Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. В. Пальцев, Асимптотика спектра интегральных операторов свертки на конечном интервале с однородными полярными ядрами, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 4, 67–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/im443>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 05:20:51

УДК 517.948.32+35

Б. В. Пальцев

**Асимптотика спектра интегральных
операторов свертки на конечном интервале
с однородными полярными ядрами**

Получены асимптотические формулы для собственных значений интегральных операторов свертки на конечном интервале с однородными полярными (в общем случае комплексными) ядрами. Задача на собственные значения и собственные функции в образах Фурье–Лапласа сводится к задаче Гильберта линейного сопряжения для голоморфной вектор-функции с двумя компонентами. Последняя задача, в свою очередь, приводится к системе интегральных уравнений на полуоси, аналитические свойства решений которой исследуются в образах Меллина в банаховых пространствах голоморфных функций с фиксированными полюсами. Изучена структура в особых точках и асимптотическое поведение при больших значениях приведенного спектрального параметра канонической матрицы решений возникающей задачи Гильберта. В результате исследования получающихся характеристических уравнений найдены три, а в положительном самосопряженном случае – четыре члена с оценками остатков в асимптотических разложениях (по номеру) собственных значений.

Библиография: 34 наименования.

§ 1. Введение

Настоящая работа представляет собой развернутое изложение части результатов автора, анонсированных в [1], и посвящена подробному изучению асимптотического поведения собственных значений λ_l при $l \rightarrow \infty$ семейства интегральных операторов свертки

$$\int_0^T k(t-\tau)u_l(\tau) d\tau = \lambda_l u_l(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.1)$$

для которых образ Фурье ядра $k(s)$ – функция $\tilde{K}(x)$ – является невырожденной однородной функцией, т. е.

$$\tilde{K}(cx) = c^{-\gamma} \tilde{K}(x) \quad \forall c > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

с ограничением $0 < \gamma < 1$. Под образом Фурье ядра $k(s)$ понимается функция

$$\tilde{K}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixs} k(s) ds. \quad (1.2)$$

Статья доработана и подготовлена к опубликованию при финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-01-00582).

Ядро $k(s)$ в (1.1), вообще говоря, должно быть определено только на отрезке $[-T, T]$, но мы будем предполагать, что оно является сужением на $[-T, T]$ функции, обозначаемой также $k(s)$, определенной на всей действительной оси $\mathbb{R}$, гладкой при всех s , за исключением $s = 0$, и преобразование Фурье ядра будем понимать как преобразование Фурье (1.2) такого продолжения.

В [1] была получена также асимптотика собственных функций $u_l(t)$ уравнения (1.1), однако этот материал в настоящей статье не приведен ввиду слишком большого ее объема.

Асимптотики спектров операторов свертки и несколько более общих интегральных операторов на конечном интервале, а также в ограниченных многомерных областях изучались, в основном, для самосопряженного случая, например, в [2]–[6]. В этих работах были рассмотрены довольно широкие классы ядер. Следует отметить работу [3], в которой рассматривались положительные операторы на отрезке, а также работу [6], в которой даже в многомерном случае получена асимптотика спектра для случаев не обязательно положительных, более общих, чем разностные, ядер. Однако методика всех этих работ, за исключением [5], существенно использующая на определенном этапе в той или иной форме вариационные принципы для спектра самосопряженных операторов, позволяет получить лишь первый член асимптотики собственных значений. Результаты при этом формулируются в терминах характера убывания символа (в нашем случае $\tilde{K}(x)$) при $|x| \rightarrow \infty$.

Известно немного работ, относящихся к несамосопряженному случаю (см., например, [7]–[10]). В работах [7], [8] для некоторых интегральных операторов, более общих, чем операторы свертки, найдены первые два члена асимптотики для λ_l . В [9], [10] был изучен случай, когда $\tilde{K}(z)$ является рациональной функцией z , определены условия, обеспечивающие правильность спектра, найдены асимптотические разложения собственных значений и собственных функций. До недавнего времени первые два члена асимптотики собственных значений были получены только в случаях, сводящихся к обыкновенным дифференциальным уравнениям (см., например, [7], [8]). Задача (1.1) для операторов, рассмотренных в [9], [10], также может быть сведена к дифференциальным уравнениям, однако автором был использован иной подход, и рассмотрения проводились в образах Фурье.

Поэтому, на взгляд автора, замечательной оказалась работа [11], в которой для ядра $k(s) = |s|^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, были найдены не строго, без должных обоснований, первые два члена асимптотики собственных значений и оценка остатка. Оказалось, что в первых двух членах асимптотическое разложение собственных значений этого оператора, уже не сводящегося к дифференциальному, ведет себя так же, как и асимптотические разложения дифференциальных операторов. Успех работы [11] связан с тем, что С. Укаи на пути сведения задачи (1.1) к бесконечной системе дифференциальных уравнений фактически привел ее к граничной задаче Гильберта для двух неизвестных функций, которую он, однако, по существу не изучал.

В настоящей работе ограничимся рассмотрением ядер $k(s)$, образы Фурье которых имеют вид

$$\tilde{K}(x) = \begin{cases} |x|^{-\gamma} k e^{i\delta} & \text{при } x > 0, \\ |x|^{-\gamma} e^{-i\delta} & \text{при } x < 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $k > 0$, $-\pi/2 < \delta \leq \pi/2$, $0 < \gamma < 1$. Произвольная невырожденная однородная

функция $\tilde{K}_1(x)$ степени $-\gamma$:

$$\tilde{K}_1(x) = \begin{cases} |x|^{-\gamma} A & \text{при } x > 0, \\ |x|^{-\gamma} B & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

где $A, B \neq 0$ – произвольные комплексные постоянные, пропорциональна функции (1.3). Действительно,

$$\tilde{K}_1(x) = B e^{i\delta} \tilde{K}(x), \quad A/B = k e^{i2\delta}, \quad -\pi < 2\delta \leq \pi, \quad k > 0.$$

Нетрудно проверить, что ядро $k(s)$ для образа Фурье $\tilde{K}(x)$, определяемого выражением (1.3), имеет вид

$$k(s) = \frac{\Gamma(1-\gamma) \sqrt{k} \sin \pi \left(\frac{\gamma}{2} - \nu \operatorname{sign} s \right)}{\pi |s|^{(1-\gamma)}}, \quad (1.4)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера, а

$$\nu = \frac{\delta}{\pi} + \frac{1}{2\pi i} \ln k. \quad (1.5)$$

Из (1.4) видно, что рассматриваемый оператор K свертки

$$Ku = \int_0^T k(t-\tau) u(\tau) d\tau \quad (1.6)$$

будет вольтерровым в случае, если $\nu = \pm\gamma/2$, т.е. когда $k = 1$, $\delta = \pm\pi\gamma/2$. Отметим еще, что значения формы (Ku, u) , определяемой K , где через $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение в $L_2((0, T))$, лежат в секторе раствора $2|\delta|$ на комплексной плоскости:

$$|\arg(Ku, u)| \leq |\delta| \quad \forall u \in L_2((0, T)), \quad (1.7)$$

что непосредственно следует из равенства Парсеваля, теоремы о преобразовании Фурье свертки и выражения (1.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В силу однородности ядра (1.4) достаточно изучить спектральные свойства оператора (1.6) только на отрезке $[0, 1]$, т.е. в случае, когда $T = 1$. В самом деле, выполняя в (1.1) замены $t = Tt'$ и $\tau = T\tau'$, элементарно проверяем, что число λ_l/T^γ и функция $u_l(Tt)$, $t \in [0, 1]$, являются соответственно собственным значением и собственной функцией оператора (1.6) при $T = 1$, и, наоборот, если λ – собственное значение и $u(t) \in C([0, 1])$ – собственная функция оператора (1.6) на отрезке $[0, 1]$ (т.е. $T = 1$) с ядром (1.4), то

$$\hat{\lambda} = \lambda T^\gamma \quad \text{и} \quad \hat{u}(t) = u(t/T) \quad (1.8)$$

– соответственно собственное значение и собственная функция оператора (1.6) на отрезке $[0, T]$. Поэтому далее, за исключением формулировки окончательного результата – теоремы 13.1, рассмотрим только случай $T = 1$.

Структура работы следующая. В § 2 кратко приведены необходимые сведения из теории разрешимости векторной задачи Гильберта линейного сопряжения. В § 3 задача (1.1) сводится в образах Фурье к векторной граничной задаче Гильберта линейного сопряжения на мнимой оси (для вектор-функции с двумя компонентами) с матрицей, разрывной в начале координат. В § 4 показано, что эта задача подстановкой, использовавшейся Й. Племелем и Н. П. Векуа, может быть сведена к граничной задаче с непрерывной матрицей (что в данном случае заранее не очевидно). Отсюда получены теоремы о существовании решений возникающей задачи сопряжения Гильберта. В конце § 4 приведены теоремы, позволяющие далее находить каноническую матрицу и частные индексы рассматриваемой задачи. В § 5 установлены необходимые общие асимптотические разложения интегралов типа Коши вблизи концов контура (луча) интегрирования.

В общем случае формулы решения векторной краевой задачи Гильберта (в отличие от скалярного случая) не известны. Такая задача может быть неустойчивой: сколь угодно малые возмущения матрицы в граничном условии сопряжения могут приводить к изменению значений частных индексов (см., например, [13], [15]). Построению канонической матрицы решений задачи Гильберта, к которой сведена задача (1.1), а также нахождению ее асимптотического поведения при больших значениях приведенного спектрального параметра ρ ($\lambda = \rho^{-\gamma}$) посвящены § 6–12. В § 6 рассмотрено решение предельной (при $\rho \rightarrow \infty$) граничной задачи (она является скалярной) и получена формула суммарного индекса. В § 7 исследуемая задача сопряжения сведена к системе интегральных уравнений на полуоси с параметром ρ . Отметим, что к той же системе в случае $k(s) = |s|^{-\alpha}$ другим методом пришел С. Укаи, однако исследования этой системы в [11] не проводилось. В § 8 установлено, что рассматриваемую систему интегральных уравнений следует изучать в пространствах типа L_2 со степенными весами. Используя преобразования Меллина, в § 9 удается обратить операторы $(I - Q_0^\pm)$ – главные части операторов $(I - Q^\pm)$ – в возникающей системе интегральных уравнений и представить решение этой системы с помощью рядов Неймана при больших значениях ρ . Технически сложной частью работы является § 11, в котором проводятся оценки образов Меллина решений указанной выше системы интегральных уравнений в банаховых пространствах голоморфных функций с фиксированными полюсами. Такие оценки необходимы для получения асимптотики в окрестности нуля решения системы интегральных уравнений, построения решения граничной задачи Гильберта и исследования асимптотики этого решения при больших значениях ρ , что осуществлено в § 12.

Характеристическое уравнение для определения собственных значений получается из условия непрерывности образов Фурье–Лапласа собственных функций $u_l(t)$ в нулях функции $\tilde{K}(z) - \lambda$, где $\tilde{K}(z)$ – определенное аналитическое продолжение функции (1.3). В результате исследования характеристического уравнения в § 13 найдены асимптотические разложения собственных значений с точностью до четвертого члена, из которых, в частности, следует, что спектр рассматриваемого оператора (1.6) не пуст во всех случаях, кроме вольтеррова.

Отметим, что в самосопряженных случаях, когда $\delta = 0$ и $\delta = \pi/2$, первый член асимптотики собственных значений может быть получен и из результатов работы [6]. Два члена в асимптотическом разложении для λ_l найдены, насколько

известно автору, только в [11] для $\delta = 0$, $k = 1$. Остальные результаты настоящей работы ранее известны не были.

Работа [1] послужила началом цикла работ автора [28]–[33], посвященных теории разрешимости уравнений свертки на конечном интервале с символами, имеющими степенное поведение на бесконечности, теории векторной краевой задачи Гильберта линейного сопряжения, а также некоторым вопросам качественного поведения решений этой задачи. Следует отметить, что важным этапом для построения общей теории в весовых лебеговых пространствах задачи Гильберта явились работы Б. В. Хведалидзе и его школы (см. обзор [34]), в которых был систематически развит оказавшийся весьма плодотворным метод интегралов типа Коши.

§ 2. Основные сведения о разрешимости векторной однородной граничной задачи Гильберта

Однородная векторная граничная задача Гильберта на гладком жордановом контуре L , разбивающем комплексную плоскость на ограниченную область D^+ и дополнение D^- , содержащее бесконечно удаленную точку, заключается, как известно, в нахождении вектор-функции $\varphi(z) = (\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z))^T$ (запись $()^T$ означает операцию транспонирования), голоморфной в областях D^+ и D^- , непрерывно продолжимой из этих областей на L и удовлетворяющей на L условию сопряжения:

$$\varphi^+(t) = G(t)\varphi^-(t), \quad t \in L, \quad (2.1)$$

где $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)$ – предельные значения $\varphi(z)$ при $z \rightarrow t \in L$, $z \in D^+$ и $z \in D^-$ соответственно, $G(t)$ – некоторая матрица-функция, определенная на контуре L .

Задача (2.1) хорошо изучена (см., например, [12]–[15], [32]–[34]). Воспользуемся здесь следующим классическим результатом (см. [12]–[14]).

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть матрица $G(t)$ непрерывна по Гёльдеру на контуре L с показателем α , $0 < \alpha < 1$, и $\det G(t) \neq 0$ для любого $t \in L$.

Тогда существует каноническая матрица решений задачи (2.1)

$$\Phi(z) = \|\varphi^1(z), \dots, \varphi^n(z)\|,$$

в которой вектор-столбцы $\varphi^k(z) = (\varphi_1^k(z), \dots, \varphi_n^k(z))^T$, $k = 1, \dots, n$, являются решениями задачи (2.1), голоморфными в D^+ и D^- , за исключением, быть может, некоторой фиксированной точки a , непрерывными по Гёльдеру с тем же показателем α в $D^+ \cup L$ и $D^- \cup L$, за исключением той же точки a . Точка a может быть выбрана произвольно, в частности на контуре L , или быть бесконечно удаленной. Каноничность матрицы $\Phi(z)$ означает, что:

а) $\det \Phi(z)$ отличен от нуля и бесконечности во всех точках расширенной комплексной плоскости, за исключением, быть может, точки a ;

б) в точке a матрица $\Phi(z)$ нормальна, а именно если через $\varkappa_k$ обозначить порядок нуля вектора $\varphi^k(z)$ в точке a ($\varkappa_k$ – целые числа), т. е.

$$\varphi^k(z) = c^{(1)}(z - a)^{\varkappa_k} + O((z - a)^{\varkappa_k + \alpha}), \quad z \rightarrow a, \quad a \neq \infty,$$

или

$$\varphi^k(z) = c^{k(1)}(z)^{-\kappa_k} + c^{k(2)}z^{-\kappa_k-1} + \dots, \quad z \rightarrow \infty, \quad a = \infty,$$

где $c^{k(1)} = (c_1^{k(1)}, \dots, c_n^{k(1)})^T$ – числовые ненулевые векторы, то в окрестности точки $z = a$

$$\det \Phi(z) = |\overset{0}{\Phi}(a)|(z-a)^{\kappa_1+\dots+\kappa_n}(1+O((z-a)^\alpha)), \quad a \neq \infty,$$

$$\det \Phi(z) = |\overset{0}{\Phi}(\infty)|z^{-\kappa_1-\dots-\kappa_n}(1+O(z^{-1})), \quad a = \infty,$$

причем числа $|\overset{0}{\Phi}(a)|$, $|\overset{0}{\Phi}(\infty)|$ не равны нулю. Числа $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_n$ не зависят ни от выбора канонической матрицы $\Phi(z)$, ни от точки a , т. е. являются инвариантами, и называются частными индексами задачи (2.1). Имеет место формула

$$\kappa = \kappa_1 + \dots + \kappa_n = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg \det G(t)|_L.$$

Ориентация на L положительна относительно области D^+ . Число κ называется суммарным индексом задачи.

Любое решение $\varphi(z)$ задачи (2.1), имеющее в точке a особенность не выше полюса конечного порядка, представимо в виде

$$\varphi(z) = p_1((z-a)^{-1})\varphi^1(z) + \dots + p_n((z-a)^{-1})\varphi^n(z), \quad a \neq \infty,$$

или

$$\varphi(z) = p_1(z)\varphi^1(z) + \dots + p_n(z)\varphi^n(z), \quad a = \infty,$$

где $p_1(z), \dots, p_n(z)$ – некоторые многочлены.

Далее будем рассматривать граничную задачу Гильберта на контуре L , являющемся мнимой осью. Обозначим через $\Pi_{\text{л}}$ и $\Pi_{\text{п}}$ соответственно полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta < 0$ и $\operatorname{Re} \zeta > 0$ комплексной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Задача Гильберта состоит в нахождении вектор-функции $\varphi(\zeta) = (\varphi_1(\zeta), \dots, \varphi_n(\zeta))^T$, голоморфной в $\Pi_{\text{л}}$ и $\Pi_{\text{п}}$, непрерывно продолжимой из этих плоскостей на мнимую ось (соответствующие продолжения обозначим $\varphi_{\text{л}}(i\eta)$ и $\varphi_{\text{п}}(i\eta)$) и удовлетворяющей на L условию сопряжения:

$$\varphi_{\text{л}}(i\eta) = G(\eta)\varphi_{\text{п}}(i\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Эта задача легко сводится к предыдущей конформным преобразованием. Рассмотрим конформное отображение

$$\zeta = 1 - iz^{-1},$$

переводящее окружность $L^* = \{z: |z - i/2| = 1/2\}$ в мнимую ось $\operatorname{Re} \zeta = 0$, круг D^{*+} , ограниченный L^* , – в полуплоскость $\Pi_{\text{л}}$, точку $z = 0$ на L^* – в точку $\zeta = \infty$.

Параметризация L^* : $z = \frac{1}{2}(i + e^{i\theta})$, $-\pi/2 < \theta < 3\pi/2$, перейдет в параметризацию мнимой оси, причем

$$\eta = -\frac{i(e^{i\theta} - i)}{e^{i\theta} + i}, \quad e^{i\theta} = -i + \frac{2i}{1 - i\eta}. \quad (2.3)$$

Вектор $\varphi^*(z) = \varphi(1 - i/z)$ будет решением граничной задачи Гильберта на окружности L^* :

$$\varphi^{*+}\left(\frac{i + e^{i\theta}}{2}\right) = G^*(\theta)\varphi^{*-}\left(\frac{i + e^{i\theta}}{2}\right), \quad (2.4)$$

где

$$G^*(\theta) = G\left(-\frac{i(e^{i\theta} - i)}{e^{i\theta} + i}\right). \quad (2.5)$$

Найдем условия, обеспечивающие непрерывность по Гёльдеру матрицы $G^*(\theta) = \|G_{ij}^*(\theta)\|$. В силу (2.3) и (2.5) условие непрерывности по Гёльдеру матрицы $G^*(\theta)$ с показателем α :

$$|G_{ij}^*(\theta_1) - G_{ij}^*(\theta_2)| \leq C \cdot 2^{-\alpha} |e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}|^\alpha,$$

переходит в условие

$$|G_{ij}(\eta_1) - G_{ij}(\eta_2)| < C \left| \frac{1}{1 - i\eta_1} - \frac{1}{1 - i\eta_2} \right|^\alpha = C \frac{|\eta_1 - \eta_2|^\alpha}{(1 + \eta_1^2)^{\frac{\alpha}{2}} (1 + \eta_2^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}.$$

Воспользуемся еще тем, что если некоторая гладкая дуга L разбита на несколько кусков $L_1, \dots, L_s$, $L_1 \cup \dots \cup L_s = L$, так, что конец дуги L_k является началом следующей дуги L_{k+1} , и некоторая функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера с некоторым показателем α на каждом $L_1, \dots, L_s$, причем $f(t)$ непрерывна на L , то $f(t)$ непрерывна по Гёльдеру на всей L с тем же показателем α . Выбирая, наконец, для задачи (2.4) точку a , фигурирующую в теореме 2.1, равной нулю, приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть матрица $G(\eta)$ задачи (2.2) при $|\eta| < M$ (M – некоторое положительное число) удовлетворяет условию Гёльдера с некоторым показателем $0 < \beta \leq 1$, а при $|\eta| \geq M$ – условию Гёльдера относительно бесконечно удаленной точки с показателем $0 < \alpha < 1$, причем отдельно при $\eta < 0$ и при $\eta > 0$ имеем

$$|G_{ij}(\eta_1) - G_{ij}(\eta_2)| < C \frac{|\eta_1 - \eta_2|^\alpha}{|\eta_1|^\alpha |\eta_2|^\alpha} \quad \forall \eta_1, \eta_2: \quad |\eta_1|, |\eta_2| > M, \quad \eta_1 \eta_2 > 0, \quad (2.6)$$

и $G(-\infty) = G(+\infty)$. Кроме того, пусть $\det G(\eta) \neq 0$ для любого $\eta \in \mathbb{R} \cup \infty$.

Тогда граничная задача (2.2) имеет каноническую матрицу решений

$$\Phi(\zeta) = \|\varphi^1(\zeta), \dots, \varphi^n(\zeta)\|,$$

в которой вектор-функции $\varphi(\zeta) = (\varphi_1(\zeta), \dots, \varphi_n(\zeta))^T$ являются решениями задачи (2.2), непрерывными по Гёльдеру вплоть до мнимой оси и имеющими при $\zeta \rightarrow \infty$ поведение степенного характера:

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= h^{(л)} \zeta^{-\varkappa_k} + O(|\zeta|^{-\varkappa_k - \alpha}), & \zeta \in \overline{\Pi}_л, \\ \varphi(\zeta) &= h^{(п)} \zeta^{-\varkappa_k} + O(|\zeta|^{-\varkappa_k - \alpha}), & \zeta \in \overline{\Pi}_п,\end{aligned}$$

где $h^{(л)}, h^{(п)}$ – ненулевые числовые векторы, $\varkappa_k$ – целые числа. Каноничность матрицы $\Phi(\zeta)$ означает, что:

- а) $\det \Phi(\zeta) \neq 0$ в конечной части комплексной плоскости $\mathbb{C}$;
- б) при $\zeta \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\det \Phi(\zeta) &= |\Phi^{(л)}(\infty)| \zeta^{-\varkappa_1 - \dots - \varkappa_n} [1 + O(|\zeta|^{-\alpha})] & \zeta \in \overline{\Pi}_л, \\ \det \Phi(\zeta) &= |\Phi^{(п)}(\infty)| \zeta^{-\varkappa_1 - \dots - \varkappa_n} [1 + O(|\zeta|^{-\alpha})] & \zeta \in \overline{\Pi}_п,\end{aligned}$$

где $|\Phi^{(л)}(\infty)|, |\Phi^{(п)}(\infty)|$ – некоторые комплексные числа, не равные нулю, и имеют место равенства

$$|\Phi^{(л)}(\infty)| = \det \|h^{(л)}_1, \dots, h^{(л)}_n\|, \quad |\Phi^{(п)}(\infty)| = \det \|h^{(п)}_1, \dots, h^{(п)}_n\|.$$

Числа $\varkappa_1 \geq \varkappa_2 \geq \dots \geq \varkappa_n$ не зависят от выбора канонической матрицы $\Phi(\zeta)$ и являются частными индексами задачи (2.2). Для суммарного индекса имеет место формула

$$\varkappa = \varkappa_1 + \dots + \varkappa_n = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg \det G(\eta) \Big|_{\eta=-\infty}^{+\infty}. \quad (2.7)$$

Любое решение задачи (2.2), растущее при $\zeta \rightarrow \infty$ не быстрее некоторой степени ζ , представимо в виде

$$\varphi(\zeta) = p_1(\zeta) \varphi^1(\zeta) + \dots + p_n(\zeta) \varphi^n(\zeta), \quad (2.8)$$

где $p_1(\zeta), \dots, p_n(\zeta)$ – некоторые полиномы. Из (2.8), таким образом, следует, что частные индексы являются максимальными порядками убывания на бесконечности независимых решений задачи (2.2).

