Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, О стандартной гипотезе для комплексных абелевых схем над гладкими проективными кривыми, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 3, 183–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im439>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 17:52:56

УДК 512.6

С. Г. Танкеев

О стандартной гипотезе для комплексных абелевых схем над гладкими проективными кривыми

К 80-летию Игоря Ростиславовича Шафаревича

Гипотеза Ходжа для абелевых многообразий сведена к вопросу о существовании алгебраического изоморфизма $H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})$ для всех $i \geq 2$ и для всех комплексных абелевых схем с главной поляризацией $\pi: X \rightarrow C$ относительной размерности d над гладкими проективными кривыми. Если канонически определенные циклы Ходжа $\alpha_i(X/C) \in H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})$ алгебраичны для всех натуральных чисел $i \geq 2$, то стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ об алгебраичности операторов Λ и $*$ верна для X . Доказана гипотеза $B(X)$ для абелевой схемы при условии, что $\text{End}(X_s) = \mathbb{Z}$ для некоторого геометрического слоя X_s неискл. размерности.

Библиография: 34 наименования.

Введение

Пусть X – гладкое проективное d -мерное многообразие над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Выбор $\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ определяет изоморфизм $\mathbb{Q}(1) \simeq \mathbb{Q}$. Обозначим через $\text{cl}_X(Z) \in H^{2i}(X, \mathbb{Q})$ класс алгебраического цикла Z коразмерности i на X .

ГИПОТЕЗА ХОДЖА ($\text{Hodge}^i(X)$ [13]). Для данного натурального числа i $\mathbb{Q}$ -пространство $H^{2i}(X, \mathbb{Q}) \cap H^{i,i}(X, \mathbb{C})$ порождается классами алгебраических циклов коразмерности i на X .

Если гипотеза $\text{Hodge}^i(X)$ верна для любого натурального числа i , то гипотеза Ходжа $\text{Hodge}(X)$ выполняется для X . По теореме Лефшеца $\text{Hodge}^1(X)$ верна.

В обзорах [27] и [10] дано введение в гипотезу Ходжа для многообразий Ферма и для абелевых многообразий.

Напомним, что линейное отображение $u^*: H^i(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^j(X, \mathbb{Q})$ называется *алгебраическим*, если оно является ограничением отображения $H^*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$, индуцированного элементом $\mathbb{Q}$ -векторного пространства, порожденного алгебраическими классами [14, п. 1.3.6]. Другими словами, u^* алгебраично, если существует такой алгебраический цикл Z с рациональными коэффициентами,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00058), при частичной поддержке Института высших научных исследований (Бюр-сюр-Иветт, декабрь 2000 г.) и Математического института Макса Планка (Бонн, февраль–май 2001 г.). Автор благодарит оба института за теплое гостеприимство и превосходные условия для работы.

что $u = \text{cl}_{X \times X}(Z)$ и

$$u^*: H^*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{pr}_1^*} H^*(X \times X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup u} H^*(X \times X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{pr}_2^*} H^*(X, \mathbb{Q}),$$

где pr_1, pr_2 – канонические проекции.

Пусть H – гладкое гиперплоское сечение X . Обозначим через L оператор Лефшеца на $H^*(X, \mathbb{Q})$, определенный формулой $Lx = \text{cl}_X(H) \cup x$. Согласно сильной теореме Лефшеца отображение

$$L^{d-i}: H^i(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2d-i}(X, \mathbb{Q})$$

является изоморфизмом для любого $i \leq d$. Пусть $\Lambda^{d-i}: H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathbb{Q})$ – изоморфизм, обратный к L^{d-i} .

СТАНДАРТНАЯ ГИПОТЕЗА ГРОТЕНДИКА ($B^i(X)$ [12]). Для данного натурального числа $i \leq d$ изоморфизм $\Lambda^{d-i}: H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(X, \mathbb{Q})$ является алгебраическим.

Если $B^i(X)$ верна для любого натурального числа i , то стандартная гипотеза $B(X)$ верна для X .

Гипотеза $B(X)$ влечет алгебраичность классических операторов c* и $^c\Lambda$ теории Ходжа для X , совпадение численной и гомологической эквивалентностей алгебраических циклов на X и алгебраичность компонент Кюннета класса алгебраического цикла на $X \times X$.

Свойство гипотезы $B(X)$ не зависит от поляризации L и стабильно относительно произведения, гладкого гиперплоского сечения и специализации. Оно выполняется для проективного пространства и других обычных рациональных многообразий, допускающих клеточные разбиения, для кривых, поверхностей и абелевых многообразий. В § 11 к этому списку добавлены некоторые комплексные абелевы схемы над гладкими проективными кривыми.

Пусть k – конечно порожденное расширение простого поля, и пусть X – гладкое проективное многообразие над k . Обозначим через k^{sep} максимальное сепарабельное алгебраическое расширение поля k .

ГИПОТЕЗА ТЭЙТА ($\text{Tate}^i(X)$ [32]). Для данного натурального числа i существует такое конечное расширение Галуа k' поля k , что $\mathbb{Q}_l$ -пространство

$$[H_{\text{et}}^{2i}(X \otimes_k k^{\text{sep}}, \mathbb{Q}_l(i))]^{\text{Gal}(k^{\text{sep}}/k')}$$

порождается классами k' -рациональных алгебраических циклов коразмерности i на $X \otimes_k k'$.

Гипотеза Тэйтa и соответствующая гипотеза о полюсах дзета-функций обсуждаются в [32], [33].

Значение гипотезы $B(X)$ основано на следующих важных замечаниях:

i) по теореме И. Андре [1, теорема 0.6.2] алгебраичность изоморфизма

$$\Lambda^{d+1-i}: H^{2d+2-i}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(X, \mathbb{Q})$$

для всех комплексных абелевых схем $\pi: X \rightarrow C$ относительной размерности d над гладкими проективными кривыми C и всех i влечет гипотезу Ходжа для всех абелевых многообразий;

ii) по теореме Польмана [25, теорема 4] гипотеза Ходжа для комплексного абелева многообразия X CM-типа эквивалентна гипотезам Тэйта [32] об алгебраических циклах на модели X_0 многообразия X над числовым полем и полюсах дзета-функции X_0 [25, теорема 5];

iii) по теореме Милна [22, теорема 7.1] гипотеза Ходжа для всех абелевых многообразий CM-типа над $\mathbb{C}$ влечет гипотезы Тэйта [32] об алгебраических циклах и полюсах дзета-функций для всех абелевых многообразий над конечными полями.

Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – комплексная абелева схема с главной поляризацией над гладкой проективной кривой, $j: X \times_C X \hookrightarrow X \times X$ – каноническое вложение, $\tau: X \times_C X \rightarrow C$ – структурный морфизм, $\Delta: X \hookrightarrow X \times X$ – диагональное вложение.

Обозначим через $\mathcal{P}$ расслоение Пуанкаре на $X \times_C \widehat{X} \simeq X \times_C X$, и пусть v – образ $\text{cl}_{X \times_C X}(\mathcal{P}) \in H^2(X \times_C X, \mathbb{Q})$ при каноническом краевом морфизме

$$H^2(X \times_C X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2\tau_*\mathbb{Q})$$

спектральной последовательности Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(C, R^q\tau_*\mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(X \times_C X, \mathbb{Q}).$$

Тогда $j_*v^i = j_*(v^{\cup i})$ – канонически определенный алгебраический класс, задающий алгебраический изоморфизм

$$[j_*v^i]^*: H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}).$$

Разовьем подход И. Андре и сведем гипотезу Ходжа для абелевых многообразий к вопросу о существовании алгебраического изоморфизма

$$H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})$$

для всех $i \geq 2$ и для всех комплексных абелевых схем $\pi: X \rightarrow C$ с главной поляризацией относительной размерности d над гладкими проективными кривыми.

В настоящей статье мы доказываем следующий технический результат.

Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – комплексная абелева схема с главной поляризацией относительной размерности d над гладкой проективной кривой C . Тогда для любого натурального числа $i \geq 2$ существует единственный цикл Ходжа

$$\alpha_i = \alpha_i(X/C) \in [H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})] \cap H^{i,i}(X \times X, \mathbb{C}),$$

характеризуемый следующим условием: $\alpha_i \cup \text{cl}_{X \times X}(X \times X_s)$ определяет изоморфизм

$$H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}),$$

совпадающий с алгебраическим изоморфизмом

$$[j_*v^i]^*: H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}).$$

Если α_i алгебраичен, то алгебраический класс

$$[\Delta_* \text{cl}_X(X_s)] \circ [j_* v^{i-2}] + j_* v^{i-1} + \alpha_i$$

индуцирует алгебраический изоморфизм $H^{2d+2-i}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathbb{Q})$ и гипотеза $B^i(X)$ верна (теорема 10.1).

Если канонически определенные циклы Ходжа $\alpha_i(X/C) \in H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})$ алгебраичны для всех натуральных чисел $i \geq 2$, то стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ об алгебраичности операторов Λ и $*$ верна для X .

Докажем гипотезу $B(X)$ для абелевой схемы при условии, что группа Ходжа общего геометрического слоя $X_{0\bar{\eta}}$ является простой алгебраической группой типа C_d (см. теорему 11.2). Это предположение выполняется для абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$, если $\text{End}(X_s) = \mathbb{Z}$ для некоторого геометрического слоя X_s и d – не-исключительная размерность (например, если d – нечетное число; см. следствия 11.4, 11.5, 11.3).

Автор благодарен Ю. И. Манину за интересные обсуждения проблемы.

§ 1. О некоторых гипотезах, касающихся алгебраических циклов

1.1. Пусть X – гладкое d -мерное проективное многообразие над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Для $j \geq 0$ имеем примитивное разложение Лефшеца

$$H^j(X, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{k \geq \max(0, j-d)} L^k P^{j-2k}(X),$$

где $P^i(X) = H^i(X, \mathbb{Q}) \cap \text{Ker } L^{d-i+1}$, $i \leq d$, – примитивная часть $H^i(X, \mathbb{Q})$ (см. [4, § 3, (3.4)]). В частности, любой элемент $x \in H^j(X, \mathbb{Q})$ можно записать единственным образом в виде

$$x = \sum_{k \geq \max(0, j-d)} L^k x_{j-2k},$$

где $x_{j-2k} \in P^{j-2k}(X)$ (см. [4, § 3, (3.3)]).

Пусть ${}^c\Lambda$ – двойственный оператор для L в классической теории Ходжа, и пусть c* – классический оператор “звездочка” [11, гл. 0, § 6], [4, § 3]. Для элемента $\varphi \in P^p(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ имеем

$${}^c\Lambda L^r \varphi = r(d - p - r + 1) L^{r-1} \varphi$$

(см. [4, § 3.1]). В частности,

$${}^c\Lambda x = \sum_{k \geq \max(0, j-d)} {}^c\Lambda L^k x_{j-2k} = \sum_{k \geq \max(0, j-d)} k(d - (j - 2k) - k + 1) L^{k-1} x_{j-2k}.$$

Следовательно,

$${}^c\Lambda x = \sum_{k \geq \max(1, j-d)} k(d - j + k + 1) L^{k-1} x_{j-2k}. \quad (1.1)$$

На пространстве форм типа (a, b) определим оператор Вейля C следующей формулой: $C\varphi = (\sqrt{-1})^{a-b}\varphi$. Если $\varphi \in P^p(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$, то

$${}^c * L^r \varphi = \begin{cases} (-1)^{p(p+1)/2} \frac{r!}{(d-p-r)!} L^{d-p-r} C\varphi & \text{для } r \leq d-p, \\ 0 & \text{для } r > d-p \end{cases}$$

(см. [4, § 3, (3.6)]). В частности,

$$\begin{aligned} {}^c * x &= \sum_{k \geq \max(0, j-d)} {}^c * L^k x_{j-2k} \\ &= \sum_{k \geq \max(0, j-d)} (-1)^{(j-2k)(j-2k+1)/2} \frac{k!}{(d-(j-2k)-k)!} L^{d-(j-2k)-k} C x_{j-2k}. \end{aligned}$$

Поэтому

$${}^c * x = \sum_{k \geq \max(0, j-d)} (-1)^{(j-2k)(j-2k+1)/2} \frac{k!}{(d-j+k)!} L^{d-j+k} C x_{j-2k}. \quad (1.2)$$

Разложения (1.1), (1.2) позволяют определить следующие абстрактные операторы:

$$\Lambda x = \sum_{k \geq \max(1, j-d)} L^{k-1} x_{j-2k}, \quad (1.3)$$

$$*x = \sum_{k \geq \max(0, j-d)} (-1)^{(j-2k)(j-2k+1)/2} L^{d-j+k} x_{j-2k}, \quad (1.4)$$

$$p^k x = \delta_{jk} x_m, \quad m = \max(0, j-d), \quad k = 0, \dots, 2d. \quad (1.5)$$

Формула для p^k исправляет формулу (1.4.2.4) из [14]. Все эти формулы обсуждаются в [14, § 1.4], [15, § 4]. Легко проверить, что $*^2 = 1$ и $\Lambda = *L*$ [14, предложение 1.4.3].

Для $i \leq d$ изоморфизм $\Lambda^{d-i}: H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(X, \mathbb{Q})$ является обратным к L^{d-i} и ${}^c \Lambda^{d-i}: L^{d-i} P^i(X) \rightarrow P^i(X)$ является обратным к произведению скаляра на L^{d-i} [14, предложение 1.4.3], поэтому можно определить инволюцию Лефшеца на $H^*(X, \mathbb{Q})$ [1, § 1.1]:

$$*_L x = \begin{cases} L^{d-j} x & \text{для } x \in H^j(X, \mathbb{Q}), \quad j \leq d, \\ \Lambda^{j-d} x & \text{для } x \in H^j(X, \mathbb{Q}), \quad j > d. \end{cases} \quad (1.6)$$

1.2. Хорошо известно, что стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$: оператор Λ алгебраичен – эквивалентна любой из следующих гипотез:

- 1) ${}^c B(X)$: оператор ${}^c \Lambda$ алгебраичен;
- 2) $*(X)$: оператор $*$ алгебраичен (см. [15, теорема 4-1]);
- 3) $\nu(X)$: для любого $i \leq \dim X - 1$ существует алгебраический изоморфизм

$$\nu^i: H^{2 \dim X - i}(X, \mathbb{Q}) \simeq H^i(X, \mathbb{Q})$$

(см. [14, теорема 2.9]).

(Приведем доказательство эквивалентности $B^i(X) \Leftrightarrow \nu^i(X)$. Рассмотрим алгебраический изоморфизм

$$u = \nu^i L^{d-i}: H^i(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(X, \mathbb{Q}).$$

Его характеристический полином $P(t)$ имеет рациональные коэффициенты. По теореме Кэли–Гамильтона $P(u) = 0$, следовательно, u^{-1} является линейной комбинацией $1, u, u^2, \dots$ с рациональными коэффициентами, поэтому u^{-1} алгебраичен, следовательно, изоморфизм

$$\Lambda^{d-i}: H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathbb{Q}),$$

обратный к $L^{d-i}: H^i(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^{2d-i}(X, \mathbb{Q})$ и равный $u^{-1}\nu^i$, алгебраичен.)

Пусть $p \leq d = \dim X$, и пусть $H_{\text{alg}}^{2p}(X, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^{2p}(X, \mathbb{Q})$ – $\mathbb{Q}$ -векторное пространство классов алгебраических циклов коразмерности p на X . Стандартная гипотеза $B(X)$ имеет следующую более слабую форму.

1.3. ГИПОТЕЗА $A(X, L)$. Для любого натурального числа $p \leq d/2$ инъекция

$$L^{d-2p}: H_{\text{alg}}^{2p}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{\text{alg}}^{2d-2p}(X, \mathbb{Q})$$

является изоморфизмом.

Гипотеза $A(X, L)$ эквивалентна любой из следующих гипотез:

- 1) $H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Q})$ стабильно относительно оператора $*$;
 - 2) $H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Q})$ стабильно относительно оператора Λ ;
 - 3) $H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Q})$ стабильно относительно оператора ${}^c \Lambda$
- (см. [14, предложение 2.1]).

