\frac{3}{2} - b)\widehat{E}_1$. По предложению 1.9 $\widehat{E}_1$ пересекает B' в одной или двух точках. Легко проверить, что случай двух точек не реализуется. Случай одной точки был разобран в п. II, 1), где кубика распадалась. В полученный ответ новые случаи были включены. Отметим, что условие $\delta(S, D) = 1$ в случае $(\mathbb{C}^2, \frac{1}{2}\{x^2 + y^3 = 0\} + (\frac{3}{2} - b)\{x = 0\})$ влечет $b > \frac{37}{42}$. Тогда $(\vartheta, \alpha, \beta) = (1, 5, 2)$. Это случай 9), $3(+1)$, причем в записи X_9 отсутствует моном $x_1x_2x_3$.

§ 6. Случай $p_a(C) = 0$ и $\widetilde{C}^2 = 0$

Будем считать, что $p_a(C) = 0$ и $\widetilde{C}^2 = 0$. Пусть $\psi: S' \rightarrow S$ – частичное разрешение S вдоль C и

$$K_{S'} + bC' + \sum b_i B'_i + \sum_{i=1}^r a_i E'_i = \psi^*(K_S + D').$$

Пусть $\widetilde{S} \rightarrow S'$ – частичное разрешение S' вдоль E'_1 . Тогда имеем

$$K_{\widetilde{S}} + b\widetilde{C} + \sum b_i \widetilde{B}_i + \sum_{i=1}^r a_i \widetilde{E}_i + \gamma \widetilde{\Gamma} = f^*(K_S + D').$$

Если $\text{Sing } S' \cap E'_1 = \emptyset$, то считаем, что $S' = \widetilde{S}$. Для $m \gg 0$ линейная система $|\widetilde{E}_1 + m\widetilde{C}|$ по предложению 1.10 задает бирациональный морфизм $h: \widetilde{S} \rightarrow \widehat{S}$. Отметим, что h не стягивает $\widetilde{E}_i$, $\widetilde{C}$, $\widetilde{\Gamma}$. Получим

$$K_{\widehat{S}} + b\widehat{C} + \sum b_i \widehat{B}_i + \sum_{i=1}^r a_i \widehat{E}_i + \gamma \widehat{\Gamma} = h^* \left(K_{\widetilde{S}} + b\widetilde{C} + \sum b_i \widetilde{B}_i + \sum_{i=1}^r a_i \widetilde{E}_i + \gamma \widetilde{\Gamma} \right).$$

Очевидно, что $\widehat{S} = \mathbb{F}_n$, где $n \geq 2$; $\widehat{C} \sim \widehat{\Gamma} \sim f$; $\widehat{E}_1 = E_\infty$; $\widehat{E}_i \sim E_0$ для $i \geq 2$.

ЛЕММА 6.1. Если $S' \neq \widetilde{S}$, то $a_1 \geq 4/7$ и $\gamma \geq 2/7$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично лемме 3.2. Отметим, что равенство достигается только в случае особенности $\mathbb{A}_2$ и $b = 6/7$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Имеем $1 \leq r \leq 3$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r \geq 4$. Тогда из предложения 5.1 получаем $r = 4$ и на C лежит особая точка типа A_1 . Пусть она является первой точкой P_1 . Тогда $S' = \tilde{S}$, $\rho(\tilde{S}) = 5$ и $\hat{S} = \mathbb{F}_2$. По предложению 5.1 найдется j такое, что $a_j \geq 4/7$. Отсюда $r = 4$ и $\hat{D} = b\hat{C} + \sum_{i=1}^4 a_i \hat{E}_i$. Множество $\Phi = \{E_i \cap E_j \mid i, j \geq 1, i > j\}$ состоит не более чем из трех различных точек. Имеем четыре возможности: $(2P_1, 2P_2, 2P_3)$, $(3P_1, 3P_2)$, $(4P_1, P_2, P_3)$, $(6P_1)$, где $P_i \in \Phi$, а числа у точек P_i равны $\sum_{j, j \neq i} (E_i \cdot E_j)_{P_i}$. Рассматривая эти возможности, как в лемме 5.5, получаем противоречие, например, с тем, что $a_2 + a_3 + a_4 = 2 - a_1 \leq 11/7$.

А) Пусть $r = 1$. Имеем две возможности.

I. Предположим, что $S' = \tilde{S}$. Тогда $S = \mathbb{P}(1, 1, n)$ и $C = X_1$ — образующая конуса. Получаем случаи $2), 8(0); 2), 9(0); 2), 10(0)$.

II. Предположим, что $S' \neq \tilde{S}$ и $\hat{S} = \mathbb{F}_n$. Из предложения 1.9 следует, что $\hat{B}_i \sim l_i E_0$ для всех i . Из равенства $2 = a_1 + \sum l_i b_i$ и леммы 6.1 получаем либо $l_i = 1$ для всех i и $(b_1, b_2) = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}), (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}), (\frac{1}{2}, \frac{4}{5}), (\frac{1}{2}, \frac{5}{6}), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$, либо $\hat{B}_1 \sim 2E_0$ и $b_1 = 2/3$. Пусть $l_i = 1$ для всех i . Тогда $n + 2 = n \sum b_i + b + \gamma$ и для выделения кривой имеем два варианта.

1) Пусть $(\mathbb{C}^2, (2 - n(b_1 + b_2 - 1) - b)\{x = 0\} + b_i\{y = 0\})$ и $\vartheta = 1$.

Итак, $\alpha \geq \beta + 1$ и аналогично лемме 5.5 имеем

$$\alpha(n(b_1 + b_2 - 1) + b - 1) + \beta(1 - b_i) = 1.$$

Тогда $(n, b_i, b_1, b_2, \alpha, \beta) = (2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 2, 1), (2, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 3, 1), (2, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 2, 1)$. Получаем случаи $6), 11(0); 9), 5(0); 6), 12(0)$.