Отметим, наконец, что, как известно (см. [13], [15]), частные индексы образуют устойчивую систему относительно малых возмущений матрицы $G(t)$ в том и только том случае, если $\varkappa_1 - \varkappa_n \leq 1$.

§ 3. Сведение задачи к граничной задаче Гильберта для двух неизвестных функций

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^1 k(t-\tau)u(\tau;\lambda) d\tau - \lambda u(t;\lambda) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.1)$$

где $f(t) \in L_2((0,1))$. Решение этого уравнения $u(t;\lambda)$ также принадлежит пространству $L_2((0,1))$. Применим к уравнению (3.1) преобразование Фурье–Лапласа $\mathcal{F}$:

$$(\mathcal{F}u)(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-izt} u(t) dt,$$

предполагая функции $u(t;\lambda)$ и $f(t)$ продолженными нулем вне $[0,1]$ на всю действительную ось. Получим уравнение (см. [10], [16])

$$[\tilde{K}(x) - \lambda]\tilde{U}(x;\lambda) + \tilde{\Phi}^+(x;\lambda) + e^{-ix}\tilde{\Phi}^-(x;\lambda) = \tilde{f}(x), \quad (3.2)$$

в котором $\tilde{U}(z;\lambda) = (\mathcal{F}u(\cdot;\lambda))(z)$, $\tilde{f}(z) = (\mathcal{F}f(\cdot))(z)$, а

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}^+(x;\lambda) &= - \int_{-\infty}^0 e^{-ixt} \left(\int_0^1 k(t-\tau)u(\tau;\lambda) d\tau \right) dt, \\ \tilde{\Phi}^-(x;\lambda) &= - \int_0^{\infty} e^{-ixt} \left(\int_0^1 k(t+1-\tau)u(\tau;\lambda) d\tau \right) dt \end{aligned} \quad (3.3)$$

($k(s)$ имеет вид (1.4)). В уравнении (3.2) $\tilde{U}(x;\lambda)$, $\tilde{\Phi}^+(x;\lambda)$, $\tilde{\Phi}^-(x;\lambda)$ – неизвестные функции, $\tilde{U}(z;\lambda)$ и $\tilde{f}(z)$ являются целыми аналитическими функциями z и стремятся к нулю при $z \rightarrow \infty$ в нижней полуплоскости $\text{Im } z < 0$, $e^{iz}\tilde{U}(z;\lambda)$ и $e^{iz}\tilde{f}(z)$ стремятся к нулю при $z \rightarrow \infty$ в верхней полуплоскости $\text{Im } z > 0$. Функции $\tilde{\Phi}^+(x;\lambda)$ и $\tilde{\Phi}^-(x;\lambda)$ допускают аналитические продолжения с действительной оси в полуплоскости $\text{Im } z > 0$ и $\text{Im } z < 0$ соответственно и в них стремятся к нулю при $z \rightarrow \infty$.

Важным свойством образа Фурье $\tilde{K}(x)$ ядра, на котором базируется дальнейшее построение, является аналитическая продолжимость $\tilde{K}(x)$ с положительной и отрицательной полуосей в комплексную плоскость. Функция $\tilde{K}(x)$ при $x > 0$ допускает, например, аналитическое продолжение $\tilde{K}_{\Pi}(z)$ в область (плоскость с разрезом) $-\pi < \arg z < \pi$, а при $x < 0$ – аналитическое продолжение $\tilde{K}_{\Pi}(z)$ в область $0 < \arg z < 2\pi$, где

$$\tilde{K}_{\Pi}(z) = ke^{i\delta}(z)_{\Pi}^{-\gamma}, \quad -\pi < \arg z < \pi, \quad \tilde{K}_{\Pi}(z) = e^{-i\delta+i\gamma\pi}(z)_{\Pi}^{-\gamma}, \quad 0 < \arg z < 2\pi, \quad (3.4)$$

ветви $(z)_{\Pi}^{-\gamma}$ и $(z)_{\Pi}^{-\gamma}$ вычисляются одинаково: как $|z|^{-\gamma}e^{-i\gamma \arg z}$.

Пусть теперь $\vec{e}$ – комплексное число такое, что $|\vec{e}| = 1$, $0 < \arg \vec{e} < \pi$. Определим аналитическое продолжение функции $\tilde{K}(x)$ как следующую кусочно аналитическую функцию

$$\tilde{K}(z) = \begin{cases} \tilde{K}_{\Pi}(z) & \text{при } \arg \vec{e} - \pi < \arg z < \arg \vec{e}, \\ \tilde{K}_{\Pi}(z) & \text{при } \arg \vec{e} < \arg z < \arg \vec{e} + \pi. \end{cases} \quad (3.5)$$

Выразим $\tilde{\Phi}^+(x; \lambda)$ из уравнения (3.2):

$$\tilde{\Phi}^+(x; \lambda) = \tilde{f}(x) - e^{-ix} \tilde{\Phi}^-(x; \lambda) - [\tilde{K}(x) - \lambda] \tilde{U}(x; \lambda).$$

Из этого равенства видно, что функция $\tilde{\Phi}^+(x; \lambda)$, аналитически продолжимая на всю верхнюю полуплоскость и стремящаяся к нулю при $z \rightarrow \infty$, может быть аналитически продолжена и в нижнюю полуплоскость $\text{Im } z < 0$, поскольку функции $\tilde{f}(x)$, $\tilde{U}(x; \lambda)$ и $e^{-ix} \tilde{\Phi}^-(x; \lambda)$ допускают аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость и стремятся в ней к нулю при $z \rightarrow \infty$. Это аналитическое продолжение (обозначим его также $\tilde{\Phi}^+(z; \lambda)$) имеет скачок вдоль прямой $z = \vec{e}\sigma$, $\sigma < 0$, и стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$. Точно так же, выражая $\tilde{\Phi}^-(x; \lambda)$ из уравнения (3.2), находим, что эта функция допускает аналитическое продолжение в комплексную плоскость с разрезом вдоль луча $z = \vec{e}\sigma$, $\sigma > 0$, т.е. в область $\arg \vec{e} - 2\pi < \arg z < \arg \vec{e}$, и стремится в этой области к нулю при $z \rightarrow \infty$.

Выразим, наконец, $\tilde{U}(z; \lambda)$ из аналитически продолженного уравнения (3.2):

$$\tilde{U}(z; \lambda) = [\tilde{K}(z) - \lambda]^{-1} [\tilde{f}(z) - \tilde{\Phi}^+(z; \lambda) - e^{-iz} \tilde{\Phi}^-(z; \lambda)]. \quad (3.6)$$

Функция $\tilde{U}(z; \lambda)$ как преобразование Фурье финитной функции должна быть целой относительно z . Множители в правой части (3.6) имеют скачок вдоль прямой $z = \vec{e}\sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}$, и, кроме того, знаменатель $\tilde{K}(z) - \lambda$ может обращаться в нуль при некоторых z . Условие аналитичности функции $\tilde{U}(z; \lambda)$ можно записать в виде двух условий:

а) условие непрерывности на линии разрыва функции $\tilde{K}(z)$ из (3.5):

$$\begin{aligned} & [\tilde{K}_\lambda(\vec{e}\sigma) - \lambda]^{-1} [\tilde{f}(\vec{e}\sigma) - \tilde{\Phi}_\lambda^+(\vec{e}\sigma; \lambda) - e^{-i\vec{e}\sigma} \tilde{\Phi}_\lambda^-(\vec{e}\sigma; \lambda)] = \\ & = [\tilde{K}_\pi(\vec{e}\sigma) - \lambda]^{-1} [\tilde{f}(\vec{e}\sigma) - \tilde{\Phi}_\pi^+(\vec{e}\sigma; \lambda) - e^{-i\vec{e}\sigma} \tilde{\Phi}_\pi^-(\vec{e}\sigma; \lambda)] \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\tilde{\Phi}_\lambda^+(\vec{e}\sigma; \lambda)$, $\tilde{\Phi}_\lambda^-(\vec{e}\sigma; \lambda)$ и $\tilde{\Phi}_\pi^+(\vec{e}\sigma; \lambda)$, $\tilde{\Phi}_\pi^-(\vec{e}\sigma; \lambda)$ – предельные значения соответствующих функций на прямую $z = \vec{e}\sigma$, $-\infty < \sigma < +\infty$, из левой и правой полуплоскостей соответственно (под левой полуплоскостью здесь понимается полуплоскость вне прямой $z = \vec{e}\sigma$, содержащая отрицательную полуось, под правой – полуплоскость, содержащая положительную полуось);

б) условие непрерывности в нулях функции $\tilde{K}(z) - \lambda$:

$$\tilde{\Phi}^+(z_j; \lambda) + e^{-iz_j} \tilde{\Phi}^-(z_j; \lambda) - \tilde{f}(z_j) = 0 \quad (3.8)$$

(если z_j – простые корни уравнения $\tilde{K}(z) - \lambda = 0$).

Граничное условие (3.7) и соотношения $\tilde{\Phi}_\pi^\pm(\vec{e}\sigma; \lambda) = \tilde{\Phi}_\pi^\pm(\vec{e}\sigma; \lambda)$ при $\sigma \gtrless 0$ можно записать в виде граничной задачи Гильберта для вектор-функции $\tilde{\Phi}(z; \lambda) = (\tilde{\Phi}^+(z; \lambda), \tilde{\Phi}^-(z; \lambda))^T$ на прямой $z = \vec{e}\sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{\Phi}_\lambda(\vec{e}\sigma; \lambda) = G(\sigma; \lambda) \tilde{\Phi}_\pi(\vec{e}\sigma; \lambda) + \tilde{\mathcal{F}}(\sigma; \lambda), \quad (3.9)$$

где

$$G(\sigma; \lambda) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (H(\vec{e}\sigma; \lambda) - 1)e^{i\vec{e}\sigma} & H(\vec{e}\sigma; \lambda) \end{pmatrix} & \text{при } \sigma > 0, \\ \begin{pmatrix} H(\vec{e}\sigma; \lambda) & (H(\vec{e}\sigma; \lambda) - 1)e^{-i\vec{e}\sigma} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{при } \sigma < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(\sigma; \lambda) = -\tilde{f}(\vec{e}\sigma) \cdot \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ (H(\vec{e}\sigma; \lambda) - 1)e^{i\vec{e}\sigma} \end{pmatrix} & \text{при } \sigma > 0, \\ \begin{pmatrix} (H(\vec{e}\sigma; \lambda) - 1)e^{-i\vec{e}\sigma} \\ 0 \end{pmatrix} & \text{при } \sigma < 0, \end{cases}$$

$$H(z; \lambda) = (\tilde{K}_\text{л}(z) - \lambda) / (\tilde{K}_\text{п}(z) - \lambda). \quad (3.10)$$

При нахождении собственных функций имеем $\tilde{f}(\sigma; \lambda) \equiv 0$, а потому задача (3.9) будет однородной граничной задачей Гильберта с матрицей, разрывной в нуле. Отметим, что экспоненты $e^{i\vec{e}\sigma}$, $\sigma > 0$, и $e^{-i\vec{e}\sigma}$, $\sigma < 0$, во внедиагональных элементах матрицы $G(\sigma; \lambda)$ в силу неравенства $\text{Im } \vec{e} > 0$ являются убывающими при $|\sigma| \rightarrow \infty$ – свойство, существенное для дальнейшего. Решение этой граничной задачи позволит нам определить вид функций $\tilde{\Phi}^+(z; \lambda)$ и $\tilde{\Phi}^-(z; \lambda)$, использование условия б) приведет к характеристическому уравнению для определения собственных значений.

Прежде чем перейти к анализу однородной граничной задачи (3.9), найдем асимптотику функций $\tilde{\Phi}^+(z; \lambda)$ и $\tilde{\Phi}^-(z; \lambda)$ в окрестности точки $z = 0$. Покажем, что при $z \rightarrow 0$ имеем

$$\tilde{\Phi}^+(z; \lambda) \quad (\tilde{\Phi}^-(z; \lambda)) \sim cz^{-\gamma}, \quad \text{Im } z > 0 \quad (\text{Im } z < 0), \quad (3.11)$$

например, первое. Здесь и далее $c, c_1, \dots$ – некоторые постоянные.

Обратимся к выражению (3.3) для $\tilde{\Phi}^+(z; \lambda)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi^+(t) = \begin{cases} -\int_0^1 k(t - \tau)u(\tau; \lambda) d\tau & \text{при } t < 0, \\ 0 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Поскольку $|k(t - \tau)| < c|t|^{-(1-\gamma)}$ при $t < 0$, $\tau \geq 0$ и $(k(t - \tau) - k(t)) = O(t^{-(2-\gamma)})$ при $t \rightarrow +\infty$, $0 < \tau < 1$, то

$$\varphi^+(t) = -k(t) \int_0^1 u(\tau; \lambda) d\tau + \psi^+(t), \quad t < 0,$$

где $\psi^+(t)$ – абсолютно интегрируемая функция. Действительно, при $t < -A$, $A > 0$, имеем

$$|\psi^+(t)| = \left| \int_0^1 (k(t - \tau) - k(t))u(\tau; \lambda) d\tau \right| \leq O(t^{-(2-\gamma)}) \int_0^1 |u(\tau; \lambda)| d\tau,$$

а при $-A < t < 0$ получим

$$|\psi^+(t)| \leq c|t|^{-(1-\gamma)} \int_0^1 |u(\tau; \lambda)| d\tau.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{\Phi}^+(x; \lambda) = - \int_0^1 u(\tau; \lambda) d\tau \int_{-\infty}^0 e^{-ixt} k(t) dt + (\mathcal{F}\psi^+)(x).$$

Функция $(\mathcal{F}\psi^+)(x)$ как преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции, обращающейся в нуль при $t > 0$, допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\text{Im } z > 0$, которое ограничено в этой полуплоскости. Первое слагаемое в правой части последнего равенства, как нетрудно проверить, равно

$$c \int_0^\infty \frac{e^{-ixt}}{|t|^{1-\gamma}} dt = c_1 \cdot \begin{cases} |x|^{-\gamma} & \text{при } x > 0, \\ e^{-i\pi\gamma}|x|^{-\gamma} & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

и является, таким образом, следом на действительной оси функции $c(z)_+^{-\gamma}$, где $(z)_+^{-\gamma}$ – ветвь, регулярная в верхней полуплоскости.

Аналогично можно получить (3.11) и для $\tilde{\Phi}^-(z; \lambda)$ в полуплоскости $\text{Im } z \leq 0$. С помощью (3.2) можно установить справедливость асимптотик (3.11) всюду вне прямой $z = \vec{e}\sigma$.

Учитывая вид символа $\tilde{K}(x)$, сделаем замену спектрального параметра

$$\lambda = \rho^{-\gamma},$$

где

$$-\pi/\gamma \leq \arg \rho \leq \pi/\gamma \quad (3.12)$$

– сектор, рассматриваемый на римановой поверхности функции $\ln \rho$. Но поскольку спектр оператора K заведомо лежит в секторе (1.7) значений формы (Ku, u) , при изучении спектра можно рассматривать сектор

$$-|\delta|/\gamma - \varepsilon < \arg \rho < |\delta|/\gamma + \varepsilon, \quad (3.13)$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно мало.

С помощью замены комплексной переменной приведем задачу (3.9) к задаче, наиболее просто зависящей от ρ . Из вида функции (3.10) следует, что разумно сделать замену переменных

$$\zeta = z/\rho', \quad \text{где } \rho' = \rho e^{-i\beta}. \quad (3.14)$$

Комплексное число $\vec{e}$ в задаче (3.9) подберем так, чтобы прямая $z = \vec{e}\sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}$, перешла при замене (3.14) в прямую $\text{Re } \zeta = 0$. Итак, если $z = \vec{e}\sigma$, то $\zeta = \sigma|\rho|^{-1} e^{i(\beta - \arg \rho + \arg \vec{e})}$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Отсюда $\beta - \arg \rho + \arg \vec{e} = \pi/2$ и

$$\vec{e} = e^{i(\arg \rho - \beta + \frac{\pi}{2})}. \quad (3.15)$$

Условие $0 < \arg \vec{e} < \pi$ эквивалентно ограничению

$$\beta - \pi/2 < \arg \rho < \beta + \pi/2. \quad (3.16)$$

Последнее означает, что если зафиксировать β в (3.14), то спектральный параметр можно полагать находящимся в секторе (3.16), и при замене (3.14) задача (3.9) с числом $\vec{e}$, определяемым (3.15), перейдет в задачу Гильберта на мнимой оси

$$\varphi_{\text{л}}(i\eta; \rho') = G_{\beta}(\eta; \rho') \varphi_{\text{п}}(i\eta; \rho'), \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad (3.17)$$

для вектор-функции $\varphi(\zeta; \rho') = (\varphi^+(\zeta; \rho'), \varphi^-(\zeta; \rho'))^T$, где

$$\varphi^{\pm}(\zeta; \rho') = \tilde{\Phi}^{\pm}(\zeta \rho'; \lambda) \quad (\tilde{\Phi}^{\pm}(z; \lambda) = \varphi^{\pm}(z/\rho'; \rho')), \quad (3.18)$$

а $G_{\beta}(\eta; \rho') = G(\eta|\rho|; \rho^{-\gamma})$. Используя при замене соотношение $i\eta\rho' = \vec{e}\sigma$ и выражения (3.4), найдем, что

$$H(\vec{e}\sigma; \lambda) = \frac{\tilde{K}_{\text{л}}(i\eta\rho') - \lambda}{\tilde{K}_{\text{п}}(i\eta\rho') - \lambda} = \frac{(\rho')^{-\gamma} \tilde{K}_{\text{л}}(i\eta) - e^{-i\gamma\beta}(\rho')^{-\gamma}}{(\rho')^{-\gamma} \tilde{K}_{\text{п}}(i\eta) - e^{-i\gamma\beta}(\rho')^{-\gamma}} = H_{\beta}(i\eta),$$

где

$$H_{\beta}(\zeta) = (e^{i\gamma\beta} \tilde{K}_{\text{л}}(\zeta) - 1) / (e^{i\gamma\beta} \tilde{K}_{\text{п}}(\zeta) - 1). \quad (3.19)$$

Таким образом,

$$G_{\beta}(\eta; \rho') = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (H_{\beta}(i\eta) - 1)e^{-\rho'\eta} & H_{\beta}(i\eta) \end{pmatrix} & \text{при } \eta > 0, \\ \begin{pmatrix} H_{\beta}(i\eta) & (H_{\beta}(i\eta) - 1)e^{\rho'\eta} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{при } \eta < 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Матрица $G_{\beta}(\eta; \rho')$ имеет теперь весьма простую зависимость от ρ' : диагональные элементы при фиксированном значении β являются функциями, не зависящими от ρ' , а внедиагональные элементы, отличные от нуля, — функции, не зависящие от ρ' , умноженные на экспоненты $e^{-\rho'|\eta|}$, стремящиеся к нулю при $|\rho'| \rightarrow \infty$ в секторе $|\arg \rho'| < \pi/2 - \varepsilon$.

В силу определений (3.4) функция $H_{\beta}(\zeta)$ аналитична вне действительной оси, за исключением нулей знаменателя представления (3.19). На мнимой оси в окрестностях нуля и бесконечности, как нетрудно проверить, используя (3.4), она имеет разложения:

$$H_{\beta}(i\eta) = e^{-2\pi i(\nu \mp \gamma/2)} \left[1 - 2i \sin \pi(\nu \mp \gamma/2) \sum_{n=1}^{\infty} |\eta|^{\gamma n} k^{-\frac{n}{2}} e^{-i\pi(\nu \mp \frac{\gamma}{2})(n-1) - i\gamma\beta n} \right] \quad (3.21)$$

при $|\eta| < a$, где a достаточно мало, и

$$H_{\beta}(i\eta) = 1 + 2i \sin \pi(\nu \mp \gamma/2) \sum_{n=1}^{\infty} |\eta|^{-\gamma n} k^{\frac{n}{2}} e^{i\pi(\nu \mp \frac{\gamma}{2})(n-1) + i\beta\gamma n}$$

при $|\eta| > A$, где A достаточно велико, причем в этих формулах верхний знак соответствует случаю $\eta > 0$, нижний – случаю $\eta < 0$; ν определено формулой (1.5).