Согласно классическому результату Д. Либермана гипотеза $A(X, L)$ также эквивалентна следующим гипотезам [19, теорема 1]:

- 4) $H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Q})$ стабильно относительно оператора ${}^c *$;
- 5) если $x \in H_{\text{alg}}^{2p}(X, \mathbb{Q})$ и

$$x = \sum_{k \geq \max(0, 2p-d)} L^k x_{2p-2k},$$

где $x_{2p-2k} \in P^{2p-2k}(X)$, то $x_{2p-2k} \in H_{\text{alg}}^{2p-2k}(X, \mathbb{Q})$;

6) $D(X)$: *численная эквивалентность алгебраических циклов на X совпадает с гомологической эквивалентностью.*

Последняя гипотеза не зависит от поляризации L , поэтому гипотеза $A(X, L)$ не зависит от поляризации, и мы обозначим ее просто $A(X)$.

Утверждаем, что

$$A(X) \Rightarrow (H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Q}) \text{ стабильно относительно инволюции Лефшеца } *_L). \quad (1.7)$$

Действительно, предположим, что гипотеза $A(X)$ верна. Если $x \in H_{\text{alg}}^{2p}(X, \mathbb{Q})$ и

$$x = \sum_{k \geq \max(0, 2p-d)} L^k x_{2p-2k},$$

где $x_{2p-2k} \in P^{2p-2k}(X)$, то $x_{2p-2k} \in H_{\text{alg}}^{2p-2k}(X, \mathbb{Q})$. Поскольку $H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Q})$ стабильно относительно операторов Λ и L , то видно, что $*_L x \in H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Q})$.

Напомним, что

$$B(X) \Rightarrow A(X) \quad (1.8)$$

(см. [14, следствие 2.2]) и

$$A(X \times X) \Rightarrow B(X) \quad (1.9)$$

(см. [15, теорема 4-1]),

$$B(X) \& B(Y) \Rightarrow B(X \times Y) \quad (1.10)$$

(см. [14, следствие 2.5]).

Более того,

$$B(X) \Leftrightarrow A(X \times X). \quad (1.11)$$

Действительно, (1.10) влечет соотношение $B(X) \Rightarrow B(X \times X)$; остается заметить, что в силу (1.8), (1.9) имеем $B(X \times X) \Rightarrow A(X \times X)$ и $A(X \times X) \Rightarrow B(X)$.

1.4. Напомним, что $B(X) \Rightarrow C(X)$, где $C(X)$: *компоненты Кюннета $\pi^i \otimes H^{2 \dim X - i}(X, \mathbb{Q}) \in H^i(X, \mathbb{Q})$ класса диагонали Δ , соответствующие проекциям $\pi^i: H^*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(X, \mathbb{Q})$, алгебраичны* (см. [14, лемма 2.4]).

С другой стороны, гипотеза $C(X)$ эквивалентна следующему утверждению: $H_{\text{alg}}^*(X \times X, \mathbb{Q})$ *стабильно относительно разложения Кюннета* (см. [14, предложение 2.6]).

1.5. ТЕОРЕМА. *Пусть X, Y – гладкие проективные многообразия над полем комплексных чисел. Если существует сюръективный морфизм $f: X \rightarrow Y$, то $A(X) \Rightarrow A(Y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что гипотеза $A(X)$ эквивалентна следующему утверждению: численная и гомологическая эквивалентности совпадают на множестве алгебраических циклов на X [19, теорема 1].

Предположим, что $\dim X > \dim Y$. Пусть X' – гладкое гиперплоское сечение X . Тогда $A(X) \Rightarrow A(X')$. Действительно, пусть $i: X' \hookrightarrow X$ – морфизм вложения

гладкого гиперплоского сечения; тогда $\Lambda' = i^* \Lambda^2 i_*$ [14, предложение 1.4.7, (vii)], и поэтому

$$\begin{aligned} \Lambda'(H_{\text{alg}}^*(X', \mathbb{Q})) &= i^* \Lambda^2 i_*(H_{\text{alg}}^*(X', \mathbb{Q})) \hookrightarrow \\ &\hookrightarrow i^* \Lambda^2(H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Q})) \hookrightarrow i^*(H_{\text{alg}}^*(X, \mathbb{Q})) \hookrightarrow H_{\text{alg}}^*(X', \mathbb{Q}), \end{aligned}$$

так как i_* , Λ , i^* преобразуют алгебраические классы в алгебраические классы. Поскольку Λ' преобразует алгебраические классы в алгебраические, верна гипотеза $A(X')$.

С другой стороны, $f|_{X'}: X' \rightarrow Y$ – сюръективный морфизм. Поэтому можно использовать индукцию и свести проблему к случаю $\dim X = \dim Y$. В последнем случае пусть Z_Y – алгебраический цикл коразмерности r на Y , численно эквивалентный нулю на Y . Тогда для любого алгебраического цикла Z_X коразмерности $d - r$ на X формула проекции влечет следующее соотношение:

$$\deg(f_*(f^*(\text{cl}_Y(Z_Y)) \cup \text{cl}_X(Z_X))) = \deg(\text{cl}_Y(Z_Y) \cup f_*(\text{cl}_X(Z_X))) = 0. \quad (1.12)$$

С другой стороны, $f^*(\text{cl}_Y(Z_Y)) \cup \text{cl}_X(Z_X) \in H^{2d}(X, \mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$, и поэтому $f_*: H^{2d}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2d}(Y, \mathbb{Q})$ является изоморфизмом. Следовательно, соотношение (1.12) влечет равенство $f^*(\text{cl}_Y(Z_Y)) \cup \text{cl}_X(Z_X) = 0$ для всех алгебраических циклов Z_X коразмерности $d - r$ на X . В частности, $f^*(\text{cl}_Y(Z_Y))$ численно эквивалентен нулю. Поскольку гипотеза $A(X)$ верна, то получаем равенство $f^*(\text{cl}_Y(Z_Y)) = 0$. С другой стороны, формула проекции показывает, что

$$f_* f^*(\text{cl}_Y(Z_Y)) = \deg f \cdot \text{cl}_Y(Z_Y)$$

(см. [9, § 2.3]). Следовательно, $\text{cl}_Y(Z_Y) = 0$ и Z_Y гомологически эквивалентен нулю.

Приведем другое доказательство: поскольку f^* инъективно [14, предложение 1.2.4], то имеем соотношение

$$f^*(\text{cl}_Y(Z_Y)) = 0 \Rightarrow \text{cl}_Y(Z_Y) = 0.$$

Поэтому численная и гомологическая эквивалентности алгебраических циклов совпадают на Y и гипотеза $A(Y)$ верна. Теорема доказана.

1.6. ТЕОРЕМА. Пусть X, Y – гладкие проективные многообразия над полем комплексных чисел. Если существует сюръективный морфизм $f: X \rightarrow Y$, то $B(X) \Rightarrow B(Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $f \times f: X \times X \rightarrow Y \times Y$ – сюръективный морфизм, теорема из п. 1.5 влечет соотношение $A(X \times X) \Rightarrow A(Y \times Y)$, и утверждение следует из соотношения (1.11). Теорема доказана.

1.7. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\text{Sym}^n(C)$ – симметрическая степень гладкой проективной кривой C над полем комплексных чисел. Тогда верна гипотеза $B(\text{Sym}^n(C))$.

Действительно, поскольку $B(X)$ тривиально выполняется для кривых, остается применить (1.10) и теорему из п. 1.6 к естественному сюръективному морфизму $C^n = C \times \cdots \times C \rightarrow \text{Sym}^n(C)$.

1.8. СЛЕДСТВИЕ (теорема Д. Либермана [19, теорема 3], [14, теорема 2A11]). *Гипотеза $B(X)$ верна для всех абелевых многообразий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой гладкой проективной кривой C рода g существует морфизм $\text{Sym}^g(C) \rightarrow \text{Pic}^0(C)$ конечной степени, определенный следующей формулой:

$$f(c_1 + c_2 + \cdots + c_g) = \mathcal{O}_C(c_1 + c_2 + \cdots + c_g - g \cdot e) \in \text{Pic}^0(C),$$

где e — фиксированная точка C [11, гл. II, § 7], [26, гл. V, § 1, предложение 2]. В силу следствия из п. 1.7 и теоремы из п. 1.6 гипотеза $B(X)$ верна для всех якобиевых многообразий. С другой стороны, любое абелево многообразие изоморфно фактору произведения якобиевых многообразий [26, гл. VII, § 2.13, следствие]. Поскольку гипотеза $B(X)$ стабильна относительно произведений (свойство (1.10)), остается применить теорему из п. 1.6.

1.9. Пусть X — гладкое проективное d -мерное многообразие над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Напомним, что существует канонический изоморфизм ориентации

$$\text{tr}: H^{2d}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q},$$

и по теореме двойственности Пуанкаре [14, 1.2.A] билинейная форма

$$\text{tr}(x \cup y): H^i(X, \mathbb{Q}) \times H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$$

является совершенной двойственностью (которая отождествляет $H^i(X, \mathbb{Q})$ с двойственным пространством к $H^{2d-i}(X, \mathbb{Q})$).

§ 2. О теореме И. Андре

2.1. ТЕОРЕМА (Андре [1, теорема 0.6.2]). *Любой цикл Ходжа ξ на абелевом многообразии J является мотивированным (motivé). Более точно, ξ является суммой циклов вида $\text{pr}_{J*}(\alpha \cup *_L \beta)$, где α и β — алгебраические циклы (с коэффициентами из $\mathbb{Q}$) на $J \times I \times Y_1 \times \cdots \times Y_n$, I — абелево многообразие, Y_i — тотальное пространство компактного пучка абелевых многообразий и pr_J — каноническая проекция на J .*

Напомним, что инволюция Лефшеца $*_L$ определена формулой (1.6). Если гипотеза $A(J \times I \times Y_1 \times \cdots \times Y_n)$ верна, то в силу (1.7) $*_L$ преобразует алгебраические классы в алгебраические и (в силу теоремы Андре) гипотеза Ходжа верна для абелева многообразия J . С другой стороны, в силу соотношения (1.8)

$$B(J \times I \times Y_1 \times \cdots \times Y_n) \Rightarrow A(J \times I \times Y_1 \times \cdots \times Y_n).$$

2.2. По свойству (1.10) гипотеза $B(X)$ стабильна относительно произведения; другими словами, гипотезы $B(X), B(Y)$ влекут $B(X \times Y)$. Следовательно, гипотеза Ходжа верна для абелева многообразия J , если стандартная гипотеза $B(X)$ выполняется для всех абелевых многообразий и для всех тотальных пространств компактных пучков абелевых многообразий. По классической теореме Д. Либермана (следствие из п. 1.8) гипотеза $B(X)$ верна для всех абелевых многообразий. Остается доказать $B(X)$ для тотального пространства компактного пучка $\pi: X \rightarrow C$ абелевых многообразий.

Заметим, что для некоторого разветвленного накрытия $C' \rightarrow C$ морфизм $X \times_C C' \rightarrow C'$ имеет сечение (другими словами, $X \times_C C' \rightarrow C'$ – абелева схема над C'). Канонический морфизм $X \times_C C' \rightarrow X$ конечен, и в силу теоремы из п. 1.6 можно полагать, что $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема.

Следовательно, приходим к следующему результату [1, с. 33, замечание 2].

2.3. СЛЕДСТВИЕ. *Если стандартная гипотеза Гротендика $B(X)$ верна для всех абелевых схем $\pi: X \rightarrow C$ над гладкими проективными кривыми C , то гипотеза Ходжа верна для всех абелевых многообразий.*

2.4. Пусть K – функциональное поле с полем констант k , и пусть A – абелево многообразие над K . По определению K/k -след A – это пара (B, τ) , состоящая из абелева многообразия B над k и K -гомоморфизма $\tau: B \rightarrow A$, обладающего следующим универсальным свойством: для любого абелева многообразия J над k и для любого K -гомоморфизма $\varphi: J \rightarrow A$ существует такой единственный k -гомоморфизм $\varphi_*: J \rightarrow B$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} J & \xrightarrow{\varphi} & A \\ & \searrow \varphi_* & \uparrow \tau \\ & & B \end{array}$$

коммутативна.

Хорошо известно, что K/k -след существует [16, гл. VIII, § 3, теорема 8] и τ инъективен. Напомним теорему Ленга–Нерона.

2.5. ТЕОРЕМА [17, гл. 6, теорема 2]. *Пусть K – функциональное поле с полем констант k , A – абелево многообразие над K и пара (B, τ) является K/k -следом A . Тогда группа $A(K)/\tau B(k)$ конечно порождена.*

2.6. ЛЕММА. *Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема над гладкой проективной кривой C , $J \times C \xrightarrow{\text{pf}_2} C$ – максимальная постоянная абелева подсхема схемы $\pi: X \rightarrow C$, и пусть $\pi': Y \rightarrow C$ – соответствующая абелева фактосхема. Тогда*

$$\begin{aligned} B(X) &\Leftrightarrow B(Y), \\ H^0(C, R^1\pi'_*\mathbb{Q}) &= 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме из п. 1.6 выполнено $B(X) \Rightarrow B(Y)$, потому что существует канонический сюръективный морфизм $X \rightarrow Y$. С другой стороны, теорема Пуанкаре о полной приводимости показывает, что существует изогения абелевых C -схем

$$Y \times J = Y \times_C (J \times C) \rightarrow X.$$

По теореме из п. 1.6 имеем $B(Y \times J) \Rightarrow B(X)$. В силу свойства (1.10) выполнено $B(Y) \& B(J) \Rightarrow B(Y \times J)$. Поскольку гипотеза $B(J)$ верна для всех абелевых многообразий (по теореме Либермана), то получаем соотношение $B(Y) \Rightarrow B(X)$.

Пусть $K = \mathbb{C}(C)$ – поле рациональных функций на кривой C . В рассматриваемой ситуации общий слой Y_η морфизма $\pi': Y \rightarrow C$ имеет тривиальный $K/\mathbb{C}$ -след. По теореме Ленга–Нерона из п. 2.5 $Y_\eta(K)$ – конечно порожденная группа.

Каноническое экспоненциальное отображение определяет точную последовательность пучков сечений

$$0 \rightarrow T_{\mathbb{Z}}(Y) \rightarrow [e^* \Omega_{Y/C}^1]^\wedge \rightarrow Y \rightarrow 0,$$

где $e: C \rightarrow Y$ – нулевое сечение схемы $\pi': Y \rightarrow C$ и

$$T_{\mathbb{Z}}(Y) = [R^1 \pi'_* \mathbb{Z}]^\wedge$$

– локальная система, двойственная к $R^1 \pi'_* \mathbb{Z}$. Мы приходим к точной последовательности когомологий

$$0 \rightarrow H^0(C, T_{\mathbb{Z}}(Y)) \rightarrow H^0(C, [e^* \Omega_{Y/C}^1]^\wedge) \rightarrow H^0(C, Y). \quad (2.1)$$

В силу [2, лемма 1 в добавлении к § 2] множество всех продолжений $e: C \rightarrow Y$ до C -морфизмов $C[\varepsilon]/(\varepsilon^2) \rightarrow Y$ изоморфно $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(e^* \Omega_{Y/C}^1, \mathcal{O}_C)$. Поэтому

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(e^* \Omega_{Y/C}^1, \mathcal{O}_C) = H^0(C, [e^* \Omega_{Y/C}^1]^\wedge)$$

– касательное пространство в нуле $\mathbb{C}$ -схемы $\text{Sect}_{Y/C}$ сечений Y над C и $\text{Sect}_{Y/C}(\mathbb{C}) = Y_\eta(K)$. В силу теоремы Ленга–Нерона $\dim H^0(C, [e^* \Omega_{Y/C}^1]^\wedge)$ равна размерности $K/\mathbb{C}$ -следа Y_η . Поэтому

$$H^0(C, [e^* \Omega_{Y/C}^1]^\wedge) = 0$$

и из точной последовательности (2.1) получаем

$$H^0(C, T_{\mathbb{Z}}(Y)) = 0. \quad (2.2)$$

Поскольку $T_{\mathbb{Z}}(Y) \otimes \mathbb{Q}$ – поляризуемая система $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа веса -1 , существует изоморфизм систем $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$R^1 \pi'_* \mathbb{Q} = [T_{\mathbb{Z}}(Y) \otimes \mathbb{Q}]^\wedge \simeq T_{\mathbb{Z}}(Y) \otimes \mathbb{Q}(-1)$$

(см. [6, § 4.2.3]). Поэтому (2.2) влечет соотношения

$$H^0(C, R^1 \pi'_* \mathbb{Q}) = H^0(C, T_{\mathbb{Z}}(Y) \otimes \mathbb{Q}(-1)) = H^0(C, T_{\mathbb{Z}}(Y)) \otimes \mathbb{Q}(-1) = 0.$$

Лемма доказана.