2) Пусть $(\mathbb{C}^2, (2 - n(b_1 + b_2 - 1) - b)\{x = 0\} + b_1\{y + x^k\} + b_2\{y = 0\})$, где $1 \leq k \leq n$. Итак, $\alpha \geq \beta + 1$, и аналогично лемме 5.5 имеем

$$\alpha(n(b_1 + b_2 - 1) + b - 1) - \beta(b_1 + b_2 - 1) = 1/\vartheta.$$

Требование $\frac{1}{7}$ -логтерминальности при $(1, 1)$ -раздутии влечет $b_1 + b_2 + 1/7 < n(b_1 + b_2 - 1) + b$. Получаем $\vartheta = 1$ и $(n, b_1, b_2, \alpha, \beta) = (2, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 3, 1), (2, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 4, 3), (2, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 5, 4), (2, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 3, 2), (2, \frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 4, 3), (2, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 3, 2), (2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 3, 2), (2, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, 2, 1), (3, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 3, 1), (3, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 3, 2), (3, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 4, 3), (3, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 2, 1), (4, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 2, 1)$. Во всех случаях $k = 1$, кроме последнего, в котором $k \leq 2$. Получаем случаи $9), 6(0); 11), 3(0); 16(0); 8), 6(0); 11), 3(0); 8), 6(0); 8), 7(0); 6), 13(0); 14), 3(0); 13), 4(0); 21), 2(0); 7), 5(0); 10), 3(0)$.

Случай $\hat{B}_1 \sim 2E_0$ и $b_1 = 2/3$ был внесен в уже разобранный случай из п. 2), в котором $\hat{B}_1$ распадается на два сечения.

В) Пусть $r = 2$. Имеем две возможности.

I. Предположим, что $S' = \tilde{S}$ и $\hat{S} = \mathbb{F}_n$. Тогда $\rho(S') = 3$. Положим $\hat{B} = \sum b_i \hat{B}_i$. По лемме 3.2 $a_1 + a_2 \geq 6/7$. Отсюда $\hat{B} \cdot f = 2 - a_1 - a_2 = \frac{k-1}{k}$, где $k = 2, 3, 4, 5, 6, \{\infty\}$. Из строения $\mathbb{F}_n$ имеем $n + 2 = b + a_2 n + \hat{B} \cdot E_0$. Если $\text{Sing } \tilde{S} \cap \tilde{E}_2 = \emptyset$, то будем считать, что $\tilde{E}_1^2 \geq \tilde{E}_2^2$. Учитывая предложение 1.9, получаем следующие случаи.

1) $\widehat{D} = b\widehat{C} + a_1\widehat{E}_1 + a_2\widehat{E}_2 + \frac{1}{2}\widehat{B}_1$, где $n = 2$ и $\widehat{B}_1 \sim 2E_0$. Возможно, что $\widehat{B}_1$ распадется на $\widehat{B}'_1$ и $\widehat{B}''_1$, где $\widehat{B}'_1 \sim \widehat{B}''_1 \sim E_0$. Итак, $a_2 = 1 - b/2$. Перебирая все возможности, получаем только одну:

$$\left(\mathbb{C}^2, \left(1 - \frac{b}{2}\right)\{x = 0\} + \frac{1}{2}\{(x + y^3)y = 0\}\right) \quad \text{и} \quad (\vartheta, \alpha, \beta) = (1, 7, 2).$$

В этом случае $\widehat{B}_1$ — неприводимый дивизор. Это случай 17), 2(0).

2) $\widehat{D} = b\widehat{C} + a_1\widehat{E}_1 + a_2\widehat{E}_2 + \frac{k-1}{k}\widehat{B}_1$, где $\widehat{B}_1 \sim E_0 + f$ и $k = 2, 3, 4$. Тогда $a_2 = \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{k} - b) + \frac{1}{k}$.

Пусть $k = 2$. Из предложения 1.9 следует $n \leq 4$ и $\widehat{B}_1$ пересекается с $\widehat{E}_2$ не более чем в двух различных точках.

Предположим, что $n = 2$ и $\widehat{B}_1$ касается $\widehat{E}_2$ с кратностью 3. Имеем пару $(\mathbb{C}^2, (\frac{5}{4} - \frac{b}{2})\{x = 0\} + \frac{1}{2}\{x + y^3 = 0\})$. Условие $\delta(S, D) = 1$ влечет $3b/2 - 9/4 > -6/7$, т. е. $b > 13/14$. Аналогично лемме 5.5 получаем $\vartheta = 1$ и $(\alpha, \beta) = (9, 2), (11, 3), (13, 4), (16, 5)$. Это случаи 28)(0); 31)(0); 37)(0); 49)(0).

Предположим, что $n = 2$ и $\widehat{B}_1$ касается $\widehat{E}_2$ с кратностью 2. Аналогично получаем $(\alpha, \beta) = (5, 1)$ и $\vartheta = 1$. Случай 12), 2(0).

Предположим, что $n = 3$ и $\widehat{B}_1$ касается $\widehat{E}_2$ с кратностью 4. Аналогично условие $\delta(S, D) = 1$ влечет $b > 6/7$. Получаем $\vartheta = 1$ и $(\alpha, \beta) = (13, 3), (17, 4)$. Это случаи 38)(0); 41)(0).

Предположим, что $n = 3$ и $\widehat{B}_1$ касается $\widehat{E}_2$ с кратностью 3. Тогда этот случай не реализуется.

Предположим, что $n = 4$ и $\widehat{B}_1$ касается $\widehat{E}_2$ с кратностью 5. Аналогично получаем $\vartheta = 1$ и $(\alpha, \beta) = (11, 2), (16, 3)$. Это случаи 32)(0) и 50)(0). Остальные варианты пересечения $\widehat{B}_1$ с $\widehat{E}_2$ не подходят.

Пусть $k = 3$. Из предложения 1.9 следует $n \leq 3$.

Предположим, что $n = 2$ и $\widehat{B}_1$ касается $\widehat{E}_2$ с кратностью 3. Аналогично получаем $\vartheta = 1$ и $(\alpha, \beta) = (7, 2)$. Это случай 17), 3(0).

Остальные варианты пересечения $\widehat{B}_1$ с $\widehat{E}_2$ не реализуются. Случай $n = 3$ не подходит тоже.

Пусть $k = 4$. Из предложения 1.9 следует, что $n = 2$. Аналогично, кривая $\widehat{B}_1$ должна касаться $\widehat{E}_2$ с кратностью 3. Получаем $\vartheta = 1$ и $(\alpha, \beta) = (4, 1)$. Это случай 47), 2(0).

3) $\widehat{D} = b\widehat{C} + a_1\widehat{E}_1 + a_2\widehat{E}_2 + \frac{k-1}{k}\widehat{B}_1 + \frac{k-1}{k}\widehat{B}_2$, где $\widehat{B}_1 \sim E_0$ и $\widehat{B}_2 \sim f$. Этот случай был учтен при ответе в п. 2).