Найдем теперь корни числителя и знаменателя в выражении (3.19) для $H_\beta(\zeta)$. Заметим, что если ζ лежит в левой ($\pi/2 \leq \arg \zeta \leq 3\pi/2$) или правой ($-\pi/2 \leq \arg \zeta \leq \pi/2$) полуплоскости, то z , определяемое формулой (3.14) с $|\arg \rho'| < \pi/2$, лежит соответственно в левой или правой полуплоскости от прямой $z = \vec{e}\sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}$, при $\vec{e}$, определяемом (3.15), и имеют место равенства

$$\tilde{K}_\text{л}(\rho'\zeta) - \rho^{-\gamma} = \rho^{-\gamma}[e^{i\gamma\beta}\tilde{K}_\text{л}(\zeta) - 1], \quad \tilde{K}_\text{п}(\rho'\zeta) - \rho^{-\gamma} = \rho^{-\gamma}[e^{i\gamma\beta}\tilde{K}_\text{п}(\zeta) - 1]$$

соответственно. Отсюда корни $z_\text{л}$, $z_\text{п}$ уравнений $\tilde{K}_\text{л}(z) - \rho^{-\gamma} = 0$, $\tilde{K}_\text{п}(z) - \rho^{-\gamma} = 0$, лежащие слева, соответственно, справа от прямой $z = \vec{e}\sigma$, $\sigma \in \mathbb{R}$, взаимно однозначно переходят при замене (3.14) в корни $\zeta_\text{л}$, $\zeta_\text{п}$ уравнений $e^{i\gamma\beta}\tilde{K}_\text{л}(\zeta) - 1 = 0$, $e^{i\gamma\beta}\tilde{K}_\text{п}(\zeta) - 1 = 0$, лежащие в левой, соответственно, правой полуплоскости от мнимой прямой. Ограничимся нахождением последних. Уравнения для них можно переписать соответственно следующим образом:

$$(\zeta_\text{л})_\text{л}^\gamma = e^{i\gamma(\beta + \pi - \frac{\delta}{\gamma})}, \quad (\zeta_\text{п})_\text{п}^\gamma = ke^{i\gamma(\beta + \frac{\delta}{\gamma})}. \quad (3.22)$$

В силу (3.16) и (3.12) можно полагать, что β находится на отрезке

$$-\pi/\gamma \leq \beta \leq \pi/\gamma. \quad (3.23)$$

Уравнения (3.22) при этом ограничении имеют следующие решения:

$$\begin{aligned} \zeta_\text{л} &= e^{i(\beta + \pi - \frac{\delta}{\gamma})} \quad \text{при} \quad -\pi/2 < \beta - \delta/\gamma < \pi/2, \\ \zeta_\text{п} &= k^{\frac{1}{\gamma}} e^{i(\beta + \frac{\delta}{\gamma})} \quad \text{при} \quad -\pi/2 < \beta + \delta/\gamma < \pi/2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Заметим, что интервалы в (3.24) заведомо лежат в отрезке (3.23).

По возможному числу корней $\zeta_\text{л}$ и $\zeta_\text{п}$ (одновременно) будем различать два случая, приведенных в табл. 1 и 2.

I. $|\delta| < \pi\gamma/2$

ТАБЛИЦА 1

β	$ \beta < \frac{\pi}{2} - \frac{ \delta }{\gamma}$	$ \beta - \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \delta < \frac{ \delta }{\gamma}$	$ \beta + \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \delta < \frac{ \delta }{\gamma}$	$ \beta > \frac{\pi}{2} - \frac{ \delta }{\gamma}$
Наличие корней	$\zeta_\text{л}, \zeta_\text{п}$	$\zeta_\text{л}$	$\zeta_\text{п}$	—

II. $|\delta| \geq \pi\gamma/2$

ТАБЛИЦА 2

β	$ \beta - \frac{\delta}{\gamma} < \frac{\pi}{2}$	$ \beta + \frac{\delta}{\gamma} < \frac{\pi}{2}$	$ \beta > \frac{\pi}{2} + \frac{ \delta }{\gamma}$ и $ \beta < \frac{ \delta }{\gamma} - \frac{\pi}{2}$
Наличие корней	$\zeta_\text{л}$	$\zeta_\text{п}$	—

§ 4. Приведение задачи (3.17) к задаче с непрерывной матрицей.

Теоремы о канонической матрице и частных индексах

Из поведения функции $H_\beta(i\eta)$ в окрестности $\eta = 0$ (см. (3.21)) видно, что матрица $G_\beta(\eta; \rho')$ задачи (3.17) (см. (3.20)) имеет в точке $\eta = 0$ разрыв первого рода и, кроме того, в окрестности $\eta = 0$ непрерывна по Гёльдеру лишь с показателем γ при $\eta < 0$ и при $\eta > 0$. Для приведения задачи (3.21) к задаче Гильберта с непрерывной матрицей воспользуемся известной подстановкой (см. [12], [13]), применявшейся еще Племелем и заведомо пригодной в случае, когда с обеих сторон точек разрыва матрица непрерывна по Лишницю. Успех применения этой подстановки в рассматриваемом случае заранее не очевиден. Однако здесь она оказывается эффективной. Будем пользоваться подстановкой в форме, приведенной в [12].

Согласно представлениям (3.20) и (3.21) имеем

$$\begin{aligned} G_\beta(+0; \rho') &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e^{-2\pi i(\nu - \frac{\gamma}{2})} - 1 & e^{-2\pi i(\nu - \frac{\gamma}{2})} \end{pmatrix}, \\ G_\beta(-0; \rho') &= \begin{pmatrix} e^{-2\pi i(\nu + \frac{\gamma}{2})} & e^{-2\pi i(\nu + \frac{\gamma}{2})} - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \Gamma_\beta &= G_\beta^{-1}(+0; \rho') G_\beta(-0; \rho') \\ &= \begin{pmatrix} e^{-2\pi i(\nu + \frac{\gamma}{2})} & e^{-2\pi i(\nu + \frac{\gamma}{2})} - 1 \\ e^{-2\pi i\gamma} - e^{-2\pi i(\nu + \frac{\gamma}{2})} & e^{-2\pi i\gamma} - e^{-2\pi i(\nu + \frac{\gamma}{2})} + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Вычислим далее матрицу $\Lambda_\beta = (2\pi i)^{-1} \ln \Gamma_\beta$. Собственными значениями и соответствующими им собственными векторами матрицы Γ_β являются

$$\hat{\lambda}_1 = 1, \quad \vec{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \hat{\lambda}_2 = e^{-2\pi i\gamma}, \quad \vec{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 - e^{-2\pi i(\nu + \frac{\gamma}{2})} \\ e^{-2\pi i(\nu + \frac{\gamma}{2})} - e^{-2\pi i\gamma} \end{pmatrix}; \quad (4.2)$$

собственными значениями матрицы Λ_β являются $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\gamma$, а потому

$$\Gamma_\beta = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i\gamma} \end{pmatrix} T^{-1}, \quad \Lambda_\beta = T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix} T^{-1}, \quad (4.3)$$

где $T = \|\vec{f}_1, \vec{f}_2\|$,

$$T^{-1} = \frac{1}{1 - e^{-2\pi i\gamma}} \begin{pmatrix} e^{-2\pi i(\nu + \frac{\gamma}{2})} - e^{-2\pi i\gamma} & e^{-2\pi i(\nu + \frac{\gamma}{2})} - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Введем еще матрицы

$$\Omega_\pi(\zeta) = \left(\frac{\zeta}{\zeta \mp 1} \right)^{\Lambda_\beta} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{\zeta}{\zeta \mp 1})^{-\gamma} \end{pmatrix} T^{-1},$$

где $(\frac{\zeta}{\zeta-1})^{-\gamma}$ и $(\frac{\zeta}{\zeta+1})^{-\gamma}$ — ветви, регулярные всюду, за исключением разрывов вдоль отрезков $[0, 1]$ и $[-1, 0]$ соответственно, и стремящиеся к 1 при $\zeta \rightarrow \infty$.

Замена искомого кусочно голоморфного вектора

$$\varphi(\zeta; \rho') = (\varphi^+(\zeta; \rho'), \varphi^-(\zeta; \rho'))^T$$

(т.е. подстановка, о которой идет речь) имеет вид

$$\varphi(\zeta; \rho') = \begin{cases} G_\beta(+0; \rho') \Omega_\pi(\zeta) \psi(\zeta; \rho'), & \operatorname{Re} \zeta < 0, \\ \Omega_\pi(\zeta) \psi(\zeta; \rho'), & \operatorname{Re} \zeta > 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

где $\psi(\zeta; \rho')$ – новый искомый кусочно голоморфный вектор, для которого получаем граничную задачу Гильберта

$$\psi_\pi(i\eta; \rho') = G_\beta^*(\eta; \rho') \psi_\pi(i\eta; \rho'), \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad (4.6)$$

с матричным коэффициентом

$$\begin{aligned} G_\beta^*(\eta; \rho') &= \Omega_\pi^{-1}(i\eta) G_\beta^{-1}(+0; \rho') G_\beta(\eta; \rho') \Omega_\pi(i\eta) \\ &= T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{i\eta}{i\eta-1})^\gamma \end{pmatrix} T^{-1} G_\beta^{-1}(+0; \rho') G_\beta(\eta; \rho') T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{i\eta}{i\eta+1})^{-\gamma} \end{pmatrix} T^{-1}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Проверим непрерывность по Гёльдеру матрицы (4.7). Очевидно, достаточно это проверить в окрестности $\eta = 0$. С помощью (3.20) и (3.21) находим, что

$$G_\beta(\eta; \rho') = \begin{cases} G_\beta(+0; \rho') + \eta^\gamma g_+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + O(\eta^\sigma) & \text{при } \eta > 0, \\ G_\beta(-0; \rho') + |\eta|^\gamma g_- \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + O(|\eta|^\sigma) & \text{при } \eta < 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

где $\sigma = \min(1, 2\gamma)$, $g_\pm = -2i \sin \pi(\nu \mp \gamma/2) k^{-\frac{1}{2}} e^{-i\gamma\beta - 2\pi i(\nu \mp \frac{\gamma}{2})}$. Далее,

$$\left(\frac{i\eta}{i\eta \pm 1} \right)^{\pm\gamma} = \begin{cases} e^{-i\frac{\pi}{2}\gamma} \eta^\gamma + O(\eta^{1\pm\gamma}) & \text{при } \eta > 0, \\ e^{i\frac{\pi}{2}\gamma} |\eta|^\gamma + O(|\eta|^{1\pm\gamma}) & \text{при } \eta < 0. \end{cases}$$

Отсюда, используя первое равенство из (4.3), в окрестности $\eta = 0$ для $\pm\eta > 0$ соответственно получаем

$$\Omega_\pi^{-1}(i\eta) G_\beta^{-1}(\pm 0; \rho') G_\beta(+0; \rho') \Omega_\pi(i\eta) = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi\gamma} \end{pmatrix} T^{-1} + O(|\eta|). \quad (4.9)$$

Такой вид подстановки (4.5), как в [12], [13], выбирается из того условия, которое гарантирует только выполнение равенства вида (4.9). Если бы исходная матрица (3.20) на участках непрерывности была непрерывна по Гёльдеру с показателем, достаточно близким к 1, то младшие члены в разложениях типа (4.8) не могли бы повлиять на непрерывность матрицы преобразованной задачи. Если же показатель непрерывности по Гёльдеру в окрестности точек разрыва исходной матрицы недостаточно высок, то от младших членов в разложении типа (4.8), умноженных на матрицу с особенностями $\Omega_\pi^{-1}(\zeta)$ или $\Omega_\pi(\zeta)$ (в рассматриваемом случае именно

$\Omega_{\Pi}(\zeta)$), могут появиться члены, являющиеся $O(1)$ или даже неограниченными, и нарушить непрерывность преобразованной матрицы.

Проверим в нашем случае, что младшие члены в разложениях (4.8), тем не менее, не нарушают непрерывности матрицы (4.7). Имеем

$$\begin{aligned} \Omega_{\Pi}^{-1}(i\eta)G_{\beta}^{-1}(+0;\rho')(G_{\beta}(\eta;\rho') - G_{\beta}(+0;\rho'))\Omega_{\Pi}(i\eta) = \\ = g_+ e^{-i\frac{\pi}{2}\gamma} T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} G_{\beta}^{-1}(+0;\rho') \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} \\ + O(\eta^{\min(\gamma, 1-\gamma)}) \quad \text{при } \eta > 0, \\ \Omega_{\Pi}^{-1}(i\eta)G_{\beta}^{-1}(+0;\rho')(G_{\beta}(\eta;\rho') - G_{\beta}(-0;\rho'))\Omega_{\Pi}(i\eta) = \\ = g_- e^{i\frac{\pi}{2}\gamma} T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} G_{\beta}^{-1}(+0;\rho') \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} \\ + O(|\eta|^{\min(\gamma, 1-\gamma)}) \quad \text{при } \eta < 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Нетрудно проверить, используя выражения (4.1) и (4.4), что постоянные матрицы в правых частях этих равенств совпадают (что заранее не гарантируется) и равны

$$-4e^{-i\gamma\beta - i\pi(\nu+\gamma)} \sin \pi \left(\nu - \frac{\gamma}{2} \right) \sin \pi \left(\nu + \frac{\gamma}{2} \right) T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}. \quad (4.11)$$

Таким образом, матрица $G_{\beta}^*(\eta; \rho')$ преобразованной задачи (4.6) в окрестности $\eta = 0$ непрерывна по Гёльдеру с показателем, равным $\min(\gamma, 1 - \gamma)$, при $\eta \neq 0$ аналитична и, как можно проверить, непрерывна по Гёльдеру в окрестности $\eta = \infty$ в смысле (2.6). Действительно, матрицы $\Omega_{\Pi}^{-1}(\zeta)$ и $\Omega_{\Pi}^{-1}(\zeta)$ аналитичны в окрестности бесконечно удаленной точки. Остается проверить, что непрерывна по Гёльдеру в окрестности бесконечно удаленной точки матрица $G_{\beta}(\eta; \rho')$. Это легко следует из неравенств

$$|H_{\beta}(i\eta_1) - H_{\beta}(i\eta_2)| \leq C \frac{||\eta_1|^{\gamma} - |\eta_2|^{\gamma}||}{|\eta_1|^{\gamma} |\eta_2|^{\gamma}} \leq C \frac{|\eta_1 - \eta_2|^{\gamma}}{|\eta_1|^{\gamma} |\eta_2|^{\gamma}}$$

при $\eta_1 \eta_2 > 0$, η_1, η_2 достаточно больших (так как $|a^{\gamma} - b^{\gamma}| \leq |a - b|^{\gamma}$ при $\gamma \leq 1$, $a > 0$, $b > 0$), непрерывности по Лишвицу в окрестности $\eta = \infty$ функции $e^{-\rho'\eta}$, $|\arg \rho'| < \pi/2$, а также из того, что

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} G_{\beta}(\eta; \rho') = \lim_{\eta \rightarrow -\infty} G_{\beta}(\eta; \rho') = E.$$

Если $|\beta| \neq |\delta/\gamma \pm \pi/2|$, то отличен от нуля $\det G_{\beta}(\eta; \rho')$ при $\eta \neq 0$, в силу формулы (4.7) $\det G_{\beta}^*(\eta; \rho') \neq 0$ при $\eta \neq 0$ и, кроме того, из (4.9)–(4.11) следует, что и $\det G_{\beta}^*(0; \rho') \neq 0$. Поэтому на основании теоремы 2.2 заключаем, что в этом случае существует каноническая матрица решений задачи (4.6)

$$\Psi(\zeta; \rho') = \|\psi^1(\zeta; \rho'), \psi^2(\zeta; \rho')\|,$$

где векторы

$${}^k\psi(\zeta; \rho') = ({}^k\psi^+(\zeta; \rho'), {}^k\psi^-(\zeta; \rho'))^T, \quad k = 1, 2,$$

голоморфны и непрерывны по Гёльдеру в левой и правой полуплоскостях (вблизи начала координат непрерывны по Гёльдеру с показателем, равным $\min(\gamma, 1 - \gamma)$), а при $\zeta \rightarrow \infty$

$${}^k\psi(\zeta; \rho') = {}^k h_{\text{л}, \Pi} \zeta^{-\varkappa_k} + O(|\zeta|^{-\varkappa_k - \gamma})$$

в полуплоскостях $\operatorname{Re} \zeta < 0$, $\operatorname{Re} \zeta > 0$ соответственно, где ${}^k h_{\text{л}}$, ${}^k h_{\Pi}$ – ненулевые векторы, $\det \|{}^1 h_{\text{л}}, {}^2 h_{\text{л}}\| \neq 0$, $\det \|{}^1 h_{\Pi}, {}^2 h_{\Pi}\| \neq 0$, $\varkappa_k$ – целые числа, являющиеся частными индексами задачи (4.6). Любое решение $\psi(\zeta; \rho')$ задачи (4.6), имеющее при $\zeta \rightarrow \infty$ рост не выше степенного, представимо в виде

$$\psi(\zeta; \rho') = p_1(\zeta; \rho') {}^1\psi(\zeta; \rho') + p_2(\zeta; \rho') {}^2\psi(\zeta; \rho'),$$

где $p_1(\zeta; \rho')$, $p_2(\zeta; \rho')$ – некоторые полиномы переменной ζ .

Переходя по формулам (4.5) к решениям задачи (3.17), получаем следующую теорему существования решений этой задачи.

ТЕОРЕМА 4.1. *При $|\beta| \neq |\delta/\gamma \pm \pi/2|$ существует каноническая матрица решений задачи (3.17)*

$$\Phi(\zeta; \rho') = \|{}^1\varphi(\zeta; \rho'), {}^2\varphi(\zeta; \rho')\|,$$

где

$${}^k\varphi(\zeta; \rho') = ({}^k\varphi^+(\zeta; \rho'), {}^k\varphi^-(\zeta; \rho'))^T, \quad k = 1, 2,$$

– кусочно голоморфные векторы, непрерывно продолжимые на мнимую ось из левой и правой полуплоскостей, за исключением начала координат, и удовлетворяющие условию сопряжения (3.17). В окрестности начала координат

$${}^k\varphi^{\pm}(\zeta; \rho') = {}^k C^{\pm}(\zeta)_{\pm}^{-\gamma} + O(|\zeta|^{-\gamma + \min(\gamma, 1 - \gamma)}), \quad (4.12)$$

где $(\zeta)_{\pm}^{-\gamma}$ – ветви, регулярные в плоскости $\mathbb{C}$, за исключением лучей $\zeta = \pm i\eta$, $\eta \geq 0$, а при $\zeta \rightarrow \infty$

$${}^k\varphi(\zeta; \rho') = {}^k h \zeta^{-\varkappa_k} + O(|\zeta|^{-\varkappa_k - \gamma}), \quad k = 1, 2; \quad (4.13)$$

здесь ${}^1 h$, ${}^2 h$ – ненулевые вектор-столбцы с двумя компонентами, $\varkappa_k$ – целые числа. Под каноничностью матрицы $\Phi(\zeta; \rho')$ понимается следующее:

а) $\det \Phi(\zeta; \rho') \neq 0$ везде в конечной части комплексной плоскости, а в окрестности начала координат

$$\det \Phi(\zeta; \rho') = \begin{cases} \Delta_{\text{л}}(\zeta)_{\text{л}}^{-\gamma} (1 + o(1)), & \operatorname{Re} \zeta < 0, \\ \Delta_{\Pi}(\zeta)_{\Pi}^{-\gamma} (1 + o(1)), & \operatorname{Re} \zeta > 0, \end{cases} \quad (4.14)$$

где Δ_{π} , $\Delta_{\pi} -$ числа, не равные нулю;

б) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ h & h \end{pmatrix} \neq 0$, где $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ h & h \end{pmatrix}$ – векторы из (4.13).

Числа $\varkappa_1 \geq \varkappa_2$ не зависят от выбора канонической матрицы $\Phi(\zeta; \rho')$; будем называть их частными индексами задачи (3.17).

Произвольное решение $\varphi(\zeta; \rho')$ задачи (3.17), удовлетворяющее в окрестности нуля оценке

$$|\varphi(\zeta; \rho')| < C/|\zeta|^{1-\varepsilon}, \quad (4.15)$$

где $\varepsilon > 0$ может быть сколь угодно малым, а при $\zeta \rightarrow \infty$ имеющее рост не выше степенного, представимо в виде

$$\varphi(\zeta; \rho') = p_1(\zeta; \rho') \varphi^1(\zeta; \rho') + p_2(\zeta; \rho') \varphi^2(\zeta; \rho'), \quad (4.16)$$

$p_1(\zeta; \rho')$, $p_2(\zeta; \rho')$ – некоторые полиномы переменной ζ (зависящие от ρ').

Заметим, что по крайней мере один из векторов $\vec{C} = (\vec{C}^+, \vec{C}^-)^T$, $\vec{C} = (\vec{C}^+, \vec{C}^-)^T$ в представлениях (4.12) обязательно отличен от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала справедливость (4.12) и (4.13), например (4.13). В принципе, из сказанного выше следует, что при $\zeta \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \varphi^{\pm}(\zeta; \rho') &= h_{\pi}^{\pm} \zeta^{-\varkappa_k} + O(|\zeta|^{-\varkappa_k - \gamma}), \quad \operatorname{Re} \zeta < 0, \\ \varphi^{\pm}(\zeta; \rho') &= h_{\pi}^{\pm} \zeta^{-\varkappa_k} + O(|\zeta|^{-\varkappa_k - \gamma}), \quad \operatorname{Re} \zeta > 0. \end{aligned}$$

Однако поскольку $\varphi_{\pi}^{\pm}(\eta; \rho') = \varphi_{\pi}^{\pm}(\eta; \rho')$, $k = 1, 2$, при $\eta \geq 0$, заключаем, что $h_{\pi}^{\pm} = h_{\pi}^{\pm} = h^{\pm}$.

Формула (4.16) доказывается обычным способом (см. [12]–[14]) при использовании факторизации $G_{\beta}(\eta; \rho') = \Phi_{\pi}(i\eta; \rho') \Phi_{\pi}^{-1}(i\eta; \rho')$, теоремы Лиувилля и при учете того, что $\Phi_{\pi}^{-1}(i\eta; \rho')$ и $\Phi_{\pi}^{-1}(i\eta; \rho')$ являются ограниченными матрицами в окрестности нуля.

Покажем, наконец, справедливость последнего утверждения теоремы. Из второго равенства (4.5) имеем

$$\varphi^k(\zeta; \rho') = T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\frac{\zeta}{\zeta+1})^{-\gamma} \end{pmatrix} T^{-1} \psi^k(\zeta; \rho'), \quad k = 1, 2, \quad \operatorname{Re} \zeta > 0,$$

где $\psi^k(\zeta; \rho')$ – вектор-столбцы канонической матрицы решений задачи (4.6). Отсюда $\det \begin{pmatrix} \psi_{\pi}^1(0; \rho') & \psi_{\pi}^2(0; \rho') \end{pmatrix} \neq 0$. С другой стороны, вектор $\vec{C}$ с компонентами $\vec{C}^{\pm}$ из разложения (4.12) может быть нулевым только в том случае, если $\vec{\psi}(0; \rho') = d \vec{f}_1$ (вектор $\vec{f}_1$ определен в (4.2), d – постоянная). Таким образом, если бы $\vec{C}^1$ и $\vec{C}^2$ были равны нулю, то и $\det \begin{pmatrix} \psi_{\pi}^1(0; \rho') & \psi_{\pi}^2(0; \rho') \end{pmatrix}$ был бы равен нулю.