2.7. ЗАМЕЧАНИЕ. Можно считать, что абелева схема $\pi: X \rightarrow C$ удовлетворяет следующему дополнительному условию: для любого (разветвленного) накрытия $C' \rightarrow C$ абелева схема $X \times_C C' \rightarrow C'$ не содержит нетривиальных постоянных абелевых подсхем; в частности,

$$H^0(C, R^1 \pi_* \mathbb{Q}) = 0. \quad (2.3)$$

Хорошо известно, что для абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ существует такая изогения $X' \rightarrow X$ над C , что абелева схема $X' \rightarrow C$ имеет главную поляризацию. По теореме из п. 1.6 выполнено $B(X') \Rightarrow B(X)$. Поэтому можно также считать, что $\pi: X \rightarrow C$ имеет главную поляризацию.

§ 3. О когомологиях комплексных абелевых схем над гладкими проективными кривыми

3.1. Пусть C – гладкая проективная кривая над полем комплексных чисел и $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема относительной размерности d . Поскольку π – гладкий морфизм компактных кэлеровых многообразий, то спектральная последовательность Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q \pi_* \mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$ вырождается в члене E_2 , и поэтому

$$H^i(X, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{a+b=i} H^a(C, R^b \pi_* \mathbb{Q}) \quad (3.1)$$

(см. [5], [11, § 3.5]).

Пусть Θ_n – эндоморфизм X , индуцированный умножением на n в слоях $\pi: X \rightarrow C$, для любого целого числа $n > 1$. Поскольку $[\Theta_n]^*$ коммутирует с d_2 дифференциалами спектральной последовательности Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q \pi_* \mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$, то видно, что $H^a(C, R^b \pi_* \mathbb{Q})$ совпадает с собственным подпространством $H^{\langle a,b \rangle}(X, \mathbb{Q})$ оператора $[\Theta_n]^*$ в $H^r(X, \mathbb{Q})$, отвечающим собственному числу n^b [14, лемма 2A3]. Поэтому получаем хорошо известное разложение $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$H^i(X, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{a+b=i} H^{\langle a,b \rangle}(X, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{a+b=i} H^a(C, R^b \pi_* \mathbb{Q}). \quad (3.2)$$

Более того, по той же причине $\cup$ -произведение в $H^*(X, \mathbb{Q})$ имеет следующее свойство:

$$H^a(C, R^b \pi_* \mathbb{Q}) \cup H^p(C, R^q \pi_* \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^{a+p}(C, R^{b+q} \pi_* \mathbb{Q}). \quad (3.3)$$

Легко видеть что $H^a(C, R^b \pi_* \mathbb{Q}) = (0)$ для всех $a \geq 3$. Действительно, l -когомологическая размерность есть $\text{cd}_l(C_{\text{et}}) \leq 2 \dim C = 2$ [21, гл. VI, § 1, теорема 1.1], поэтому $H_{\text{et}}^a(C, R^b \pi_* \mathbb{Z}/l^n \mathbb{Z}) = (0)$ для $a \geq 3$, и остается использовать теорему сравнения для этальных когомологий и классических когомологий [21, гл. III, § 3, теорема 3.12]. Следовательно, получаем следующий вариант разложения (3.2):

$$H^i(X, \mathbb{Q}) = H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \oplus H^1(C, R^{i-1} \pi_* \mathbb{Q}) \oplus H^2(C, R^{i-2} \pi_* \mathbb{Q}). \quad (3.4)$$

3.2. Напомним что $R^p\pi_*\mathbb{Q}$ полностью определяется представлением монодромии $\pi_1(C, s) \rightarrow \mathrm{GL}(H^p(X_s, \mathbb{Q}))$ [11, гл. 3, § 5].

Пусть $\tau: X \times_C X \rightarrow C$ – структурный морфизм. Тогда $R^p\tau_*\mathbb{Q}$ полностью определяется соответствующим представлением монодромии

$$\pi_1(C, s) \rightarrow \mathrm{GL}(H^p(X_s \times X_s, \mathbb{Q})) = \mathrm{GL}\left(\bigoplus_{a+b=p} H^a(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^b(X_s, \mathbb{Q})\right),$$

где $\pi_1(C, s)$ действует на тензорном произведении $H^a(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^b(X_s, \mathbb{Q})$ через диагональное вложение $\pi_1(C, s) \hookrightarrow \pi_1(C, s) \times \pi_1(C, s) = \pi_1(C \times C, s \times s)$ [11, гл. 3, § 5] и разложение Кюннета

$$H^p(X_s \times X_s, \mathbb{Q}) = \bigoplus_{a+b=p} H^a(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^b(X_s, \mathbb{Q})$$

согласовано с представлениями монодромии. Поэтому имеем разложение Кюннета

$$R^p\tau_*\mathbb{Q} = \bigoplus_{a+b=p} R^a\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^b\pi_*\mathbb{Q}.$$

Поскольку $\tau: X \times_C X \rightarrow C$ – абелева схема над кривой C , то имеем разложения

$$\begin{aligned} H^p(X \times_C X, \mathbb{Q}) &= H^0(C, R^p\tau_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C, R^{p-1}\tau_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, R^{p-2}\tau_*\mathbb{Q}) \\ &= \left[\bigoplus_{a+b=p} H^0(C, R^a\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^b\pi_*\mathbb{Q}) \right] \oplus \\ &\quad \oplus \left[\bigoplus_{a+b=p-1} H^1(C, R^a\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^b\pi_*\mathbb{Q}) \right] \oplus \\ &\quad \oplus \left[\bigoplus_{a+b=p-2} H^2(C, R^a\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^b\pi_*\mathbb{Q}) \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} H^p(X \times X, \mathbb{Q}) &= \bigoplus_{a+b=p} [H^a(X, \mathbb{Q}) \otimes H^b(X, \mathbb{Q})] \\ &= \bigoplus_{a+b=p} [H^0(C, R^a\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C, R^{a-1}\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, R^{a-2}\pi_*\mathbb{Q})] \otimes \\ &\quad \otimes [H^0(C, R^b\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C, R^{b-1}\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, R^{b-2}\pi_*\mathbb{Q})]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Обозначим через $u_{pqrt} \in H^p(C, R^q\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^r(C, R^t\pi_*\mathbb{Q})$ соответствующую компоненту $u \in H^{2i}(X \times X, \mathbb{Q})$ в разложении (3.6). В частности,

$$u_{0i0i} \in H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}).$$

3.3. ЛЕММА. Если $u \in H_{\text{alg}}^{2i}(X \times X, \mathbb{Q})$, то $u_{0i0i} \in H_{\text{alg}}^{2i}(X \times X, \mathbb{Q})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем модификацию метода Д. Либермана [14, доказательство теоремы 2A11]. В силу (3.2) имеем

$$\begin{aligned} [\Theta_n \times \text{id}_X]^* u_{pqrt} &= n^q u_{pqrt}, \\ [\text{id}_X \times \Theta_n]^* u_{pqrt} &= n^t u_{pqrt}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для простоты предположим, что $i = 2$. Тогда

$$\begin{aligned} u &= u_{0004} + u_{0013} + u_{0022} + u_{0103} + u_{0112} + u_{0121} + u_{1003} + u_{1012} + u_{1021} \\ &\quad + u_{0202} + u_{0211} + u_{0220} + u_{1102} + u_{1111} + u_{1120} + u_{2002} + u_{2011} + u_{2020} \\ &\quad + u_{0301} + u_{0310} + u_{1201} + u_{1210} + u_{2101} + u_{2110} + u_{0400} + u_{1300} + u_{2200}. \end{aligned}$$

Применяя $[\Theta_n \times \text{id}_X]^* - [\text{id}_X \times \text{id}_X]^*$ к этому алгебраическому классу, получим соотношение

$$([\Theta_n \times \text{id}_X]^* - [\text{id}_X \times \text{id}_X]^*)(u) \in H_{\text{alg}}^{2i}(X \times X, \mathbb{Q}).$$

В силу (3.7) последнее соотношение имеет вид

$$\begin{aligned} &(n-1)u_{0103} + (n-1)u_{0112} + (n-1)u_{0121} + (n^2-1)u_{0202} \\ &\quad + (n^2-1)u_{0211} + (n^2-1)u_{0220} + (n-1)u_{1102} + (n-1)u_{1111} \\ &\quad + (n-1)u_{1120} + (n^3-1)u_{0301} + (n^3-1)u_{0310} + (n^2-1)u_{1201} \\ &\quad + (n^2-1)u_{1210} + (n-1)u_{2101} + (n-1)u_{2110} + (n^4-1)u_{0400} \\ &\quad + (n^3-1)u_{1300} + (n^2-1)u_{2200} \in H_{\text{alg}}^{2i}(X \times X, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &u_{0103} + u_{0112} + u_{0121} + (n+1)u_{0202} + (n+1)u_{0211} + (n+1)u_{0220} + u_{1102} \\ &\quad + u_{1111} + u_{1120} + (n^2+n+1)u_{0301} + (n^2+n+1)u_{0310} + (n+1)u_{1201} \\ &\quad + (n+1)u_{1210} + u_{2101} + u_{2110} + (n^3+n^2+n+1)u_{0400} \\ &\quad + (n^2+n+1)u_{1300} + (n+1)u_{2200} \in H_{\text{alg}}^{2i}(X \times X, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Применив $[\text{id}_X \times \Theta_n]^* - [\text{id}_X \times \text{id}_X]^*$ к последнему алгебраическому классу, получим соотношение

$$\begin{aligned} &(n^3-1)u_{0103} + (n^2-1)u_{0112} + (n-1)u_{0121} + (n+1)(n^2-1)u_{0202} \\ &\quad + (n+1)(n-1)u_{0211} + (n^2-1)u_{1102} + (n-1)u_{1111} \\ &\quad + (n^2+n+1)(n-1)u_{0301} + (n+1)(n-1)u_{1201} \\ &\quad + (n-1)u_{2101} \in H_{\text{alg}}^{2i}(X \times X, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &(n^2+n+1)u_{0103} + (n+1)u_{0112} + u_{0121} \\ &\quad + (n+1)^2u_{0202} + (n+1)u_{0211} + (n+1)u_{1102} + u_{1111} \\ &\quad + (n^2+n+1)u_{0301} + (n+1)u_{1201} + u_{2101} \in H_{\text{alg}}^{2i}(X \times X, \mathbb{Q}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Применив $[\Theta_n \times \text{id}_X]^* - [\text{id}_X \times \text{id}_X]^*$ к этому алгебраическому классу, получим соотношение

$$\begin{aligned} & (n^2 + n + 1)(n - 1)u_{0103} + (n + 1)(n - 1)u_{0112} + (n - 1)u_{0121} \\ & + (n + 1)^2(n^2 - 1)u_{0202} + (n + 1)(n^2 - 1)u_{0211} \\ & + (n + 1)(n - 1)u_{1102} + (n - 1)u_{1111} + (n^2 + n + 1)(n^3 - 1)u_{0301} \\ & + (n + 1)(n^2 - 1)u_{1201} + (n - 1)u_{2101} \in H_{\text{alg}}^{2i}(X \times X, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & (n^2 + n + 1)u_{0103} + (n + 1)u_{0112} + u_{0121} \\ & + (n + 1)^3u_{0202} + (n + 1)^2u_{0211} + (n + 1)u_{1102} + u_{1111} \\ & + (n^2 + n + 1)^2u_{0301} + (n + 1)^2u_{1201} + u_{2101} \in H_{\text{alg}}^{2i}(X \times X, \mathbb{Q}). \quad (3.9) \end{aligned}$$

Вычитая (3.8) из (3.9), получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & (n + 1)^2nu_{0202} + (n + 1)nu_{0211} + (n^2 + n + 1)n(n + 1)u_{0301} \\ & + (n + 1)nu_{1201} \in H_{\text{alg}}^{2i}(X \times X, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(n + 1)u_{0202} + u_{0211} + (n^2 + n + 1)u_{0301} + u_{1201} \in H_{\text{alg}}^{2i}(X \times X, \mathbb{Q}). \quad (3.10)$$

Применив $[\text{id}_X \times \Theta_n]^* - [\text{id}_X \times \text{id}_X]^*$ к последнему алгебраическому классу, получим соотношение

$$\begin{aligned} & (n + 1)(n^2 - 1)u_{0202} + (n - 1)u_{0211} \\ & + (n^2 + n + 1)(n - 1)u_{0301} + (n - 1)u_{1201} \in H_{\text{alg}}^{2i}(X \times X, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Поэтому

$$(n + 1)^2u_{0202} + u_{0211} + (n^2 + n + 1)u_{0301} + u_{1201} \in H_{\text{alg}}^{2i}(X \times X, \mathbb{Q}). \quad (3.11)$$

Вычитая (3.10) из (3.11), приходим к соотношению $(n + 1)nu_{0202} \in H_{\text{alg}}^{2i}(X \times X, \mathbb{Q})$. В частности, $u_{0i0i} \in H_{\text{alg}}^{2i}(X \times X, \mathbb{Q})$. Лемма доказана.

§ 4. Расслоения Пуанкаре

4.1. Пусть $\pi: X \rightarrow C$ — абелева схема относительной размерности d над гладкой проективной кривой C , и пусть $s \in C$. Напомним, что существует расслоение Пуанкаре $\mathcal{P}_s$ на $X_s \times \widehat{X}_s$, однозначно определенное (с точностью до изоморфизма) следующими свойствами:

- i) $\mathcal{P}_s|_{X_s \times \{L_s\}} \xrightarrow{\sim} L_s$ для любого элемента $L_s \in \widehat{X}_s$;
- ii) $\mathcal{P}_s|_{\{0\} \times \widehat{X}_s}$ тривиально [18, гл. 2, § 5].

Утверждаем, что $\mathrm{cl}_{X_s \times \widehat{X}_s}(\mathcal{P}_s)$ имеет тип Кюннета $(1, 1)$. Действительно, по формуле Кюннета имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s) \in H^2(X_s \times X_s, \mathbb{Q}) &= [H^2(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_s, \mathbb{Q})] \\ &\oplus [H^0(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^2(X_s, \mathbb{Q})] \\ &\oplus [H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})]. \end{aligned}$$

С другой стороны, по свойствам i), ii) имеем

$$\mathcal{P}_s|_{X_s \times \{0\}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_s}, \quad \mathcal{P}_s|_{\{0\} \times X_s} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_s}.$$

Поэтому $(2, 0)$ - и $(0, 2)$ -компоненты разложения Кюннета $\mathrm{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s)$ тривиальны.

4.2. Пусть $e: C \rightarrow X$ – нулевое сечение и $\hat{\pi}: \widehat{X} = \mathrm{Pic}^0(X/C) \rightarrow C$ – двойственная абелева схема с нулевым сечением $\hat{e}$. Для любого обратимого пучка $\mathcal{L}$ на X жесткость $\mathcal{L}$ – это изоморфизм $\theta_C \xrightarrow{\sim} e^*\mathcal{L}$. По определению $\mathrm{Pic}^0(X/C)$ для любой C -схемы T имеем $\mathrm{Hom}_C(T, \mathrm{Pic}^0(X/C)) = \{ \text{классы изоморфизма обратимых пучков } \mathcal{L} \text{ на } X \times_C T \text{ с такой жесткостью вдоль } e_T = e \times_C T, \text{ что } \forall t \in T \text{ } \mathcal{L}|_{X \times_C t} \text{ алгебраически эквивалентно нулю на } X \times_C t \}$ [8, гл. I, § 1, определение 1.4].

Тавтологический обратимый пучок $\mathcal{P}$ на $X \times_C \widehat{X}$, отвечающий тождественному морфизму $\mathrm{id}_{\widehat{X}}: \widehat{X} \rightarrow \widehat{X} = \mathrm{Pic}^0(X/C)$, называется *расслоением Пуанкаре*. По определению $\mathcal{P}$ обладает жесткостью вдоль $e \times_C \widehat{X}$ и $\forall t \in \widehat{X}$ $\mathcal{P}|_{X \times_C t}$ представляет элемент $\mathrm{Pic}^0(X \times_C t)$, задаваемый точкой t при отождествлении $\mathrm{Pic}^0(X \times_C t) = \widehat{X}_{\hat{\pi}(t)}$.