4) $\widehat{D} = b\widehat{C} + a_1\widehat{E}_1 + a_2\widehat{E}_2 + \frac{k-1}{k}\widehat{B}_1$, где $\widehat{B}_1 \sim E_0$ и $2 \leq k \leq 6$. Тогда $a_2 = \frac{1}{k} + \frac{1}{n}(2 - b)$. Пусть ν — кратность пересечения $\widehat{B}_1$ и $\widehat{E}_2$ в точке выделения. Из предложения 1.9 следует $\nu = n$ или $\nu = n - 1$. В случае $\nu = n$ при раздутии с весами $(n, 1)$ дискрепантность равна $b - 2$. Противоречие с логканоничностью. Поэтому $\nu = n - 1$, $\vartheta = 1$ и $\beta = 1$. Учитывая $\widetilde{E}_1^2 > \widetilde{E}_2^2$ и $\delta(S, D) = 1$, получаем $(n, k, \alpha, \beta) = (2, 3, 5, 1), (3, 2, 7, 1)$. Это случаи 12), 3(0); 23)(0).

5) $\widehat{D} = b\widehat{C} + a_1\widehat{E}_1 + a_2\widehat{E}_2 + \frac{k-1}{k}\widehat{B}_1 + \frac{l-1}{l}\widehat{B}_2$, где $\widehat{B}_1 \sim E_0$, $\widehat{B}_2 \sim f$, $k \neq l$ и $l \geq 2$. Тогда $a_2 = \frac{1}{k} + \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{l} - b)$. Возможны два варианта: выделение происходит либо в точке, лежащей на $\widehat{B}_2$, либо в точке, не лежащей на $\widehat{B}_2$. В первом варианте из условия $\delta(S, D) = 1$ и предложения 1.9 следует, что $\vartheta = 1$, $\beta = 1$ и кратность пересечения $\widehat{B}_1$ с $\widehat{E}_2$ в точке выделения равна $n - 1$. Перебором возможностей

убеждаемся в том, что этот вариант невозможен. Во втором варианте аналогично получаем $\vartheta = 1$, $\beta = 1$ и кратность пересечения равна n . Этот случай тоже не реализуется.

II. Предположим, что $S' \neq \tilde{S}$, $E'_2 \cap \text{Sing } S' \neq \emptyset$ и $\hat{S} = \mathbb{F}_n$. Тогда $\rho(\tilde{S}) = 4$ и выделяются две кривые. Пусть $a_1 \leq a_2$. Из предложения 1.9 следует, что $\hat{B}_i \sim l_i E_0$ и кривые выделяются с $\vartheta = 1$. По лемме 6.1 имеем $\sum b_i = 2 - a_1 - a_2 \leq 6/7$. Отсюда $\hat{D} = b\hat{C} + a_1\hat{E}_1 + a_2\hat{E}_2 + \frac{k-1}{k}\hat{B}_1 + \gamma\hat{\Gamma}$, где $\hat{B}_1 \sim E_0$, $k = 2, 3, 4, 5, 6$ при $n = 2$ и $k = 2$ при $n = 3$.

1) Пусть $n = 2$. Тогда $4 = 2a_2 + \gamma + b + 2(\frac{k-1}{k})$. Отсюда и из леммы 6.1 получаем $a_2 \leq \frac{3}{7} + \frac{1}{k}$. Положим $P = \hat{\Gamma} \cap \hat{E}_2$. Имеем две возможности.

Пусть $(\hat{B}_1 \cdot \hat{E}_2)_P = 1$. Другую точку пересечения $\hat{B}_1$ и $\hat{E}_2$ обозначим через Q . При выделении в точке Q индекс самопересечения $\hat{E}_2$ должен уменьшиться как минимум на 3. Отсюда, делая раздутие с весами $(3, 1)$, получаем $k = 2$. Итак, выделение в точке Q происходит при раздутии с весами $(m, 1)$, где $m = 3, 4$ (при $m \geq 5$ имеем $\delta(S, D) = 2$). Тогда $a_2 = 1 - \frac{1}{2m}$. Отсюда $\gamma = 1 + \frac{1}{m} - b$. Пусть точка P раздувается с весами (α, β) . Тогда

$$b = \frac{1 + \beta(\frac{1}{2} - \frac{1}{2m})}{\alpha} + \frac{1}{m}.$$

Отсюда $(m, \alpha, \beta) = (3, 3, 2), (4, 2, 1)$. Это случаи 18), 2(0); 18), 3(0).

Пусть $(\hat{B}_1 \cdot \hat{E}_2)_P = 2$. Тогда при раздутии точки P с весами $(2, 1)$ получим дискрепантность $-2 + b < -1$. Противоречие.

2) Пусть $n = 3$ ($k = 2$). Аналогично имеем $a_2 \leq \frac{11}{14}$. Положим $P = \hat{\Gamma} \cap \hat{E}_2$. Если $(\hat{B}_1 \cdot \hat{E}_2)_P = 3$, то получаем противоречие с логканоничностью. Если $(\hat{B}_1 \cdot \hat{E}_2)_P = 2$, то в другой точке Q кратность пересечения равна 1. Поскольку при выделении в Q индекс самопересечения $\hat{E}_2$ должен уменьшиться как минимум на 4, то получаем противоречие с условием $a_2 \leq \frac{11}{14}$. Отсюда $(\hat{B}_1 \cdot \hat{E}_2)_P = 1$ и $(\hat{B}_1 \cdot \hat{E}_2)_Q = 2$. Аналогично, при раздутии с весами $(m, 1)$ точки Q (здесь $m \geq 4$) получаем

$$a_2 = 1 - \frac{1}{m}, \quad \gamma = \frac{1}{2} - b + \frac{3}{m}, \quad b = \frac{1 + \beta(\frac{1}{2} - \frac{1}{m})}{\alpha} + \frac{3}{m} - \frac{1}{2}.$$

Отсюда $(m, \alpha, \beta) = (4, 2, 1)$. Это случай 18), 4(0).