При конкретном нахождении фундаментальной матрицы задачи (3.17) будем пользоваться следующими теоремами.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\psi^1(\zeta; \rho')$ и $\psi^2(\zeta; \rho')$ – два решения задачи (3.17), относительно которых известно, что они непрерывно продолжимы на мнимую ось, кроме точки $\zeta = 0$, в окрестности которой удовлетворяют оценке (4.15) с некоторым $\varepsilon > 0$, а при $\zeta \rightarrow \infty$

$$\psi^k(\zeta; \rho') = g^k \zeta^{-\mu_k} + o(|\zeta|^{-\mu_k}), \quad k = 1, 2, \quad \mu_1 \geq \mu_2, \quad (4.17)$$

где g^1, g^2 – числовые вектор-столбцы такие, что $\det \|g^1, g^2\| \neq 0$, а μ_k – целые числа, удовлетворяющие равенству

$$\mu_1 + \mu_2 = \varkappa_1 + \varkappa_2 \stackrel{\text{def}}{=} \varkappa; \quad (4.18)$$

здесь $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ – частные индексы задачи (3.17).

Тогда $\Psi(\zeta; \rho') = \|\psi^1(\zeta; \rho'), \psi^2(\zeta; \rho')\|$ является канонической матрицей задачи (3.17), а $\mu_1 = \varkappa_1$, $\mu_2 = \varkappa_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 4.1 следует (см. (4.16)), что

$$\psi^k(\zeta; \rho') = \sum_{l=1}^2 p_l^k(\zeta; \rho') \varphi^l(\zeta; \rho'), \quad k = 1, 2, \quad (4.19)$$

где $\varphi^l(\zeta; \rho')$, $l = 1, 2$, – каноническая система решений задачи (3.17), $p_l^k(\zeta; \rho')$ – некоторые полиномы от ζ . Переходя к определителям в равенстве (4.19), имеем

$$\det \Psi(\zeta; \rho') = \det \|p_l^k(\zeta; \rho')\| \det \Phi(\zeta; \rho'). \quad (4.20)$$

В силу (4.13), (4.17) и (4.18) имеем, что при $\zeta \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \det \Phi(\zeta; \rho') &= \det \|h^1, h^2\| \zeta^{-\varkappa} (1 + O(|\zeta|^{-\gamma})), \\ \det \Psi(\zeta; \rho') &= \det \|g^1, g^2\| \zeta^{-\varkappa} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

причем $\det \|h^1, h^2\| \neq 0$, $\det \|g^1, g^2\| \neq 0$. Отсюда следует, что при $\zeta \rightarrow \infty$ полином $\det \|p_l^k(\zeta; \rho')\|$ стремится к некоторой постоянной, отличной от нуля, и потому

$$\det \|p_l^k(\zeta; \rho')\| = \text{const} \neq 0.$$

Поскольку $\det \Phi(\zeta; \rho')$ не равен нулю в конечной части комплексной плоскости, то это выполнено и для $\det \Psi(\zeta; \rho')$, для которого справедливо также (4.14), а для $\psi^\pm(\zeta; \rho')$ верны представления (4.12). Таким образом, $\Psi(\zeta; \rho')$ является тоже канонической матрицей решений задачи (3.17), и в силу однозначности частных индексов отсюда следует, что $\mu_1 = \varkappa_1$, $\mu_2 = \varkappa_2$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\psi^1(\zeta; \rho')$ и $\psi^2(\zeta; \rho')$ – два решения задачи (3.17), относительно которых известно только, что они непрерывно продолжимы на мнимую ось, кроме точки $\zeta = 0$, в окрестности которой удовлетворяют оценкам

$$|\psi^k(\zeta; \rho')| < C|\zeta|^{-\gamma+\varepsilon_0}, \quad (4.21)$$

$$|\psi^k(\zeta; \rho')| > c|\zeta|^{-\gamma+\varepsilon_1}, \quad (4.22)$$

где $0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon_1 < 1$, $C, c > 0$, а в окрестности $\zeta = \infty$ имеют представления (4.17) с $\det \|g^1, g^2\| \neq 0$, причем числа $\mu_1 \geq \mu_2$ удовлетворяют равенству

$$\mu_1 + \mu_2 = \varkappa_1 + \varkappa_2 - 1. \quad (4.23)$$

Тогда частные индексы задачи (3.17) удовлетворяют равенствам

$$\varkappa_1 = \mu_1 + 1, \quad \varkappa_2 = \mu_2 \quad \text{при } \mu_1 = \mu_2, \quad \varkappa_1 = \mu_1, \quad \varkappa_2 = \mu_2 + 1 \quad \text{при } \mu_1 > \mu_2.$$

При этом каноническая система решений $\varphi^1(\zeta; \rho')$, $\varphi^2(\zeta; \rho')$ выражается через решения $\psi^1(\zeta; \rho')$, $\psi^2(\zeta; \rho')$ следующим образом: при $\mu_1 = \mu_2$

$$\begin{aligned} \varphi^1(\zeta; \rho') &= \zeta^{-1} \{c_1(\rho')\psi^1(\zeta; \rho') + c_2(\rho')\psi^2(\zeta; \rho')\}, \\ \varphi^2(\zeta; \rho') &= \zeta^{-1} \{p_1(\zeta; \rho')\psi^1(\zeta; \rho') + p_2(\zeta; \rho')\psi^2(\zeta; \rho')\}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где $c_1(\rho')$, $c_2(\rho')$ – некоторые постоянные, $p_1(\zeta; \rho')$, $p_2(\zeta; \rho')$ – некоторые полиномы первого порядка (зависящие от ρ'); при $\mu_1 > \mu_2$ решения $\varphi^1(\zeta; \rho')$ и $\varphi^2(\zeta; \rho')$ можно выразить из системы (4.19), в которой $\det \|p_l^k(\zeta; \rho')\| = d(\rho')\zeta$, где $d(\rho') \neq 0$ – число, зависящее от ρ' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Далее будем опускать в записи функций зависимость от ρ' . Опять представим решения $\psi^1(\zeta)$, $\psi^2(\zeta)$ в виде (4.19) через каноническую систему решений. Сравнивая порядки $\det \Phi(\zeta)$ и $\det \Psi(\zeta)$, в силу (4.20) заключаем, что

$$P(\zeta) = \det \|p_l^k(\zeta)\|$$

является полиномом первого порядка. Поэтому существуют l_1, l_2 такие, что набор (l_1, l_2) является некоторой перестановкой из $(1, 2)$ и что $\deg p_{l_1}^1(\zeta)p_{l_2}^2(\zeta) \geq 1$ ($\deg p(\zeta)$ – степень полинома $p(\zeta)$).

Обозначая $\deg p_l^k(\zeta)$ через d_l^k , имеем $d_{l_1}^1 + d_{l_2}^2 \geq 1$.

С другой стороны, сравнивая порядки убывания при $\zeta \rightarrow \infty$ в равенствах (4.19) и учитывая свойства канонической системы $\varphi^1(\zeta)$, $\varphi^2(\zeta)$, заключаем, что

$$\mu_1 \leq \varkappa_{l_1} - d_{l_1}^1, \quad \mu_2 \leq \varkappa_{l_2} - d_{l_2}^2. \quad (4.25)$$

Суммируя эти неравенства и используя равенства $\varkappa_{l_1} + \varkappa_{l_2} = \varkappa$ и (4.23), имеем $\overset{1}{d}_{l_1} + \overset{2}{d}_{l_2} \leq 1$. Таким образом, $\overset{1}{d}_{l_1} + \overset{2}{d}_{l_2} = 1$. Значит, степень по крайней мере одного из полиномов $\overset{1}{p}_1(\zeta)\overset{2}{p}_2(\zeta)$ или $\overset{2}{p}_1(\zeta)\overset{1}{p}_2(\zeta)$ равна 1.

Если одно из неравенств (4.25) строгое, то, суммируя эти неравенства, мы получили бы $\mu_1 + \mu_2 < \varkappa - 1$, что противоречило бы равенству (4.23). Следовательно, $\mu_1 = \varkappa_{l_1} - \overset{1}{d}_{l_1}$, $\mu_2 = \varkappa_{l_2} - \overset{2}{d}_{l_2}$.

Рассмотрим возможные значения μ_1, μ_2 при различных l_1, l_2 , $\overset{1}{d}_{l_1} \geq 0$, $\overset{2}{d}_{l_2} \geq 0$, $\overset{1}{d}_{l_1} + \overset{2}{d}_{l_2} = 1$:

- 1) $\mu_1 = \varkappa_1 - 1$, $\mu_2 = \varkappa_2$;
- 2) $\mu_1 = \varkappa_1$, $\mu_2 = \varkappa_2 - 1$;
- 3) $\mu_1 = \varkappa_2 - 1$, $\mu_2 = \varkappa_1$;
- 4) $\mu_1 = \varkappa_2$, $\mu_2 = \varkappa_1 - 1$.

Случай 2) при $\mu_1 = \mu_2$ и 3) следует исключить, так как они не совместимы с неравенствами $\mu_1 \geq \mu_2$, $\varkappa_1 \geq \varkappa_2$. Случай 4) из тех же соображений возможен только тогда, когда $\varkappa_1 - \varkappa_2 \leq 1$. Если $\varkappa_1 = \varkappa_2$, то этот случай при перенумерации векторов в канонической системе решений можно отнести к случаю 2). Следовательно, в случае 4) необходимо рассматривать только возможность $\varkappa_1 = \varkappa_2 + 1$. При этом $\mu_1 = \mu_2$. Случай 1) при $\mu_1 = \mu_2$ с помощью перенумерации $\overset{1}{\psi}(\zeta), \overset{2}{\psi}(\zeta)$ может быть отнесен к предыдущему случаю. Итак, необходимо рассмотреть только случаи 1) и 2) при $\mu_1 > \mu_2$ и случай 4) при $\mu_1 = \mu_2$.

Случай 1) при $\mu_1 > \mu_2$ оказывается невозможным в силу условий теоремы. Действительно, сравнивая порядки при $\zeta \rightarrow \infty$ в равенствах (4.19), получим $\mu_1 \leq \varkappa_2 - \overset{1}{d}_2$, откуда $\overset{1}{d}_2 \leq \mu_2 - \mu_1 < 0$, что означает $\overset{1}{p}_2(\zeta) \equiv 0$. Поэтому $\overset{1}{p}_1(\zeta)$ – полином первой степени, $\overset{2}{p}_2 \neq 0$ – число, $\overset{2}{p}_1(\zeta)$ – полином степени не выше $\mu_1 - \mu_2 + 1$.

Выразим $\overset{k}{\varphi}(\zeta)$ из (4.19) через $\overset{k}{\psi}(\zeta)$:

$$\overset{1}{\varphi}(\zeta) = \overset{2}{p}_2 \overset{1}{\psi}(\zeta) / P(\zeta), \quad \overset{2}{\varphi}(\zeta) = (\overset{1}{p}_1(\zeta) \overset{2}{\psi}(\zeta) - \overset{2}{p}_1(\zeta) \overset{1}{\psi}(\zeta)) / P(\zeta),$$

где $P(\zeta) = a\zeta + b$. Покажем, что b равно нулю. Действительно, если $b \neq 0$, то $P(\zeta) \neq 0$ в окрестности $\zeta = 0$, и тогда в силу оценки (4.21) оба решения канонической системы допускают оценку

$$|\overset{k}{\varphi}(\zeta)| < C|\zeta|^{-\gamma+\varepsilon_0},$$

что противоречит последнему утверждению теоремы 4.1. Следовательно, $P(\zeta) = a\zeta$, где $a \neq 0$. Тогда в силу оценки (4.22) в окрестности нуля имеем

$$|\overset{1}{\varphi}(\zeta)| > \tilde{c}|\zeta|^{-\gamma-(1-\varepsilon_1)}, \quad \tilde{c} > 0, \quad (1 - \varepsilon_1) > 0,$$

что противоречит (4.12). Таким образом, этот случай невозможен.

Рассмотрим случай 4) при $\mu_1 = \mu_2$. Сравнивая порядки убывания при $\zeta \rightarrow \infty$, нетрудно видеть, что $\overset{1}{d}_1 \leq 1$, $\overset{1}{d}_2 = 0$, $\overset{2}{d}_1 = 1$, $\overset{2}{d}_2 \leq 0$, т.е. $\overset{1}{p}_2(\zeta) = \overset{1}{p}_2$, $\overset{2}{p}_2(\zeta) = \overset{2}{p}_2 -$ некоторые числа, $\overset{1}{p}_1(\zeta)$, $\overset{2}{p}_1(\zeta)$ – многочлены не выше первой степени. Выражая $\overset{l}{\varphi}(\zeta)$ из системы (4.19), находим

$$\overset{1}{\varphi}(\zeta) = (\overset{2}{p}_2 \overset{1}{\psi}(\zeta) - \overset{1}{p}_2 \overset{2}{\psi}(\zeta))/P(\zeta), \quad \overset{2}{\varphi}(\zeta) = (\overset{1}{p}_1(\zeta) \overset{2}{\psi}(\zeta) - \overset{2}{p}_1(\zeta) \overset{1}{\psi}(\zeta))/P(\zeta).$$

Так же, как и в предыдущем случае, получаем, что $P(\zeta) = a\zeta$. В результате приходим к соотношениям (4.24).

Случай 2) при $\mu_1 > \mu_2$ рассматривается аналогично. Этим заканчивается доказательство теоремы 4.3.

§ 5. Асимптотические разложения интегралов типа Коши вблизи концов контура интегрирования

Первый член асимптотики интегралов типа Коши вблизи концов контура интегрирования приведен, например, в [14]. Однако нам понадобятся асимптотические разложения интегралов типа Коши вблизи концов контура интегрирования в случае, если контур – луч, а плотность в интеграле типа Коши допускает степенное асимптотическое разложение. Получим в этом параграфе такие асимптотические разложения.

Сначала приведем следующую лемму о почленном дифференцировании асимптотических рядов аналитических функций.

ЛЕММА 5.1. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в секториальной окрестности S нуля: $|z| < a$, $\alpha < \arg z < \beta$ (бесконечности: $|z| > a$, $\alpha < \arg z < \beta$), $\alpha < \beta$, допускающая на S асимптотическое разложение:

$$f(z) \approx \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu_k(z), \quad (5.1)$$

где $\mu_k(z)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, – асимптотическая последовательность регулярных на S функций, т.е.

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0(\infty) \\ z \in S}} |\mu_{k+1}(z)/\mu_k(z)| \rightarrow 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

удовлетворяющая условию

$$c_k |z|^{-1} \leq |\mu'_k(z)/\mu_k(z)| \leq C_k |z|^{-1}, \quad z \in S, \quad (5.2)$$

где положительные постоянные c_k , C_k зависят только от k .

Тогда асимптотическое разложение (5.1) допускает почленное дифференцирование на S , т.е.

$$f'(z) \approx \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu'_k(z). \quad (5.3)$$

Здесь под асимптотическими разложениями (5.1), (5.3) на S , например (5.1), понимается, что для любого $m = 0, 1, 2, \dots$

$$f(z) = \sum_{k=0}^m a_k \mu_k(z) + \varphi_m(z) \mu_{m+1}(z), \quad (5.4)$$

где $\varphi_m(z)$ – регулярная на S функция, имеющая на любой секториальной окрестности $S_1: |z| < a$ ($|z| > a$), $\alpha < \alpha_1 \leq \arg z \leq \beta_1 < \beta$, оценку

$$|\varphi_m(z)| < C_m(\alpha_1, \beta_1), \quad z \in S_1,$$

где $C_m(\alpha_1, \beta_1)$ – некоторые постоянные, не зависящие от z .

Доказательство этой леммы аналогично доказательству, приведенному в [19] для случая степенных разложений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $\mu'_k(z)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, в силу неравенства

$$|\mu'_{k+1}(z)/\mu'_k(z)| \leq C_{k+1} c_k^{-1} |\mu_{k+1}(z)/\mu_k(z)|, \quad z \in S,$$

вытекающего из (5.2), будет также асимптотической на S . Дифференцируя (5.4), имеем

$$f'(z) = \sum_{k=0}^m a_k \mu'_k(z) + r'_m(z), \quad z \in S,$$

где

$$r'_m(z) = \mu'_{m+1}(z)(\varphi_m(z) + \varphi'_m(z)\mu_{m+1}(z)/\mu'_{m+1}(z)),$$

$\varphi_m(z)$ – ограниченная функция на любой окрестности S_1 . Из условия (5.2) следует, что $|\mu_{m+1}(z)/\mu'_{m+1}(z)| \leq |z|/c_{m+1}$. Таким образом, лемма будет доказана, если покажем, что на любой окрестности $S_2: |z| < a$ ($|z| > a$), $\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 \leq \arg z \leq \beta_2 < \beta_1 < \beta$, справедлива оценка

$$|\varphi'_m(z)| < C(\alpha_2, \beta_2)/|z|.$$

Последнее неравенство легко следует из представления $\varphi_m(z)$ интегралом по контуру C_z , являющемуся границей области $|z|/2 < |\zeta| < 2|z|$, $\alpha_1 < \arg \zeta < \beta_1$. Поскольку при $z \in S_2$ $\min_{\zeta \in C_z} |\zeta - z| > \delta|z|$, $\delta > 0$, а $\text{mes } C_z \leq M|z|$, имеем

$$|\varphi'_m(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_z} \frac{\varphi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^2} \right| \leq \frac{C(\alpha_1, \beta_1)M}{2\pi\delta^2|z|}, \quad z \in S_2.$$

Лемма доказана.

Обозначим через $\mathcal{L}_\omega$ луч $\zeta = \xi e^{i\omega}$, $0 < \xi < \infty$, ориентированный движением от нуля к бесконечности, через $\mathcal{L}_\omega^0(a)$ и $\mathcal{L}_\omega^\infty(a)$ – части этого луча, лежащие в областях $|\zeta| < a$ и $|\zeta| > a$ соответственно и ориентированные тем же направлением.

Получим асимптотические разложения интегралов вида

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_\omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad -\pi < \omega < \pi, \quad (5.5)$$

в окрестностях точек $z = 0$ и $z = \infty$.

ЛЕММА 5.2. 1. Если локально интегрируемая функция $f(\zeta)$ на луче $\mathcal{L}_\omega$ в окрестности $\zeta = 0$ допускает асимптотическое разложение:

$$f(\zeta) \approx \sum_{k=0}^{\infty} a_k |\zeta|^{\alpha_k}, \quad \arg \zeta = \omega, \quad |\zeta| \leq a, \quad a > 0, \quad (5.6)$$

где $-1 < \alpha_0 < \alpha_1 < \dots$, $\alpha_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, и при этом $f(\zeta)\zeta^{-1}$ абсолютно интегрируема на $\mathcal{L}_\omega^\infty(a)$, то в области $|z| < a$, $\omega < \arg z < \omega + 2\pi$, для интеграла (5.5) имеет место асимптотическое разложение:

$$\begin{aligned} I(z) \approx & \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ целое}}} z^n \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\mathcal{L}_\omega^0(a)} \frac{f(\zeta) - f_{[\alpha_k \leq n]}(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta + \int_{\mathcal{L}_\omega^\infty(a)} \frac{f(\zeta) - f_{[\alpha_k < n]}(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right. \\ & \left. + \begin{cases} a_k e^{-i\omega n} (i(\pi + \omega) + \ln a), & \text{если } \alpha_k = n \text{ при некотором } k \\ 0, & \text{если ни одно } \alpha_k \neq n \end{cases} \right) \\ & - \sum_{\alpha_k \text{ не целые}} a_k \frac{e^{-i\alpha_k(\omega+\pi)}}{2i \sin(\pi\alpha_k)} (z)_\omega^{\alpha_k} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{\alpha_k \text{ целые}} a_k e^{-i\alpha_k \omega} z^{\alpha_k} \ln z. \quad (5.7) \end{aligned}$$

2. Если локально интегрируемая функция $f(\zeta)$ на луче $\mathcal{L}_\omega$ в окрестности $\zeta = \infty$ допускает асимптотическое разложение:

$$f(\zeta) \approx \sum_{k=1}^{\infty} b_k |\zeta|^{-\beta_k}, \quad \arg \zeta = \omega, \quad |\zeta| \geq b, \quad b > 0, \quad (5.8)$$

где $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots$, $\beta_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, и абсолютно интегрируема на $\mathcal{L}_\omega^0(b)$, то в области $|z| > b$, $\omega < \arg z < \omega + 2\pi$, имеет место асимптотическое разложение:

$$\begin{aligned} I(z) \approx & - \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ целое}}} \frac{1}{z^n} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\mathcal{L}_\omega^0(b)} (f(\zeta) - f_{[\beta_k < n]}(\zeta)) \zeta^{n-1} d\zeta \right. \\ & + \int_{\mathcal{L}_\omega^\infty(b)} (f(\zeta) - f_{[\beta_k \leq n]}(\zeta)) \zeta^{n-1} d\zeta \\ & \left. - \begin{cases} b_k e^{i n \omega} (i(\omega + \pi) + \ln b), & \text{если } \beta_k = n \text{ при некотором } k \\ 0, & \text{если ни одно } \beta_k \neq n \end{cases} \right) \\ & + \sum_{\beta_k \text{ не целые}} b_k \frac{e^{i\beta_k(\omega+\pi)}}{2i \sin(\pi\beta_k)} (z)_\omega^{-\beta_k} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta_k \text{ целые}} b_k e^{i\beta_k \omega} z^{-\beta_k} \ln z. \quad (5.9) \end{aligned}$$

Разложения (5.7), (5.9) равномерны на любых подмножествах $\omega + \delta_1 \leq \arg z \leq \omega + 2\pi - \delta_1$, $\delta_1 > 0$ – любое, и допускают почленное дифференцирование произвольное число раз. В формулах (5.7), (5.9)

$$\begin{aligned} f_{[\alpha_k \leq n]}(\zeta) &= \sum_{\alpha_k \leq n} a_k |\zeta|^{\alpha_k}, & f_{[\alpha_k < n]}(\zeta) &= \sum_{\alpha_k < n} a_k |\zeta|^{\alpha_k}, \\ f_{[\beta_k < n]}(\zeta) &= \sum_{\beta_k < n} b_k |\zeta|^{-\beta_k}, & f_{[\beta_k \leq n]}(\zeta) &= \sum_{\beta_k \leq n} b_k |\zeta|^{-\beta_k}, \end{aligned}$$

где $(z)_\omega^\alpha = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}$, $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $\omega \leq \arg z \leq \omega + 2\pi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим

$$I(z) = I_0(z) + I_\infty(z); \quad (5.10)$$

здесь $I_0(z)$ – интеграл вида (5.5) с $\mathcal{L}_\omega$, замененным на $\mathcal{L}_\omega^0(a)$ в случае 1 и на $\mathcal{L}_\omega^0(b)$ – в случае 2; $I_\infty(z)$ – интеграл вида (5.5) по $\mathcal{L}_\omega^\infty(a)$ в случае 1 и по $\mathcal{L}_\omega^\infty(b)$ в случае 2.