Легко видеть, что $\mathcal{P}$ индуцирует расслоение Пуанкаре $\mathcal{P}_s$ на $X_s \times \widehat{X}_s$ через каноническое вложение $X_s \times \widehat{X}_s \hookrightarrow X \times_C \widehat{X}$. Действительно, имеем каноническое вложение C -схем

$$\widehat{X}_s \hookrightarrow \widehat{X}.$$

Оно определено обратимым пучком $\mathcal{L} = \mathcal{P}|_{X \times_C \widehat{X}_s}$ на $X \times_C \widehat{X}_s = X_s \times \widehat{X}_s$, и для любого $t \in \widehat{X}_s$

$$\mathcal{L}|_{X_s \times_C t} = \mathcal{L}|_{X_s \times t} = \mathcal{P}|_{X \times_C t}$$

представляет элемент $\mathrm{Pic}^0(X_s \times t) = \mathrm{Pic}^0(X_s)$, задаваемый элементом t при отождествлении $\mathrm{Pic}^0(X_s) = \widehat{X}_s$. Поэтому $\mathcal{L} = \mathcal{P}_s$.

4.3. По замечанию из п. 2.7 можно считать, что существует главная поляризация

$$\lambda: X \xrightarrow{\sim} \widehat{X},$$

поэтому можно рассматривать λ как отождествление $X = \widehat{X}$.

§ 5. Соответствия и алгебраические изоморфизмы рациональных структур Ходжа

5.1. Напомним некоторые основные свойства соответствий [14, § 1.3], [20].

Пусть X, Y – гладкие проективные многообразия над полем комплексных чисел. В силу формулы Кюннета и двойственности Пуанкаре имеются канонические $\mathbb{Q}$ -линейные изоморфизмы

$$\begin{aligned} H^*(X \times Y, \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\sim} H^*(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(Y, \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{\sim} H_*(X, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} H^*(Y, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H^*(X, \mathbb{Q}), H^*(Y, \mathbb{Q})). \end{aligned}$$

Более точно, элемент $u = a \otimes b \in H^*(X \times Y, \mathbb{Q})$ отвечает $\mathbb{Q}$ -линейному отображению $u^*: H^*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(Y, \mathbb{Q})$, задаваемому формулой $u^*(c) = \deg(c \cup a) \cdot b$, где $\deg: H^*(X) \rightarrow \mathbb{Q}$ определяется следующей формулой:

$$\deg = \begin{cases} \text{изоморфизм ориентации } \text{tr}: H^{2 \dim X}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}, \\ 0 \text{ на } H^i(X, \mathbb{Q}) \text{ для } i < 2 \dim X. \end{cases}$$

Произвольный элемент $u \in H^*(X \times Y, \mathbb{Q})$ отвечает композиции

$$u^*: H^*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{pr}_1^*} H^*(X \times Y, \mathbb{Q}) \xrightarrow{w \rightarrow w \cup u} H^*(X \times Y, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{pr}_2^*} H^*(Y, \mathbb{Q}).$$

5.2. Линейное отображение $u^*: H^i(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^j(Y, \mathbb{Q})$ называется *алгебраическим*, если оно является ограничением отображения $u^*: H^*(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(Y, \mathbb{Q})$, индуцированного алгебраическим классом $u \in H_{\text{alg}}^*(X \times Y, \mathbb{Q})$.

Пусть $V \hookrightarrow H^i(X, \mathbb{Q})$ и $W \hookrightarrow H^j(Y, \mathbb{Q})$ – $\mathbb{Q}$ -структуры Ходжа. Назовем линейное отображение $V \rightarrow W$ *алгебраическим*, если оно является ограничением отображения $u^*: H^i(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^j(Y, \mathbb{Q})$, индуцированного алгебраическим классом $u \in H_{\text{alg}}^*(X \times Y, \mathbb{Q})$.

5.3. Композиция линейных отображений определяет композицию соответствий: если $u \in H^*(X \times Y, \mathbb{Q})$ и $v \in H^*(Y \times Z, \mathbb{Q})$, то

$$v \circ u = \text{pr}_{13*}(u \otimes 1_Z \cup 1_X \otimes v) \in H^*(X \times Z, \mathbb{Q}),$$

где $\text{pr}_{13}: X \times Y \times Z \rightarrow X \times Z$ – проекция. Если $X = Y = Z$, то композиция $v \circ u$ алгебраических соответствий является алгебраическим соответствием [14, предложение 1.3.7]. Оно определяется алгебраическим классом

$$v \circ u = \text{pr}_{13*}(u \otimes 1_X \cup 1_X \otimes v) \in H^*(X \times X, \mathbb{Q}).$$

§ 6. Основная конструкция

6.1. Пусть $\mu_s: X_s \times X_s \rightarrow X_s$ – групповой закон для X_s (морфизм суммирования). Напомним некоторые результаты С. Л. Клеймана и Д. Либермана.

6.2. ЛЕММА [14, лемма 2A12]. Пусть X_s – абелево многообразие, Y_s – произвольное гладкое проективное многообразие и $u \in H^2(X_s \times Y_s, \mathbb{Q})$ – элемент кюннетовского типа $(1, 1)$. Тогда соответствие

$$\exp(u) = \sum u^i / i! : H^*(X_s, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(Y_s, \mathbb{Q})$$

преобразует произведение Понтрягина $\alpha \vee \beta = \mu_{s*}(\alpha \otimes \beta)$ в $\cup$ -произведение.

6.3. ЛЕММА [14, замечание 2A13]. Пусть X_s – абелево многообразие, $\widehat{X}_s$ – двойственное абелево многообразие и $u \in H^2(X_s \times \widehat{X}_s, \mathbb{Q})$ – $(1, 1)$ -кюннетовская компонента дивизора Пуанкаре. Тогда соответствие

$$\exp(u) = \sum u^i / i! : H^*(X_s, \mathbb{Q}) \rightarrow H^*(\widehat{X}_s, \mathbb{Q})$$

является алгебраическим изоморфизмом алгебры Понтрягина $H^*(X_s, \mathbb{Q})$ с алгеброй, определенной $\cup$ -произведением на $H^*(\widehat{X}_s, \mathbb{Q})$.

6.4. В рассматриваемой ситуации $X_s = \widehat{X}_s$ и $\text{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s)$ имеет тип Кюннета $(1, 1)$, поэтому (по лемме из п. 6.3) для любого натурального числа i отображение

$$H^{2d-i}(X_s, \mathbb{Q}) \rightarrow H^i(X_s, \mathbb{Q}),$$

определенное классом

$$[\text{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s)]^{\cup i} = \text{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s) \cup \dots \cup \text{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s) \in H^{2i}(X_s \times X_s, \mathbb{Q}),$$

является алгебраическим изоморфизмом. Более точно, этот изоморфизм является композицией следующих изоморфизмов:

$$\begin{aligned} H^{2d-i}(X_s, \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\text{pr}_{1s}^*} H^{2d-i}(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup [\text{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s)]^{\cup i}} \\ &\xrightarrow{\quad} H^{2d}(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^i(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{pr}_{2s*}} H^i(X_s, \mathbb{Q}), \end{aligned} \quad (6.1)$$

где $\text{pr}_{ks}: X_s \times X_s \rightarrow X_s$ – каноническая проекция.

6.5. Пусть $i_s: X_s \hookrightarrow X$ – каноническое вложение. Тогда мы имеем канонические вложения

$$X_s \times X_s \xrightarrow{i_s \times i_s} X \times_C X \xrightarrow{j} X \times X.$$

По теореме Делиня [6, 4.1.2] канонический морфизм ограничения

$$H^2(X \times_C X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X_s \times X_s, \mathbb{Q})$$

является композицией канонического сюръективного краевого морфизма (рациональных структур Ходжа) $H^2(X \times_C X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2\tau_*\mathbb{Q})$, ассоциированного со спектральной последовательностью Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q\tau_*\mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(X \times_C X, \mathbb{Q})$, и канонических отображений

$$H^0(C, R^2\tau_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_s \times X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C,s)} \hookrightarrow H^2(X_s \times X_s, \mathbb{Q}).$$

Очевидно, что $\text{cl}_{X \times_C X}(\mathcal{P}) \in H^2(X \times_C X, \mathbb{Q})$ отображается в элемент $v_s = \text{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s) \in H^2(X_s \times X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C,s)}$ типа Кюннета (1,1), так как

$$[i_s \times i_s]^* \text{cl}_{X \times_C X}(\mathcal{P}) = \text{cl}_{X_s \times X_s}([i_s \times i_s]^*(\mathcal{P}))$$

(см. [14, 1.2.C]) и $[i_s \times i_s]^*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_s$. Поэтому

$$\begin{aligned} \text{cl}_{X \times_C X}(\mathcal{P}) \in H^0(C, R^1\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^1\pi_*\mathbb{Q}) \oplus \\ \oplus \left[\bigoplus_{a+b=1} H^1(C, R^a\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^b\pi_*\mathbb{Q}) \right] \oplus H^2(C, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

В силу теоремы Лефшеца $H^0(C, R^2\tau_*\mathbb{Q})$ -компонента v алгебраического класса $\text{cl}_{X \times_C X}(\mathcal{P})$ является алгебраической.

С другой стороны, $v \in H^0(C, R^1\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^1\pi_*\mathbb{Q})$.

6.6. Утверждаем, что алгебраический класс

$$v^i = v \cup v \cup \dots \cup v \in H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^i\pi_*\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^{2i}(X \times_C X, \mathbb{Q})$$

определяет канонический изоморфизм локальных систем

$$\nu^i: R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} R^i\pi_*\mathbb{Q}$$

над C . Действительно, пусть ν^i – композиция

$$R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{p_1^*} R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^0\pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\cup v^i} R^{2d}\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^i\pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{p_{2*}} R^i\pi_*\mathbb{Q},$$

где p_1, p_2 – канонические проекции $X \times_C X \rightarrow X$. В терминах представлений монодромии $\pi_1(C, s)$ имеем

$$v^i \in H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^i\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} [H^i(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^i(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C,s)},$$

и ν^i – композиция изоморфизмов $\pi_1(C, s)$ -модулей

$$\begin{aligned} H^{2d-i}(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{p_{1s}^*} H^{2d-i}(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X_s, \mathbb{Q}) \\ \xrightarrow{\cup v_s^i} H^{2d}(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^i(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{p_{2s*}} H^i(X_s, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Эти последовательности индуцируют следующую последовательность изоморфизмов:

$$\begin{aligned} H^k(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) &\xrightarrow{p_1^*} H^k(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^0\pi_*\mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{\cup v^i} H^k(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^i\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{p_{2*}} H^k(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Очевидно, что $p_k = \mathrm{pr}_k \circ j$, поэтому нашу последовательность можно переписать в виде

$$\begin{aligned} H^k(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) &\xrightarrow{j^* \mathrm{pr}_1^*} H^k(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^0\pi_*\mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{\cup v^i} H^k(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^i\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{pr}_{2*} j^*} H^k(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Пусть $x \in H^k(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q})$. Тогда из формулы проекции следует соотношение

$$\mathrm{pr}_{2*} j_*(j^* \mathrm{pr}_1^*(x) \cup v^i) = \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1^*(x) \cup j_* v^i).$$

В частности, алгебраический класс $j_* v^i \in H^{2i+2}(X \times X, \mathbb{Q})$ определяет алгебраический изоморфизм

$$H^k(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{[j_* v^i]^*} H^k(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}). \quad (6.2)$$

6.7. Рассмотрим канонические отображения

$$\begin{aligned} \alpha: H^1(\mathrm{Alb}(X), \mathbb{Q}) &\rightarrow H^1(X, \mathbb{Q}), \\ \beta: H^{2d+1}(X, \mathbb{Q}) &\rightarrow H^1(\mathrm{Pic}^0(X), \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

из [14, 2A1], где β индуцируется дивизором Пуанкаре D на $X \times \mathrm{Pic}^0(X)$. Известно, что α – инъекция и β – сюръекция [14, теорема 2A9(1)]. Над полем характеристики нуль оба отображения являются изоморфизмами. Более того, существует дивизор E на $X \times X$, который индуцирует скалярное кратное отображение $\Lambda^d: H^{2d+1}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(X, \mathbb{Q})$, обратное к L^d [14, теорема 2A9(5)]. В частности, Λ^d алгебраичен, поэтому гипотеза $B^1(X)$ верна.

Другое доказательство гипотезы $B^1(X)$: в силу леммы из п. 2.6 можно считать, что $H^0(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) = 0$; в этом случае

$$\begin{aligned} H^1(X, \mathbb{Q}) &= H^1(C, \mathbb{Q}), \\ H^{2d+1}(X, \mathbb{Q}) &= H^1(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, R^{2d-1}\pi_*\mathbb{Q}) = H^1(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q}), \end{aligned}$$

потому что $R^{2d}\pi_*\mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$. В силу соотношения (6.2) алгебраический класс $j_* 1 \in H^2(X \times X, \mathbb{Q})$ определяет алгебраический изоморфизм

$$H^1(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^1(C, \mathbb{Q}),$$

и гипотеза $B^1(X)$ верна. Очевидно, что для образующей γ 1-мерного пространства $H^0(X, \mathbb{Q}) = H_{\text{alg}}^0(X, \mathbb{Q})$ каноническая последовательность

$$\begin{aligned} H^{2d+2}(X, \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\text{pr}_1^*} H^{2d+2}(X, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X, \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{\cup \gamma} H^{2d+2}(X, \mathbb{Q}) \otimes H^0(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{pr}_{2*}} H^0(X, \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

определяет алгебраический изоморфизм

$$H^{2d+2}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(X, \mathbb{Q}).$$

В частности, гипотеза $B^0(X)$ верна.

Следовательно, можно считать, что $i \geq 2$.

В этом случае алгебраические изоморфизмы (6.2) определяют следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccccc} H^0(C, R^{2d+2-i}\pi_*\mathbb{Q}) & \oplus & H^1(C, R^{2d+1-i}\pi_*\mathbb{Q}) & \oplus & H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \\ \simeq \downarrow [j_*v^{i-2}]^* & & \simeq \downarrow [j_*v^{i-1}]^* & & \simeq \downarrow [j_*v^i]^* \\ H^0(C, R^{i-2}\pi_*\mathbb{Q}) & \oplus & H^1(C, R^{i-1}\pi_*\mathbb{Q}) & \oplus & H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \end{array} \quad (6.3)$$

где все вертикальные стрелки являются алгебраическими изоморфизмами.

Сравнивая строки диаграммы с разложениями

$$\begin{aligned} H^{2d+2-i}(X, \mathbb{Q}) &= H^0(C, R^{2d+2-i}\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C, R^{2d+1-i}\pi_*\mathbb{Q}) \oplus \\ &\quad \oplus H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}), \\ H^i(X, \mathbb{Q}) &= H^2(C, R^{i-2}\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C, R^{i-1}\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}), \end{aligned}$$

видим, что морфизм $[j_*v^{i-1}]^*$ дает подходящее отображение, но $[j_*v^{i-2}]^*$ и $[j_*v^i]^*$ нуждаются в коррекции, чтобы получить алгебраический изоморфизм $H^{2d+2-i}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathbb{Q})$.

