Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Белов, Некоторые свойства и оценки для неотрицательных тригонометрических полиномов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 4, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/im440>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 15:33:46

УДК 517.5

А. С. Белов

Некоторые свойства и оценки для неотрицательных тригонометрических полиномов

Доказаны несколько новых оценок для неотрицательных тригонометрических полиномов и приведены некоторые их приложения.

Библиография: 9 наименований.

В настоящей статье подробно доказаны и обсуждены несколько новых и, на взгляд автора, важных и интересных неравенств, связанных с неотрицательными тригонометрическими полиномами, а также указаны некоторые приложения доказанных неравенств.

1. Пусть

$$c_k = 2^{-2k} (k!)^{-2} (2k)!, \quad k \geq 0,$$
$$M(n) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n c_{[k/2]}^2, \quad n = 0, 1, \dots; \quad (1)$$

здесь и далее квадратные скобки обозначают целую часть числа (о порядке величины (1) см., например, [1, формула (49)]). Нетрудно доказать, что верна оценка

$$M(n) = \frac{1}{\pi} \left(\ln \left(n + \frac{1}{2} \right) + C_0 + \ln 8 \right) + O \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

где C_0 – известная постоянная Эйлера. Здесь и далее во всех аналогичных соотношениях, предполагается, что n стремится к бесконечности. Впрочем, последнее соотношение приведено только для информации о порядке величины (1) и далее использоваться не будет.

В работе [1, теорема 3] автор доказал, что если n – произвольное натуральное число и $r_1 \geq 1, \dots, r_n \geq 1$ – действительные числа, то

$$-\min_x \sum_{k=1}^n r_k \cos(kx) \geq M(n).$$

Докажем, что для любых действительных чисел $r_1 \geq 1, \dots, r_n \geq 1$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ верно неравенство

$$-\min_x \sum_{k=1}^n r_k \cos(kx + \varphi_k) \geq M(n), \quad (2)$$

т.е. левую часть неравенства (2) невозможно сделать меньше $M(n)$ за счет выбора чисел $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Последнее утверждение вытекает из следующей теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-01-00315).

ТЕОРЕМА 1. Пусть n – произвольное натуральное число. Тогда имеют место следующие утверждения:

1) для любого вещественного тригонометрического полинома

$$T_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad (3)$$

который удовлетворяет условию

$$T_n(x) \geq 0 \quad \text{при всех } x, \quad (4)$$

т.е. является неотрицательным, справедлива оценка

$$\min_{1 \leq k \leq n} (a_k^2 + b_k^2)^{1/2} \leq \frac{1}{M(n)} a_0; \quad (5)$$

2) если неотрицательный тригонометрический полином (3) удовлетворяет условию

$$a_k^2 + b_k^2 \geq 1, \quad k = 1, \dots, n, \quad (6)$$

то

$$a_0 \geq M(n); \quad (7)$$

3) если неотрицательный тригонометрический полином (3) удовлетворяет условию $a_0 = 1$, то найдется такой номер $k = 1, \dots, n$, что

$$(a_k^2 + b_k^2)^{1/2} \leq \frac{1}{M(n)}; \quad (8)$$

4) для любых действительных чисел $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ верно неравенство

$$-\min_x \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \geq M(n) \min_{1 \leq k \leq n} (a_k^2 + b_k^2)^{1/2}. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего покажем, что утверждения 2), 3) и 4) – это равносильные формулировки утверждения 1). Действительно, утверждения 2) и 3) немедленно вытекают из оценки (5). Если в соотношении (3) в качестве a_0 взять левую часть неравенства (9), то условие (4) будет выполнено, и поэтому из оценки (5) следует (9). Таким образом, утверждения 2), 3) и 4) легко получаются из утверждения 1).

Обратно, если число

$$r = \min_{1 \leq k \leq n} (a_k^2 + b_k^2)^{1/2} \quad (10)$$

положительно, то из утверждения 2), примененного к полиному $T_n(x)/r$, немедленно следует оценка (5). Из утверждения 3), примененного к полиному $T_n(x)/a_0$,

вытекает утверждение 1). Если же число (10) равно нулю, то оценка (5) очевидна. Наконец, поскольку условие (4) эквивалентно условию

$$a_0 \geq -\min_x \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

то из неравенства (9) следует (5). Значит, для доказательства теоремы достаточно доказать любое из утверждений 1)–4).

Докажем утверждение 2). По известной теореме Фейера (см. [2, гл. 6, § 5, задача 40]) из условия (4) вытекает существование комплексных чисел $d_0, \dots, d_n$ таких, что

$$T_n(x) = \left| \sum_{k=0}^n d_k e^{ikx} \right|^2.$$

Тогда

$$a_0 = \sum_{k=0}^n |d_k|^2, \quad a_k - ib_k = 2 \sum_{j=0}^{n-k} \bar{d}_j d_{k+j}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Поэтому в силу условия (6) имеем

$$1 \leq |a_k - ib_k| = 2 \left| \sum_{j=0}^{n-k} \bar{d}_j d_{k+j} \right| \leq 2 \sum_{j=0}^{n-k} |d_j| |d_{k+j}|, \quad k = 1, \dots, n.$$

Следовательно, неотрицательный тригонометрический полином

$$T_n^*(x) = \left| \sum_{k=0}^n |d_k| e^{ikx} \right|^2 = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k^* \cos(kx)$$

обладает свойством

$$a_k^* = 2 \sum_{j=0}^{n-k} |d_j| |d_{k+j}| \geq 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

По теореме 3 из работы [1] немедленно получаем (7). Теорема полностью доказана.