Интегралы $I_\infty(z)$ в случае 1 при $|z| < a$ и $I_0(z)$ в случае 2 при $|z| > b$ – аналитические функции, имеющие в соответствующих областях разложения:

$$I_\infty(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_\omega^\infty(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \quad (5.11_1)$$

$$I_0(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_\omega^0(b)} f(\zeta) \zeta^{n-1} d\zeta. \quad (5.11_2)$$

Получим разложения интегралов вида

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_\omega^0(a)} \frac{|\zeta|^\alpha}{\zeta - z} d\zeta, \quad \alpha > -1, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_\omega^\infty(b)} \frac{|\zeta|^{-\beta}}{\zeta - z} d\zeta, \quad \beta > 0,$$

в окрестностях точек $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$ соответственно.

Пусть сначала α, β не являются целыми. Обозначим через C_ω контур, являющийся границей области, представляющей собой круг $|\zeta| < a$ без луча $\mathcal{L}_\omega^0(a)$ в случае 1, дополнение к кругу $|\zeta| \leq b$ без луча $\mathcal{L}_\omega^\infty(b)$ в случае 2, и положительно ориентированный относительно этой области. Интегрируя по C_ω , получаем соотношения

$$-e^{i\alpha(\omega+\pi)} 2i \sin(\pi\alpha) \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_\omega^0(a)} \frac{|\zeta|^\alpha d\zeta}{\zeta - z} = (z)_\omega^\alpha - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=a} \frac{(\zeta)_\omega^\alpha d\zeta}{\zeta - z} \quad (5.12_1)$$

в случае 1, $|z| < a$, и

$$e^{-i\beta(\omega+\pi)} 2i \sin(\pi\beta) \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_\omega^\infty(b)} \frac{|\zeta|^{-\beta} d\zeta}{\zeta - z} = (z)_\omega^{-\beta} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=b} \frac{(\zeta)_\omega^{-\beta} d\zeta}{\zeta - z} \quad (5.12_2)$$

в случае 2, $|z| > b$. Контур в последних интегралах из (5.12₁) и (5.12₂) обходится против часовой стрелки. Эти интегралы являются регулярными функциями вне контуров и допускают разложения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=a} \frac{(\zeta)_\omega^\alpha d\zeta}{\zeta - z} &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=a} (\zeta)_\omega^{\alpha-n-1} d\zeta \\ &= \frac{e^{i\alpha(\omega+\pi)} 2i \sin(\pi\alpha)}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{a^{\alpha-n} e^{-i\omega n}}{\alpha - n}, \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=b} \frac{(\zeta)_\omega^{-\beta} d\zeta}{\zeta - z} &= - \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta|=b} (\zeta)_\omega^{-\beta+n+1} d\zeta \\ &= \frac{e^{-i\beta(\omega+\pi)} 2i \sin(\pi\beta)}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \frac{b^{-\beta+n} e^{i\omega n}}{-\beta + n} \end{aligned}$$

соответственно при $|z| < a$ и при $|z| > b$.

Отсюда при нецелых $\alpha > -1$, $\beta > 0$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^0(a)} \frac{|\zeta|^\alpha d\zeta}{\zeta - z} = -\frac{e^{-i\alpha(\omega+\pi)}}{2i \sin(\pi\alpha)} (z)_{\omega}^{\alpha} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \frac{a^{\alpha-n} e^{-i\omega n}}{\alpha - n}, \quad |z| < a, \quad (5.13_1)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^{\infty}(b)} \frac{|\zeta|^{-\beta} d\zeta}{\zeta - z} = \frac{e^{i\beta(\omega+\pi)}}{2i \sin(\pi\beta)} (z)_{\omega}^{-\beta} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} \frac{b^{-\beta+n} e^{i\omega n}}{-\beta + n}, \quad |z| > b. \quad (5.13_2)$$

Если α и β целые, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^0(a)} \frac{|\zeta|^\alpha d\zeta}{\zeta - z} &= \frac{e^{-i\omega\alpha}}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^0(a)} \frac{\zeta^\alpha d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \frac{e^{-i\omega\alpha}}{2\pi i} \left(\int_{\mathcal{L}_{\omega}^0(a)} \frac{\zeta^\alpha - z^\alpha}{\zeta - z} d\zeta + z^\alpha \int_{\mathcal{L}_{\omega}^0(a)} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right) \\ &= \frac{e^{-i\omega\alpha}}{2\pi i} \left(\sum_{n=0}^{\alpha-1} z^n \int_{\mathcal{L}_{\omega}^0(a)} \zeta^{\alpha-n-1} d\zeta + z^\alpha \ln(\zeta - z) \Big|_{\zeta=0}^{ae^{i\omega}} \right) \end{aligned}$$

при $|z| < a$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^{\infty}(b)} \frac{|\zeta|^{-\beta} d\zeta}{\zeta - z} &= \frac{e^{i\omega\beta}}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^{\infty}(b)} \frac{\zeta^{-\beta} d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \frac{e^{i\omega\beta}}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^{\infty}(b)} \left(\frac{z^\beta - \zeta^\beta}{z^\beta \zeta^\beta (\zeta - z)} + \frac{z^{-\beta}}{\zeta - z} \right) d\zeta \\ &= \frac{e^{i\omega\beta}}{2\pi i} \left(- \sum_{n=1}^{\beta-1} z^{-n} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^{\infty}(b)} \zeta^{-\beta+n-1} d\zeta - z^{-\beta} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^{\infty}(b)} \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta - z} \right) d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\beta-1} z^{-n} \frac{b^{-\beta+n} e^{i\omega n}}{-\beta + n} + \frac{e^{i\omega\beta}}{2\pi i} z^{-\beta} (\ln \zeta - \ln(\zeta - z)) \Big|_{\zeta=be^{i\omega}}^{\infty} \end{aligned}$$

при $|z| > b$, где $\ln(\zeta - z) = \ln|\zeta - z| + i \arg(\zeta - z)$, $\omega - \pi < \arg(\zeta - z) < \omega + \pi$, и $\ln \zeta = \ln|\zeta| + i \arg \zeta$, $\arg \zeta = \omega$. Поэтому при $|z| < a$

$$\ln(ae^{i\omega} - z) = \ln a + i\omega + \ln(1 - za^{-1}e^{-i\omega}) = \ln a + i\omega - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k a^{-k} e^{-i\omega k}}{k},$$

$$\ln(-z) = -i\pi + \ln z, \quad \ln z = \ln|z| + i \arg z, \quad \omega < \arg z < \omega + 2\pi,$$

и при $|z| > b$

$$\ln(be^{i\omega}) = \ln b + i\omega, \quad \ln(be^{i\omega} - z) = -i\pi + \ln z - \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} \frac{b^k e^{i\omega k}}{k}.$$

Следовательно, для целых α и β получаем разложения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^0(a)} \frac{|\zeta|^\alpha d\zeta}{\zeta - z} &= -\frac{e^{-i\omega\alpha}}{2\pi i} z^\alpha \ln z + \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{n=0}^{\alpha-1} + \sum_{n=\alpha+1}^{\infty} \right) z^n \frac{a^{\alpha-n} e^{-i\omega n}}{\alpha - n} \\ &+ \frac{1}{2\pi i} z^\alpha e^{-i\omega\alpha} (\ln a + i(\omega + \pi)), \quad |z| < a, \quad \omega < \arg z < \omega + 2\pi, \end{aligned} \quad (5.14_1)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^{\infty}(b)} \frac{|\zeta|^{-\beta} d\zeta}{\zeta - z} &= -\frac{e^{i\omega\beta}}{2\pi i} z^{-\beta} \ln z + \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{n=1}^{\beta-1} + \sum_{n=\beta+1}^{\infty} \right) z^{-n} \frac{b^{-\beta+n} e^{i\omega n}}{-\beta + n} \\ &+ \frac{1}{2\pi i} z^{-\beta} e^{i\omega\beta} (\ln b + i(\omega + \pi)), \quad |z| > b, \quad \omega < \arg z < \omega + 2\pi. \end{aligned} \quad (5.14_2)$$

Покажем теперь справедливость асимптотических разложений (5.7) и (5.9). Пусть z лежит в секторе $\omega + \delta_1 < \arg z < \omega + 2\pi - \delta_1$, где $\delta_1 > 0$ – произвольное. Фиксируем некоторое целое $N > 0$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} |f(\zeta) - f_{[\alpha_k \leq N]}(\zeta)| &\leq C_N |\zeta|^{N+\varepsilon_1}, \quad |\zeta| < a, \quad \varepsilon_1 > 0, \\ |f(\zeta) - f_{[\beta_k \leq N]}(\zeta)| &\leq C_N |\zeta|^{-N-\varepsilon_2}, \quad |\zeta| > b, \quad \varepsilon_2 > 0. \end{aligned}$$

Воспользовавшись тождествами

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{N-1} z^n \zeta^{-n-1} + \frac{z^N}{\zeta^N(\zeta - z)}, \quad \frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^N z^{-n} \zeta^{n-1} + \frac{\zeta^N}{z^N(\zeta - z)},$$

получим представления

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^0(a)} \frac{f(\zeta) - f_{[\alpha_k \leq N]}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \sum_{n=0}^{N-1} z^n \int_{\mathcal{L}_{\omega}^0(a)} \frac{f(\zeta) - f_{[\alpha_k \leq N]}(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \\ &+ z^N \int_{\mathcal{L}_{\omega}^0(a)} \frac{f(\zeta) - f_{[\alpha_k \leq N]}(\zeta)}{\zeta^N(\zeta - z)} d\zeta, \end{aligned} \quad (5.15_1)$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^{\infty}(b)} \frac{f(\zeta) - f_{[\beta_k \leq N]}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= -\sum_{n=1}^N z^{-n} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^{\infty}(b)} (f(\zeta) - f_{[\beta_k \leq N]}(\zeta)) \zeta^{n-1} d\zeta \\ &+ z^{-N} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^{\infty}(b)} \frac{f(\zeta) - f_{[\beta_k \leq N]}(\zeta)}{\zeta - z} \zeta^N d\zeta. \end{aligned} \quad (5.15_2)$$

В секторе $\omega + \delta_1 < \arg z < \omega + 2\pi - \delta_1$, $\delta_1 > 0$, последний интеграл из (5.15₁) при $|z| < a$ и последний интеграл из (5.15₂) при $|z| > b$ ограничены некоторыми постоянными, зависящими от δ_1 и N . Действительно, в этом секторе $|\zeta - z| \geq |\zeta| \sin \delta_1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{L}_{\omega}^0(a)} \frac{f(\zeta) - f_{[\alpha_k \leq N]}(\zeta)}{\zeta^N(\zeta - z)} d\zeta \right| &\leq \frac{C_N}{\sin \delta_1} \int_0^a \frac{\xi^{N+\varepsilon_1}}{\xi^{N+1}} d\xi \leq C(N, \delta_1), \\ \left| \int_{\mathcal{L}_{\omega}^{\infty}(b)} \frac{f(\zeta) - f_{[\beta_k \leq N]}(\zeta)}{\zeta - z} \zeta^N d\zeta \right| &\leq \frac{C_N}{\sin \delta_1} \int_b^{\infty} \frac{\xi^{-N-\varepsilon_2} \xi^N}{\xi} d\xi \leq C(N, \delta_1). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Воспользовавшись в представлении (5.10) разложениями (5.11), (5.15) и оценками (5.16), получим

$$I(z) = \sum_{\alpha_k \leq N} a_k \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^0(a)} \frac{|\zeta|^{\alpha_k} d\zeta}{\zeta - z} + \sum_{n=0}^{N-1} z^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^0(a)} \frac{f(\zeta) - f_{[\alpha_k \leq N]}(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta + \sum_{n=0}^{N-1} z^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^{\infty}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta + O(z^N), \quad |z| < a, \quad (5.17_1)$$

$$I(z) = \sum_{\beta_k \leq N} b_k \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^{\infty}(b)} \frac{|\zeta|^{-\beta_k} d\zeta}{\zeta - z} - \sum_{n=1}^{N-1} z^{-n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^{\infty}(b)} (f(\zeta) - f_{[\beta_k \leq N]}(\zeta)) \zeta^{n-1} d\zeta - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^0(b)} f(\zeta) \zeta^{n-1} d\zeta + O(z^{-N}), \quad |z| > b, \quad (5.17_2)$$

в секторе $\omega + \delta_1 < \arg z < \omega + 2\pi - \delta_1$, $\delta_1 > 0$. Интегралы в первых суммах из (5.17₁), (5.17₂) разложим до $O(z^{\pm N})$ по формулам (5.13) и (5.14). После пересуммирования получаем, например, для (5.17₁):

$$I(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^n \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{\substack{\alpha_k \leq N \\ \alpha_k \neq n}} \frac{a^{\alpha_k - n} e^{-i\omega n}}{\alpha_k - n} + \left\{ \begin{array}{l} e^{-i\omega n} (\ln a + i(\omega + \pi)), \text{ если } \alpha_k = n \\ 0, \text{ если ни одно } \alpha_k \neq n \end{array} \right\} + \int_{\mathcal{L}_{\omega}^0(a)} \frac{f(\zeta) - f_{[\alpha_k \leq N]}(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta + \int_{\mathcal{L}_{\omega}^{\infty}(a)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \right) - \sum_{\substack{\alpha_k \leq N \\ \alpha_k \text{ не целые}}} a_k \frac{e^{-i\alpha_k(\omega + \pi)}}{2i \sin(\pi\alpha_k)} z_{\omega}^{\alpha_k} - \sum_{\substack{\alpha_k \leq N \\ \alpha_k \text{ целые}}} a_k \frac{e^{-i\alpha_k \omega}}{2\pi i} (z)^{\alpha_k} \ln z + O(z^N). \quad (5.18)$$

Остается показать, что коэффициенты при z^n в разложении (5.18) совпадают с соответствующими коэффициентами в (5.7). Это следует из равенств

$$\frac{a^{\alpha_k - n} e^{-i\omega n}}{\alpha_k - n} = \begin{cases} \int_{\mathcal{L}_{\omega}^0(a)} \frac{|\zeta|^{\alpha_k}}{\zeta^{n+1}} d\zeta & \text{при } \alpha_k > n, \\ - \int_{\mathcal{L}_{\omega}^{\infty}(a)} \frac{|\zeta|^{\alpha_k}}{\zeta^{n+1}} d\zeta & \text{при } \alpha_k < n. \end{cases}$$

Аналогично устанавливается справедливость разложения (5.9).

Возможность почленного дифференцирования разложений (5.7) и (5.9) произвольное число раз следует непосредственно из леммы 5.1 и структуры этих разложений.

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть функция $f(\zeta)$, фигурирующая в лемме 5.2, допускает аналитическое продолжение с прямой $\mathcal{L}_\omega$ в секториальную окрестность нуля $|\zeta| < a$, $\omega - \Delta < \arg \zeta < \omega + \Delta$, $\Delta > 0$, для случая 1, в секториальную окрестность бесконечности $|\zeta| > b$, $\omega - \Delta < \arg \zeta < \omega + \Delta$, $\Delta > 0$, для случая 2 и для этого аналитического продолжения в данных секториальных окрестностях справедливы соответственно этим случаям разложения (5.6) и (5.8), в которых функции $|\zeta|^{\alpha_k}$ и $|\zeta|^{-\beta_k}$ следует предполагать аналитически продолженными в соответствующую приведенную выше секториальную окрестность.

Тогда интеграл $I(z)$, определенный формулой (5.5) при $\omega < \arg z < \omega + 2\pi$, $|z| > 0$, допускает аналитическое продолжение в случае 1 для $|z| < a$ и в случае 2 для $|z| > b$ в сектор $\omega - \Delta < \arg z < \omega + 2\pi + \Delta$ (на римановой поверхности), в котором для $I(z)$ справедливо в случае 1 разложение (5.7), в случае 2 – разложение (5.9) со всеми функциями от z , фигурирующими в правых частях этих разложений, аналитически продолженными в сектор $\omega - \Delta < \arg z < \omega + 2\pi + \Delta$. Эти разложения равномерны в любом секторе меньшего раствора $\omega - \Delta < \alpha_1 \leq \arg z \leq \beta_1 < \omega + 2\pi + \Delta$ и допускают почленное дифференцирование произвольное число раз.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, например, в случае 1 интеграл $I(z)$ можно представить при $\omega < z < \omega + 2\pi - \Delta_1$, $0 < \Delta_1 < \Delta$, в виде

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\omega-\Delta_1}^0(a)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-\Delta_1 \leq \arg \zeta \leq \omega} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_\omega^\infty(a)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}. \quad (5.19)$$

Два последних интеграла в (5.19) являются аналитическими функциями в окрестности $|z| < a$ и разлагаются по целым степеням z . Первый интеграл в (5.19), как следует из доказательства леммы 5.2, имеет асимптотическое разложение по асимптотической последовательности, составленной из $(z)_{\omega-\Delta}^{\alpha_k}$, тех $z^{\alpha_k} \ln z$ ($\omega - \Delta_1 < \operatorname{Im} \ln z < \omega + 2\pi - \Delta_1$), для которых α_k – целое, и z^n , где $n \geq 0$ – целые. Полученное таким образом асимптотическое разложение должно в силу единственности совпадать с разложением (5.9) при $\omega < z < \omega + 2\pi - \Delta_1$, $|z| < a$. Отсюда следует возможность аналитического продолжения асимптотического равенства (5.7) в сектор $\omega - \Delta < \arg z < \omega + 2\pi$, $|z| < a$. Аналогично доказываются остальные утверждения следствия.

§ 6. Решение граничной задачи Гильберта с предельной (при $|\rho'| \rightarrow \infty$) матрицей и связанная с ним подстановка. Лемма о суммарном индексе

Этот и последующие параграфы посвящены получению решений граничной задачи (3.17) и изучению их поведения при больших $|\rho'|$. В работах [17], [18], например, изучалась зависимость от параметра решений граничной задачи Гильберта с матричным коэффициентом, аналитически зависящим от этого параметра. В рассматриваемом случае результаты этих работ неприменимы, поскольку матрица $G_\beta(\eta; \rho')$ в точке $\rho' = \infty$ зависит не аналитически от ρ' . Формулы для

решения векторной задачи Гильберта в случае произвольных матричных коэффициентов неизвестны. Матрица $G_\beta(\eta; \rho')$ (см. (3.20)) граничной задачи (3.17) имеет, однако, специальный вид: нижнетреугольный при $\eta > 0$ и верхнетреугольный при $\eta < 0$. Кроме того, в секторе (3.16), как легко видеть, эта матрица при $|\rho'| \rightarrow \infty$ стремится экспоненциально при каждом $\eta \neq 0$ к предельной матрице $G_\beta(\eta; \infty)$, являющейся диагональной:

$$G_\beta(\eta; \infty) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_\beta(i\eta) \end{pmatrix} & \text{при } \eta > 0, \\ \begin{pmatrix} H_\beta(i\eta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{при } \eta < 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Специфика матрицы $G_\beta(\eta; \rho')$ позволяет свести задачу (3.17) к системе интегральных уравнений на полуоси, которую уже удастся разрешить при больших $|\rho'|$.

Рассмотрим однородную граничную задачу Гильберта с предельной матрицей (6.1):

$$X_{\beta, \text{л}}(i\eta) = G_\beta(\eta; \infty)X_{\beta, \text{п}}(i\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad (6.2)$$

где $X_\beta(\zeta)$ – кусочно голоморфная матрица со скачком вдоль мнимой оси, на которой выполняется условие сопряжения (6.2). Поскольку $G_\beta(\eta; \infty)$ – диагональная матрица с кусочно гладкими коэффициентами, легко выписывается решение задачи (6.2) (см. [14]). Воспользуемся следующим решением:

$$X_\beta(\zeta) = \begin{pmatrix} \chi_\beta^+(\zeta) & 0 \\ 0 & \chi_\beta^-(\zeta) \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

где

$$\chi_\beta^\pm(\zeta) = \zeta^{q_\pm} \exp\left(\mp \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\mp \frac{\pi}{2}}} \frac{\ln H_\beta(w) dw}{w - \zeta}\right). \quad (6.4)$$

Здесь q_+ и q_- – некоторые целые числа, которые будут подобраны в дальнейшем (в § 12), $\ln H_\beta(w)$ – непрерывно меняющаяся ветвь при непрерывном изменении $H_\beta(w)$, так что $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \ln H_\beta(\pm i\eta) = 0$. Решение (6.3), как мы увидим далее, является при больших $|\rho'|$ приближением, в некотором смысле, к решению задачи (3.17) и входит в выражение для первых членов асимптотики собственных значений задачи (1.1).

Используя решение (6.3), (6.4) задачи (6.2), выполним следующую подстановку в задаче (3.17):

$$\Phi(\zeta; \rho') = X_\beta(\zeta)\Upsilon(\zeta; \rho'), \quad \Upsilon(\zeta; \rho') = \begin{pmatrix} v_1^+(\zeta; \rho') & v_2^+(\zeta; \rho') \\ v_1^-(\zeta; \rho') & v_2^-(\zeta; \rho') \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Для $\Upsilon(\zeta; \rho')$ получаем следующую однородную граничную задачу Гильберта:

$$\Upsilon_\text{л}(i\eta; \rho') = \mathcal{G}_\beta(\eta; \rho')\Upsilon_\text{п}(i\eta; \rho'), \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad (6.6)$$

с матрицей

$$\mathcal{G}_\beta(\eta; \rho') = X_{\beta, \text{л}}^{-1}(i\eta) G_\beta(\eta; \rho') X_{\beta, \text{п}}(i\eta) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h_\beta^+(i\eta) e^{-\eta \rho'} & 1 \end{pmatrix} & \text{при } \eta > 0, \\ \begin{pmatrix} 1 & h_\beta^-(i\eta) e^{\eta \rho'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{при } \eta < 0, \end{cases}$$

где

$$h_\beta^+(i\eta) = \frac{\chi_\beta^+(i\eta)}{\chi_{\beta, \text{л}}^-(i\eta)} (H_\beta(i\eta) - 1), \quad \eta > 0, \quad h_\beta^-(i\eta) = \frac{\chi_\beta^-(i\eta)}{\chi_{\beta, \text{л}}^+(i\eta)} (H_\beta(i\eta) - 1), \quad \eta < 0. \quad (6.7)$$

Функции $h_\beta^+(i\eta)$ и $h_\beta^-(i\eta)$ являются бесконечно дифференцируемыми, даже аналитическими при $|\eta| > 0$, если $|\beta| \neq |\delta/\gamma \pm \pi/2|$. Действительно, в этом случае функция $H_\beta(\zeta)$ в точках мнимой оси, кроме начала координат, является аналитической, а поэтому и матрица $X_\beta(\zeta)$ как решение задачи (6.2) будет также аналитической в тех же точках.