С) Пусть $r = 3$. Будем предполагать, что $a_1 \leq a_2 \leq a_3$. Тогда $2 = a_1 + a_2 + a_3 + \frac{k-1}{k}$. Отсюда $a_1 \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3k}$. Из строения $\mathbb{F}_n$ следует $n + 2 \geq (2 - a_1)n + b + \gamma \geq (\frac{5}{3} - \frac{1}{3k})n + \frac{6}{7} + \gamma$. Отсюда $\frac{8}{7} - \gamma \geq (\frac{2}{3} - \frac{1}{3k})n$. Поэтому $(n, k) = (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1)$ при $\gamma = 0$ и $(n, k) = (2, 1)$ при $\gamma \neq 0$. Также во всех случаях имеем

$$\sum b_i \hat{B}_i = b_1 \hat{B}_1 \sim_{\mathbb{Q}} \frac{k-1}{k} E_0.$$

Пусть $(n, k, \gamma) = (2, 1, 0)$. Условие логканоничности дивизора $K_{\hat{S}} + \hat{D}$ влечет, что $\hat{E}_2$ и $\hat{E}_3$ пересекаются в двух различных точках P_1 и P_2 . Из предложения 1.9 следует, что эти точки необходимо раздувать с весами $(m_i, 1)$, где $m_i \geq 3$ и $\vartheta = 1$. Из условия $\delta(S, D) = 1$ следует, что $m_i \leq 4$. Получили систему уравнений

$$\begin{cases} m_1 - m_1 a_2 - a_3 = 0 \\ m_2 - m_2 a_3 - a_2 = 0 \\ a_2 + a_3 = 2 - \frac{b}{2}, \quad b \in [\frac{6}{7}, 1). \end{cases} \quad (6.1)$$

Отсюда $(m_1, m_2) = (3, 4)$ и $b = \frac{10}{11}$. Случай 55)(0).

Пусть $\gamma = 0$ и $(n, k) = (2, 2)$ или $(n, k) = (2, 3)$. Учитывая $\delta(S, D) = 1$, получаем две возможности: либо $\hat{E}_2$ пересекается с $\hat{E}_3$ в двух различных точках P_1, P_2 и $\hat{B}_1$ проходит через P_1, P_2 , либо $\hat{E}_2$ пересекает $\hat{E}_3$ в точке P с кратностью 2 и $(\hat{B}_1 \cdot \hat{E}_i)_P = 1$, где $i = 2, 3$. Выписывая систему уравнений для раздутия, аналогичную (6.1), получаем, что эти случаи не реализуются.

Пусть $(\gamma, n, k) = (0, 3, 1)$. Аналогично, $\hat{E}_2$ должна пересекать $\hat{E}_3$ в одной точке с кратностью 2, а в другой точке – с кратностью 1. Поступая, как и ранее, получаем, что случай не реализуется.

Пусть $\gamma > 0$, $(n, k) = (2, 1)$ и $\text{Sing } \tilde{S} \cap \tilde{E}_i \neq \emptyset$, где $i = 2, 3$. Тогда $\hat{E}_2$ и $\hat{E}_3$ пересекаются в двух различных точках P_1 и P_2 , а $\hat{\Gamma}$ проходит через P_2 . Поэтому в точке P_1 выделяется одна кривая, а в точке P_2 – две кривые. Итак, в точке P_2 имеем пару $(\mathbb{C}^2, \gamma\{x = 0\} + a_2\{y = 0\} + a_3\{x + y = 0\})$. Выпишем систему уравнений для раздутия, аналогичную (6.1). Тогда в точке P_2 выделения происходят при раздутиях с весами $(2, 1)$ и $(1, 3)$, а в точке P_1 – при раздутии с весами $(3, 1)$. Это случай 56)(0).

§ 7. Случай $p_a(C) = 0$ и $\tilde{C}^2 = -1$

Предположим, что $p_a(C) = 0$ и $\tilde{C}^2 = -1$. Пусть $P_1, \dots, P_r$ – особенности S , лежащие на C . Напомним, что они являются циклическими особенностями $\frac{1}{n_i}(q_i, 1)$. Положим $B = \sum b_i B_i$ и $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r$. Тогда из предложения 5.1 получаем

$$\frac{-2 + \sum_{i=1}^r \frac{n_i - 1}{n_i} + B \cdot C}{1 - b} - \sum_{i=1}^r \frac{q_i}{n_i} = -1. \quad (7.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. Имеем $r = 2, 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $C^2 > 0$, то из (7.1), очевидно, следует, что $r \geq 2$. Пусть $r \geq 4$. Предположим, что $r = 4$ и $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2$. Тогда $B \neq 0$. Отсюда $B \cdot C \geq 1/4$. Противоречие с (7.1).

Предположим, что $r \geq 5$ или $n_r \geq 3$. Тогда из (7.1) сразу следует, что $r = 4$, $n_1 = n_2 = n_3 = 2$, $n_4 = 3$, $q_4 = 2$, $b = \frac{6}{7}$ и $B = 0$. Пусть $S' \rightarrow S$ – частичное разрешение S вдоль C , взятое в точках P_1, P_2 и P_3 , а $S' \rightarrow \tilde{S}$ – стягивание собственного прообраза C . Тогда $\rho(\tilde{S}) = 3$, $\tilde{E}_i \cdot \tilde{E}_j = 3$ при $i \neq j$ и $\tilde{E}_i^2 = 1$. Итак, $K_{\tilde{S}} + \sum_{i=1}^3 \frac{3}{7} \tilde{E}_i \equiv 0$. Линейная система $|\tilde{E}_1|$ по предложению 1.10 задает бирациональный морфизм $\tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^2$. Образы $\tilde{E}_i$ обозначим через $\hat{E}_i$. Тогда $\hat{E}_1 \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ и $\hat{E}_2 \sim \hat{E}_3 \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$. Поскольку $\hat{E}_2^2 = \hat{E}_3^2 = 9$, то при выделении необходимо уменьшить их индекс самопересечения на 8. Сделать это невозможно. Рассмотрим, например, следующий случай: $(\mathbb{C}^2, \frac{3}{7}\{xy = 0\} + \frac{3}{7}\{(x + y^2)(y + x^2) = 0\})$. При раздутии с весами $(4, 1)$ дискрепантность равна $\frac{4}{7} > 0$. Противоречие.

А) Пусть $r = 2$. Тогда

$$B \neq 0 \quad \text{и} \quad \frac{B \cdot C - \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2}}{1 - b} - \frac{q_1}{n_1} - \frac{q_2}{n_2} = -1. \quad (7.2)$$

Поскольку $C^2 > 0$, то по предложению 1.9 дивизор B должен пересекать кривую C в неособой точке поверхности S . Из (7.2) следует, что $B \cdot C < 1$. В частности, B пересекает C ровно в одной неособой точке поверхности S . Рассмотрим по порядку все варианты пересечения B с C .

И. Пусть B пересекает C ровно в одной точке. Положим $B = \frac{k-1}{k}B_1$. Из (7.2) получаем возможности, которые приведены в табл. 1.