Отметим, что если в качестве полинома (3) в теореме 1 возьмем тригонометрический полином $V_n(x)$ из работы [1, формула (7)], то неравенства (5), (7) и (9) преобразуются в равенства, т.е. постоянная (1) в каждой оценке (5), (7)–(9) является точной.

Оценку (9) можно записать в виде неравенства

$$-\min_x \sum_{k=1}^n r_k \cos(kx + \varphi_k) \geq M(n) \min_{1 \leq k \leq n} r_k,$$

которое справедливо для любых действительных чисел $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ и неотрицательных чисел $r_1, \dots, r_n$. Поэтому из утверждения 4) теоремы 1 немедленно следует оценка (2).

Отметим также, что интерес к тригонометрическим полиномам (3), которые удовлетворяют условию (4), возник довольно давно (см. [2, гл. 6, §3, 5, 7]). Например, хорошо известен результат Фейера о том, что для неотрицательного тригонометрического полинома (3) всегда верно неравенство

$$\sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2)^{1/2} \leq na_0,$$

которое для ядра Фейера преобразуется в равенство. Неравенство (5) – это новый точный результат в этой классической теме.

Укажем одно из приложений теоремы 1. Пусть n – произвольное натуральное число и

$$P(z) = \sum_{k=1}^n d_k z^k$$

– многочлен степени n с комплексными коэффициентами такой, что

$$|d_k| \geq 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

Через $I(P)$ обозначим множество значений, которые многочлен P принимает на окружности $\{z: |z| = 1\}$, т.е. $I(P) = \{P(z): |z| = 1\}$. Как непрерывный образ окружности, т.е. компактного множества, множество $I(P)$ является компактным, а значит, его выпуклая оболочка на плоскости, которую будем обозначать через $\hat{I}(P)$, также является компактным множеством. Оказывается, *множество $\hat{I}(P)$ всегда содержит в себе круг $\{z: |z| \leq M(n)\}$, однако для любого $\gamma > M(n)$ множество $\hat{I}(P)$ не обязательно содержит в себе круг $\{z: |z| \leq \gamma\}$.*

Действительно, докажем сначала, что $\{z: |z| \leq M(n)\} \subset \hat{I}(P)$. Для этого возьмем любую точку плоскости $w_0 \notin \hat{I}(P)$. По известной теореме отделимости найдутся два действительных числа a_0 и φ такие, что

$$a_0 + \operatorname{Re}(we^{-i\varphi}) \geq 0 \quad \text{при всех } w \in \hat{I}(P),$$

но $a_0 + \operatorname{Re}(w_0 e^{-i\varphi}) < 0$. Поскольку $a_0 + \operatorname{Re}(P(z)e^{-i\varphi}) \geq 0$ при всех z , $|z| = 1$, то в силу неравенства (2) получим $a_0 \geq M(n)$. Поэтому

$$M(n) \leq a_0 < -\operatorname{Re}(w_0 e^{-i\varphi}) \leq |w_0|.$$

Следовательно, любая точка z , $|z| \leq M(n)$, принадлежит множеству $\hat{I}(P)$.

Пусть

$$V_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k^n \cos(kx)$$

– неотрицательный тригонометрический полином из работы [1, формула (7) и теоремы 1 и 2], для которого $a_0^n = M(n)$ и $a_k^n \geq 1$ при всех $k = 1, \dots, n$. Тогда для многочлена

$$P(z) = \sum_{k=1}^n a_k^n z^k$$

множество $\hat{I}(P)$ содержится в полуплоскости $\{z: \operatorname{Re} z \geq -M(n)\}$ и поэтому при $\gamma > M(n)$ не содержит в себе целиком круг $\{z: |z| \leq \gamma\}$. Этим высказанное утверждение полностью доказано.

2. Если $f \in L_{2\pi}^p$, $1 \leq p \leq \infty$, то, как обычно, обозначим

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

и

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}_t |f(t)|.$$

Будем использовать обозначения

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$$

для положительной и отрицательной частей функции f соответственно.

Автором (см. [3, замечание 4], [4]) доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА А. *Для любых $p \in [1, \infty]$, натуральных $n \leq N$ и тригонометрического полинома с комплексными коэффициентами*

$$\begin{aligned} S_{n,N}(x) &= \sum_{k=n}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=n}^N ((a_k - ib_k)e^{ikx} + (a_k + ib_k)e^{-ikx}) \end{aligned} \quad (11)$$

верны оценки

$$\begin{aligned} \|S_{n,N} - i\tilde{S}_{n,N}\|_p &\leq 2\frac{N}{n}\|S_{n,N}\|_p, \\ \|S_{n,N} + i\tilde{S}_{n,N}\|_p &\leq 2\frac{N}{n}\|S_{n,N}\|_p, \\ \|\tilde{S}_{n,N}\|_p &\leq 2\frac{N}{n}\|S_{n,N}\|_p, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{n,N}(x) &= \sum_{k=n}^N (a_k \sin(kx) - b_k \cos(kx)) \\ &= -\frac{i}{2} \sum_{k=n}^N ((a_k - ib_k)e^{ikx} - (a_k + ib_k)e^{-ikx}) \end{aligned} \quad (13)$$

– сопряженный тригонометрический полином.