Найдем асимптотическое поведение функций $h_\beta^+(i\eta)$ и $h_\beta^-(i\eta)$ в окрестностях нуля и бесконечности. При разложении интегралов типа Коши, фигурирующих в формулах (6.4), воспользуемся леммой 5.2 и следствием 5.1. Как легко получается при использовании (3.19) и (3.4), функции $\ln H_\beta(i\eta)$, $\eta \geq 0$, имеют разложения:

а) в окрестности нуля ($|\eta| < \min(1, k^{\frac{1}{\gamma}})$)

$$\ln H_\beta(i\eta) = -\ln k \mp 2\pi i \sigma_\mp - 2i \sum_{n=1}^{\infty} |\eta|^{\gamma n} \frac{k^{-\frac{n}{2}} e^{-i\gamma \beta n}}{n} \sin \pi n \left(\nu_\mp \frac{\gamma}{2} \right), \quad (6.8)$$

где

$$\sigma_- = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg H_\beta(i\eta) \Big|_{\eta=0}^{+\infty}, \quad \sigma_+ = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg H_\beta(i\eta) \Big|_{\eta=-\infty}^{-0}; \quad (6.9)$$

б) в окрестности бесконечности ($\eta > \max(1, k^{\frac{1}{\gamma}})$)

$$\ln H_\beta(i\eta) = 2i \sum_{n=1}^{\infty} |\eta|^{-\gamma n} \frac{k^{\frac{n}{2}} e^{i\gamma \beta n}}{n} \sin \pi n \left(\nu \mp \frac{\gamma}{2} \right), \quad (6.10)$$

причем в этих формулах верхний знак берется при $\eta > 0$, нижний – при $\eta < 0$.

Используя разложения (5.7) и (5.9), а также следствие 5.1 (разложения (6.8), (6.10) являются даже сходящимися), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\mp \frac{\pi}{2}}} \frac{\ln H_\beta(w)}{w - \zeta} dw &= \left(\mp \sigma_\pm + \frac{1}{2\pi i} \ln k \right) \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\mathcal{L}_{\mp \frac{\pi}{2}}^0(a)} \frac{\ln H_\beta(w) + \ln k \mp 2\pi i \sigma_\pm}{w} dw \right. \\ &+ \int_{\mathcal{L}_{\mp \frac{\pi}{2}}^\infty(a)} \frac{\ln H_\beta(w)}{w} dw + (-\ln k \pm 2\pi i \sigma_\pm) \left(i \left(\pi \mp \frac{\pi}{2} \right) + \ln a \right) \\ &\left. + \frac{\sin \pi \left(\nu \pm \frac{\gamma}{2} \right)}{\sin \pi \gamma} k^{-\frac{1}{2}} e^{-i\gamma(\beta + \pi \mp \frac{\pi}{2})} (\zeta)_{\mp \frac{\pi}{2}}^\gamma + o(|\zeta|^{\gamma+\theta}) \right) \end{aligned} \quad (6.11)$$

равномерно при $|\zeta| < 1$, $\mp\pi/2 \leq \arg \zeta \leq \mp\pi/2 + 2\pi$, и

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\mp\frac{\pi}{2}}} \frac{\ln H_{\beta}(w)}{w - \zeta} dw = \frac{\sin \pi(\nu \pm \frac{\gamma}{2})}{\sin \pi \gamma} k^{\frac{1}{2}} e^{i\gamma(\beta + \pi \mp \frac{\pi}{2})} (\zeta)_{\mp\frac{\pi}{2}}^{-\gamma} + o(|\zeta|^{-\gamma-\theta}) \quad (6.12)$$

равномерно при $|\zeta| > 1$, $\mp\pi/2 \leq \arg \zeta \leq \mp\pi/2 + 2\pi$, где $0 < \theta < \min(\gamma, 1 - \gamma)$, $a > 0$ – произвольное. Остаточные члены в (6.11), (6.12) имеют согласно (5.7), (5.9), (6.8) и (6.10) асимптотические разложения вида

$$\begin{aligned} o(|\zeta|^{\gamma+\theta}) &\approx \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \zeta^n + \sum_{n=2}^{\infty} a''_n(\zeta)_{\mp\frac{\pi}{2}}^{\gamma n} + \sum_{\gamma n \text{ целые}} a'''_n \zeta^{\gamma n} \ln \zeta, \\ o(|\zeta|^{-\gamma-\theta}) &\approx \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \zeta^{-n} + \sum_{n=2}^{\infty} b''_n(\zeta)_{\mp\frac{\pi}{2}}^{-\gamma n} + \sum_{\gamma n \text{ целые}} b'''_n \zeta^{-\gamma n} \ln \zeta. \end{aligned}$$

Разложения (6.11), (6.12) в указанных областях допускают почленное дифференцирование произвольное число раз.

Используя (6.11) и (6.12) в представлениях (6.4), найдем

$$\begin{aligned} \chi_{\beta}^{\pm}(\zeta) &= (\zeta)_{\mp\frac{\pi}{2}}^{(\sigma_{\pm} \mp \frac{1}{2\pi i} \ln k + q_{\pm})} \exp \left\{ \mp \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\mathcal{L}_{\mp\frac{\pi}{2}}^0(a)} \frac{\ln H_{\beta}(w) + \ln k \mp 2\pi i \sigma_{\pm}}{w} dw \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\mathcal{L}_{\mp\frac{\pi}{2}}^{\infty}(a)} \frac{\ln H_{\beta}(w)}{w} dw + (-\ln k \pm 2\pi i \sigma_{\pm}) \left(i \left(\pi \mp \frac{\pi}{2} \right) + \ln a \right) \right) \right\} \\ &\quad \times \left(1 \mp \frac{\sin \pi(\nu \pm \frac{\gamma}{2})}{\sin \pi \gamma} k^{-\frac{1}{2}} e^{-i\gamma(\beta + \pi \mp \frac{\pi}{2})} (\zeta)_{\mp\frac{\pi}{2}}^{\gamma} + o(|\zeta|^{\gamma+\theta}) \right) \end{aligned} \quad (6.13)$$

равномерно для $|\zeta| < 1$, $\mp\pi/2 \leq \arg \zeta \leq \mp\pi/2 + 2\pi$, и

$$\chi_{\beta}^{\pm}(\zeta) = \zeta^{q_{\pm}} \left(1 \mp \frac{\sin \pi(\nu \pm \frac{\gamma}{2})}{\sin \pi \gamma} k^{\frac{1}{2}} e^{i\gamma(\beta + \pi \mp \frac{\pi}{2})} (\zeta)_{\mp\frac{\pi}{2}}^{-\gamma} + o(|\zeta|^{-\gamma-\theta}) \right) \quad (6.14)$$

равномерно для $|\zeta| > 1$, $\mp\pi/2 \leq \arg \zeta \leq \mp\pi/2 + 2\pi$. Отметим, что функции $\chi_{\beta}^{\pm}(\zeta)$ допускают аналитические продолжения из указанных областей в области, расширенные до $\mp\pi/2 - \Delta < \arg \zeta < \mp\pi/2 + 2\pi + \Delta$, $\Delta > 0$, где разложения (6.13) и (6.14) остаются справедливыми, а остаточные члены $o(|\zeta|^{\gamma+\theta})$ и $o(|\zeta|^{-\gamma-\theta})$ допускают асимптотические разложения по степеням ζ , а также, быть может, по степеням ζ , умноженным на $\ln \zeta$. Из леммы 5.1 следует, что разложения (6.13), (6.14), аналитически продолженные в более широкий сектор $\mp\pi/2 - \Delta < \arg \zeta < \mp\pi/2 + 2\pi + \Delta$, $\Delta > 0$, допускают почленное дифференцирование произвольное число раз.

Используя в выражениях (6.7) предыдущие разложения и разложения (3.21), получим

$$\begin{aligned} h_{\beta}^{\pm}(i\eta) &= 2i(i)^{q_{+}-q_{-}} \sin \pi(\nu \mp \gamma/2) e^{\pm \pi i(\sigma_{\mp} \mp \nu + \frac{\gamma}{2} \pm \frac{1}{2\pi i} \ln k)} A_{\pm} \\ &\quad \times |\eta|^{\pm(\sigma_{+}-\sigma_{-} - \frac{1}{\pi i} \ln k + q_{+}-q_{-})} (1 + d_{\pm} |\eta|^{\gamma} + o(|\eta|^{\gamma+\theta})) \end{aligned} \quad (6.15)$$

при $|\eta| < 1$, где $0 < \theta < \min(\gamma, 1 - \gamma)$,

$$\begin{aligned} A_{\pm} = \exp \left\{ \mp \frac{1}{2\pi i} \left(\sum_{\pm} \int_{\mathcal{L}_{\mp \frac{\pi}{2}}^0(a)} \frac{\ln H_{\beta}(w) + \ln k - 2\pi i \sigma_{\pm}}{w} dw \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{\pm} \int_{\mathcal{L}_{\mp \frac{\pi}{2}}^{\infty}(a)} \frac{\ln H_{\beta}(w)}{w} dw + 2\pi i \left((\sigma_{+} - \sigma_{-}) - \frac{1}{\pi i} \ln k \right) \ln a \right) \right\}, \\ A_{+} A_{-} = 1, \quad d_{\pm} = \mp 2k^{-\frac{1}{2}} e^{-i\gamma\beta} \sin \pi(\nu \mp \gamma/2) \operatorname{ctg} \pi\gamma, \end{aligned} \quad (6.16)$$

и

$$h_{\beta}^{\pm}(i\eta) = 2i \sin \pi(\nu \mp \gamma/2) k^{\frac{1}{2}} e^{i\gamma\beta}(i\eta)^{\pm(q_{+} - q_{-})} |\eta|^{-\gamma} (1 + O(|\eta|^{-\gamma})) \quad (6.17)$$

при $|\eta| > 1$. Остаточные члены $o(|\eta|^{\gamma+\theta})$ и $O(|\eta|^{-\gamma})$ в формулах (6.15) и (6.17) допускают асимптотические разложения по степеням $|\eta|$ и, быть может, по степеням $|\eta|$, умноженным на $\ln |\eta|$.

Асимптотические разложения (6.15) и (6.17) допускают почленное дифференцирование произвольное число раз, причем

$$\left(\eta \frac{d}{d\eta} \right)^m o(|\eta|^{\gamma+\theta}) = o(|\eta|^{\gamma+\theta}), \quad \left(\eta \frac{d}{d\eta} \right)^m O(|\eta|^{-\gamma}) = O(|\eta|^{-\gamma}). \quad (6.18)$$

Это следует из того, что функции $h_{\beta}^{\pm}(i\eta)$ допускают в окрестностях нуля и бесконечности аналитические продолжения с мнимой оси в некоторые секторы, содержащие мнимую ось, причем асимптотические разложения (6.15) и (6.17) (считаем, что остаточные члены разложены, как было указано выше) допускают аналитические продолжения в эти секторы. В силу леммы 5.1 заключаем, что эти асимптотические разложения можно почленно дифференцировать произвольное число раз.

Остается найти числа $\sigma_{\pm}$. Воспользуемся формулой

$$\Delta \arg(1 - e^{i\alpha} \eta^{-\gamma}) \Big|_{\eta=\infty}^0 = \alpha - 2\pi \left[\frac{\alpha}{2\pi} \right] - \pi$$

при $\alpha \neq 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Согласно (6.9), (3.19) и (3.4) получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\pm} = \pm \frac{1}{2\pi} \left\{ \Delta \arg(1 - e^{i\gamma\beta - i\delta \mp i\frac{\pi}{2}\gamma} |\eta|^{-\gamma}) \Big|_{\eta=\infty}^0 \right. \\ \left. - \Delta \arg(1 - e^{i\gamma\beta + i\delta \pm i\frac{\pi}{2}\gamma} k |\eta|^{-\gamma}) \Big|_{\eta=\infty}^0 \right\} = \mp \frac{\delta}{\pi} - \frac{\gamma}{2} + s_{\pm}, \end{aligned} \quad (6.19)$$

где

$$s_{\pm} = \mp [(\gamma\beta - \delta \mp \pi\gamma/2)/(2\pi)] \pm [(\gamma\beta + \delta \pm \pi\gamma/2)/(2\pi)], \quad (6.20)$$

квадратными скобками обозначена целая часть числа. Поскольку $|\delta| \leq \pi/2$, в силу неравенств (3.23) имеем $|\gamma\beta| \leq \pi$. Следовательно,

$$|\gamma\beta(\pm)\delta(\pm)\pi\gamma/2| < 2\pi,$$

и поэтому целые части в выражениях для s_+ и s_- могут быть равны либо 0, либо -1 . Значения s_+ и s_- для двух случаев приведены в табл. 3 и 4.

 I. $|\delta| < \pi\gamma/2$

ТАБЛИЦА 3

β	$ \beta < \frac{\pi}{2} - \frac{ \delta }{\gamma}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{ \delta }{\gamma} < \beta < \frac{\pi}{2} + \frac{ \delta }{\gamma}$	$ \beta > \frac{\pi}{2} + \frac{ \delta }{\gamma}$
s_+	1	$(1 + \text{sign } \delta)/2$	0
s_-	1	$(1 - \text{sign } \delta)/2$	0

 II. $|\delta| \geq \pi\gamma/2$

ТАБЛИЦА 4

β	$ \beta < \frac{ \delta }{\gamma} - \frac{\pi}{2}$	$\frac{ \delta }{\gamma} - \frac{\pi}{2} < \beta < \frac{ \delta }{\gamma} + \frac{\pi}{2}$	$ \beta > \frac{ \delta }{\gamma} + \frac{\pi}{2}$
s_+	$\text{sign } \delta$	$(1 + \text{sign } \delta)/2$	0
s_-	$-\text{sign } \delta$	$(1 - \text{sign } \delta)/2$	0

Сформулируем результаты, полученные относительно асимптотических разложений функций $\chi_\beta^\pm(\zeta)$, $h_\beta^\pm(i\eta)$ с использованием значений (6.19) для $s_\pm$, в виде леммы.

ЛЕММА 6.1. Пусть $|\beta| \neq |\delta/\gamma \pm \pi/2|$. Тогда функции $\chi_\beta^\pm(\zeta)$, регулярные на множествах $|\zeta| > 0$, $\mp\pi/2 \leq \arg \zeta \leq \mp\pi/2 + 2\pi$, имеют асимптотические разложения:

$$\chi_\beta^\pm(\zeta) = (\zeta)^{\mp\nu - \frac{\gamma}{2} + s_\pm + q_\pm} \cdot \overset{0}{\alpha}_\pm (1 + \overset{1}{\alpha}_\pm(\zeta)^{\frac{\gamma}{\mp\frac{\pi}{2}}} + o(|\zeta|^{\gamma+\theta})) \quad (6.21_1)$$

при $|\zeta| < 1$ и

$$\chi_\beta^\pm(\zeta) = \zeta^{q_\pm} (1 + \overset{-1}{\alpha}_\pm(\zeta)^{-\frac{\gamma}{\mp\frac{\pi}{2}}} + o(|\zeta|^{-\gamma-\theta})) \quad (6.21_2)$$

при $|\zeta| > 1$, где $\overset{0}{\alpha}_\pm$, $\overset{1}{\alpha}_\pm$, $\overset{-1}{\alpha}_\pm$ – некоторые постоянные, которые могут быть найдены из (6.13), (6.14), $\overset{0}{\alpha}_\pm \neq 0$, $0 < \theta < \min(\gamma, 1 - \gamma)$.

Функции $h_\beta^\pm(i\eta)$ при $\pm\eta > 0$ являются бесконечно дифференцируемыми и для них имеют место разложения:

$$\begin{aligned} h_\beta^\pm(i\eta) &= 2i(i)^{q_+ - q_-} \sin \pi(\nu \mp \gamma/2) e^{\pm i\pi s_\mp} A_\pm \\ &\quad \times |\eta|^{\pm(-2\nu + s_+ - s_- + q_+ - q_-)} (1 + d_\pm |\eta|^\gamma + o(|\eta|^{\gamma+\theta})) \quad \text{при } |\eta| < 1, \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$h_\beta^\pm(i\eta) = 2i \sin \pi(\nu \mp \gamma/2) k^{\frac{1}{2}} e^{i\gamma\beta} (i\eta)^{\pm(q_+ - q_-)} |\eta|^{-\gamma} (1 + O(|\eta|^{-\gamma})) \quad \text{при } |\eta| > 1,$$

где $A_\pm$ и $d_\pm$ определены в (6.16), причем $A_+ A_- = 1$. Для разложения (6.22) возможно почленное дифференцирование произвольное число раз, а для остальных членов справедливы оценки (6.18). В формулах (6.21) и (6.22) θ – произвольное число, удовлетворяющее неравенствам $0 < \theta < \min(\gamma, 1 - \gamma)$.

Докажем следующую лемму о суммарном индексе задачи (3.17).

ЛЕММА 6.2. *Имеет место формула*

$$\begin{aligned}\varkappa_1 + \varkappa_2 - \gamma &= \frac{1}{2\pi} \Delta \arg \det G_\beta(i\eta) \Big|_{\eta=-\infty}^{-0} + \frac{1}{2\pi} \Delta \arg \det G_\beta(i\eta) \Big|_{\eta=+0}^{+\infty} \\ &= \sigma_+ + \sigma_- = s_+ + s_- - \gamma = n_{\text{л}} + n_{\text{п}} - \gamma,\end{aligned}\quad (6.23)$$

где $\varkappa_1, \varkappa_2$ – частные индексы задачи (3.17), σ_+, σ_- определены (6.9) и (6.19), s_+, s_- вычисляются по формуле (6.20), а $n_{\text{л}}$ и $n_{\text{п}}$ – число корней уравнений $e^{i\gamma\beta} \tilde{K}_{\text{л}}(\zeta) - 1 = 0$ и $e^{i\gamma\beta} \tilde{K}_{\text{п}}(\zeta) - 1 = 0$ в левой и правой полуплоскостях соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 4.1, рассуждений, предшествующих этой теореме, формул (2.7), (4.7), равенства $\det G_\beta(\eta; \rho') = H_\beta(i\eta)$ и, наконец, определений (6.9) имеем

$$\begin{aligned}\varkappa_1 + \varkappa_2 &= \frac{1}{2\pi} \Delta \arg G_\beta^*(\eta; \rho') \Big|_{\eta=-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg \left(\frac{i\eta}{i\eta-1} \right)^\gamma \left(\frac{i\eta}{i\eta+1} \right)^{-\gamma} \Big|_{\eta=-\infty}^{-0} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \Delta \arg \left(\frac{i\eta}{i\eta-1} \right)^\gamma \left(\frac{i\eta}{i\eta+1} \right)^{-\gamma} \Big|_{\eta=+0}^{+\infty} + \frac{1}{2\pi} \Delta \arg \det G_\beta(\eta; \rho') \Big|_{\eta=-\infty}^{-0} \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \Delta \arg \det G_\beta(\eta; \rho') \Big|_{\eta=+0}^{+\infty} = \gamma + \sigma_+ + \sigma_-, \end{aligned}$$

откуда с учетом (6.19) следуют равенства (6.23), кроме последнего. Чтобы доказать последнее равенство из (6.23), воспользуемся принципом аргумента. Имеем

$$\begin{aligned}n_{\text{л}} &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta \arg(e^{i\gamma\beta} \tilde{K}_{\text{л}}(\zeta) - 1) \Big|_{L_\varepsilon + c_\varepsilon^\pi + c_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta \arg(e^{i\gamma\beta} \tilde{K}_{\text{л}}(i\eta) - 1) \Big|_{\eta=-\infty}^{-0} + \frac{1}{2\pi} \Delta \arg(e^{i\gamma\beta} \tilde{K}_{\text{л}}(i\eta) - 1) \Big|_{\eta=+0}^{+\infty} + \frac{\gamma}{2},\end{aligned}$$

где $c_\varepsilon^\pi, c_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}$ – полуокружности $|\zeta| = \varepsilon$, $|\zeta| = 1/\varepsilon$, $\pi/2 \leq \arg \zeta \leq 3\pi/2$, соответственно, L_ε – часть мнимой оси $\operatorname{Re} \zeta = 0$, $\varepsilon < |\zeta| < 1/\varepsilon$, и контур $L_\varepsilon + c_\varepsilon^\pi + c_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}}$ обходится против часовой стрелки. Аналогично,

$$n_{\text{п}} = -\frac{1}{2\pi} \Delta \arg(e^{i\gamma\beta} \tilde{K}_{\text{п}}(i\eta) - 1) \Big|_{\eta=-\infty}^{-0} - \frac{1}{2\pi} \Delta \arg(e^{i\gamma\beta} \tilde{K}_{\text{п}}(i\eta) - 1) \Big|_{\eta=+0}^{+\infty} + \frac{\gamma}{2}.$$

Суммируя эти равенства и учитывая (3.19), получаем $n_{\text{л}} + n_{\text{п}} = \sigma_+ + \sigma_- + \gamma$. Лемма доказана.

Суммарный индекс $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$ задачи (3.17) имеет, таким образом, при различных β в двух случаях значения, приведенные в табл. 5 и 6.

I. $|\delta| < \pi\gamma/2$

ТАБЛИЦА 5

β	$ \beta < \frac{\pi}{2} - \frac{ \delta }{\gamma}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{ \delta }{\gamma} < \beta < \frac{\pi}{2} + \frac{ \delta }{\gamma}$	$ \beta > \frac{\pi}{2} + \frac{ \delta }{\gamma}$
$\varkappa$	2	1	0

II. $|\delta| \geq \pi\gamma/2$

ТАБЛИЦА 6

β	$ \beta < \frac{ \delta }{\gamma} - \frac{\pi}{2}$	$\frac{ \delta }{\gamma} - \frac{\pi}{2} < \beta < \frac{ \delta }{\gamma} + \frac{\pi}{2}$	$ \beta > \frac{ \delta }{\gamma} + \frac{\pi}{2}$
$\varkappa$	0	1	0

**§ 7. Сведение граничной задачи (6.6)
к системе интегральных уравнений на полуоси**

Будем искать матрицу-решение $\Upsilon(\zeta; \rho')$ граничной задачи Гильберта (6.6) в виде

$$\Upsilon(\zeta; \rho') = E + \hat{\Upsilon}(\zeta; \rho'), \quad (7.1)$$

где E – единичная матрица, а

$$\hat{\Upsilon}(\zeta; \rho') = \begin{pmatrix} \hat{v}_1^+(\zeta; \rho') & \hat{v}_2^+(\zeta; \rho') \\ \hat{v}_1^-(\zeta; \rho') & \hat{v}_2^-(\zeta; \rho') \end{pmatrix},$$

причем $\hat{v}_j^\pm(\zeta; \rho') \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \infty$, $j = 1, 2$. Таким образом, $\Upsilon(\zeta; \rho') \rightarrow E$ при $\zeta \rightarrow \infty$.