ТАБЛИЦА 1

№	k	(n_1, q_1)	(n_2, q_2)	b
1	2	(3,2)	(7,4), (7,5), (7,6), (8,5), (8,7) (9,7), (9,8), (10,9), (11,10), (12,11)	$\frac{9}{10}, \frac{15}{16}, \frac{21}{22}, \frac{6}{7}, \frac{12}{13}$ $\frac{7}{8}, \frac{9}{10}, \frac{15}{17}, \frac{33}{38}, \frac{6}{7}$
2	2	(3,1)	(7,6)	$\frac{7}{8}$
3	2	(4,3)	(5,3), (5,4), (6,5)	$\frac{6}{7}, \frac{10}{11}, \frac{6}{7}$
4	3	(2,1)	(7,5), (7,6), (8,7), (9,8)	$\frac{8}{9}, \frac{14}{15}, \frac{8}{9}, \frac{6}{7}$

Рассмотрим первый случай табл. 1. Пусть $S' \rightarrow S$ – частичное разрешение S вдоль C , взятое в точке P_2 , а $\psi: S'' \rightarrow S'$ – частичное разрешение S' вдоль E'_2 и $\text{Exs } \psi = \Gamma''$. Пусть $S'' \rightarrow \tilde{S}$ – стягивание собственного прообраза C . Тогда $\tilde{B}_1 \cdot \tilde{E}_2 = 3$, $\tilde{E}_2^2 = 1$ (см. таблицу). Линейная система $|\tilde{E}_2|$ по предложению 1.10 задает бирациональный морфизм $\tilde{S} \rightarrow \hat{S} = \mathbb{P}^2$ и $\tilde{E}_2 \sim \hat{\Gamma} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, $\tilde{B}_1 \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$. Поскольку $\rho(\tilde{S}) = 2$, то должна выделяться только одна кривая в единственной точке пересечения $\hat{\Gamma}$ и $\hat{B}_1$. Обозначим ее через P . Итак, $K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{2}\hat{B}_1 + \gamma\hat{\Gamma} + a_2\hat{E}_2 \equiv 0$. В точке касания $\hat{E}_2$ и $\hat{B}_1$ должна выделяться кривая с дискрепантностью, равной $-b$. Отсюда $a_2 = \frac{1}{2} + \frac{b}{3}$ и $\gamma = 1 - \frac{b}{3}$.

1) Предположим, что в окрестности P имеем пару $(\mathbb{C}^2, (1 - \frac{b}{3})\{x = 0\} + \frac{1}{2}\{x + y^3 = 0\})$. Аналогично лемме 5.5 получаем $(\alpha, \beta) = (5, 1), (7, 2)$. Это случаи 25), $2(-1); 33)(-1)$.

2) Предположим, что в окрестности P имеем пару $(\mathbb{C}^2, (1 - \frac{b}{3})\{x = 0\} + \frac{1}{2}\{x^2 + y^3 = 0\})$. Получили противоречие с логканоничностью.

3) Предположим, что в окрестности P имеем пару $(\mathbb{C}^2, (1 - \frac{b}{3})\{x = 0\} + \frac{1}{2}\{y(x + y^2) = 0\})$. Из условия $\delta = 1$ следует, что $b > \frac{27}{28}$. Поступая, как и в лемме 5.5, получаем, что возможность не реализуется.

Рассмотрим второй случай табл. 1. Пусть $S' \rightarrow S$ – частичное разрешение S' вдоль C , взятое в точке P_1 , а $S' \rightarrow \tilde{S}$ – стягивание собственного прообраза C . Тогда $\rho(\tilde{S}) = 1$ и $\tilde{E}_1^2 = 4$. Поскольку $\tilde{B}_1 \cdot \tilde{E}_1 = 7$, то по предложению 1.10 получаем $\tilde{S} = \mathbb{P}(1, 1, 4)$ и $\tilde{B}_1 = X_7$. В вершине конуса дивизор $K_{\tilde{S}} + \frac{1}{2}\tilde{B}_1$ не $\frac{1}{7}$ -логтерминален. Противоречие.

Рассмотрим третий случай табл. 1. Поверхность $\tilde{S}$ строится так же, как и в первом случае из этой таблицы. Имеем $\tilde{S} = \mathbb{P}(1, 1, 2)$ и $\tilde{E}_2 = X_2$, $\hat{\Gamma} = X_1$, $\hat{B}_1 = X_4$. Так же $\hat{\Gamma}$ и $\hat{B}_1$ пересекаются только в одной точке, скажем P . Итак, $K_{\mathbb{P}} + \frac{1}{2}\hat{B}_1 + (\frac{1}{2} + \frac{b}{4})\hat{E}_2 + (1 - \frac{b}{2})\hat{\Gamma} \equiv 0$.

Если P не вершина конуса, то, поступая, как и в лемме 5.5, получаем, что возможность не реализуется.

Пусть P – вершина конуса, а $\bar{B}_1$ и $\bar{\Gamma}$ – собственные прообразы $\hat{B}_1$ и $\hat{\Gamma}$ на минимальном разрешении $\mathbb{P}(1, 1, 2)$. Тогда $\bar{B}_1 \sim E_0 + 2f$. Возможны два варианта.

1. Пусть $\bar{B}_1 \cap E_\infty \cap \bar{\Gamma} \neq \emptyset$ и $\bar{B}_1$ касается E_∞ . Получили противоречие с $\delta = 1$.

2. Пусть $\bar{B}_1 \cap E_\infty \cap \bar{\Gamma} = Q_1$ и $\bar{B}_1$ пересекает E_∞ в двух различных точках. В точке Q_1 имеем пару $(\mathbb{C}^2, (1 - \frac{b}{2})\{x = 0\} + (1 - \frac{b}{4})\{y = 0\} + \frac{1}{2}\{x + y = 0\})$. Из условия $\delta = 1$ получаем $b > 6/7$. Отсюда $(\alpha, \beta) = (4, 3)$. Это случай 39)(-1).