Здесь мы продолжаем изучение полиномов вида (11). Основным результатом этого пункта является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Для любых натуральных чисел $n \leq N$ и любого тригонометрического полинома (11) с действительными коэффициентами справедливы оценки

$$\|S_{n,N} - i\tilde{S}_{n,N}\|_\infty = \|S_{n,N} + i\tilde{S}_{n,N}\|_\infty \leq 4 \left[\frac{N+n-1}{n} \right] \left(-\min_x S_{n,N}(x) \right) \quad (14)$$

и

$$\max\{\|S_{n,N}\|_\infty, \|\tilde{S}_{n,N}\|_\infty\} \leq 4 \left[\frac{N+n-1}{n} \right] \left(-\min_x S_{n,N}(x) \right). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_{n,N}(x) dx = 0,$$

то величина, стоящая в круглых скобках в правой части неравенства (15), может быть представлена в виде

$$a = -\min_x S_{n,N}(x) = \max_x S_{n,N}^-(x) = \|S_{n,N}^-\|_\infty \geq 0. \quad (16)$$

Если a_0 – произвольное вещественное число, то в силу соотношений (16) условие

$$a_0 + S_{n,N}(x) \geq 0 \quad \text{при всех } x \quad (17)$$

эквивалентно условию $a_0 \geq a$, т.е. неотрицательная величина из (16), которую мы обозначили через a , есть наименьшее число a_0 , для которого верно (17). Поэтому в рассуждениях, которые последуют далее, можно предположить, что $a_0 = a$.

Итак, пусть верно условие (17). Возьмем произвольные целые неотрицательные числа q и τ , которые удовлетворяют условиям

$$\tau \leq n-1, \quad q(\tau+1) \geq N-n. \quad (18)$$

Через

$$F_\tau(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\tau} \left(1 - \frac{k}{\tau+1} \right) \cos(kx)$$

будем обозначать ядро Фейера. Тогда

$$\begin{aligned} 2F_\tau(x) \sum_{j=0}^q e^{ij(\tau+1)x} &= \sum_{k=-\tau}^{-1} \left(1 + \frac{k}{\tau+1} \right) e^{ikx} + \sum_{k=0}^{q(\tau+1)} e^{ikx} \\ &\quad + \sum_{k=q(\tau+1)+1}^{q(\tau+1)+\tau} \left(q+1 - \frac{k}{\tau+1} \right) e^{ikx}. \end{aligned}$$

Поэтому из (11) и (18) имеем

$$\frac{1}{2} \sum_{k=n}^N (a_k - ib_k) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{n,N}(x+v) e^{-inv} 2F_{\tau}(v) \left(\sum_{j=0}^q e^{-ij(\tau+1)v} \right) dv.$$

Отсюда и из условий (17) и (18) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \sum_{k=n}^N (a_k - ib_k) e^{ikx} \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_{n,N}(x+v)| 2F_{\tau}(v) (q+1) dv \\ &\leq \frac{q+1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (|S_{n,N}(x+v) + a_0| + |a_0|) 2F_{\tau}(v) dv \\ &= \frac{q+1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2a_0 + S_{n,N}(x+v)) 2F_{\tau}(v) dv = 2(q+1)a_0. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу соотношений (11) и (13) верна оценка

$$|S_{n,N}(x) + i\tilde{S}_{n,N}(x)| = \left| \sum_{k=n}^N (a_k - ib_k) e^{ikx} \right| \leq 4(q+1)a_0 \quad \text{при всех } x.$$

Поэтому

$$\|S_{n,N} - i\tilde{S}_{n,N}\|_{\infty} = \|S_{n,N} + i\tilde{S}_{n,N}\|_{\infty} \leq 4(q+1)a_0$$

и

$$2 \max\{\|S_{n,N}\|_{\infty}, \|\tilde{S}_{n,N}\|_{\infty}\} \leq \|S_{n,N} - i\tilde{S}_{n,N}\|_{\infty} + \|S_{n,N} + i\tilde{S}_{n,N}\|_{\infty} \leq 8(q+1)a_0.$$

В последних двух оценках целые неотрицательные числа τ и q можно выбрать любым образом, лишь бы только выполнялись условия (18). Положим

$$\tau = n - 1 \quad \text{и} \quad q = \left\lfloor \frac{N-1}{n} \right\rfloor.$$

Тогда условия (18) выполнены, и мы при $a_0 = a$, учитывая обозначение (16), получаем оценки (14) и (15). Теорема полностью доказана.

Из теоремы 2 и (16) сразу вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любых натуральных чисел $n \leq N \leq 2n$ и любого тригонометрического полинома (11) с действительными коэффициентами справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \|S_{n,N} - i\tilde{S}_{n,N}\|_{\infty} &= \|S_{n,N} + i\tilde{S}_{n,N}\|_{\infty} \leq 8\|S_{n,N}^{-}\|_{\infty}, \\ \max\{\|S_{n,N}\|_{\infty}, \|\tilde{S}_{n,N}\|_{\infty}\} &\leq 8\|S_{n,N}^{-}\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Отметим, что при всех x

$$|S_{n,N}(x)| = S_{n,N}^+(x) + S_{n,N}^-(x).$$

Поэтому всегда $\|S_{n,N}\|_\infty \geq \|S_{n,N}^-\|_\infty$. Отсюда и из оценок (14) и (15) легко вытекают неравенства, аналогичные неравенствам (12) при $p = \infty$ с постоянной

$$4 \left\lceil \frac{N+n-1}{n} \right\rceil \leq 8 \frac{N}{n},$$

т.е. неравенствам (12) с заменой в их правых частях постоянного коэффициента 2 на 8, что не очень существенно. Таким образом, теорема 2 в некотором смысле дополняет теорему А.