§ 7. Коррекция морфизма $[j_*v^{i-2}]^*$

7.1. Пусть H – гиперплоское сечение X , и пусть $h \in H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ – компонента

$$\text{cl}_X(H) \in H^2(X, \mathbb{Q}) = H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, \mathbb{Q}).$$

По теореме Лефшеца видно, что h – алгебраический класс, индуцирующий поляризацию на каждом слое X_s . Согласно сильной теореме Лефшеца каноническое отображение

$$H^i(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup h^{d-i}} H^{2d-i}(X_s, \mathbb{Q})$$

является изоморфизмом $\pi_1(C, s)$ -модулей ($i \leq d$). Поэтому h^{d-i} определяет изоморфизм

$$\begin{aligned} H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) &= H^i(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)} \\ &\xrightarrow{\cup h^{d-i}} H^{2d-i}(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)} = H^0(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}), \end{aligned}$$

и этот изоморфизм индуцируется алгебраическим классом Δ_*h^{d-i} , где $\Delta: X \hookrightarrow X \times X$ – диагональное вложение [14, предложение 1.3.5]. Имеем равенство

$$\dim H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) = \dim H^0(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}). \quad (7.1)$$

7.2. Имеется каноническое невырожденное спаривание $\pi_1(C, s)$ -модулей

$$H^{2d-i}(X_s, \mathbb{Q}) \times H^i(X_s, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2d}(X_s, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\widetilde{\text{tr}_{X_s}}} \mathbb{Q}.$$

Оно влечет отождествление $\pi_1(C, s)$ -модулей

$$H^i(X_s, \mathbb{Q})^\wedge = H^{2d-i}(X_s, \mathbb{Q}),$$

поэтому мы имеем отождествление

$$[H^i(X_s, \mathbb{Q})^\wedge]^{\pi_1(C, s)} = H^{2d-i}(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)}.$$

В частности,

$$\begin{aligned} H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})^\wedge &= [H^i(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)}]^\wedge = [H^i(X_s, \mathbb{Q})^\wedge]^{\pi_1(C, s)} \\ &= H^{2d-i}(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)} = H^0(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}), \end{aligned}$$

и каноническое спаривание

$$H^0(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}) \times H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^{2d} \pi_* \mathbb{Q})$$

невырожденно: для любого элемента $0 \neq y \in H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})$ существует такой элемент $x \in H^0(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q})$, что

$$0 \neq x \cup y \in H^0(C, R^{2d} \pi_* \mathbb{Q}).$$

Пусть c – образ $\text{cl}_X(e(C)) \in H^{2d}(X, \mathbb{Q})$ относительно канонического морфизма

$$H^{2d}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^{2d} \pi_* \mathbb{Q});$$

имеем

$$\text{cl}_X(e(C)) = c + c_1 + c_2,$$

где $c_j \in H^j(C, R^{2d-j} \pi_* \mathbb{Q})$, $j = 1, 2$. Поскольку $\text{cl}_X(X_s) \in H^2(C, \mathbb{Q})$ – образующая 1-мерного пространства $H^2(C, \mathbb{Q})$, то видно, что

$$\text{cl}_X(X_s) \cup c_j = 0, \quad j = 1, 2,$$

и

$$\text{cl}_X(X_s) \cup c = \text{cl}_X(X_s) \cup \text{cl}_X(e(C)) = \text{cl}_X(X_s \cap e(C)) = \text{cl}_X(e(s)) \neq 0.$$

В частности, $0 \neq \text{cl}_X(X_s) \cup H^0(C, R^{2d} \pi_* \mathbb{Q})$. Поскольку последнее пространство содержится в 1-мерном пространстве $H^2(C, R^{2d} \pi_* \mathbb{Q})$, то мы получаем равенства

$$H^2(C, R^{2d} \pi_* \mathbb{Q}) = \text{cl}_X(X_s) \cup H^0(C, R^{2d} \pi_* \mathbb{Q}) = H^2(C, \mathbb{Q}) \cup H^0(C, R^{2d} \pi_* \mathbb{Q}).$$

Следовательно, канонический морфизм

$$H^0(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup \text{cl}_X(X_s)} H^2(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q})$$

биективен и

$$0 \neq \text{cl}_X(X_s) \cup x \cup y \in H^2(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q}).$$

В частности,

$$0 \neq \text{cl}_X(X_s) \cup y \in H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})$$

для любого $0 \neq y \in H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})$; поэтому канонический морфизм

$$H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup \text{cl}_X(X_s)} H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \quad (7.2)$$

инъективен.

Заметим, что элементы $H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})$ аннулируют ($\cup$ -произведением) компоненты $H^1(C, R^{2d-i-1}\pi_*\mathbb{Q})$ и $H^2(C, R^{2d-i-2}\pi_*\mathbb{Q})$ пространства

$$H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) = H^0(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^1(C, R^{2d-i-1}\pi_*\mathbb{Q}) \oplus H^2(C, R^{2d-i-2}\pi_*\mathbb{Q}),$$

поэтому невырожденность канонического спаривания

$$H^{i+2}(X, \mathbb{Q}) \times H^{2d-i}(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{2d+2}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{tr}} \mathbb{Q}$$

(теорема двойственности Пуанкаре) влечет невырожденность канонического спаривания

$$H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \times H^0(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \rightarrow H^2(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{tr}} \mathbb{Q}.$$

В частности,

$$H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})^\wedge \xrightarrow{\sim} H^0(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}).$$

Поэтому в силу равенства (7.1)

$$\begin{aligned} \dim H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) &= \dim H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})^\wedge = \dim H^0(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \\ &= \dim H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}), \end{aligned}$$

и инъективный морфизм (7.2) биективен:

$$H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup \text{cl}_X(X_s)} H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}). \quad (7.3)$$

7.3. В рассматриваемой ситуации

$$H^2(C, R^{i-2}\pi_*\mathbb{Q}) = \text{cl}_X(X_s) \cup H^0(C, R^{i-2}\pi_*\mathbb{Q}) = H^2(C, \mathbb{Q}) \cup H^0(C, R^{i-2}\pi_*\mathbb{Q})$$

и изоморфизм

$$H^0(C, R^{i-2}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup \text{cl}_X(X_s)} H^2(C, R^{i-2}\pi_*\mathbb{Q})$$

индуцируется алгебраическим классом $\Delta_* \text{cl}_X(X_s)$, где $\Delta: X \hookrightarrow X \times X$ – диагональное вложение [14, предложение 1.3.5].

Композиция алгебраических изоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} \varphi_i: H^0(C, R^{2d+2-i}\pi_*\mathbb{Q}) & \xrightarrow{[j_*v^{i-2}]^*} & H^0(C, R^{i-2}\pi_*\mathbb{Q}) \\ & & \xrightarrow{[\Delta_* \text{cl}_X(X_s)]^*} \\ & \xrightarrow{\quad} & H^2(C, R^{i-2}\pi_*\mathbb{Q}) \end{array}$$

является алгебраическим изоморфизмом, определенным алгебраическим классом

$$[\Delta_* \text{cl}_X(X_s)] \circ [j_*v^{i-2}] = \text{pr}_{13*}([j_*v^{i-2}] \otimes 1_X \cup 1_X \otimes [\Delta_* \text{cl}_X(X_s)]) \in H^{2i}(X \times X, \mathbb{Q}).$$

Действительно, очевидно, что

$$\begin{aligned} j_*v^{i-2} &\in H^{2i-2}(X \times X, \mathbb{Q}), \\ \Delta_* \text{cl}_X(X_s) &\in H^{2+2\dim X}(X \times X, \mathbb{Q}), \\ [j_*v^{i-2}] \otimes 1_X \cup 1_X \otimes [\Delta_* \text{cl}_X(X_s)] &\in H^{2i+2\dim X}(X \times X \times X, \mathbb{Q}), \\ \text{pr}_{13*}([j_*v^{i-2}] \otimes 1_X \cup 1_X \otimes [\Delta_* \text{cl}_X(X_s)]) &\in H^{2i}(X \times X, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Преобразуем диаграмму (6.3) в новую диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H^0(C, R^{2d+2-i}\pi_*\mathbb{Q}) & \oplus & H^1(C, R^{2d+1-i}\pi_*\mathbb{Q}) & \oplus & H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \\ \simeq \downarrow \varphi_i & & \simeq \downarrow [j_*v^{i-1}]^* & & \simeq \downarrow [j_*v^i]^* \\ H^2(C, R^{i-2}\pi_*\mathbb{Q}) & \oplus & H^1(C, R^{i-1}\pi_*\mathbb{Q}) & \oplus & H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}), \end{array} \quad (7.4)$$

где все морфизмы – алгебраические изоморфизмы.

Остается осуществить коррекцию морфизма $[j_*v^i]^*$ в (7.4).

§ 8. О компонентах j_*v^i

8.1. ЛЕММА. Имеем

$$\begin{aligned} j_*v^i &\in [H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})] \oplus [H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})] \\ &\oplus [H^1(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^1(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Θ_n – эндоморфизм X , индуцированный умножением на n в слоях $\pi: X \rightarrow C$, для любого целого числа $n > 1$. Хорошо известно, что $H^a(C, R^b\pi_*\mathbb{Q})$ совпадает с собственным подпространством $H^{(a,b)}(X, \mathbb{Q})$ оператора Θ_n^* в $H^r(X, \mathbb{Q})$, отвечающим собственному числу n^b [14, лемма 2A3].

Заметим сначала, что отображение $\Theta_n: X \rightarrow X$ является морфизмом схем над C , и поэтому оно определяет C -морфизм $\Theta_n \times_C \text{id}_X: X \times_C X \rightarrow X \times_C X$ и $(C \times C)$ -морфизм $\Theta_n \times \text{id}_X: X \times X \rightarrow X \times X$. Более того,

$$j \circ [\Theta_n \times_C \text{id}_X] = [\Theta_n \times \text{id}_X] \circ j.$$

Поэтому

$$j_*[\Theta_n \times_C \text{id}_X]_* v^i = [\Theta_n \times \text{id}_X]_* j_* v^i.$$

Поскольку $v^i \in H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q} \otimes R^i\pi_*\mathbb{Q})$, то мы имеем

$$[\Theta_n \times_C \text{id}_X]^* v^i = n^i v^i.$$

С другой стороны, $\deg[\Theta_n \times_C \text{id}_X] = n^{2d}$. Поэтому из формулы проекции

$$[\Theta_n \times_C \text{id}_X]_* [\Theta_n \times_C \text{id}_X]^* = \deg[\Theta_n \times_C \text{id}_X]$$

получаем соотношения

$$\begin{aligned} n^{2d} v^i &= [\Theta_n \times_C \text{id}_X]_* [\Theta_n \times_C \text{id}_X]^* v^i = [\Theta_n \times_C \text{id}_X]_* (n^i v^i) \\ &= n^i [\Theta_n \times_C \text{id}_X]_* v^i. \end{aligned}$$

Видно, что

$$[\Theta_n \times_C \text{id}_X]_* v^i = n^{2d-i} v^i.$$

Следовательно,

$$n^{2d-i} j_* v^i = j_*(n^{2d-i} v^i) = j_*[\Theta_n \times_C \text{id}_X]_* v^i = [\Theta_n \times \text{id}_X]_* j_* v^i.$$

Пусть $u = j_* v^i$. Обозначим через $u_{pqrt} \in H^p(C, R^q\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^r(C, R^t\pi_*\mathbb{Q})$ соответствующую компоненту u . В силу соотношения (3.7)

$$[\Theta_n \times \text{id}_X]^* u_{pqrt} = n^q u_{pqrt}.$$

С другой стороны, $\deg[\Theta_n \times \text{id}_X] = n^{2d}$, и из формулы проекции

$$[\Theta_n \times \text{id}_X]_* [\Theta_n \times \text{id}_X]^* = \deg[\Theta_n \times \text{id}_X]$$

следуют соотношения

$$\begin{aligned} n^{2d} u_{pqrt} &= [\Theta_n \times \text{id}_X]_* [\Theta_n \times \text{id}_X]^* u_{pqrt} = [\Theta_n \times \text{id}_X]_* (n^q u_{pqrt}) \\ &= n^q [\Theta_n \times \text{id}_X]_* u_{pqrt}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$[\Theta_n \times \text{id}_X]_* u_{pqrt} = n^{2d-q} u_{pqrt}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \sum n^{2d-q} u_{pqrt} &= [\Theta_n \times \text{id}_X]_* \sum u_{pqrt} = [\Theta_n \times \text{id}_X]_* j_* v^i \\ &= n^{2d-i} j_* v^i = n^{2d-i} \sum u_{pqrt}, \end{aligned}$$

то имеем равенство $q = i$.

Аналогично, используя $\text{id}_X \times \Theta_n$ вместо $\Theta_n \times \text{id}_X$, приходим к соотношению $t = i$.

Видно, что $j_* v^i \in H^{2i+2}(X \times X, \mathbb{Q})$ принадлежит

$$\begin{aligned} [H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^2(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})] \oplus [H^2(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})] \\ \oplus [H^1(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^1(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})]. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

8.2. СЛЕДСТВИЕ. Для $i = 0$ имеем

$$\begin{aligned} j_* 1 = \text{cl}_{X \times X}(X \times_C X) \in [H^0(C, \mathbb{Q}) \otimes H^2(C, \mathbb{Q})] \\ \oplus [H^2(C, \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, \mathbb{Q})] \oplus [H^1(C, \mathbb{Q}) \otimes H^1(C, \mathbb{Q})]. \end{aligned}$$

8.3. В силу леммы из п. 8.1 $j_* v^{i-1} \in H^{2i}(X \times X, \mathbb{Q})$ принадлежит

$$\begin{aligned} [H^0(C, R^{i-1} \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^2(C, R^{i-1} \pi_* \mathbb{Q})] \oplus [H^2(C, R^{i-1} \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^{i-1} \pi_* \mathbb{Q})] \\ \oplus [H^1(C, R^{i-1} \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^1(C, R^{i-1} \pi_* \mathbb{Q})]. \end{aligned}$$

Этот алгебраический класс определяет алгебраический изоморфизм

$$H^1(C, R^{2d+1-i} \pi_* \mathbb{Q}) \xrightarrow{[j_* v^{i-1}]^*} H^1(C, R^{i-1} \pi_* \mathbb{Q}),$$

являющийся композицией

$$\begin{aligned} H^1(C, R^{2d+1-i} \pi_* \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\text{pr}_1^*} H^1(C, R^{2d+1-i} \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup j_* v^{i-1}} \\ &\longrightarrow [H^1(C, R^{2d} \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^2(C, R^{i-1} \pi_* \mathbb{Q})] \\ &\quad \oplus [H^2(C, R^{2d} \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^1(C, R^{i-1} \pi_* \mathbb{Q})] \\ &\xrightarrow{\text{pr}_2^*} H^1(C, R^{i-1} \pi_* \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Наконец, $j_* v^{i-2} \in H^{2i-2}(X \times X, \mathbb{Q})$ принадлежит

$$\begin{aligned} [H^0(C, R^{i-2} \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^2(C, R^{i-2} \pi_* \mathbb{Q})] \oplus [H^2(C, R^{i-2} \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^{i-2} \pi_* \mathbb{Q})] \\ \oplus [H^1(C, R^{i-2} \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^1(C, R^{i-2} \pi_* \mathbb{Q})]. \end{aligned}$$

Этот алгебраический класс определяет алгебраический изоморфизм

$$H^0(C, R^{2d+2-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{[j_*v^{i-2}]^*} H^0(C, R^{i-2}\pi_*\mathbb{Q}),$$

являющийся композицией

$$\begin{aligned} H^0(C, R^{2d+2-i}\pi_*\mathbb{Q}) &\xrightarrow{\mathrm{pr}_1^*} H^0(C, R^{2d+2-i}\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup j_*v^{i-2}} \\ &\longrightarrow [H^0(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^2(C, R^{i-2}\pi_*\mathbb{Q})] \\ &\quad \oplus [H^2(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^{i-2}\pi_*\mathbb{Q})] \\ &\quad \oplus [H^1(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^1(C, R^{i-2}\pi_*\mathbb{Q})] \xrightarrow{\mathrm{pr}_2^*} \\ &\xrightarrow{\mathrm{pr}_2^*} H^0(C, R^{i-2}\pi_*\mathbb{Q}). \end{aligned}$$

§ 9. Ограничение линейных расслоений

9.1. ЛЕММА. *Если $\pi: X \rightarrow C$ не имеет нетривиальных постоянных абелевых подсхем, то морфизм ограничения*

$$j^*: \mathrm{Pic}^0(X \times X) \rightarrow \mathrm{Pic}^0(X \times_C X)$$

многообразий Пикара сюръективен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что $H^1(X \times X, \mathcal{O}_{X \times X})$ является касательным пространством в нуле многообразия Пикара $\mathrm{Pic}^0(X \times X)$ и $H^1(X \times_C X, \mathcal{O}_{X \times_C X})$ — касательное пространство в нуле многообразия Пикара $\mathrm{Pic}^0(X \times_C X)$. По теории Ходжа

$$\begin{aligned} H^1(X \times X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} &= H^1(X \times X, \mathcal{O}_{X \times X}) \oplus \overline{H^1(X \times X, \mathcal{O}_{X \times X})}, \\ H^1(X \times_C X, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C} &= H^1(X \times_C X, \mathcal{O}_{X \times_C X}) \oplus \overline{H^1(X \times_C X, \mathcal{O}_{X \times_C X})}. \end{aligned}$$

Следовательно, остается проверить сюръективность морфизма ограничения

$$j^*: H^1(X \times X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(X \times_C X, \mathbb{Q}).$$

Спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(C \times C, R^q(\pi \times \pi)_*\mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(X \times X, \mathbb{Q})$$

индуцирует каноническую точную последовательность $0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1}$ [21, добавление В]. Она имеет вид

$$0 \rightarrow H^1(C \times C, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(X \times X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C \times C, R^1(\pi \times \pi)_*\mathbb{Q}).$$

Аналогично приходим к точной последовательности

$$0 \rightarrow H^1(C, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(X \times_C X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^1\tau_*\mathbb{Q}),$$

где $\tau: X \times_C X \rightarrow C$ – структурный морфизм.