Рассмотрим четвертый случай табл. 1. Пусть $S' \rightarrow S$ – частичное разрешение S вдоль C и $\psi_1: S'' \rightarrow S'$ – частичное разрешение S' вдоль E'_2 и $E_2^{(2)} = \text{Exs } \psi_1$. Рассмотрим $\psi_2: S''' \rightarrow S''$ – частичное разрешение S'' вдоль $E_2^{(2)}$, и $\Gamma''' = \text{Exs } \psi_2$. Пусть $S''' \rightarrow \tilde{S}$ – стягивание собственного прообраза C и всех исключительных кривых над точкой P_2 , кроме Γ''' . Тогда по предложению 1.10 линейная система $|\tilde{E}_1|$ задает бирациональный морфизм $\tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^2$. В обозначениях, как и ранее, $K_{\mathbb{P}^2} + \frac{2}{3}\hat{B}_1 + \frac{b}{2}\hat{E}_1 + (1 - \frac{b}{2})\hat{\Gamma} \equiv 0$. Здесь $\hat{B}_1 \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$, $\hat{E}_1 \sim \hat{\Gamma} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$ и $\hat{\Gamma}$ пересекает $\hat{B}_1$ в точке, отличной от $\hat{B}_1 \cap \hat{E}_1$, с кратностью 2. Учитывая, что $\delta = 1$, получаем, что выделение возможно только для пары $(\mathbb{C}^2, (1 - \frac{b}{2})\{x = 0\} + \frac{2}{3}\{x + y^2 = 0\})$ при $(\alpha, \beta) = (3, 1)$. Это случай 17), 4(-1).

II. Пусть B пересекает C в двух точках. Будем считать, что коэффициент неприводимого дивизора из B , который пересекает C в неособой точке S , равен $\frac{k-1}{k}$, а коэффициент неприводимого дивизора из B , который пересекает C в особой точке S , равен $\frac{l-1}{l}$. Откажемся от требования $n_1 \leq n_2$. Тогда из (7.1) и [19, следствие 3.10] получаем

$$\frac{\frac{k-1}{k} - \frac{1}{n_1 l} - \frac{1}{n_2}}{1-b} - \frac{q_1}{n_1} - \frac{q_2}{n_2} = -1. \quad (7.3)$$

Отсюда $(k, l, n_1, q_1, n_2, q_2, b) = (2, 2, 4, 3, 3, 2, \frac{9}{10}), (2, 2, 5, 4, 3, 2, \frac{6}{7})$.

Пусть $S' \rightarrow S$ – частичное разрешение S вдоль C , взятое в точке P_1 , а $\psi: S'' \rightarrow S'$ – частичное разрешение S' вдоль E'_1 и $\text{Exs } \psi = \Gamma''$. Рассмотрим $S'' \rightarrow \tilde{S}$ – стягивание собственного прообраза C . Тогда линейная система $|\tilde{E}_1|$ задает бирациональный морфизм $\tilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^2$. Итак, $K_{\mathbb{P}^2} + \frac{1}{2}\hat{B}_1 + (\frac{1}{2} + \frac{b}{3})\hat{E}_1 + (1 - \frac{b}{3})\hat{\Gamma} \equiv 0$. Здесь $\hat{E}_1 \sim \hat{\Gamma} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, $\hat{B}_1 \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$. Как и в первом случае таблицы, будем рассматривать пару $(\mathbb{C}^2, (1 - \frac{b}{3})\{x = 0\} + \frac{1}{2}\{x + y^3 = 0\})$. Отметим, что после выделения имеем $\tilde{\Gamma} \cdot \tilde{B}_1 \neq 0$. Тогда $(\vartheta, \alpha, \beta) = (1, 5, 2)$ и, следовательно, $B = \frac{1}{2}B_1$. Это случай 18), 5(-1).

III. Пусть B пересекает C в трех точках. Аналогично (7.3) имеем

$$\frac{\frac{k-1}{k} - \frac{1}{n_1 l_1} - \frac{1}{n_2 l_2}}{1-b} - \frac{q_1}{n_1} - \frac{q_2}{n_2} = -1.$$

Решений нет.

В) Пусть $r = 3$. Сразу отметим, что этот случай не реализуется. Из (7.1) вытекает, что B не может пересекать C в неособой точке S . Предположим, что коэффициенты неприводимых дивизоров из B , которые проходят через точки P_i , равны $\frac{l_i-1}{l_i}$ соответственно. Тогда

$$\frac{1 - \sum_{i=1}^3 \frac{1}{n_i l_i}}{1-b} - \sum_{i=1}^3 \frac{q_i}{n_i} = -1. \quad (7.4)$$

Предполагаем, что $n_1 l_1 \leq n_2 l_2 \leq n_3 l_3$. Из (7.4) следует, что $l_1 = 1$ и $(n_1 l_1, n_2 l_2, n_3 l_3) = (2, 3, m)$, где $m \geq 7$; $(2, 4, m)$, где $5 \leq m \leq 12$; $(2, 5, m)$, где $5 \leq m \leq 7$; $(2, 6, 6)$; $(3, 3, m)$, где $4 \leq m \leq 6$; $(3, 4, 4)$. Более того, непосредственно из (7.4) вытекает следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Возможны только следующие случаи:*

- 1) *существует $i \geq 2$ такое, что $n_i < 2q_i$;*
- 2) $(n_1, q_1, n_2, q_2, l_2) = (2, 1, 3, 1, 1)$;
- 3) $(n_1, q_1, n_2, q_2, n_3, q_3, l_2, l_3, b) = (2, 1, 2, 1, 5, 2, 2, 1, \frac{7}{8})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Все возможности из п. 2) предложения 7.2, кроме $(n_3, q_3, b) = (7, 3, \frac{10}{11})$, удовлетворяют условию 1). Для удобства доказательства все возможности из 2) будут рассмотрены вместе.

I. Рассмотрим случай 1) из предложения 7.2. В зависимости от n_1 имеем две возможности.

а) Предположим, что $n_1 = 2$. Пусть $S' \rightarrow S$ – частичное разрешение S вдоль C , взятое в точках P_2 и P_3 , а $\psi_1: S'' \rightarrow S'$ – частичное разрешение S' вдоль E'_i и $\Gamma'' = \text{Exs } \psi_1$. Число i из предложения 7.2 определено в табл. 2. Если $\text{Sing } S'' \cap \Gamma'' \neq \emptyset$, то возьмем $\psi_2: S''' \rightarrow S''$ – частичное разрешение S'' вдоль Γ'' и $\Upsilon''' = \text{Exs } \psi_2$. Рассмотрим $\tilde{S}''' \rightarrow \tilde{S}$ – стягивание собственного прообраза C . Для $m \gg 0$ линейная система $|m\tilde{E}_i + \tilde{\Gamma}|$ задает бирациональный морфизм $\tilde{S} \rightarrow \hat{\tilde{S}}$, где $\hat{\tilde{S}} = \mathbb{F}_n$. Имеем $K_{\hat{\tilde{S}}} + \hat{\Theta} \equiv 0$, где $\hat{\Theta} = d_1\hat{E}_i + d_2\hat{\Gamma} + d_3\hat{\Upsilon} + d_4\hat{E}_j + \hat{D}$ и $j \neq i$, $j \geq 2$. Ясно, что $\hat{E}_i \sim \hat{\Upsilon} \sim f$, $\hat{\Gamma} = E_\infty$, $\hat{E}_j \sim 2E_0$. Кроме случая 6 табл. 2, всегда имеем $\hat{B} = 0$. Все возможности описаны в табл. 2 и 3.