Еще одним следствием теоремы 2 является

ТЕОРЕМА 3. *Пусть*

$$S_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad n \geq 0, \quad (19)$$

– частные суммы тригонометрического ряда

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \quad (20)$$

с действительными коэффициентами. Тогда если целые числа m и N таковы, что $0 \leq m \leq N$ и

$$S_N(x) \geq 0 \quad \text{при всех } x, \quad (21)$$

то справедливы оценки

$$\|(S_N - S_m) + i(\tilde{S}_N - \tilde{S}_m)\|_\infty \leq 4 \left\lceil \frac{N+m}{m+1} \right\rceil \|S_m\|_\infty, \quad (22)$$

$$\|S_N - S_m\|_\infty \leq 4 \left\lceil \frac{N+m}{m+1} \right\rceil \|S_m\|_\infty, \quad (23)$$

$$\|\tilde{S}_N - \tilde{S}_m\|_\infty \leq 4 \left\lceil \frac{N+m}{m+1} \right\rceil \|S_m\|_\infty, \quad (24)$$

$$\frac{\|S_N\|_\infty}{N+1} \leq 9 \frac{\|S_m\|_\infty}{m+1}, \quad (25)$$

$$\frac{\|S_N + i\tilde{S}_N\|_\infty}{N+1} \leq 9 \frac{\|S_m + i\tilde{S}_m\|_\infty}{m+1}. \quad (26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m = N$, то оценки (22)–(26) очевидны. Пусть $m < N$. Положим $n = m + 1$. Тогда из (21) при всех x имеем

$$\|S_m\|_\infty + (S_N(x) - S_m(x)) \geq 0.$$

В теореме 2 положим $S_{n,N} = S_N - S_m$. Из оценок (14) и (15) немедленно получаем оценки (22)–(24). Из (23) имеем

$$\|S_N\|_\infty \leq \|S_m\|_\infty \left(1 + 4 \left\lfloor \frac{N+m}{m+1} \right\rfloor\right),$$

и, аналогично, из (22), поскольку $\|S_m\|_\infty \leq \|S_m + i\tilde{S}_m\|_\infty$, видно, что

$$\|S_N + i\tilde{S}_N\|_\infty \leq \|S_m + i\tilde{S}_m\|_\infty + 4 \left\lfloor \frac{N+m}{m+1} \right\rfloor \|S_m + i\tilde{S}_m\|_\infty.$$

Осталось заметить, что

$$1 + 4 \left\lfloor \frac{N+m}{m+1} \right\rfloor \leq 1 + \frac{8N}{m+1} \leq \frac{9N+1}{m+1} < \frac{9(N+1)}{m+1},$$

и оценки (25) и (26) также доказаны. Этим теорема полностью доказана.

Положим

$$S_{n,N}(x) = F_{[N/n]}(nx) - \frac{1}{2}.$$

Тогда из известных свойств ядра Фейера сразу вытекает, что $\|S_{n,N}^-\|_\infty = 1/2$ и

$$\begin{aligned} \frac{\|S_{n,N} + i\tilde{S}_{n,N}\|_\infty}{\|S_{n,N}^-\|_\infty} &\geq 2|S_{n,N}(0)| = \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor \geq \frac{1}{3} \left\lfloor \frac{N+n-1}{n} \right\rfloor, \\ \frac{\|S_{n,N}\|_\infty}{\|S_{n,N}^-\|_\infty} &\geq 2|S_{n,N}(0)| \geq \frac{1}{3} \left\lfloor \frac{N+n-1}{n} \right\rfloor, \\ \frac{\|\tilde{S}_{n,N}\|_\infty}{\|S_{n,N}^-\|_\infty} &\geq 2 \left| \tilde{S}_{n,N} \left(\frac{\pi}{2n[N/n]} \right) \right| \\ &= 2 \sum_{k=1}^{[N/n]} \left(1 - \frac{k}{[N/n] + 1} \right) \sin \left(\frac{\pi k}{2[N/n]} \right) \\ &\geq 2 \sum_{k=1}^{[N/n]} \left(1 - \frac{k}{[N/n] + 1} \right) \frac{k}{[N/n]} \\ &= \frac{[N/n] + 2}{6} > \frac{1}{3} \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor \geq \frac{1}{18} \left\lfloor \frac{N+n-1}{n} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Следовательно, неравенства (14) и (15) неумлучшаемы с точностью до абсолютной положительной постоянной. Например, в (14) нельзя вместо коэффициента 4 взять число, меньшее $1/3$. То же самое относится к оценкам (25) и (26): достаточно взять $S_N = F_N$. В этом случае условие (21) будет выполнено, $\|S_N\|_\infty = \frac{N+1}{2}$ и $\|S_m + i\tilde{S}_m\|_\infty < m+1$. Поэтому в оценках (14) и (15), а также и в оценках (22)–(26) порядок $\frac{N+1}{m+1}$ является точным. Таким образом, в качестве приложения теоремы 2 получены неумлучшаемые по порядку оценки (25) и (26).