В силу леммы из п. 2.6 имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} H^0(C \times C, R^1(\pi \times \pi)_* \mathbb{Q}) &= H^0(C, R^1 \pi_* \mathbb{Q}) \oplus H^0(C, R^1 \pi_* \mathbb{Q}) = (0), \\ H^0(C, R^1 \tau_* \mathbb{Q}) &= H^0(C, R^1 \pi_* \mathbb{Q} \otimes \pi_* \mathbb{Q}) \oplus H^0(C, \pi_* \mathbb{Q} \otimes R^1 \pi_* \mathbb{Q}) \\ &= H^0(C, R^1 \pi_* \mathbb{Q}) \oplus H^0(C, R^1 \pi_* \mathbb{Q}) = (0). \end{aligned}$$

Пусть $\Delta_C: C \rightarrow C \times C$ – диагональное вложение. Коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^1(C \times C, \mathbb{Q}) & \rightarrow & H^1(X \times X, \mathbb{Q}) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow [\Delta_C]^* & & \downarrow j^* & & \\ 0 & \rightarrow & H^1(C, \mathbb{Q}) & \rightarrow & H^1(X \times_C X, \mathbb{Q}) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

показывает, что остается доказать сюръективность канонического морфизма

$$[\Delta_C]^*: H^1(C \times C, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(C, \mathbb{Q}).$$

Поскольку

$$H^1(C \times C, \mathbb{Q}) = [H^1(C, \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, \mathbb{Q})] \oplus [H^0(C, \mathbb{Q}) \otimes H^1(C, \mathbb{Q})],$$

и (по определению $\cup$ -произведения) для любых $a, b \in H^*(C, \mathbb{Q})$

$$[\Delta_C]^*(a \otimes b) = a \cup b,$$

то имеем сюръективный морфизм $[\Delta_C]^*: H^1(C, \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(C, \mathbb{Q})$. Лемма доказана.

9.2. ЛЕММА. Если $\pi: X \rightarrow C$ не имеет нетривиальных постоянных абелевых подсхем, то морфизм ограничения

$$j^*: H^1(X \times X, \mathcal{O}_{X \times X}^\times) \rightarrow H^1(X \times_C X, \mathcal{O}_{X \times_C X}^\times)$$

группы Пикара не является сюръективным. Более того,

$$\mathcal{P} \notin j^*(H^1(X \times X, \mathcal{O}_{X \times X}^\times)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует такое линейное расслоение $\mathcal{L}$ на $X \times X$, что $j^*(\mathcal{L}) = \mathcal{P}$. Пусть $i_s: X_s \hookrightarrow X$ – каноническое вложение. Тогда имеем канонические вложения

$$X_s \times X_s \xrightarrow{i_s \times i_s} X \times_C X \xrightarrow{j} X \times X.$$

По теореме Делиня [6, п. 4.1.2] каноническое отображение ограничения

$$H^2(X \times X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X_s \times X_s, \mathbb{Q})$$

является композицией канонического сюръективного краевого морфизма

$$H^2(X \times X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C \times C, R^2(\pi \times \pi)_* \mathbb{Q})$$

спектральной последовательности Лере $E_2^{p,q} = H^p(C \times C, R^q(\pi \times \pi)_* \mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(X \times X, \mathbb{Q})$ и канонических отображений

$$H^0(C \times C, R^2(\pi \times \pi)_* \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_s \times X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C \times C, s \times s)} \hookrightarrow H^2(X_s \times X_s, \mathbb{Q}).$$

Очевидно, что $\text{cl}_{X \times X}(\mathcal{L}) \in H^2(X \times X, \mathbb{Q})$ отображается в элемент

$$v_s = \text{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s) \in H^2(X_s \times X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C \times C, s \times s)}$$

типа Кюннета $(1, 1)$, так как $j^*(\text{cl}_{X \times X}(\mathcal{L})) = \text{cl}_{X \times_C X}(j^*(\mathcal{L})) = \text{cl}_{X \times_C X}(\mathcal{P})$ [14, 1.2.C], $[i_s \times i_s]^* \text{cl}_{X \times_C X}(\mathcal{P}) = \text{cl}_{X_s \times X_s}([i_s \times i_s]^*(\mathcal{P}))$ [14, 1.2.C] и $[i_s \times i_s]^*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_s$. Поскольку $v_s = \text{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s)$ имеет тип Кюннета $(1, 1)$, видно, что образ $\text{cl}_{X \times X}(\mathcal{L})$ относительно канонического краевого морфизма

$$H^2(X \times X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C \times C, R^2(\pi \times \pi)_* \mathbb{Q})$$

принадлежит

$$\begin{aligned} H^0(C, R^1 \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^1 \pi_* \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\sim} [H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C \times C, s \times s)} \\ &= [H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C, s)} \otimes [H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C, s)}. \end{aligned}$$

В силу леммы из п. 2.6 $H^0(C, R^1 \pi_* \mathbb{Q}) = 0$. Поэтому $v_s = \text{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s) = 0$, что противоречит соотношению (6.1). Лемма доказана.

9.3. ЛЕММА. Если $\pi: X \rightarrow C$ не имеет нетривиальных постоянных абелевых подсхем, то морфизм ограничения

$$j^*: H_{\text{alg}}^2(X \times X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_{\text{alg}}^2(X \times_C X, \mathbb{Q})$$

не является сюръективным. Более того,

$$v \notin j^*(H_{\text{alg}}^2(X \times X, \mathbb{Q})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует такое линейное расслоение $\mathcal{L}$ на $X \times X$, что $j^*(\text{cl}_{X \times X}(\mathcal{L})) = v$.

Очевидно, что ограничение $\text{cl}_{X \times X}(\mathcal{L}) \in H^2(X \times X, \mathbb{Q})$ равно элементу

$$v_s = \text{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s) \in H^2(X_s \times X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C \times C, s \times s)},$$

так как $j^*(\text{cl}_{X \times X}(\mathcal{L})) = v$. Поскольку $v_s = \text{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s)$ имеет тип Кюннета $(1, 1)$, то видно, что образ $\text{cl}_{X \times X}(\mathcal{L})$ относительно канонического краевого морфизма

$$H^2(X \times X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C \times C, R^2(\pi \times \pi)_* \mathbb{Q})$$

принадлежит

$$\begin{aligned} H^0(C, R^1 \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^1 \pi_* \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\sim} [H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C \times C, s \times s)} \\ &= [H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C, s)} \otimes [H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C, s)}. \end{aligned}$$

В силу леммы из п. 2.6 $H^0(C, R^1 \pi_* \mathbb{Q}) = 0$. Поэтому $v_s = \text{cl}_{X_s \times X_s}(\mathcal{P}_s) = 0$, что противоречит соотношению (6.1). Лемма доказана.

§ 10. Циклы Ходжа и условная коррекция морфизма $[j_*v^i]^*$

10.1. ТЕОРЕМА. Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – комплексная абелева схема с главной поляризацией относительной размерности d над гладкой проективной кривой C . Тогда для любого натурального числа $i \geq 2$ существует единственный цикл Ходжа

$$\alpha_i = \alpha_i(X/C) \in [H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})] \cap H^{i,i}(X \times X, \mathbb{C}),$$

характеризуемый следующим условием: $\alpha_i \cup \text{cl}_{X \times X}(X \times X_s)$ определяет изоморфизм

$$H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}),$$

совпадающий с алгебраическим изоморфизмом

$$[j_*v^i]^*: H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}).$$

Если α_i алгебраичен, то алгебраический класс

$$[\Delta_* \text{cl}_X(X_s)] \circ [j_*v^{i-2}] + j_*v^{i-1} + \alpha_i$$

индуцирует алгебраический изоморфизм $H^{2d+2-i}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathbb{Q})$ и верна гипотеза $B^i(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме из п. 8.1

$$\begin{aligned} j_*v^i \in [H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})] \oplus [H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})] \\ \oplus [H^1(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^1(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})]. \end{aligned}$$

В силу соотношения (7.3)

$$\begin{aligned} & H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \\ &= [H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})] \cup \text{cl}_{X \times X}(X \times X_s), \\ & [H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})] \\ &= [H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})] \cup \text{cl}_{X \times X}(X_s \times X). \end{aligned}$$

Следовательно, существуют такие однозначно определенные элементы

$$\begin{aligned} \alpha_i, \beta_i &\in H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}), \\ \delta_i &\in H^1(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^1(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}), \end{aligned}$$

что

$$j_*v^i = \alpha_i \cup \text{cl}_{X \times X}(X \times X_s) + \beta_i \cup \text{cl}_{X \times X}(X_s \times X) + \delta_i.$$

Пусть $V_{\mathbb{Q}}$ – рациональная структура Ходжа. Из общей теории групп мультипликативного типа следует, что определить разложение Ходжа

$$V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C} = \bigoplus V_{\mathbb{C}}^{p,q}$$

– это то же самое, что определить морфизм вещественных алгебраических групп $h: \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m) \rightarrow \text{GL}(V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R})$, где $\text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)$ – вещественная алгебраическая группа, полученная из мультипликативной группы G_m ограничением поля скаляров от $\mathbb{C}$ до $\mathbb{R}$ [10, определение В.42]; элемент $z \in \mathbb{C}^{\times} = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)(\mathbb{R})$ действует на $V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ как умножение на число $z^p \bar{z}^q$. Пусть $U^1 = \{z \in \mathbb{C}^{\times} = \text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)(\mathbb{R}) \mid |z| = 1\}$. Наименьшая $\mathbb{Q}$ -подгруппа в $\text{GL}(V_{\mathbb{Q}})$, группа $\mathbb{R}$ -точек которой содержит $h(U^1)$, называется *группой Ходжа* структуры Ходжа $V_{\mathbb{Q}}$ и обозначается через $\text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})$. Наименьшая $\mathbb{Q}$ -подгруппа в $\text{GL}(V_{\mathbb{Q}})$, группа $\mathbb{R}$ -точек которой содержит $h(\text{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m))$, называется *группой Мамфорда–Тэйта* структуры Ходжа $V_{\mathbb{Q}}$ и обозначается через $\text{MT}(V_{\mathbb{Q}})$ [10, определение В.51].

Хорошо известно, что существует изогения $G_m \times \text{Hg}(V_{\mathbb{Q}}) \rightarrow \text{MT}(V_{\mathbb{Q}})$ [10, лемма В.53]. Если $V_{\mathbb{Q}}$ – поляризуемая рациональная структура Ходжа, то $\text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})$ и $\text{MT}(V_{\mathbb{Q}})$ – редуктивные $\mathbb{Q}$ -группы, действующие естественным образом на пространстве $V_{\mathbb{Q}}$ [10, предложение В.57].

Важная роль групп Ходжа в анализе структур Ходжа заключается в том, что рациональные $\text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})$ -подпредставления в $V^{\otimes r} \otimes (V^{\wedge})^{\otimes s}$ – это в точности рациональные подструктуры Ходжа в $V^{\otimes r} \otimes (V^{\wedge})^{\otimes s}$ [10, предложение В.54].

Предположим, что $V_{\mathbb{Q}}$ – рациональная структура Ходжа четного веса $2r$. Тогда

$$V_{\mathbb{Q}}^{\text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})} = V_{\mathbb{Q}} \cap V_{\mathbb{C}}^{r,r}, \quad (10.1)$$

где $V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C} = \bigoplus V_{\mathbb{C}}^{p,q}$ – разложение Ходжа [10, следствие В.55]. По определению элементы $V_{\mathbb{Q}}^{\text{Hg}(V_{\mathbb{Q}})} = V_{\mathbb{Q}} \cap V_{\mathbb{C}}^{r,r}$ называются *циклами Ходжа*.

В рассматриваемой ситуации компоненты

$$\begin{aligned} & H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^2(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \\ &= [H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})] \cup \text{cl}_{X \times X}(X \times X_s), \\ & [H^2(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})] \\ &= [H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})] \cup \text{cl}_{X \times X}(X_s \times X), \\ & H^1(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^1(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

являются рациональными подструктурами Ходжа в $H^{2i+2}(X \times X, \mathbb{Q})$ (напомним, что $H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})$ – рациональная подструктура Ходжа в $H^i(X, \mathbb{Q})$, канонически отождествляемая (в силу (3.2)) с собственным подпространством оператора $[\Theta_n]^*$ на $H^i(X, \mathbb{Q})$, отвечающим собственному числу n^i ; аналогично $H^1(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})$ канонически отождествляется с собственным подпространством оператора $[\Theta_n]^*$ на $H^{i+1}(X, \mathbb{Q})$, отвечающим собственному числу n^i). Следовательно, они стабильны относительно действия $\text{Hg}(H^{2i+2}(X \times X, \mathbb{Q}))$.

По теореме Лефшеца

$$\text{NS}(X \times X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} H^2(X \times X, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(X \times X, \mathbb{C}).$$

В силу соотношения (10.1)

$$\text{NS}(X \times X) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} H^2(X \times X, \mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^2(X \times X, \mathbb{Q}))}.$$

Поэтому $\text{cl}_{X \times X}(X \times X_s)$ и $\text{cl}_{X \times X}(X_s \times X)$ неподвижны при каноническом действии U^1 на $H^2(X \times X, \mathbb{C})$. Аналогично, алгебраический класс $j_* v^i$ принадлежит

$$\begin{aligned} H_{\text{alg}}^{2i+2}(X \times X, \mathbb{Q}) &\hookrightarrow H^{2i+2}(X \times X, \mathbb{Q}) \cap H^{i+1, i+1}(X \times X, \mathbb{C}) \\ &= H^{2i+2}(X \times X, \mathbb{Q})^{\text{Hg}(H^{2i+2}(X \times X, \mathbb{Q}))} \end{aligned}$$

и неподвижен при действии U^1 на $H^{2i+2}(X \times X, \mathbb{C})$. Поскольку это действие совместимо с $\cup$ -произведением, то элементы

$$\alpha_i, \beta_i \in H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})$$

неподвижны при действии U^1 на $H^{2i}(X \times X, \mathbb{C})$. Следовательно, α_i и β_i неподвижны при действии группы Ходжа $\text{Hg}(H^{2i}(X \times X, \mathbb{Q}))$. Другими словами, α_i и β_i — циклы Ходжа,

$$\alpha_i, \beta_i \in [H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})] \cap H^{i, i}(X \times X, \mathbb{C}).$$

Утверждаем, что цикл Ходжа $\alpha_i \cup \text{cl}_{X \times X}(X \times X_s)$ индуцирует *алгебраический изоморфизм*

$$[j_* v^i]^*: H^2(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})$$

и цикл Ходжа α_i индуцирует изоморфизм

$$H^2(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}),$$

который не предполагается алгебраическим.

Действительно, в силу (6.2) алгебраический класс $j_* v^i$ индуцирует алгебраический изоморфизм

$$H^2(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}), \quad (10.2)$$

определенный композицией

$$\begin{aligned} H^2(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\text{pr}_1^*} H^2(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{\cup j_* v^i} H^{2d+4+i}(X \times X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\text{pr}_{2*}} H^{i+2}(X, \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Поскольку элемент $\beta_i \cup \text{cl}_{X \times X}(X_s \times X) + \delta_i$ аннулирует $H^2(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, \mathbb{Q})$, то алгебраический изоморфизм (10.2) совпадает с композицией

$$\begin{aligned} H^2(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\text{pr}_1^*} H^2(C, R^{2d-i} \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{\cup \alpha_i \cup \text{cl}_{X \times X}(X \times X_s)} H^2(C, R^{2d} \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^2(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \\ &\xrightarrow{\text{pr}_{2*}} H^2(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

В частности, отображение

$$H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup \alpha_i} H^2(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \quad (10.3)$$

инъективно.

С другой стороны, (7.3) и (10.2) влекут соотношения

$$\dim H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) = \dim H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) = \dim H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}).$$

Следовательно, отображение (10.3) биективно, и утверждение доказано.