Подставляя разложение

$$\mathcal{G}_\beta(\eta; \rho') = E + \Delta\mathcal{G}_\beta(\eta; \rho'),$$

где

$$\Delta\mathcal{G}_\beta(\eta; \rho') = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h_\beta^+(i\eta)e^{-\eta\rho'} & 0 \end{pmatrix} & \text{при } \eta > 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & h_\beta^-(i\eta)e^{\eta\rho'} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{при } \eta < 0, \end{cases}$$

и представление (7.1) в условие сопряжения (6.6), приходим к следующей неоднородной задаче Гильберта на мнимой оси для $\hat{\Upsilon}(\zeta; \rho')$:

$$\hat{\Upsilon}_\pi(i\eta; \rho') = \hat{\Upsilon}_\pi(i\eta; \rho') + \Delta\mathcal{G}_\beta(\eta; \rho')\hat{\Upsilon}_\pi(i\eta; \rho') + \Delta\mathcal{G}_\beta(\eta; \rho')E, \quad \eta \in \mathbb{R}. \quad (7.2)$$

Матрица-функция $\Delta\mathcal{G}_\beta(\eta; \rho')$ стремится к нулевой, причем экспоненциально, при $|\rho'| \rightarrow \infty$, $\rho' \in \Sigma_R^\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$, для всякого $\eta \neq 0$. Здесь

$$\Sigma_R^\varepsilon = \{\rho' \in \mathbb{C}: |\rho'| > R, |\arg \rho'| < \pi/2 - \varepsilon\}. \quad (7.3)$$

Поэтому второй и третий члены в правой части соотношения (7.2) при больших $|\rho'|$ будем рассматривать как “возмущение”.

По формулам Сохоцкого–Племеля

$$\hat{\Upsilon}(\zeta; \rho') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{\sigma=i\tau \\ \tau=-\infty}}^{\tau=+\infty} \frac{\Delta\mathcal{G}_\beta(\sigma/i; \rho')(\hat{\Upsilon}_\pi(\sigma; \rho') + E)}{\sigma - \zeta} d\sigma. \quad (7.4)$$

Перепишем соотношение (7.4) подробнее:

$$\begin{aligned} (\hat{v}_1^+(\zeta; \rho'), \hat{v}_2^+(\zeta; \rho')) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{-\frac{\pi}{2}}} \frac{h_\beta^-(\sigma)e^{-|\sigma|\rho'}\{(\hat{v}_1^-(\sigma; \rho'), \hat{v}_2^-(\sigma; \rho')) + (0, 1)\}}{\sigma - \zeta} d\sigma, \\ (\hat{v}_1^-(\zeta; \rho'), \hat{v}_2^-(\zeta; \rho')) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}_{\frac{\pi}{2}}} \frac{h_\beta^+(\sigma)e^{-|\sigma|\rho'}\{(\hat{v}_1^+(\sigma; \rho'), \hat{v}_2^+(\sigma; \rho')) + (1, 0)\}}{\sigma - \zeta} d\sigma. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Здесь в силу того, что $\hat{v}_{j,l}^{\pm}(i\eta; \rho') = \hat{v}_{j,n}^{\pm}(i\eta; \rho')$ при $\eta \geq 0$, $j = 1, 2$, обозначим $\hat{v}_{j,n}^{\pm}(\sigma; \rho')$ через $\hat{v}_j^{\pm}(\sigma; \rho')$ при $\sigma = i\eta$, $\pm\eta > 0$; $\mathcal{L}_{\mp \frac{\pi}{2}}$ – лучи, определенные перед леммой 5.2.

Введем новые функции

$$y_j^{\pm}(\zeta; \rho') = \hat{v}_j^{\pm}(\pm i\zeta; \rho'), \quad j = 1, 2, \quad -\pi \leq \arg \zeta \leq \pi,$$

определенные на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом вдоль луча $\zeta = \xi$, $\xi < 0$. Функции $\hat{v}_j^{\pm}(\zeta; \rho')$ выражаются через $y_j^{\pm}(\zeta; \rho')$ аналогично:

$$\hat{v}_j^{\pm}(\zeta; \rho') = y_j^{\pm}(\mp i\zeta; \rho'), \quad j = 1, 2, \quad -\pi \pm \pi/2 \leq \arg \zeta \leq \pi \pm \pi/2. \quad (7.6)$$

Чтобы получить систему интегральных уравнений для функций $y_j^{\pm}(\eta; \rho')$, где $\eta > 0$, положим в первом равенстве из (7.5) $\zeta = i\eta$, $\eta > 0$, а во втором равенстве $\zeta = -i\eta$, $\eta > 0$. Совершая замены переменных в интегралах по $\mathcal{L}_{\mp \frac{\pi}{2}}$, приходим к системе

$$\begin{aligned} (y_1^+(\eta; \rho'), y_2^+(\eta; \rho')) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{h_{\beta}^{-}(-i\xi)e^{-\xi\rho'}\{(y_1^{-}(\xi; \rho'), y_2^{-}(\xi; \rho')) + (0, 1)\}}{\xi + \eta} d\xi, \\ (y_1^{-}(\eta; \rho'), y_2^{-}(\eta; \rho')) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{h_{\beta}^{+}(i\xi)e^{-\xi\rho'}\{(y_1^{+}(\xi; \rho'), y_2^{+}(\xi; \rho')) + (1, 0)\}}{\xi + \eta} d\xi, \end{aligned} \quad (7.7)$$

где $0 < \eta < \infty$.

Введем операторы S^{+} и S^{-} , действующие на произвольную функцию $y = y(\xi)$, $\xi > 0$, по формулам

$$(S^{\pm}y)(\eta) = \pm \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{h_{\beta}^{\pm}(\pm i\xi)e^{-\xi\rho'}}{\eta + \xi} y(\xi) d\xi, \quad \eta > 0. \quad (7.8)$$

С помощью операторов $S^{\pm}$ систему (7.7) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} y_1^{+} & y_2^{+} \\ y_1^{-} & y_2^{-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & S^{-} \\ S^{+} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{+} & y_2^{+} \\ y_1^{-} & y_2^{-} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & S^{-} \\ S^{+} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

где 0 в матрице операторов означает нулевой оператор, а 0 и 1 в последней матрице означают функции, равные тождественно 0 и 1 соответственно.

Систему (7.9) можно процессом исключения привести к отдельным уравнениям относительно каждой компоненты $y_j^{\pm}$, $j = 1, 2$. В результате получим раздельную систему

$$\begin{pmatrix} (I - Q^{+}) & 0 \\ 0 & (I - Q^{-}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{+} & y_2^{+} \\ y_1^{-} & y_2^{-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^{+}[1] & S^{-}[1] \\ S^{+}[1] & Q^{-}[1] \end{pmatrix}, \quad (7.10)$$

где

$$Q^{\pm} = S^{\mp} S^{\pm}, \quad (7.11)$$

а $Q^\pm[1]$, $S^\pm[1]$ означают результаты применения операторов $Q^\pm$, $S^\pm$ соответственно к функции, тождественно равной 1. Операторы $Q^\pm$ действуют на произвольную функцию $y = y(\xi)$, $\xi > 0$, по формулам

$$(Q^\pm y)(\eta) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{h_\beta^\mp(\mp i\xi)e^{-\xi\rho'}}{\eta + \xi} d\xi \int_0^\infty \frac{h_\beta^\pm(\pm i\sigma)e^{-\sigma\rho'}}{\xi + \sigma} y(\sigma) d\sigma.$$

Операторы $S^\pm$, определенные в (7.8), являются суперпозициями операторов умножения на функции $\pm \frac{1}{2\pi i} h_\beta^\pm(\pm i\xi)e^{-\xi\rho'}$, $\xi > 0$, и преобразования Стилтеса (см. [20]). Найти обратные операторам $(I - Q^\pm)$ в силу сложного вида функций $h_\beta^\pm(\pm i\xi)$ не представляется возможным, поэтому выделим более простые операторы, приближающие $S^\pm$, $Q^\pm$. В соответствии с разложениями (6.22) функций $h_\beta^\pm(i\eta)$ в окрестности нуля представим операторы $S^\pm$ в виде

$$S^\pm = S_0^\pm + S_1^\pm + S_r^\pm, \quad (7.12)$$

где $S_0^\pm$, $S_1^\pm$, $S_r^\pm$ действуют по формулам

$$\begin{aligned} (S_0^\pm y)(\eta) &= \pm(i)^{q_+ - q_-} (-1)^{s_\mp} A_\pm \sin \pi \left(\nu \mp \frac{\gamma}{2} \right) \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^{\pm\mu} e^{-\xi\rho'}}{\eta + \xi} y(\xi) d\xi, \\ (S_1^\pm y)(\eta) &= \pm(i)^{q_+ - q_-} (-1)^{s_\mp} A_\pm d_\pm \sin \pi \left(\nu \mp \frac{\gamma}{2} \right) \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^{\pm\mu+\gamma} e^{-\xi\rho'}}{\eta + \xi} y(\xi) d\xi, \\ (S_r^\pm y)(\eta) &= \sin \pi \left(\nu \mp \frac{\gamma}{2} \right) \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{r_\beta^\pm(\xi) e^{-\xi\rho'}}{\eta + \xi} y(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Здесь

$$\mu = -2\nu + s_+ - s_- + q_+ - q_-, \quad (7.14)$$

а $r_\beta^\pm(\xi)$ при $|\beta| \neq |\delta/\gamma \pm \pi/2|$, как следует из леммы 6.1, – бесконечно дифференцируемые функции, допускающие в окрестностях нуля и бесконечности оценки

$$\begin{aligned} \left| \left(\xi \frac{d}{d\xi} \right)^m r_\beta^\pm(\xi) \right| &\leq c_m(\theta) \xi^{\pm \operatorname{Re} \mu + \gamma + \theta} \quad \text{при } |\xi| < 1, \\ \left| \left(\xi \frac{d}{d\xi} \right)^m r_\beta^\pm(\xi) \right| &\leq C_m(\theta) \xi^M \quad \text{при } |\xi| > 1 \end{aligned} \quad (7.15)$$

для любых $m = 0, 1, 2, \dots$ и θ , $0 < \theta < \min(\gamma, 1 - \gamma)$; $c_m(\theta)$, $C_m(\theta)$ – постоянные, зависящие только от m и θ ; M – некоторое число, не зависящее от m .

Разложим в соответствии с (7.12) и операторы $Q^\pm$, определенные (7.8):

$$Q^\pm = Q_0^\pm + Q_1^\pm + Q_r^\pm,$$

где

$$\begin{aligned} Q_0^\pm &= S_0^\mp S_0^\pm, \quad Q_1^\pm = S_0^\mp S_1^\pm + S_1^\mp S_0^\pm, \\ Q_r^\pm &= S_1^\mp S_1^\pm + S_r^\mp (S_0^\pm + S_1^\pm) + (S_0^\mp + S_1^\mp) S_r^\pm + S_r^\mp S_r^\pm. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Например, оператор $Q_0^\pm$ действует следующим образом:

$$(Q_0^\pm y)(\eta) = -(-1)^{q_+ - q_- + s_+ - s_-} \sin \pi(\nu + \gamma/2) \sin \pi(\nu - \gamma/2) \\ \times \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\xi^{\mp \mu} e^{-\xi \rho'}}{\eta + \xi} d\xi \int_0^\infty \frac{\sigma^{\pm \mu} e^{-\sigma \rho'}}{\xi + \sigma} y(\sigma) d\sigma. \quad (7.17)$$

Поскольку даже при $y(\sigma)$, обращающихся в нуль в некоторой окрестности $\sigma = 0$, последний интеграл в (7.17) при $\xi \rightarrow 0$, как правило, не стремится к нулю, то для того чтобы первый интеграл в (7.17) сходиллся при $\eta \neq 0$, необходимо, чтобы

$$|\operatorname{Re} \mu| < 1. \quad (7.18)$$

Как будет видно далее, это требование является существенным.

Из (7.14), (1.5) и ограничений, налагаемых на параметр δ , получаем, что $\operatorname{Re} \mu = -2\delta/\pi + s_+ - s_- + q_+ - q_-$ и выполнение (7.18) возможно только при следующих значениях $s_+ - s_- + q_+ - q_-$, представленных в табл. 7, в которой также приведены соответствующие значения μ .

ТАБЛИЦА 7

	$\delta = 0$	$0 < \delta < \pi/2$		$\delta = \pi/2$
$s_+ - s_- + q_+ - q_-$	0	0	$\operatorname{sign} \delta$	1
μ	-2ν	-2ν	$-2\nu + \operatorname{sign} \delta$	$-2\nu + 1$

Далее будем рассматривать только такие случаи.

§ 8. Оценки норм операторов $S_0^\pm, S_1^\pm, S_r^\pm, Q_0^\pm, Q_1^\pm, Q_r^\pm$ в пространствах типа L_2 с весами

Известные результаты об ограниченности сингулярных интегральных операторов в пространствах типа L_p со степенными весами (см., например, [21], [34]) показывают, что операторы $S_0^\pm, S_1^\pm, S_r^\pm, Q_0^\pm, Q_1^\pm, Q_r^\pm$ следует рассматривать в пространствах такого типа. В этом параграфе, используя преобразование Меллина, получим оценки норм указанных операторов в пространствах L_2 с весами. Приведем сначала необходимые сведения о преобразовании Меллина (см., например, [22]).

Пусть $f(\eta) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, т. е. $f(\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией с компактным носителем, принадлежащим действительной полуоси $\mathbb{R}_+ = \{\eta \in \mathbb{R}: \eta > 0\}$. Тогда образ Меллина функции $f(\eta)$

$$\mathcal{F}(s) = \mathfrak{M}[f](s) = \int_{\mathbb{R}_+} \eta^{s-1} f(\eta) d\eta \quad (8.1)$$

является целой функцией и убывает быстрее любой степени t при $t \rightarrow \pm\infty$ на произвольной прямой $s = p + it$ (p фиксировано), параллельной мнимой оси. Преобразование Меллина связано с преобразованием Фурье–Лапласа $\varphi(s) \rightarrow \int_{\mathbb{R}} e^{s\tau} \varphi(\tau) d\tau$ экспоненциальной заменой $\tau = \ln \eta$. Как известно, формула обращения имеет вид

$$f(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \mathcal{F}(s) \eta^{-s} ds. \quad (8.2)$$

Интегрирование проводится по прямой $s = p + it$.

Определим оператор Меллина $\mathfrak{M}_p$ как оператор, переводящий функцию $f(\eta)$, определенную на полуоси $\mathbb{R}_+$, в функцию $\mathcal{F}(p + it)$, определяемую формулой (8.1) на действительной оси $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{M}_p[f](t) = \mathcal{F}(p + it).$$

Пусть функция $g(\eta)$ также принадлежит $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ и $G(s)$ – ее преобразование Меллина. Равенство Парсеваля для преобразования Меллина имеет вид

$$\int_{\mathbb{R}_+} \eta^{2p-1} f(\eta) \overline{g(\eta)} d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(p + it) \overline{G(p + it)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{M}_p[f](t) \overline{\mathfrak{M}_p[g](t)} dt. \quad (8.3)$$

Пусть $\rho(\eta)$ – некоторая непрерывная функция, $\rho(\eta) > 0$ на $\mathbb{R}_+$. Определим гильбертово пространство $L_2(\rho(\eta); \mathbb{R}_+)$ как пополнение пространства функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ относительно скалярного произведения

$$(f, g)_{L_2(\rho(\eta); \mathbb{R}_+)} = \int_{\mathbb{R}_+} \rho(\eta) f(\eta) \overline{g(\eta)} d\eta.$$

Из формулы (8.3) видно, что оператор Меллина $\mathfrak{M}_p$ может быть расширен операцией замыкания с пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ до изометрического оператора, умноженного на $(2\pi)^{-\frac{1}{2}}$, действующего из $L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)$ в $L_2(\mathbb{R})$:

$$\|\mathfrak{M}_p[f]\|_{L_2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi} \|f\|_{L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)}. \quad (8.4)$$

Сформулируем теорему о свертке. Сначала заметим, что если $f(\eta)\eta^{p-1} \in L_1(\mathbb{R}_+)$, то ее образ Меллина $\mathcal{F}(p + it) = \mathfrak{M}_p[f](t)$ является непрерывной функцией и стремится к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$. При этом имеет место оценка

$$|\mathfrak{M}_p[f](t)| \leq \int_{\mathbb{R}_+} \eta^{p-1} |f(\eta)| d\eta.$$

ТЕОРЕМА (о свертке). Пусть $f(\eta) \in L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)$, $g(\eta) \in L_2(\eta^{2q-1}; \mathbb{R}_+)$, $\mathcal{F}(s)$ и $\mathcal{G}(s)$ – соответственно их образы Меллина. Тогда $f(\eta)g(\eta)\eta^{p+q-1} \in L_1(\mathbb{R}_+)$ и

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(\eta)g(\eta)\eta^{s-1} d\eta = \frac{1}{2\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \mathcal{F}(w)\mathcal{G}(s-w) dw, \quad \operatorname{Re} s = p + q, \quad (8.5)$$

или

$$\mathfrak{M}_{p+q}[fg](t) = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{M}_p[f] * \mathfrak{M}_q[g] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{M}_p[f](u) \mathfrak{M}_q[g](t-u) du.$$

Перейдем к оценке норм операторов. Рассмотрим сначала оператор S^α , действующий следующим образом:

$$(S^\alpha f)(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\xi^\alpha f(\xi)}{\eta + \xi} d\xi, \quad \eta \in \mathbb{R}_+, \quad (8.6)$$

где α – некоторое комплексное число.

ЛЕММА 8.1. Оператор S^α действует ограниченно из $L_2(\eta^{2p+2\operatorname{Re}\alpha-1}; \mathbb{R}_+)$ в $L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)$ при любом p , $0 < p < 1$. Для нормы S^α имеет место оценка

$$\|S^\alpha\|_{L_2(\eta^{2p+2\operatorname{Re}\alpha-1}; \mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)} \leq \frac{1}{\sin \pi p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Обозначив $s = p + it$, имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_p[S^\alpha f](t) &= \int_0^\infty \eta^{s-1} d\eta \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\xi^\alpha f(\xi)}{\eta + \xi} d\xi = \int_0^\infty \xi^\alpha f(\xi) d\xi \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\eta^{s-1}}{\eta + \xi} d\eta \\ &= \frac{1}{\sin \pi s} \int_0^\infty \xi^{\alpha+s-1} f(\xi) d\xi = \frac{\mathcal{F}(s + \alpha)}{\sin \pi s} = \frac{\mathfrak{M}_{p+\operatorname{Re}\alpha}[f](t + \operatorname{Im}\alpha)}{\sin \pi(p + it)}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Перестановка порядков интегрирования здесь возможна, поскольку при $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ справедлива оценка $|S^\alpha f| < C/(1 + \eta)$, где C – некоторая постоянная, и применима теорема Фубини–Тонелли. Используя (8.4) и неравенство $|\sin \pi(p + it)| \geq |\sin \pi p|$, в силу (8.7) получаем

$$\begin{aligned} \|S^\alpha f\|_{L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathfrak{M}_p[S^\alpha f]\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ &\leq \sup_{-\infty < t < +\infty} \frac{1}{|\sin \pi(p + it)|} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\mathfrak{M}_{p+\operatorname{Re}\alpha}[f]\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ &= \frac{1}{\sin \pi p} \|f\|_{L_2(\eta^{2p+2\operatorname{Re}\alpha-1}; \mathbb{R}_+)}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Операцией замыкания устанавливаем справедливость (8.8) и (8.7) на прямой $\operatorname{Re} s = p$ для любой функции $f \in L_2(\eta^{2p+2\operatorname{Re}\alpha-1}; \mathbb{R}_+)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 8.2. Пусть $|\beta| \neq |\delta/\gamma \pm \pi/2|$. При любом p , удовлетворяющем условию $0 < p < 1$, и $\rho' \in \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$ (см. (7.3)), операторы $S_0^\pm$, $S_1^\pm$ и $S_r^\pm$ действуют ограниченно из $L_2(\eta^{2p\pm 2\operatorname{Re}\mu-1}; \mathbb{R}_+)$ в $L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)$ и имеют оценки норм

$$\begin{aligned} \|S_0^\pm\|_{L_2(\eta^{2p\pm 2\operatorname{Re}\mu-1}; \mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)} &\leq \frac{|A_\pm| |\sin \pi(\nu \mp \frac{\gamma}{2})|}{\sin \pi p}, \\ \|S_1^\pm\|_{L_2(\eta^{2p\pm 2\operatorname{Re}\mu-1}; \mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)} &\leq \frac{c_1^\pm(\varepsilon, \gamma) |\sin \pi(\nu \mp \frac{\gamma}{2})|}{|\rho'|^\gamma \sin \pi p}, \\ \|S_r^\pm\|_{L_2(\eta^{2p\pm 2\operatorname{Re}\mu-1}; \mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)} &\leq \frac{c_r^\pm(\varepsilon, \gamma, \theta) |\sin \pi(\nu \mp \frac{\gamma}{2})|}{|\rho'|^{\gamma+\theta} \sin \pi p}, \end{aligned} \quad (8.9)$$

где θ – произвольное, $0 < \theta < \min(\gamma, 1 - \gamma)$; $c_1^\pm(\varepsilon, \gamma)$, $c_r^\pm(\varepsilon, \gamma, \theta)$ – постоянные, зависящие только от параметров, указанных в скобках, и β .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $|e^{-\xi\rho'}| \leq 1$, при $\rho' \in \overline{\Sigma}_R^\varepsilon$, $\xi > \mathbb{R}_+$ можно оценить

$$\|S_0^\pm f\|_{L_2(\eta^{2q-1}; \mathbb{R}_+)} \leq |A_\pm| |\sin \pi(\nu \mp \gamma/2)| \|S^{\pm \operatorname{Re} \mu} f\|_{L_2(\eta^{2q-1}; \mathbb{R}_+)},$$

где операторы $S^{\pm \operatorname{Re} \mu}$ определены в формуле (8.6). Применяя лемму 8.1, получим справедливость леммы для операторов $S_0^\pm$. Утверждения леммы для операторов $S_1^\pm$, $S_r^\pm$ докажем точно так же, используя неравенства

$$\begin{aligned} |\xi^{\pm \mu + \gamma} e^{-\xi\rho'}| &\leq \xi^{\pm \operatorname{Re} \mu} \xi^\gamma e^{-\xi|\rho'| \sin \varepsilon} \leq \frac{\xi^{\pm \operatorname{Re} \mu}}{|\rho'|^\gamma} \frac{\gamma^\gamma e^{-\gamma}}{(\sin \varepsilon_1)^\gamma}, \\ |r_\beta^\pm(\xi) e^{-\xi\rho'}| &\leq \xi^{\pm \operatorname{Re} \mu} c(\theta) \xi^{\gamma+\theta} e^{-\xi|\rho'| \sin \varepsilon} \leq \tilde{c}_r^\pm(\varepsilon, \gamma, \theta) \frac{\xi^{\pm \operatorname{Re} \mu}}{|\rho'|^{\gamma+\theta}}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 8.3. Пусть $|\beta| \neq |\delta/\gamma \pm \pi/2|$. При любом p , удовлетворяющем одновременно неравенствам

$$0 < p < 1 \quad \text{и} \quad \pm \operatorname{Re} \mu < p < 1 \pm \operatorname{Re} \mu, \quad (8.10)$$

и при $\rho' \in \overline{\Sigma}_R^\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$ (см. (7.3)), операторы $Q_0^\pm$, $Q_1^\pm$ и $Q_r^\pm$ действуют ограниченно из $L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)$ в $L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)$ и имеют оценки норм

$$\begin{aligned} \|Q_0^\pm\|_{L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)} &\leq \frac{|\sin \pi(\nu + \frac{\gamma}{2}) \sin \pi(\nu - \frac{\gamma}{2})|}{\sin \pi p \sin \pi(p \mp \operatorname{Re} \mu)}, \\ \|Q_1^\pm\|_{L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)} &\leq \frac{C_1^\pm(\varepsilon, \gamma) |\sin \pi(\nu + \frac{\gamma}{2}) \sin \pi(\nu - \frac{\gamma}{2})|}{|\rho'|^\gamma \sin \pi p \sin \pi(p \mp \operatorname{Re} \mu)}, \\ \|Q_r^\pm\|_{L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)} &\leq \frac{C_r^\pm(\varepsilon, \gamma, \theta) |\sin \pi(\nu + \frac{\gamma}{2}) \sin \pi(\nu - \frac{\gamma}{2})|}{|\rho'|^{\gamma+\theta} \sin \pi p \sin \pi(p \mp \operatorname{Re} \mu)}, \end{aligned} \quad (8.11)$$

где θ — любое, $0 < \theta < \min(\gamma, 1 - \gamma)$; $C_1^\pm(\varepsilon, \gamma)$, $C_r^\pm(\varepsilon, \gamma, \theta)$ — некоторые постоянные, зависящие только от параметров, указанных в скобках, и β .