Укажем еще некоторые приложения теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть тригонометрический ряд (20) является рядом Фурье некоторой действительной функции $f \in L_{2\pi}^\infty$ и

$$0 \leq n_1 < n_2 < \dots \quad (27)$$

– произвольная строго возрастающая последовательность целых чисел. Если существует такая постоянная C , что для любого натурального k выполнено хотя бы одно из двух условий:

$$S_{n_k}(x) \geq -C \quad \text{при всех } x \quad (28)$$

или

$$S_{n_k}(x) \leq C \quad \text{при всех } x, \quad (29)$$

где использовано обозначение (19), то последовательность $\{\|S_{n_k}\|_\infty\}_{k=1}^\infty$ ограничена и, более того,

$$\|S_{n_k}\|_\infty \leq 27\|f\|_\infty + 8C \quad \text{при всех } k \geq 1. \quad (30)$$

Если сопряженный ряд к ряду (20) также является рядом Фурье некоторой функции $\tilde{f} \in L_{2\pi}^\infty$, то последовательность $\{\|\tilde{S}_{n_k}\|_\infty\}_{k=1}^\infty$ также ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть далее через

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(x) \quad \text{и} \quad V_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} S_k(x), \quad n \geq 0, \quad (31)$$

обозначены соответственно суммы Фейера и Валле-Пуссена для ряда (20). Тогда, как известно, $\|\sigma_n\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ и

$$\|V_n\|_\infty = \frac{1}{n+1} \|(2n+1)\sigma_{2n} - n\sigma_{n-1}\|_\infty \leq 3\|f\|_\infty, \quad n \geq 0.$$

Если верно условие (28), то при всех x

$$S_{n_k}(x) - V_{n_k}(x) \geq -C - 3\|f\|_\infty,$$

и из следствия 1, примененного к полиному $S_{n,N} = S_{n_k} - V_{n_k}$, где $n = n_k + 1$, $N = 2n_k$, сразу получаем оценки

$$\|S_{n_k} - V_{n_k}\|_\infty \leq 8(C + 3\|f\|_\infty), \quad \|\tilde{S}_{n_k} - \tilde{V}_{n_k}\|_\infty \leq 8(C + 3\|f\|_\infty). \quad (32)$$

Аналогично, если верно условие (29), то при всех x

$$V_{n_k}(x) - S_{n_k}(x) \geq -C - 3\|f\|_\infty,$$

и поэтому согласно следствию 1 получаем оценки (32), откуда имеем

$$\|S_{n_k}\|_\infty \leq \|S_{n_k} - V_{n_k}\|_\infty + \|V_{n_k}\|_\infty \leq 8(C + 3\|f\|_\infty) + 3\|f\|_\infty,$$

т.е. получена оценка (30). Если, кроме того, известно, что $\tilde{f} \in L_{2\pi}^\infty$, то $\|\tilde{V}_{n_k}\|_\infty \leq 3\|\tilde{f}\|_\infty$, и из (32) выводим

$$\|\tilde{S}_{n_k}\|_\infty \leq 8(C + 3\|f\|_\infty) + 3\|\tilde{f}\|_\infty$$

для всех $k \geq 1$. Следствие полностью доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть тригонометрический ряд (20) является рядом Фурье некоторой действительной функции $f \in C_{2\pi}$ и задана произвольная строго возрастающая последовательность целых чисел (27). Если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число k_0 , что при всех $k \geq k_0$ будет выполнено хотя бы одно из двух условий:

$$S_{n_k}(x) - f(x) \geq -\varepsilon \quad \text{при всех } x \quad (33)$$

или

$$S_{n_k}(x) - f(x) \leq \varepsilon \quad \text{при всех } x, \quad (34)$$

то последовательность $\{S_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно на всей прямой к функции f . Кроме того, если сопряженный ряд к ряду (20) также является рядом Фурье некоторой функции $\tilde{f} \in C_{2\pi}$, то последовательность $\{\tilde{S}_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ также сходится равномерно на всей прямой к функции $\tilde{f}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать те же обозначения, что и при доказательстве следствия 2, в частности обозначения (31). Тогда, как известно, $\|V_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и поэтому при всех достаточно больших k из условия (33) вытекает условие

$$S_{n_k}(x) - V_{n_k}(x) \geq -2\varepsilon \quad \text{при всех } x,$$

а из (34) следует условие

$$V_{n_k}(x) - S_{n_k}(x) \geq -2\varepsilon \quad \text{при всех } x.$$

Отсюда, как и при доказательстве следствия 2, по следствию 1 получаем

$$\|S_{n_k} - V_{n_k}\|_{\infty} \leq 16\varepsilon, \quad \|\tilde{S}_{n_k} - \tilde{V}_{n_k}\|_{\infty} \leq 16\varepsilon \quad (35)$$

при всех достаточно больших k . Поэтому

$$\|S_{n_k} - f\|_{\infty} \leq \|S_{n_k} - V_{n_k}\|_{\infty} + \|V_{n_k} - f\|_{\infty} \leq 17\varepsilon$$

при всех достаточно больших k . Следовательно, $\|S_{n_k} - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Если известно, что $\tilde{f} \in C_{2\pi}$, то из (35) также получаем

$$\|\tilde{S}_{n_k} - \tilde{f}\|_{\infty} \leq \|\tilde{S}_{n_k} - \tilde{V}_{n_k}\|_{\infty} + \|\tilde{V}_{n_k} - \tilde{f}\|_{\infty} \leq 17\varepsilon$$

при всех достаточно больших k и $\|\tilde{S}_{n_k} - \tilde{f}\|_{\infty} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следствие доказано.

Доказанные следствия 2 и 3 несколько обобщают теорему Пэли и Зигмунда (см. [5, т. 2, гл. 13, теорема 4.12]), а также теорему Фейера (см. [5, т. 1, гл. 7, теорема 6.14]). Заметим, что изложенные доказательства следствий 2 и 3, которые основаны на следствии 1, существенно отличны от известных доказательств (см. [5]) теоремы Пэли и Зигмунда и теоремы Фейера.