Если α_i алгебраичен, то он индуцирует алгебраический изоморфизм

$$H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}),$$

поэтому существует алгебраическая коррекция

$$\begin{array}{ccccc} H^0(C, R^{2d+2-i}\pi_*\mathbb{Q}) & \oplus & H^1(C, R^{2d+1-i}\pi_*\mathbb{Q}) & \oplus & H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \\ \simeq \downarrow \varphi_i & & \simeq \downarrow [j_*v^{i-1}]^* & & \simeq \downarrow [\alpha_i]^* \\ H^2(C, R^{i-2}\pi_*\mathbb{Q}) & \oplus & H^1(C, R^{i-1}\pi_*\mathbb{Q}) & \oplus & H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \end{array}$$

морфизма $[j_*v^i]^*$ в диаграмме (7.4), и гипотеза $B^i(X)$ верна. Теорема доказана.

10.2. СЛЕДСТВИЕ. Если циклы Ходжа $\alpha_i(X/C)$ алгебраические для всех натуральных чисел $i \geq 2$ и для всех комплексных абелевых схем с главной поляризацией над гладкими проективными кривыми $\pi: X \rightarrow C$ без нетривиальных постоянных абелевых подсхем, то гипотеза Ходжа верна для всех абелевых многообразий.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме из п. 10.1 гипотеза $B^i(X)$ верна для всех $i \geq 2$. Поскольку $B^0(X)$ и $B^1(X)$ выполняются в силу результатов п. 6.7, то гипотеза $B^i(X)$ верна для всех $i \geq 0$. Остается применить теорему Андре из п. 2.1, следствие из п. 2.3 и замечание из п. 2.7.

§ 11. Доказательство гипотезы $B^i(X)$ для некоторых абелевых схем

11.1. Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – комплексная абелева схема относительной размерности d над гладкой проективной кривой. Существует такое конечно порожденное расширение k поля $\mathbb{Q}$, что X, C, π определены над $k \hookrightarrow \mathbb{C}$:

$$X = X_0 \otimes_k \mathbb{C}, \quad C = C_0 \otimes_k \mathbb{C}, \quad \pi = \pi_0 \otimes_k \mathbb{C}.$$

Пусть $X_{0\eta}$ – общий слой абелевой схемы $\pi_0: X_0 \rightarrow C_0$, и пусть $X_{0\bar{\eta}} = X_{0\eta} \otimes_{k(\eta)} \mathbb{C}$ для некоторого вложения $k(\eta) \hookrightarrow \mathbb{C}$, продолжающего вложение $k \hookrightarrow \mathbb{C}$.

Назовем $X_{0\bar{\eta}}$ *общим геометрическим слоем* абелевой схемы $\pi_0: X_0 \rightarrow C_0$.

Для любого комплексного абелева многообразия X_s обозначим через $\text{Hg}(X_s) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hg}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$ *группу Ходжа* X_s . Это редуктивная связная алгебраическая $\mathbb{Q}$ -группа с каноническим действием на $H^*(X_s, \mathbb{Q}) = \wedge^* H^1(X_s, \mathbb{Q})$. В силу соотношения (10.1)

$$H^{2i}(X_s, \mathbb{Q})^{\text{Hg}(X_s)} = H^{2i}(X_s, \mathbb{Q}) \cap H^{i,i}(X_s, \mathbb{C}).$$

11.2. ТЕОРЕМА. *Предположим, что для комплексной абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ относительной размерности d над гладкой проективной кривой C $\mathrm{Lie\,Hg}(X_{0\bar{\eta}})$ является простой алгеброй Ли типа C_d .*

Тогда гипотеза $B(X)$ верна. В частности, операторы c , $*$, ${}^c\Lambda$, Λ на $H^*(X, \mathbb{Q})$ являются алгебраическими, численная эквивалентность алгебраических циклов на X совпадает с гомологической эквивалентностью, компоненты Кюннета произвольного алгебраического цикла на $X \times X$ алгебраические.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\rho: \pi_1(C, s) \rightarrow \mathrm{GL}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$ – каноническое представление монодромии. Обозначим через G замыкание $\rho(\pi_1(C, s))$ в топологии Зарисского группы $\mathrm{GL}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$. По определению

$$H^i(X_s, \mathbb{Q})^G = H^i(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)}$$

(см. [34, § 7.0]).

В силу теоремы из п. 1.6 можно рассматривать разветвленное накрытие $C' \rightarrow C$ и абелеву схему $X' = X \times_C C' \rightarrow C'$ вместо $X \rightarrow C$. Можно считать, что G – связная $\mathbb{Q}$ -группа. Эта группа полупроста [6, следствие 4.2.9].

По теореме Делиня для всех s вне счетного подмножества кривой C группа G является нормальной подгруппой группы Ходжа $\mathrm{Hg}(X_s)$ [7, предложение 7.5]; [34, теорема 7.3]. В частности, существует вложение $G \hookrightarrow \mathrm{Hg}(X_{0\bar{\eta}})$.

Если $G = 1$, то абелева схема $\pi: X \rightarrow C$ постоянна [6, 4.1.3.3], [7, § 5.2]: существует такое абелево многообразие J , что $X \simeq J \times C$. Поскольку $B(C)$ верна и $B(J)$ выполняется по теореме Либермана (следствие из п. 1.8), то гипотеза $B(X)$ верна в силу свойства (1.10).

Следовательно, можно считать что G – нетривиальная нормальная алгебраическая подгруппа простой алгебраической группы $\mathrm{Hg}(X_{0\bar{\eta}})$, и поэтому

$$\mathrm{Lie\,} G = \mathrm{Lie\,Hg}(X_{0\bar{\eta}})$$

– простая алгебра Ли типа C_d .

Имеем

$$\begin{aligned} H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) &\simeq H^i(X_s, \mathbb{Q})^{\pi_1(C, s)} = H^i(X_s, \mathbb{Q})^G \\ &= H^i(X_s, \mathbb{Q})^{\mathrm{Lie\,} G} = H^i(X_s, \mathbb{Q})^{\mathrm{sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))} \\ &= [\wedge^i H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\mathrm{sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))}. \end{aligned}$$

С другой стороны, пусть Γ – образующая одномерного пространства $[\wedge^2 H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\mathrm{sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))}$. Тогда

$$[\wedge^i H^1(X_s, \mathbb{Q})]^{\mathrm{sp}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))} = \begin{cases} 0 & \text{для нечетного } i, \\ \mathbb{Q} \cdot \Gamma^{\wedge i/2} & \text{для четного } i \end{cases}$$

(см. [28, лемма 4.8.4]).

Следовательно,

$$H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) = \begin{cases} 0 & \text{для нечетного } i, \\ \mathbb{Q} \cdot h^{\cup i/2} & \text{для четного } i, \end{cases}$$

где h – образ класса $\text{cl}_X(H)$ гиперплоского сечения при каноническом сюръективном краевом морфизме $H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2 \pi_* \mathbb{Q})$ спектральной последовательности Лере $E_2^{p,q} = H^p(C, R^q \pi_* \mathbb{Q}) \Rightarrow H^*(X, \mathbb{Q})$.

Мы видим, что $H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})$ тривиально или порождено алгебраическим классом $h^{\cup i/2} \otimes h^{\cup i/2}$, поэтому

$$\alpha_i(X/C) \in H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})$$

является алгебраическим, и теорема следует из теоремы п. 10.1.

11.3. СЛЕДСТВИЕ. *Предположим, что $\text{End}(X_s) = \mathbb{Z}$ для некоторого геометрического слоя комплексной абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ нечетной относительной размерности d над гладкой проективной кривой C .*

Тогда гипотеза $B(X)$ верна.

Действительно,

$$\text{End}(X_{0\bar{\eta}}) \hookrightarrow \text{End}(X_s) = \mathbb{Z}.$$

Поэтому $\text{End}(X_{0\bar{\eta}}) = \mathbb{Z}$. Поскольку d нечетно, то $\text{Hg}(X_{0\bar{\eta}})$ – простая алгебраическая $\mathbb{Q}$ -группа типа C_d [28, теорема 4.7], [29, теорема 6.2].

11.4. СЛЕДСТВИЕ. *Пусть*

$$\text{Ex}(1) = \{4, 10, 16, 32, 64, 108, 126, 256, 500, 512, 864, 1024, \dots\}$$

– множество исключительных чисел в смысле [31] для простых абелевых многообразий типа I по классификации Альберта. Если $\text{End}(X_s) = \mathbb{Z}$ для некоторого геометрического слоя комплексной абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ относительной размерности $d \notin \text{Ex}(1)$ над гладкой проективной кривой C , то гипотеза $B(X)$ верна.

Действительно, известно, что в рассматриваемом случае $\text{Hg}(X_{0\bar{\eta}})$ – простая алгебраическая $\mathbb{Q}$ -группа типа C_d [31, теорема 1.1].

11.5. СЛЕДСТВИЕ. *Если $\text{End}(X_s) = \mathbb{Z}$ для некоторого геометрического слоя комплексной абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ относительной размерности $d \in \{4, 10\}$ над гладкой проективной кривой C , то гипотеза $B(X)$ верна.*

Действительно, известно, что в рассматриваемом случае $\text{Hg}(X_{0\bar{\eta}})$ – простая алгебраическая $\mathbb{Q}$ -группа типа C_d или типа $A_1 \times A_1 \times A_1$ ($d = 4$) (над $\overline{\mathbb{Q}}$), A_5 ($d = 10$). Поэтому $G = 1$ или G – простая алгебраическая $\mathbb{Q}$ -группа того же типа, что и группа $\text{Hg}(X_{0\bar{\eta}})$, и

$$H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) = \begin{cases} (0) & \text{для нечетного } i, \\ \mathbb{Q} \cdot h^{\cup i/2} & \text{для четного } i \end{cases}$$

(см. [31, лемма 2.6]), $H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})$ тривиально или порождено алгебраическим классом $h^{\cup i/2} \otimes h^{\cup i/2}$. Остается применить теорему из п. 10.1.

11.6. ТЕОРЕМА. *Предположим, что для комплексной абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ относительной размерности d над гладкой проективной кривой C $\text{End}(X_{0\bar{\eta}}) \otimes \mathbb{Q}$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$ и полупростая часть $[\text{Lie Hg}(X_{0\bar{\eta}})]^{\text{ss}}$ редуктивной алгебры Ли $\text{Lie Hg}(X_{0\bar{\eta}})$ является простой алгеброй Ли типа A_{d-1} .*

Тогда для любого $i \neq d$ изоморфизм

$$\Lambda^{d+1-i}: H^{2d+2-i}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathbb{Q})$$

является алгебраическим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку G – нормальная полупростая подгруппа в $\text{Hg}(X_{0\bar{\eta}})$, то она является нормальной подгруппой в $[\text{Hg}(X_{0\bar{\eta}})]^{\text{ss}}$. Поэтому $G = 1$ (в этой ситуации абелева схема $\pi: X \rightarrow C$ постоянна и $B(X)$ верна) или G – простая $\mathbb{Q}$ -группа типа A_{d-1} . В последнем случае

$$H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}} = E(\omega_1) \oplus E(\omega_1)^* = E(\omega_1) \oplus E(\omega_{d-1})$$

– сумма неприводимых представлений $V = E(\omega_1)$ и $V^* = E(\omega_{d-1})$ со старшими весами ω_1 и ω_{d-1} простой алгебры Ли $g = [\text{Lie } G] \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ типа A_{d-1} [31, § 2.9].

Если $i \leq d-1$, то

$$\begin{aligned} [H^i(X_s, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}]^g &= \wedge^i(V \oplus V^*)^g = \wedge^i(V \oplus V^*)^{\text{sl}(V)} \\ &= \bigoplus_{m=0}^i [\wedge^m V \otimes \wedge^{i-m} V^*]^{\text{sl}(V)} = \bigoplus_{m=0}^i \text{Hom}_{\text{sl}(V)}(\wedge^{i-m} V, \wedge^m V). \end{aligned}$$

Напомним, что

$$\wedge^m V = \wedge^m E(\omega_1) = E(\omega_m)$$

– неприводимое представление в случае $d-1 \geq m \geq 1$ и

$$\wedge^{i-m} V = \wedge^{i-m} E(\omega_1) = E(\omega_{i-m})$$

– неприводимое представление в случае $d-1 \geq i-m \geq 1$ [3, гл. 8, § 13.1].

Следовательно, по лемме Шура

$$\text{Hom}_{\text{sl}(V)}(\wedge^{i-m} V, \wedge^m V) \neq (0) \Leftrightarrow i-m = m \quad (\text{для } d-1 \geq i \geq i-m \geq 1)$$

с

$$\dim[\wedge^m V \otimes \wedge^m V^*]^{\text{sl}(V)} = 1.$$

Если $d-1 \geq i \geq i-m = 0$, то

$$\dim \text{Hom}_{\text{sl}(V)}(\wedge^{i-m} V, \wedge^m V) = \dim \text{Hom}_{\text{sl}(V)}(\wedge^0 V, \wedge^i V) = \begin{cases} 0 & \text{для } i \geq 1, \\ 1 & \text{для } i = 0. \end{cases}$$

В частности, для всех $i \leq d-1$

$$\dim[H^i(X_s, \mathbb{Q})]^G = \dim[H^i(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C, s)} = \begin{cases} 0 & \text{для нечетного } i, \\ 1 & \text{для четного } i. \end{cases}$$

Случай $i > d$ сводится к предыдущему с помощью сильной теоремы Лефшеца. Видно, что для $i \neq d$

$$H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) = \begin{cases} (0) & \text{для нечетного } i, \\ \mathbb{Q} \cdot h^{\cup i/2} & \text{для четного } i, \end{cases}$$

$H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i \pi_* \mathbb{Q})$ тривиально или порождается алгебраическим классом $h^{\cup i/2} \otimes h^{\cup i/2}$. Остается применить теорему из п. 10.1.

Наконец, для $i = d$ имеем

$$\begin{aligned} [H^d(X_s, \mathbb{Q}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}]^g &= \wedge^d(V \oplus V^*)^g = \wedge^d(V \oplus V^*)^{\text{sl}(V)} \\ &= \bigoplus_{m=1}^{d-1} [\wedge^m V \otimes \wedge^{d-m} V^*]^{\text{sl}(V)} \oplus [\wedge^0 V \otimes \wedge^d V^*] \oplus [\wedge^d V \otimes \wedge^0 V^*] \\ &= \bigoplus_{m=1}^{d-1} \text{Hom}_{\text{sl}(V)}(\wedge^{d-m} V, \wedge^m V) \oplus [\wedge^0 V \otimes \wedge^d V^*] \oplus [\wedge^d V \otimes \wedge^0 V^*] \end{aligned}$$

и

$$\dim[H^d(X_s, \mathbb{Q})]^G = \dim[H^d(X_s, \mathbb{Q})]^{\pi_1(C, s)} = \begin{cases} 2 & \text{для нечетного } d, \\ 3 & \text{для четного } d. \end{cases}$$

Теорема доказана.

11.7. СЛЕДСТВИЕ. Пусть

$$\text{Ex}(4) = \{9, 10, 15, 16, 21, 25, 27, 28, 35, 36, 45, 49, \\ 55, 56, 64, 66, 78, 81, 84, 91, 100, \dots\}$$

– множество исключительных чисел в смысле [31] для простых абелевых многообразий типа IV по классификации Альберта. Если $\text{End}_C(X) \otimes \mathbb{Q}$ и $\text{End}(X_s) \otimes \mathbb{Q}$ – мнимые квадратичные расширения $\mathbb{Q}$, где X_s – некоторый геометрический слой комплексной абелевой схемы $\pi: X \rightarrow C$ относительной размерности $d \notin \text{Ex}(4)$ над гладкой проективной кривой C , то для любого $i \neq d$ изоморфизм

$$\Lambda^{d+1-i}: H^{2d+2-i}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathbb{Q})$$

является алгебраическим.

Действительно, известно, что в рассматриваемом случае $\text{Hg}(X_{0\bar{\eta}})$ – редуктивная алгебраическая $\mathbb{Q}$ -группа с полупростой частью $[\text{Hg}(X_{0\bar{\eta}})]^{\text{ss}}$ типа A_{d-1} [31, теорема 1.1].

11.8. ТЕОРЕМА. Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – абелева схема над гладкой проективной кривой C . Предположим, что некоторый геометрический слой X_s является простым абелевым многообразием простой размерности d .