ТАБЛИЦА 2

№	i	(n_i, q_i)	$\rho(\tilde{S}/\hat{\tilde{S}})$	$\hat{\tilde{S}}$	(n_j, q_j)	b	l_2, l_3
1	2	(3, 2)	1	$\mathbb{F}_2$			$l_2 = 1$
2	2	(4, 3)	2	$\mathbb{F}_2$			$l_2 = 1$
3	3	(5, 3)	1	$\mathbb{F}_3$	(4, 1)	$\frac{6}{7}$	$l_2 = l_3 = 1$
4	3	(5, 4), (6, 5)	2	$\mathbb{F}_2$	(4, 1)	$\frac{10}{11}, \frac{6}{7}$	$l_2 = l_3 = 1$
5	3	(5, 3)	1	$\mathbb{F}_3$	(2, 1)	$\frac{11}{12}$	$l_2 = 2, l_3 = 1$
6	3	(3, 2)	1	$\mathbb{F}_2$	(2, 1)	$\frac{7}{8}$	$l_2 = l_3 = 2$
7	3	$(n_i, n_i - 1)$ $5 \leq n_i \leq 8$	2	$\mathbb{F}_2$	(2, 1)		$l_2 = 2, l_3 = 1$
8	2	(5, 3)	1	$\mathbb{F}_3$			$l_2 = l_3 = 1$
9		(5, 4), (6, 5)	2	$\mathbb{F}_2$			$l_2 = 1$

Выпишем дивизор $\hat{\Theta}$, который соответствует случаям из табл. 2. В табл. 3 приведена только та информация, которая необходима для дальнейшего доказательства.

Используя условие $\delta(S, D) = 1$ и доказательство леммы 5.5, можно проверить, что требуемых выделений не существует.

б) Предположим, что $(n_1, q_1) = (3, 2)$. Тогда $l_2 = l_3 = 1$. Пусть $S' \rightarrow S$ – частичное разрешение S вдоль C , взятое в точках P_2 и P_3 , а $\psi: S'' \rightarrow S'$ – частичное

ТАБЛИЦА 3

№	Дивизор $\widehat{\Theta} (K_{\widehat{S}} + \widehat{\Theta} \equiv 0)$
1	$\frac{2b}{3}\widehat{E}_i + \frac{b}{3}\widehat{\Gamma} + (1 - \frac{b}{6})\widehat{E}_j$
2	$\frac{3b}{4}\widehat{E}_i + \frac{b}{2}\widehat{\Gamma} + \frac{b}{4}\widehat{\Upsilon} + (1 - \frac{b}{4})\widehat{E}_j$
3	$\frac{5}{7}\widehat{E}_i + \frac{4}{7}\widehat{\Gamma} + \frac{5}{7}\widehat{E}_j$
4	$\frac{8}{11}\widehat{E}_i + \frac{6}{11}\widehat{\Gamma} + \frac{4}{11}\widehat{\Upsilon} + \frac{8}{11}\widehat{E}_j, \frac{5}{7}\widehat{E}_i + \frac{4}{7}\widehat{\Gamma} + \frac{3}{7}\widehat{\Upsilon} + \frac{5}{7}\widehat{E}_j$
5	$\frac{3}{4}\widehat{E}_i + \frac{7}{12}\widehat{\Gamma} + \frac{17}{24}\widehat{E}_j$
6	$\frac{3}{4}\widehat{E}_i + \frac{5}{8}\widehat{\Gamma} + \frac{11}{16}\widehat{E}_j + \frac{1}{2}\widehat{B}_k, \text{ где } \widehat{B}_k \sim f$
7	$\frac{3}{4}\widehat{E}_i + (\frac{3}{2} - b)\widehat{\Gamma} + (\frac{9}{4} - 2b)\widehat{\Upsilon} + (\frac{1}{4} + \frac{b}{2})\widehat{E}_j$
8	$(\frac{1}{5} + \frac{3b}{5})\widehat{E}_i + (\frac{2}{5} + \frac{b}{5})\widehat{\Gamma} + (\frac{4}{5} - \frac{b}{10})\widehat{E}_j$
9	$\frac{4b}{5}\widehat{E}_i + \frac{3b}{5}\widehat{\Gamma} + \frac{2b}{5}\widehat{\Upsilon} + (1 - \frac{3b}{10})\widehat{E}_j$

разрешение S' вдоль E'_3 и $\Gamma'' = \text{Exs } \psi$. Рассмотрим $S'' \rightarrow \widetilde{S}$ – стягивание собственного прообраза C . Тогда линейная система $|\widetilde{E}_3|$ задает бирациональный морфизм $\widetilde{S} \rightarrow \mathbb{P}^2$ и

$$K_{\mathbb{P}^2} + x\widehat{E}_2 + \left(1 + \frac{b}{3} - x\right)\widehat{E}_3 + \left(2 - 2x - \frac{b}{3}\right)\widehat{\Gamma} \equiv 0,$$

где $\widehat{E}_2 \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$, $\widehat{E}_3 \sim \widehat{\Gamma} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$. В зависимости от особенности в точке P_2 имеем $x = \frac{2b}{3}, \frac{1}{3} + \frac{b}{3}, \frac{3b}{4}$. Соответствующие особенности – это $\mathbb{A}_2, \frac{1}{3}(1, 1), \mathbb{A}_3$. Легко проверить, что выделения требуемых двух кривых не существует.