3. Покажем, что если известна оценка снизу всех частных сумм тригонометрического полинома (11), то оценки (14) и (15) могут быть улучшены. Соответствующие результаты, по сути, получены автором в работе [6] (см. также [7, теорема 6]), а здесь будут изложены некоторые следствия из этих результатов.

Через $\alpha \in (0, 1)$ обозначим единственный (см. [5, т. 1, с. 307]) корень уравнения

$$\int_0^{3\pi/2} t^{-\alpha} \cos t \, dt = 0. \quad (36)$$

Известно, что $\alpha = 0.308 \dots$.

ТЕОРЕМА 4. *Для любых натуральных чисел $n \leq N$, вещественного тригонометрического полинома (11) и действительного числа γ , которые при всех x и $m = n, \dots, N$ удовлетворяют условию*

$$\gamma + \sum_{k=n}^m (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \geq 0, \quad (37)$$

справедливы оценки

$$\|S_{n,N}\|_\infty \leq 18\gamma \left(\frac{N}{n}\right)^{1-\alpha}, \quad (38)$$

$$\|\tilde{S}_{n,N}\|_\infty \leq 63\gamma \left(\frac{N}{n}\right)^{1-\alpha}. \quad (39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя обе части неравенства в условии (37) по интервалу $(0, 2\pi)$, видим, что $\gamma \geq 0$. Будем на протяжении этого доказательства считать, что $a_0 = 0$, $a_k = 0$, $b_k = 0$ при $k = 1, \dots, n-1$ и $k > N$, $\varphi(k) = 0$ при $k = 1, \dots, n-1$, $\varphi(k) = \gamma$ при $k \geq n$ и для всех $m \geq 0$

$$S_m(x) = \sum_{k=1}^m (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Тогда из условия (37) следует, что при всех x и $m \geq 1$ выполнено неравенство

$$S_m(x) \geq -\varphi(m).$$

Из теоремы 1.3 работы [6] имеем

$$\begin{aligned} \|S_{n,N}\|_\infty &= \|S_N\|_\infty \leq 5 \left(\varphi(N) + N^{1-\alpha} \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\varphi(m)}{m^{2-\alpha}} \right) \\ &= 5\gamma + 5N^{1-\alpha} \sum_{m=n}^{N-1} \frac{\gamma}{m^{2-\alpha}} \\ &\leq 5\gamma + 5\gamma N^{1-\alpha} \sum_{m=n}^{N-1} \left(\int_n^N \frac{dt}{t^{2-\alpha}} + \frac{1}{n^{2-\alpha}} \right) \\ &\leq 5\gamma + 5\gamma \left(\frac{N}{n}\right)^{1-\alpha} \left(\frac{1}{1-\alpha} + 1 \right) \\ &\leq 5\gamma \left(\frac{N}{n}\right)^{1-\alpha} \left(2 + \frac{1}{1-\alpha} \right) \leq 18\gamma \left(\frac{N}{n}\right)^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Этим доказана оценка (38).

Аналогично, из теоремы 6 работы [7] выводим

$$\begin{aligned}\|\tilde{S}_{n,N}\|_\infty &\leq 5\left(2 + \frac{1}{1-\alpha}\right)\left(\varphi(N) + N^{1-\alpha} \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\varphi(m)}{m^{2-\alpha}}\right) \\ &\leq 18\left(2 + \frac{1}{1-\alpha}\right)\gamma\left(\frac{N}{n}\right)^{1-\alpha} \leq 63\gamma\left(\frac{N}{n}\right)^{1-\alpha},\end{aligned}$$

и оценка (39) также доказана.

Отметим, что условие (37) можно записать в виде

$$\gamma \geq \max_{n \leq m \leq N} \left\{ -\min_x \sum_{k=n}^m (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \right\}. \quad (40)$$

Обозначим через $\gamma(n, N)$ правую часть неравенства (40). Поскольку условия (37) и (40) эквивалентны, то оценки (38) и (39) будут верны при $\gamma = \gamma(n, N)$ для всех натуральных $n \leq N$ и любого вещественного тригонометрического полинома (11). Поэтому теорема 4 может рассматриваться как вариант теоремы 2.

Хорошо известно (см. [5, т. 1, с. 307 и с. 592]), что существует такая абсолютная положительная постоянная γ , что при всех x и $m \geq 1$

$$\gamma + \sum_{k=1}^m k^{-\alpha} \cos(kx) \geq 0.$$

Следовательно, если мы рассмотрим полином

$$S_{n,N}(x) = \sum_{k=1}^{[N/n]} k^{-\alpha} \cos(knx),$$

то условие (37) будет выполнено и будут верны оценки

$$\|S_{n,N}\|_\infty = |S_{n,N}(0)| = \sum_{k=1}^{[N/n]} k^{-\alpha} \asymp \left(\frac{N}{n}\right)^{1-\alpha} \asymp \left| \tilde{S}_{n,N}\left(\frac{\pi}{2N}\right) \right|.$$

Значит, порядок $(N/n)^{1-\alpha}$ в оценках (38) и (39) точен, т.е. оценки (38) и (39) не-улучшаемы с точностью до абсолютного положительного множителя. Отметим, что неравенства типа (38) и (39) анонсированы автором в [8, теорема 1].