Тогда для любого $i \neq d$ изоморфизм

$$\Lambda^{d+1-i}: H^{2d+2-i}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathbb{Q})$$

является алгебраическим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания из п. 2.7 можно считать, что абелева схема $\pi: X \rightarrow C$ не содержит нетривиальных постоянных абелевых подсхем. Поскольку X_s – простое абелево многообразие, то слой $X_{0\bar{\eta}}$ является простым абелевым многообразием простой размерности d .

Хорошо известно, что $\text{End}(X_{0\bar{\eta}}) \otimes \mathbb{Q}$ изоморфно вполне вещественному расширению K_0 поля $\mathbb{Q}$ степени $[K_0 : \mathbb{Q}] \in \{1, d\}$ или мнимому квадратичному расширению K вполне вещественного поля K_0 степени $[K : \mathbb{Q}] \in \{2, 2d\}$ [29, 6.1].

Предположим, что $\text{End}(X_{0\bar{\eta}}) \otimes \mathbb{Q} = K_0$. Если $K_0 = \mathbb{Q}$, то мы имеем ситуацию, рассмотренную в следствиях из пп. 11.3 и 11.4, и гипотеза $B(X)$ верна.

Если $K_0 \neq \mathbb{Q}$, то K_0 – вполне вещественное поле степени $[K_0 : \mathbb{Q}] = d$. Поскольку представление монодромии

$$\rho: \pi_1(C, s) \rightarrow \text{GL}(H^1(X_s, \mathbb{Q}))$$

полупросто [6, 4.2.6], то $\mathbb{Q}$ -алгебра $H = \text{End}(R^1\pi_*\mathbb{Q})$ изоморфна прямой сумме алгебр вида $M_{n_\alpha}(D_\alpha)$, где D_α – алгебра с делением над $\mathbb{Q}$. С другой стороны, центр Z алгебры H имеет тип Ходжа $(0, 0)$ и, следовательно, содержится в центре алгебры с делением $\text{End}_C(X) \otimes \mathbb{Q} \hookrightarrow \text{End}(X_{0\bar{\eta}}) \otimes \mathbb{Q} = K_0$ [6, 4.4.7]. Поэтому $H \cong M_n(D)$, где D – центральная алгебра с делением над вполне вещественным полем $Z \hookrightarrow K_0$. Пусть $e = \dim_{\mathbb{Q}} Z$ и $f^2 = \dim_Z D$. Пространство $H^1(X_s, \mathbb{Q})$ разлагается в прямую сумму неприводимых $M_n(D)$ -модулей, каждый из которых является линейным пространством над $\mathbb{Q}$ размерности enf^2 (это хорошо известный факт из теории простых центральных алгебр). Следовательно,

$$enf^2 | 2d. \quad (11.1)$$

Утверждаем, что

$$\text{End}_C(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \text{End}(R^1\pi_*\mathbb{Q}). \quad (11.2)$$

Случай $d \leq 3$ рассматривается в [6, 4.4.13]. Поэтому можно считать, что $d \geq 5$. Из соотношения (11.1) следует, что $f = 1$. Значит, $D = Z$, и для любого вложения $\varphi: Z \hookrightarrow \mathbb{R}$ алгебра $H \otimes_Z \mathbb{R}_{(\varphi)}$ является матричной алгеброй над $\mathbb{R}$. Поэтому (11.2) следует из [6, 4.4.11].

Заменяя $X \rightarrow C$ морфизмом $X \times_C C' \rightarrow C'$ для некоторого конечного накрытия $C' \rightarrow C$, можно считать, что

$$K_0 = \text{End}_C(X) \otimes \mathbb{Q} \cong \text{End}(R^1\pi_*\mathbb{Q}).$$

В этой ситуации

$$K_0 = \text{End}(R^1\pi_*\mathbb{Q}) = \text{End}_{\pi_1(C, s)}(H^1(X_s, \mathbb{Q})) = \text{End}_G(H^1(X_s, \mathbb{Q})),$$

и по лемме Шура

$$H^1(X_s, \mathbb{Q}) \otimes \bar{\mathbb{Q}} \cong V_1 \oplus \cdots \oplus V_d$$

– прямая сумма попарно неизоморфных $([\text{Lie } G] \otimes \bar{\mathbb{Q}})$ -модулей степени 2 над $\bar{\mathbb{Q}}$. Поэтому $[\text{Lie } G] \otimes \bar{\mathbb{Q}}$ – полупростая алгебра Ли типа $A_1 \times \cdots \times A_1 = A_1^d$.

С другой стороны, известно, что $\mathrm{Hg}(X_{0\bar{\eta}})$ – полупростая $\mathbb{Q}$ -группа типа $A_1 \times \cdots \times A_1 = A_1^d$, поэтому выполняется геометрический аналог гипотезы Мамфорда–Тэйта [23]. В частности, гипотеза Ходжа для $X_{0\bar{\eta}}$ эквивалентна геометрическому аналогу гипотезы Тэйта для X_η , где X_η – общий слой π . Поскольку гипотеза Ходжа верна для всех простых абелевых многообразий простой размерности (более того,

$$H^{2i}(X_{0\bar{\eta}}, \mathbb{Q}) \cap H^{i,i}(X_{0\bar{\eta}}, \mathbb{C})$$

порождается классами пересечений дивизоров [30]), легко проверить, что пространство $H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})$ тривиально для нечетного i ; для четного i оно порождается $\cup$ -произведениями элементов из $H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$. Более того, элементы из $H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ алгебраические (они происходят из классов дивизоров на общем слое). Поэтому $H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})$ порождается алгебраическими классами и гипотеза $B(X)$ верна.

Если K – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$, то мы имеем ситуацию, рассмотренную в следствии из п. 11.7, и для любого $i \neq d$ изоморфизм

$$\Lambda^{d+1-i}: H^{2d+2-i}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathbb{Q})$$

является алгебраическим.

Если $[K : \mathbb{Q}] = 2d$, то $X_{0\bar{\eta}}$ – абелево многообразие CM-типа, группа Ходжа $\mathrm{Hg}(X_{0\bar{\eta}})$ является тором [24], поэтому соотношение $G \hookrightarrow \mathrm{Hg}(X_{0\bar{\eta}})$ и полупростота G дают соотношение $G = 1$. Следовательно, абелева схема $\pi: X \rightarrow C$ потенциально постоянна, и $B(X)$ верна. Теорема доказана.

§ 12. Вариации

12.1. ТЕОРЕМА. *Предположим, что для некоторого натурального числа $i \geq 2$ существует такой алгебраический цикл Z_i (с рациональными коэффициентами) коразмерности i на $X \times X$, что*

$$j_*v^i = \mathrm{cl}_{X \times X}(Z_i) \cup j_*1.$$

Тогда алгебраический класс $[\mathrm{cl}_{X \times X}(Z_i)]_{0i0i}$ индуцирует алгебраический изоморфизм

$$H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $u = \mathrm{cl}_{X \times X}(Z_i)$ имеем разложение $u = \sum u_{pqrt}$, где $u_{pqrt} \in H^p(C, R^q\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^r(C, R^t\pi_*\mathbb{Q})$. В силу леммы из п. 3.3 u_{0i0i} – алгебраический класс.

Утверждаем, что u_{0i0i} индуцирует алгебраический изоморфизм

$$H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}).$$

Действительно, рассмотрим композицию

$$\begin{aligned}
 H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) &\xrightarrow{\text{pr}_1^*} H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, \mathbb{Q}) \\
 &\xrightarrow{\cup u_{0i0i}} H^2(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \\
 &= H^{2d+2}(X, \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \\
 &\xrightarrow{\text{pr}_{2*}} H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}).
 \end{aligned}$$

В силу (6.2) алгебраический класс j_*v^i индуцирует алгебраический изоморфизм

$$H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}). \quad (12.1)$$

Поэтому из (7.3) следуют соотношения

$$\dim H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) = \dim H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) = \dim H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}),$$

и остается доказать инъективность отображения

$$H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup u_{0i0i}} H^2(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}). \quad (12.2)$$

Имеем

$$\text{cl}_{X \times X}(Z_i) = u = u_{0i0i} + \sum_{p \neq 0} u_{pqrt} + \sum_{r \neq 0} u_{0qrt} + \sum_{q \neq i} u_{0q0t}.$$

Поскольку $\sum_{p \neq 0} u_{pqrt}$ аннулирует $H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, \mathbb{Q})$, то изоморфизм (12.1) определен соответствием

$$\left[u_{0i0i} + \sum_{r \neq 0} u_{0qrt} + \sum_{q \neq i} u_{0q0t} \right] \cup j_*1.$$

Согласно следствию из п. 8.2

$$\begin{aligned}
 j_*1 = \text{cl}_{X \times X}(X \times_C X) &\in [H^0(C, \mathbb{Q}) \otimes H^2(C, \mathbb{Q})] \oplus [H^2(C, \mathbb{Q}) \otimes H^0(C, \mathbb{Q})] \\
 &\oplus [H^1(C, \mathbb{Q}) \otimes H^1(C, \mathbb{Q})].
 \end{aligned}$$

Поэтому $\sum_{r \neq 0} u_{0qrt} \cup j_*1$ аннулирует $H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, \mathbb{Q})$, и изоморфизм (12.1) определен соответствием

$$\left[u_{0i0i} + \sum_{q \neq i} u_{0q0t} \right] \cup j_*1.$$

Наконец,

$$\text{pr}_{2*} \left([H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, \mathbb{Q})] \cup \left[\sum_{q \neq i} u_{0q0t} \cup j_*1 \right] \right) = (0),$$

поэтому изоморфизм (12.1) определен алгебраическим соответствием $u_{0i0i} \cup j_*1$.

В частности, отображение

$$H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cup u_{0i0i} \cup j_*1} H^2(C, R^{2d}\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^2(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})$$

инъективно. Поэтому отображение (12.2) инъективно. Теорема доказана.

12.2. При выполнении условия теоремы из п. 12.1 диаграмму (7.4) можно преобразовать в новую диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} H^0(C, R^{2d+2-i}\pi_*\mathbb{Q}) & \oplus & H^1(C, R^{2d+1-i}\pi_*\mathbb{Q}) & \oplus & H^2(C, R^{2d-i}\pi_*\mathbb{Q}) \\ \simeq \downarrow \varphi_i & & \simeq \downarrow [j_*v^{i-1}]^* & & \simeq \downarrow [u_{0i0i}]^* \\ H^2(C, R^{i-2}\pi_*\mathbb{Q}) & \oplus & H^1(C, R^{i-1}\pi_*\mathbb{Q}) & \oplus & H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \end{array} \quad (12.3)$$

где $u = \text{cl}_{X \times X}(Z_i)$ и все вертикальные стрелки являются алгебраическими изоморфизмами. Мы приходим к следующему результату.

12.3. ТЕОРЕМА. Пусть $\pi: X \rightarrow C$ – комплексная абелева схема с главной поляризацией относительной размерности d над гладкой проективной кривой C . Предположим, что для некоторого натурального числа $i \geq 2$ существует такой алгебраический цикл Z_i (с рациональными коэффициентами) размерности i на $X \times X$, что

$$j_*v^i = \text{cl}_{X \times X}(Z_i) \cup j_*1.$$

Пусть $u = \text{cl}_{X \times X}(Z_i)$, и пусть $u_{0i0i} \in H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q}) \otimes H^0(C, R^i\pi_*\mathbb{Q})$ – соответствующая компонента u .

Тогда алгебраический класс

$$[\Delta_* \text{cl}_X(X_s)] \circ [j_*v^{i-2}] + j_*v^{i-1} + u_{0i0i}$$

определяет алгебраический изоморфизм

$$H^{2d+2-i}(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \mathbb{Q}).$$

В частности, гипотеза $B^i(X)$ верна.

Список литературы

1. André Y. Pour une théorie inconditionnelle des motifs // Publ. Math. IHES. 1996. V. 83. P. 5–49.
2. Аракелов С. Ю. Семейства алгебраических кривых с фиксированными вырождениями // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. № 6. С. 1269–1293.
3. Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972, 1976, 1978.
4. Чжэнь Ш.-Ш. Комплексные многообразия. М.: ИЛ, 1961.
5. Deligne P. Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales // Publ. Math. IHES. 1968. V. 35. P. 259–278.
6. Deligne P. Théorie de Hodge. II // Publ. Math. IHES. 1971. V. 40. P. 5–57.
7. Deligne P. La conjecture de Weil pour les surfaces K3 // Invent. Math. 1972. V. 15. P. 206–226.
8. Faltings G., Chai Ch.-L. Degeneration of Abelian varieties // Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3). V. 22. Berlin–Heidelberg–N. Y. –London–Paris–Tokyo–Hong Kong–Barselona: Springer-Verlag, 1990.
9. Fulton W. Intersection theory. Berlin–Heidelberg–N. Y.–Tokyo: Springer-Verlag, 1984.
10. Gordon B. B. A survey of the Hodge conjecture for Abelian varieties // J. D. Lewis. A survey of the Hodge conjecture. Second edition. CRM Monograph Series. V. 10. Centre de Recherches Mathématiques Université de Montréal, 1999. P. 297–356.
11. Гриффитс Ф., Харрис Дж. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.

12. *Grothendieck A.* Standard conjectures on algebraic cycles // *Algebr. Geom.* London: Oxford Univ. Press, 1969. P. 193–199.
13. *Hodge W. V. D.* The topological invariants of algebraic varieties // *Proc. Int. Congr. Math.* (Cambridge, MA, 1950). V. 1. Providence: Amer. Math. Soc., 1952. P. 182–192.
14. *Kleiman S. L.* Algebraic cycles and the Weil conjectures // *Dix exposés sur la cohomologie des schémas.* Amsterdam: North-Holland, 1968. P. 359–386.
15. *Kleiman S. L.* The standard conjectures // *Proc. Symp. Pure Math.* 1994. V. 55. Part I. P. 3–20.
16. *Lang S.* Abelian varieties. N. Y.: Interscience, 1959.
17. *Lang S.* Fundamentals of Diophantine geometry. N. Y.–Berlin–Heidelberg–Tokyo: Springer-Verlag, 1983.
18. *Lange H., Birkenhake C.* Complex Abelian varieties // *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften.* V. 302. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
19. *Lieberman D.* Numerical and homological equivalence of algebraic cycles on Hodge manifolds // *Amer. J. Math.* 1968. V. 90. P. 366–374.
20. *Манин Ю. И.* Соответствия, мотивы и моноидальные преобразования // *Матем. сб.* 1968. Т. 77(119). С. 475–507.
21. *Милн Дж.* Этальные когомологии. М.: Мир, 1983.
22. *Milne J. S.* Lefschetz motives and the Tate conjecture // *Compositio Math.* 1999. V. 117. P. 45–76.
23. *Mumford D.* Families of abelian varieties // *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups.* *Proc. Sympos. Pure Math.* V. 9. Providence: Amer. Math. Soc., 1966. P. 347–352.
24. *Mumford D.* A note on Shimura’s paper “Discontinuous groups and abelian varieties” // *Math. Ann.* 1969. V. 181. № 4. P. 345–351.
25. *Pohlmann H. J.* Algebraic cycles on abelian varieties of complex multiplication type // *Ann. Math.* 1968. V. 88. № 1. P. 161–180.
26. *Серп Ж.-П.* Алгебраические группы и поля классов. М.: Мир, 1968.
27. *Shioda T.* What is known about the Hodge conjecture? // *Adv. Stud. Pure Math.* 1983. V. 1. P. 55–68.
28. *Танкеев С. Г.* Об алгебраических циклах на поверхностях и абелевых многообразиях // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1981. Т. 45. № 2. С. 398–434.
29. *Танкеев С. Г.* Циклы на простых 5-мерных абелевых многообразиях // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1981. Т. 45. № 4. С. 793–823.
30. *Танкеев С. Г.* Циклы на простых абелевых многообразиях простой размерности // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1982. Т. 46. № 1. С. 155–170.
31. *Танкеев С. Г.* Циклы на абелевых многообразиях и исключительные числа // *Изв. РАН. Сер. матем.* 1996. Т. 60. № 2. С. 159–194.
32. *Tate J.* Algebraic cycles and poles of zeta functions // *Arithmetical Algebraic Geometry* (*Proc. Conf., Purdue Univ., Lafayette, IN, 1963*). N. Y.: Harper and Row, 1965. P. 93–110.
33. *Tate J.* Conjectures on algebraic cycles in l -adic cohomology // *Proc. Symposia in Pure Math.* 1994. V. 55. Part 1. P. 71–83.
34. *Зархин Ю. Г.* Веса простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1984. Т. 48. № 2. С. 264–304.