II. Рассмотрим случай 2) из предложения 7.2. Пусть $S' \rightarrow S$ – частичное разрешение S вдоль C , взятое в точке P_3 , а $\psi: S'' \rightarrow S'$ – частичное разрешение S' вдоль E'_3 и $\Gamma'' = \text{Exs } \psi$. Рассмотрим $S'' \rightarrow \widetilde{S}$ – стягивание собственного прообраза C . Тогда $p_a(\widetilde{E}_3) = 1$ и из (7.4) следует, что $\widetilde{E}_3^2 = 3, 4$. Аналогично предложению 7.2 доказывается, что линейная система $|\widetilde{E}_3|$ является не очень обильной, кроме случая $S'' = S'$. В любом случае она задает бирациональный морфизм $\widetilde{S} \rightarrow \widehat{S}$, где $\widehat{S}$ – поверхность дель Пеццо с дювалевскими особенностями. Поскольку кривая $\widetilde{E}_3$ имеет касп, то $\pi_1(\widehat{S} \setminus \text{Sing } \widehat{S}) = 0$ в силу [6, замечание 1.12]. Поэтому из [15, лемма 6] следует, что $\widehat{S} = S(\mathbb{D}_5), S(\mathbb{E}_6)$.

Итак, $K_{\widehat{S}} + (\frac{2}{3} + \frac{b}{6})\widehat{E}_3 + (\frac{1}{3} - \frac{b}{6})(K_{\widehat{S}})^2\widehat{\Gamma} \equiv 0$. Здесь $\widehat{\Gamma}$ будет (-1) -кривой на минимальном разрешении $\widehat{S}$, так как $\widehat{E}_3 \cdot \widehat{\Gamma} = 1$. В случае $S'' = S'$ компонента из B , проходящая через P_3 , будет кривой $\widehat{\Gamma}$. Имеем два случая.

1) $\widehat{S} = S(\mathbb{D}_5)$. Тогда дивизор $K_{\widehat{S}} + (\frac{4}{3} - \frac{2b}{3})\widehat{\Gamma}$ не логканоничен (см. п. F) из § 4). Противоречие.

2) $\widehat{S} = S(\mathbb{E}_6)$. Тогда дивизор $K_{\widehat{S}} + (1 - \frac{b}{2})\widehat{\Gamma}$ не логканоничен (см. п. I) из § 4). Противоречие.

III. Рассмотрим случай 3) из предложения 7.2. Пусть $S' \rightarrow S$ – частичное разрешение S вдоль C , взятое в точках P_2 и P_3 , а $\psi: S'' \rightarrow S'$ – частичное разрешение S' вдоль E'_3 и $\Gamma'' = \text{Exs } \psi$. Рассмотрим $S'' \rightarrow \widetilde{S}$ – стягивание собственного прообраза C и E'_3 . Как и в п. II, линейная система $|\widetilde{E}_2|$ задает бирациональный морфизм $\widetilde{S} \rightarrow \widehat{S} = S(\mathbb{D}_5)$.

Итак, $K_{\widehat{S}} + \frac{11}{16}\widehat{E}_2 + \frac{1}{2}\widehat{B}_1 + \frac{3}{8}\widehat{\Gamma} \equiv 0$, где $\widehat{B}_1$ будет (-1) -кривой на минимальном разрешении $\widehat{S}$, а $\widehat{\Gamma} \sim_{\mathbb{Q}} \frac{1}{2}\widehat{E}_2$. Поскольку $-1 = (K_{\widehat{S}} + \widehat{\Gamma}) \cdot \widehat{\Gamma} = -2 + \text{Diff}_{\widehat{\Gamma}}(0)$, то $\text{Diff}_{\widehat{\Gamma}}(0) = 1$. Из классификации двумерных особенностей (см., например, [17, теорема 2.1.3]) следует, что в точке $\mathbb{D}_5$ имеем

$$\left(\widehat{S}, \frac{1}{2}\widehat{B}_1 + \frac{3}{8}\widehat{\Gamma}\right) \cong_{\text{an}} \left(x^2 + y^2z - z^4 = 0 \subset (\mathbb{C}^3, 0), \frac{1}{2}\{y = x - z^2 = 0\} + \frac{3}{8}\{x = z = 0\}\right).$$

При раздутии с весами $(4, 3, 2)$ дискрепантность исключительного дивизора равна $-9/8 < -1$. Противоречие.

Список литературы

1. Abe T. Classification of exceptional complements: Elliptic curve case. e-print math.AG/9711029.
2. Abe T. Classification of exceptional surface complements: PhD thesis. Johns Hopkins Univ., 1998.
3. Catanese F., Franciosi M., Hulek K., Reid M. Embeddings of curves and surfaces // Nagoya Math. J. 1999. V. 154. P. 185–220.
4. Furushima M. Singular del Pezzo surfaces and analytic compactifications of 3-dimensional complex affine space $\mathbb{C}^3$ // Nagoya Math. J. 1986. V. 104. P. 1–28.
5. Грффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.
6. Gurjar R. V., Zhang D.-Q. π_1 of smooth points of a log del Pezzo surfaces is finite. I // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 1994. V. 1. P. 137–180.
7. Keel S., McKernan J. Rational curves on quasi-projective surfaces // Memoirs AMS. 1999. V. 140. № 669.
8. Kollar J. et al. Flips and abundance for algebraic threefolds // Astérisque. 1992. V. 211.
9. Kollár J. Log surfaces of general type; some conjectures // Contemporary Math. AMS. 1994. V. 162. P. 261–275.
10. Kollár J., Kovács S. Birational geometry of log surfaces. Preprint / Utah University, 1994; <http://www.math.princeton.edu/~kollar/FromMyHomePage/BiratLogSurf.ps>.
11. Кудрявцев С. А. О чисто логтерминальных раздутиях // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 892–899.
12. Кудрявцев С. А. Классификация трехмерных исключительных логканонических гиперповерхностных особенностей. I // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 5. С. 83–170.
13. Кудрявцев С. А. Классификация логповерхностей Энриквеса с $\delta = 2$ // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 5. С. 715–722.
14. Кудрявцев С. А. Классификация логповерхностей Энриквеса с $\delta = 1$. e-print math.AG/0207270.
15. Miyanishi M., Zhang D.-Q. Gorenstein log del Pezzo surfaces of rank one // J. of Algebra. 1988. V. 118. P. 63–84.
16. Прохоров Ю. Г., Шокуров В. В. Первая основная теорема о дополнениях: от глобального к локальному // Изв. АН СССР. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 6. С. 99–128.
17. Prokhorov Yu. G. Lectures on complements on log surfaces // MSJ Memoirs. 2001. V. 10.
18. Reid M. Young person's guide to canonical singularities // Proc. Symp. in Pure Math. 1987. V. 46. P. 343–416.
19. Шокуров В. В. Трехмерные логперестройки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 1. С. 105–203.
20. Shokurov V. V. Complements on surfaces // J. of Math. Sci. 2000. V. 102. № 2. P. 3876–3932.