Так же, как из теоремы 2 следует теорема 3, из теоремы 4 вытекает

ТЕОРЕМА 5. Пусть все частные суммы тригонометрического ряда (20) с вещественными коэффициентами неотрицательны, т.е.

$$S_j(x) \geq 0 \quad \text{при всех } x \text{ и } j \geq 1. \quad (41)$$

Тогда для любых целых чисел $0 \leq m \leq N$ справедливы оценки

$$\|S_N - S_m\|_\infty \leq 18 \|S_m\|_\infty \left(\frac{N}{m+1} \right)^{1-\alpha}, \quad (42)$$

$$\|\tilde{S}_N - \tilde{S}_m\|_\infty \leq 63 \|S_m\|_\infty \left(\frac{N}{m+1} \right)^{1-\alpha}, \quad (43)$$

$$\frac{\|S_N\|_\infty}{(N+1)^{1-\alpha}} \leq 19 \frac{\|S_m\|_\infty}{(m+1)^{1-\alpha}}, \quad (44)$$

$$\frac{\|S_N + i\tilde{S}_N\|_\infty}{(N+1)^{1-\alpha}} \leq 82 \frac{\|S_m + i\tilde{S}_m\|_\infty}{(m+1)^{1-\alpha}}. \quad (45)$$

В частности,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n\|_\infty}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq 19 \inf_{m \geq 0} \frac{\|S_m\|_\infty}{(m+1)^{1-\alpha}}, \quad (46)$$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n + i\tilde{S}_n\|_\infty}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq 82 \inf_{m \geq 0} \frac{\|S_m + i\tilde{S}_m\|_\infty}{(m+1)^{1-\alpha}}. \quad (47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (41) имеем

$$\|S_m\|_\infty + (S_k(x) - S_m(x)) \geq 0 \quad \text{при всех } x \text{ и } k \geq m.$$

Если $m = N$, то оценки (42)–(45) очевидны. Пусть $m < N$. В теореме 4 возьмем $n = m+1$ и $S_{n,N}(x) = S_N(x) - S_m(x)$, $\gamma = \|S_m\|_\infty$. Тогда условие (37) выполнено. Из оценок (38) и (39) получаем неравенства (42) и (43). Из (42) имеем

$$\begin{aligned} \|S_N\|_\infty &\leq \|S_m\|_\infty + \|S_N - S_m\|_\infty \\ &\leq \|S_m\|_\infty \left(1 + 18 \left(\frac{N}{m+1} \right)^{1-\alpha} \right) \leq 19 \|S_m\|_\infty \left(\frac{N}{m+1} \right)^{1-\alpha}, \end{aligned}$$

и оценка (44) доказана. Из (42) и (43) выводим

$$\begin{aligned} \|S_N + i\tilde{S}_N\|_\infty &\leq \|S_N - S_m\|_\infty + \|\tilde{S}_N - \tilde{S}_m\|_\infty + \|S_m + i\tilde{S}_m\|_\infty \\ &\leq (18 + 63) \|S_m\|_\infty \left(\frac{N}{m+1} \right)^{1-\alpha} + \|S_m + i\tilde{S}_m\|_\infty \\ &\leq 82 \|S_m + i\tilde{S}_m\|_\infty \left(\frac{N}{m+1} \right)^{1-\alpha}, \end{aligned}$$

и оценка (45) также доказана. Из оценки (44), взяв верхний предел по N , а затем нижнюю грань по $m \geq 0$, сразу получаем (46). Аналогично, из (45) следует (47). Теорема доказана.

Из теоремы 5, в частности, вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4. Если все частные суммы тригонометрического ряда (20) с вещественными коэффициентами неотрицательны, то выполнено либо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n\|_\infty}{(n+1)^{1-\alpha}} = 0, \quad (48)$$

либо

$$0 < \inf_{n \geq 0} \frac{\|S_n\|_\infty}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq \sup_{n \geq 0} \frac{\|S_n\|_\infty}{(n+1)^{1-\alpha}} < \infty. \quad (49)$$

Более того, будет выполнено или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n + i\tilde{S}_n\|_\infty}{(n+1)^{1-\alpha}} = 0, \quad (50)$$

или

$$0 < \inf_{n \geq 0} \frac{\|S_n + i\tilde{S}_n\|_\infty}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq \sup_{n \geq 0} \frac{\|S_n + i\tilde{S}_n\|_\infty}{(n+1)^{1-\alpha}} < \infty. \quad (51)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценок (46) и (44) следуют оценки

$$\begin{aligned} \inf_{m \geq 0} \frac{\|S_m\|_\infty}{(m+1)^{1-\alpha}} &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n\|_\infty}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\|S_n\|_\infty}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq 19 \inf_{m \geq 0} \frac{\|S_m\|_\infty}{(m+1)^{1-\alpha}}, \\ \sup_{n \geq 0} \frac{\|S_n\|_\infty}{(n+1)^{1-\alpha}} &\leq 19 \|S_0\|_\infty < \infty. \end{aligned}$$

Поэтому если условие (48) не выполнено, то верно (49). Аналогично, если (50) не выполнено, то из (47) и (45) вытекают оценки (51). Следствие доказано.

Отметим, что, как указывалось выше, для ряда

$$\gamma + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} \cos(kx) \quad (52)$$

при достаточно большом γ условие (41) выполнено и

$$\frac{\|S_n\|_\infty}{(n+1)^{1-\alpha}} \asymp 1.$$

Поэтому оценки (44) и (45) по порядку $((N+1)/(m+1))^{1-\alpha}$ неулучшаемы. Их можно рассматривать как аналог неравенств (25) и (26) при наличии условия (41).

Обратим внимание на то, что для ряда (52) имеет место случай (49), (51). Для тригонометрического ряда

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} \cos(kx),$$

все частные суммы которого неотрицательны (см. [2, гл. 6, § 4, задача 28]), имеет место случай (48), (50).

Заметим, что для выполнения оценок (44) и (45) достаточно проверить условие (41) только при $j = 1, \dots, N$, поскольку всегда можно взять $a_n = 0$, $b_n = 0$ при $n > N$.

Отметим также, что условия (48), (50) выполняются одновременно. Действительно, из условия (50) следует (48) очевидным образом. Обратно, из (48) при натуральном n имеем (см. [7, лемма 5])

$$\|\tilde{S}_n\|_\infty \leq \|S_n\|_\infty + \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)^{-1} \|S_j\|_\infty = o(n^{1-\alpha}).$$

Отсюда следует (50). Поскольку условия (48) и (50) выполняются одновременно, то и условия (49) и (51) также выполняются одновременно.

Из следствия 4 немедленно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5. *Если все частные суммы и все коэффициенты тригонометрического ряда*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) \quad (53)$$

неотрицательны, то либо выполнено равенство

$$\sum_{k=0}^n a_k = o(n^{1-\alpha}), \quad (54)$$

либо существуют такие положительные постоянные C_1 и C_2 , что

$$C_1 n^{1-\alpha} \leq \sum_{k=0}^n a_k \leq C_2 n^{1-\alpha} \quad \text{при всех } n \geq 1. \quad (55)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что для ряда (53) как частного случая ряда из (20) выполнено равенство

$$\|S_n\|_\infty = \sum_{k=0}^n a_k,$$

и применить следствие 4.

Последовательность неотрицательных чисел $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ условимся называть *слабо невозрастающей*, если найдутся такие положительная постоянная C_3 и натуральное число k_0 , что для любых целых чисел $k_0 \leq n \leq m \leq 2n$ верна оценка $a_m \leq C_3 a_n$.

Наконец, из следствия 5 имеем

СЛЕДСТВИЕ 6. Если все частные суммы тригонометрического ряда (53) неотрицательны и последовательность коэффициентов $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ положительна и является слабо невозрастающей, то либо

$$a_n = o(n^{-\alpha}), \quad (56)$$

либо существуют такие положительные постоянные C_4 и C_5 , что

$$C_4 n^{-\alpha} \leq a_n \leq C_5 n^{-\alpha} \quad \text{при всех } n \geq 1. \quad (57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n \geq 2k_0$ из определения слабо невозрастающей последовательности имеем

$$\frac{n}{2} a_n \leq \left(n - \left[\frac{n}{2} \right] \right) a_n \leq \sum_{k=[n/2]+1}^n C_3 a_k \leq C_3 \sum_{k=0}^n a_k.$$

Отсюда, если верно соотношение (54), получаем (56), а если выполнены неравенства (55), то получаем

$$\frac{n}{2} a_n \leq C_3 \sum_{k=0}^n a_k \leq C_3 C_2 n^{1-\alpha},$$

откуда имеем оценку

$$a_n \leq 2C_3 C_2 n^{-\alpha} \quad \text{при всех } n \geq 2k_0. \quad (58)$$

Следовательно, верхняя оценка (57) доказана. Пусть теперь натуральное число q таково, что

$$2^{q(1-\alpha)} C_1 \geq 2C_2.$$

Тогда при натуральных n из (55) имеем

$$\begin{aligned} 2C_2 n^{1-\alpha} &\leq C_1 (2^q n)^{1-\alpha} \leq \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=n+1}^{2^q n} a_k \\ &\leq C_2 n^{1-\alpha} + \sum_{k=n+1}^{2^q n} a_k. \end{aligned}$$

Отсюда при $n \geq k_0$ получаем

$$C_2 n^{1-\alpha} \leq \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{k=2^s n+1}^{2^{s+1} n} a_k \leq \sum_{s=0}^{q-1} 2^s n C_3 a_{2^s n} \leq n \left(\sum_{s=0}^{q-1} 2^s C_3^{s+1} \right) a_n,$$

и нижняя оценка (57) также доказана.

Следствие 6 дополняет результат автора [9, теорема 2].

Список литературы

1. Белов А. С. Об одной экстремальной задаче о минимуме тригонометрического полинома // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 6. С. 212–226.
2. Поллиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. II. М.: Наука, 1978.
3. Белов А. С. Об условиях сходимости (ограниченности) в среднем частных сумм тригонометрического ряда // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа. М.: АФЦ, 1999. С. 1–17.
4. Белов А. С. О некоторых вопросах поведения частных сумм тригонометрического ряда // Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 10-й Саратовской зимней школы (27 янв.–2 февр. 2000 г.). Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2000. С. 16–17.
5. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965.
6. Белов А. С. Об оценках сверху частных сумм тригонометрического ряда через оценки снизу // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 11. С. 55–74.
7. Белов А. С. О тригонометрических рядах с неотрицательными частными суммами, которые не являются рядами Фурье–Лебега // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 1. С. 24–41.
8. Белов А. С. Об условиях сходимости в среднем тригонометрических рядов Фурье // Тезисы докладов международной конференции “Теория приближений и гармонический анализ” (Тула, 26–29 мая 1998 г.). Тула, 1998. С. 38–40.
9. Белов А. С. О коэффициентах тригонометрических рядов с неотрицательными частичными суммами // Матем. заметки. 1987. Т. 41. № 2. С. 152–158.

Поступило в редакцию
13.VII.2002