Утверждения этой леммы легко следуют из представлений (7.16) и леммы 8.2 с учетом равенства $A_+ A_- = 1$.

При выполнении условия (7.18) множество чисел p , удовлетворяющих одновременно неравенствам (8.10), не пусто. В частности, этим неравенства удовлетворяет

$$p = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2. \quad (8.12)$$

§ 9. Обращение операторов $(I - Q_0^\pm)$ и $(I - Q^\pm)$

Как следует из (8.11), при $\rho' \in \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$, и при p , удовлетворяющем (8.10), имеем $\|Q_1^\pm\| \dots, \|Q_r^\pm\| \dots = O(|\rho'|^{-\gamma})$. Нормы операторов $Q_0^\pm$ могут и не быть меньше единицы, и потому разложить оператор $(I - Q^\pm)$ в ряд Неймана не всегда возможно. Однако удастся обратить оператор $(I - Q_0^\pm)$, который при $|\rho'| \rightarrow \infty$ становится сколь угодно близким по норме к оператору $(I - Q^\pm)$.

Итак, пусть p удовлетворяет (8.10). Рассмотрим в $L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)$ уравнения $(I - Q_0^\pm)y = g$ при $g \in L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)$ и выпишем их подробнее:

$$\begin{aligned} y(\eta) + (-1)^{q_+ - q_- + s_+ - s_-} \sin \pi \left(\nu + \frac{\gamma}{2} \right) \sin \pi \left(\nu - \frac{\gamma}{2} \right) \\ \times \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\xi^{\mp \mu} e^{-\xi \rho'}}{\eta + \xi} d\xi \int_0^\infty \frac{\xi^{\pm \mu} e^{-\sigma \rho'}}{\xi + \sigma} y(\sigma) d\sigma = g(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}_+. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Решение $y(\eta)$ этого уравнения будем искать также в $L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)$. Применим к (9.1) преобразование Меллина. Обозначим образы Меллина функций $y(\eta)$ и $g(\eta)$ через $\mathcal{Y}(s)$ и $\mathcal{G}(s)$ соответственно. В силу сделанных предположений $\mathcal{Y}(s)$ и $\mathcal{G}(s)$ на прямой $\operatorname{Re} s = p$ интегрируемы с квадратом:

$$\mathcal{Y}(p + it) = \mathfrak{M}_p[y](t), \quad \mathcal{G}(p + it) = \mathfrak{M}_p[g](t) \in L_2(\mathbb{R}).$$

Кроме того, сначала предположим, что $g(\eta) = \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$.

Найдем образ Меллина функции $(S_{\rho'}^\alpha y)(\eta)$, где $S_{\rho'}^\alpha$ — оператор, действующий по формуле

$$(S_{\rho'}^\alpha y)(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\xi^\alpha e^{-\xi \rho'}}{\eta + \xi} y(\xi) d\xi, \quad \eta \in \mathbb{R}_+.$$

ЛЕММА 9.1. *Оператор $S_{\rho'}^\alpha$ при $\rho' \in \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$ (см. (7.3)), и при $(p - \operatorname{Re} \alpha) < 1$ действует ограниченно из $L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)$ в $L_2(\eta^{2q-1}; \mathbb{R}_+)$, где q — любое, удовлетворяющее неравенствам $p - \operatorname{Re} \alpha \leq q < 1$. Для $y(\eta) \in L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+)$ образ Меллина $\mathfrak{M}[S_{\rho'}^\alpha y](s)$ является аналитической функцией в полосе $\max\{0, p - \operatorname{Re} \alpha\} < \operatorname{Re} s < 1$ и выражается формулой*

$$\mathfrak{M}[S_{\rho'}^\alpha y](s) = \frac{1}{\sin \pi s} \frac{1}{2\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \frac{\Gamma(\alpha + s - t)}{(\rho')^{\alpha + s - t}} \mathcal{Y}(t) dt, \quad (9.2)$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера, $\mathcal{Y}(t) = \mathfrak{M}[y](t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если $p' \geq p$, то

$$|\xi^{(p' - \frac{1}{2})} e^{-\xi \rho'}| = |\xi^{(p' - p)} e^{-\xi \rho'}| |\xi^{(p - \frac{1}{2})} y(\xi)| \leq C(\rho', p', p) |\xi^{(p - \frac{1}{2})} y(\xi)|$$

и

$$\|e^{-\xi \rho'} y(\xi)\|_{L_2(\xi^{2p'-1}; \mathbb{R}_+)} \leq C(\rho', p', p) \|y\|_{L_2(\xi^{2p-1}; \mathbb{R}_+)}.$$

Поэтому $(S_{\rho'}^{\alpha} y)(\eta) = (S^{\alpha}(e^{-\xi \rho'} y(\xi)))(\eta) \in L_2(\eta^{2p'-2 \operatorname{Re} \alpha - 1}; \mathbb{R}_+)$ для любого $p' \geq p$, $p' - \operatorname{Re} \alpha < 1$. Обозначив $p' - \operatorname{Re} \alpha = q$, имеем

$$\|S_{\rho'}^{\alpha}\|_{L_2(\eta^{2p-1}; \mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\eta^{2q-1}; \mathbb{R}_+)} \leq C(\rho', q + \operatorname{Re} \alpha, p) / \sin \pi q, \quad p - \operatorname{Re} \alpha \leq q < 1.$$

Далее, $e^{-\xi \rho'} \in L_2(\xi^{2q-1}; \mathbb{R}_+)$ с любым $q > 0$, $\mathfrak{M}[e^{-\xi \rho'}](s) = \Gamma(s)/(\rho')^s$. Поэтому по теореме о свертке (см. (8.5))

$$\mathfrak{M}[e^{-\xi \rho'} y(\xi)](s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \frac{\Gamma(s-w)}{(\rho')^{s-w}} \mathcal{Y}(w) dw \quad (9.3)$$

при $\operatorname{Re} s > p$. Используя, наконец, (8.7), получим (9.2). Лемма доказана.

Если число p удовлетворяет (8.10), то $p \mp \operatorname{Re} \mu < 1$. Поэтому в силу леммы 9.1 функция $(S_{\rho'}^{\pm \mu} y)(\xi)$ принадлежит $L_2(\xi^{2q-1}; \mathbb{R}_+)$, где q – любое, удовлетворяющее $0 < p \mp \operatorname{Re} \mu \leq q < 1$, и в полосе $p \mp \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} w < 1$ имеет место представление

$$\mathfrak{M}\left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sigma^{\pm \mu} e^{-\sigma \rho'}}{\xi + \sigma} y(\sigma) d\sigma\right](w) = \frac{1}{\sin \pi w} \frac{1}{2\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \frac{\Gamma(\pm \mu + w - t)}{(\rho')^{\pm \mu + w - t}} \mathcal{Y}(t) dt.$$

Точно так же имеем, что $(S_{\rho'}^{\mp \mu} S_{\rho'}^{\pm \mu} y)(\eta) \in L_2(\eta^{2q-1}; \mathbb{R}_+)$, где q – любое, удовлетворяющее $0 < p \leq q < 1$, и в полосе $p + \varepsilon_1 < \operatorname{Re} s < 1$, где $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $p + \varepsilon_1 < 1$ и $p \mp \mu + \varepsilon_1 < 1$, имеет место выражение

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}[S_{\rho'}^{\mp \mu} S_{\rho'}^{\pm \mu} y](s) &= \frac{1}{\sin \pi s} \frac{1}{2\pi i} \int_{p \mp \mu + \varepsilon_1 - i\infty}^{p \mp \mu + \varepsilon_1 + i\infty} \frac{\Gamma(\mp \mu + s - w)}{(\rho')^{\mp \mu + s - w}} dw \\ &\times \frac{1}{\sin \pi w} \frac{1}{2\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \frac{\Gamma(\pm \mu + w - t)}{(\rho')^{\pm \mu + w - t}} \mathcal{Y}(t) dt. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Порядок интегрирований в левой части (9.4) можно изменить. Действительно, $\Gamma(s)(\rho')^{-s}$ является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ функцией, которая в силу асимптотического разложения Стирлинга для $\Gamma(s)$ (см. [23], [24]) при $|s| \rightarrow \infty$, $|\arg s| \leq \pi - \Delta$, где $\Delta > 0$ – произвольное фиксированное, имеет следующее поведение:

$$\Gamma(s)(\rho')^{-s} = \exp\left[\left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s - s \ln \rho' + \frac{1}{2} \ln 2\pi + O\left(\frac{1}{s}\right)\right].$$

Таким образом, при фиксированном $\operatorname{Re} s$ и при $\rho' \in \bar{\Sigma}_R^{\varepsilon}$ функция $\Gamma(s)(\rho')^{-s}$ имеет оценку

$$|\Gamma(s)(\rho')^{-s}| \leq C(\operatorname{Re} s, \rho') (|\operatorname{Im} s| + 1)^{(\operatorname{Re} s - \frac{1}{2})} e^{-\varepsilon |\operatorname{Im} s|}, \quad (9.5)$$

где постоянная $C(\operatorname{Re} s, \rho')$ зависит только от аргументов, указанных в скобках. Если в правой части (9.4) взять модули от всех функций, то вновь полученный повторный интеграл будет существовать. В самом деле, $|\mathcal{Y}(p + i \operatorname{Im} t)|$ как функция $\operatorname{Im} t$

принадлежит $L_2(\mathbb{R})$, $|\Gamma(\varepsilon_1 + i \operatorname{Im} w)/(\rho')^{\varepsilon_1 + i \operatorname{Im} w}|$ как функция $\operatorname{Im} w$ в силу (9.5) принадлежит $L_1(\mathbb{R})$ и, кроме того,

$$|\sin \pi w|^{-1} < C(\operatorname{Re} w)e^{-\pi|\operatorname{Im} w|}, \quad \operatorname{Re} w \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (9.6)$$

Поэтому в силу неравенства Минковского для свертки функция

$$\frac{1}{|\sin \pi w|} \frac{1}{2\pi} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \left| \frac{\Gamma(\pm\mu + w - t)}{(\rho')^{\pm\mu + w - t}} \right| |\mathcal{Y}(t)| |dt|$$

как функция $\operatorname{Im} w$ принадлежит $L_2(\mathbb{R})$. Далее, $\Gamma(\mp\mu + s - w)/(\rho')^{\mp\mu + s - w}$ как функция $\operatorname{Im} w$ при $\operatorname{Re} w = p \mp \mu + \varepsilon_1$ и при фиксированном s , удовлетворяющем неравенству $\operatorname{Re} s > p + \varepsilon_1$, принадлежит $L_2(\mathbb{R})$. Таким образом, в силу теоремы Фубини–Тонелли порядок интегрирований в (9.4) можно изменить и потому

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}[S_{\rho'}^{\mp\mu} S_{\rho'}^{\pm\mu} y](s) &= \frac{1}{2\pi i \sin \pi s} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \mathcal{Y}(t) (\rho')^{t-s} dt \\ &\times \frac{1}{2\pi i} \int_{p \mp \mu + \varepsilon_1 - i\infty}^{p \mp \mu + \varepsilon_1 + i\infty} \frac{\Gamma(\mp\mu + s - w) \Gamma(\pm\mu + w - t)}{\sin \pi w} dw. \end{aligned} \quad (9.7)$$

К последнему интегралу в (9.7) применима лемма Барнса (см. [23], [24]), поскольку этот интеграл с помощью формулы дополнения для гамма-функции можно представить в виде

$$\frac{1}{\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{p \mp \mu + \varepsilon_1 - i\infty}^{p \mp \mu + \varepsilon_1 + i\infty} \Gamma(\pm\mu - t + w) \Gamma(w) \Gamma(\mp\mu + s - w) \Gamma(1 - w) dw, \quad (9.8)$$

где $\operatorname{Re} t = p$, $\operatorname{Re} s > p + \varepsilon_1$, и в силу этого, а также неравенства $0 < p \mp \operatorname{Re} \mu < 1$ полюсы функций $\Gamma(\pm\mu - t + w)$ и $\Gamma(w)$ расположены слева, а полюсы $\Gamma(\mp\mu + s - w)$ и $\Gamma(1 - w)$ расположены справа от прямой $\operatorname{Re} w = p \mp \mu + \varepsilon_1$. По лемме Барнса интеграл (9.8) равен

$$\Gamma(\mp\mu + s) \Gamma(1 \pm \mu - t) / \pi(s - t).$$

Используя это выражение в (9.7), получим, что в полосе $p < \operatorname{Re} s < 1$

$$\mathfrak{M}[S_{\rho'}^{\mp\mu} S_{\rho'}^{\pm\mu} y](s) = -\frac{\Gamma(\mp\mu + s)}{(\rho')^s \pi \sin \pi s} \frac{1}{2\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \frac{\Gamma(1 \pm \mu - t) (\rho')^t}{(t - s)} \mathcal{Y}(t) dt, \quad (9.9)$$

а предельным переходом при $\operatorname{Re} s \rightarrow p$ с помощью формул Сохоцкого–Племеля находим, что на прямой $\operatorname{Re} s = p$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}[S_{\rho'}^{\mp\mu} S_{\rho'}^{\pm\mu} y](s) &= -\frac{\Gamma(\mp\mu + s) \Gamma(1 \pm \mu - s)}{2\pi \sin \pi s} (\rho')^s \mathcal{Y}(s) \\ &- \frac{\Gamma(\mp\mu + s)}{(\rho')^s \pi \sin \pi s} \frac{\text{v.p.}}{2\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \frac{\Gamma(1 \pm \mu - t) (\rho')^t}{(t - s)} \mathcal{Y}(t) dt. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Применяя (9.10) и формулу дополнения для гамма-функции, легко находим, что уравнение (9.1) в образах Меллина является простейшим (характеристическим сингулярным интегральным уравнением [14]) на прямой $\operatorname{Re} s = p$:

$$A(s)\widehat{\mathcal{Y}}(s) + B(s)\frac{\text{v.p.}}{\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \frac{\widehat{\mathcal{Y}}(t)}{t-s} dt = \widehat{\mathcal{G}}(s), \quad (9.11)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{Y}}(s) &= \Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s \mathcal{Y}(s), \quad \widehat{\mathcal{G}}(s) = \Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s \mathcal{G}(s), \\ A(s) &= 1 + (-1)^{q_+ - q_- + s_+ - s_-} \frac{\sin \pi(\nu + \frac{\gamma}{2}) \sin \pi(\nu - \frac{\gamma}{2})}{2 \sin \pi s \sin \pi(\mp \mu + s)}, \quad B(s) = 1 - A(s), \end{aligned} \quad (9.12)$$

p удовлетворяет (8.10).

Как известно [14], уравнение (9.11) может быть решено в явной форме, если $A(s) + B(s) \neq 0$, $A(s) - B(s) \neq 0$ всюду на контуре. Пусть $\widehat{\mathcal{Y}}(t)$ – решение (9.11). Введем кусочно голоморфную (голоморфную вне прямой $\operatorname{Re} s = p$) функцию – интеграл типа Коши

$$V(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \frac{\widehat{\mathcal{Y}}(t)}{t-s} dt.$$

По формулам Сохоцкого–Племеля на прямой $\operatorname{Re} s = p$ имеем

$$\widehat{\mathcal{Y}}(s) = V_{\text{л}}(s) - V_{\text{п}}(s), \quad \frac{\text{v.p.}}{\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \frac{\widehat{\mathcal{Y}}(t)}{t-s} dt = V_{\text{л}}(s) + V_{\text{п}}(s), \quad (9.13)$$

где $V_{\text{л}}(s)$ и $V_{\text{п}}(s)$ – предельные значения $V(s)$ в точке s прямой $\operatorname{Re} s = p$ соответственно слева и справа от этой прямой. Подставляя эти соотношения в (9.11), приходим к следующей неоднородной граничной задаче Гильберта на прямой $\operatorname{Re} s = p$ относительно функции $V(s)$:

$$V_{\text{л}}(s) = D(s)V_{\text{п}}(s) + \widehat{\mathcal{G}}(s), \quad (9.14)$$

где, как нетрудно получить, учитывая значения, приведенные в табл. 7,

$$\begin{aligned} D(s) &= A(s) - B(s) = 1 + (-1)^{q_+ - q_- + s_+ - s_-} \frac{\sin \pi(\nu + \frac{\gamma}{2}) \sin \pi(\nu - \frac{\gamma}{2})}{\sin \pi s \sin \pi(\mp \mu + s)} \\ &= \frac{\sin \pi(\frac{\hat{\gamma} \mp \mu}{2} + s) \sin \pi(\frac{-\hat{\gamma} \mp \mu}{2} + s)}{\sin \pi s \sin \pi(\mp \mu + s)}, \end{aligned} \quad (9.15)$$

$$\hat{\gamma} = \begin{cases} \gamma, & \text{если } \mu = -2\nu, \\ 1 - \gamma, & \text{если } \mu = -2\nu + \operatorname{sign} \delta. \end{cases} \quad (9.16)$$

Функция $D(s)$, однако, может обращаться в нуль на прямой $\operatorname{Re} s = p$, где p удовлетворяет только неравенствам (8.10). Поэтому далее ограничимся p , определяемым (8.12). Для таких значений p , как легко проверить, $D(s)$ не обращается в нуль на прямой $\operatorname{Re} s = p$.

Функция $D(s)$ с помощью формулы дополнения для гамма-функции может быть в явном виде факторизована на прямой $\operatorname{Re} s = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$, т. е. представлена в виде

$$D(s) = \overset{\Pi}{D}(s) / \overset{\mathcal{I}}{D}(s), \quad (9.17)$$

где $\overset{\Pi}{D}(s)$ – функция, аналитическая и не обращающаяся в нуль справа, $\overset{\mathcal{I}}{D}(s)$ – функция, аналитическая и не обращающаяся в нуль слева от прямой $\operatorname{Re} s = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$. Для $\overset{\Pi}{D}(s)$ и $\overset{\mathcal{I}}{D}(s)$ получаем выражения

$$\overset{\Pi}{D}(s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(\mp\mu + s)}{\Gamma(\frac{\hat{\gamma} \mp \mu}{2} + s)\Gamma(\frac{-\hat{\gamma} \mp \mu}{2} + s)}, \quad \overset{\mathcal{I}}{D}(s) = \frac{\Gamma(1 - \frac{\hat{\gamma} \mp \mu}{2} - s)\Gamma(1 - \frac{-\hat{\gamma} \mp \mu}{2} - s)}{\Gamma(1 - s)\Gamma(1 \pm \mu - s)}. \quad (9.18)$$

Нетрудно проверить, принимая во внимание неравенства $0 < \hat{\gamma} < 1$ и (8.10), что нули числителя и знаменателя в выражении для $\overset{\Pi}{D}(s)$ расположены слева, а нули числителя и знаменателя в выражении для $\overset{\mathcal{I}}{D}(s)$ расположены справа от прямой $\operatorname{Re} s = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$. Кроме того, используя формулу Стирлинга для $\Gamma(s)$, находим, что при $|s| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} s \geq (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$, $\operatorname{Re} s \leq (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$, имеем соответственно

$$\overset{\Pi}{D}(s) = 1 + O(1/s), \quad \overset{\mathcal{I}}{D}(s) = 1 + O(1/s). \quad (9.19)$$

Факторизация (9.17), таким образом, является канонической (см. [15]).

Используя (9.17), перепишем (9.14), как обычно, в виде

$$\overset{\mathcal{I}}{D}(s)V_{\mathcal{I}}(s) = \overset{\Pi}{D}(s)V_{\Pi}(s) + \overset{\mathcal{I}}{D}(s)\widehat{\mathcal{G}}(s) \quad (9.20)$$

и разложим функцию $\overset{\mathcal{I}}{D}(s)\widehat{\mathcal{G}}(s)$ в сумму двух функций, одна из которых аналитична слева, а другая справа от прямой $\operatorname{Re} s = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$:

$$\widehat{D}(s)\widehat{\mathcal{G}}(s) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \frac{\overset{\mathcal{I}}{D}(t)\widehat{\mathcal{G}}(t)}{t-s} dt \right)_{\mathcal{I}} - \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \frac{\overset{\mathcal{I}}{D}(t)\widehat{\mathcal{G}}(t)}{t-s} dt \right)_{\Pi},$$

$\operatorname{Re} s = p = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2.$

Используя стандартные рассуждения с применением теоремы Лиувилля, получим

$$V(s) = (\overset{\mathcal{I},\Pi}{D}(s))^{-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1 \pm \operatorname{Re} \mu}{2} - i\infty}^{\frac{1 \pm \operatorname{Re} \mu}{2} + i\infty} \frac{\overset{\mathcal{I}}{D}(t)\widehat{\mathcal{G}}(t)}{t-s} dt,$$

причем в этой формуле через $(\overset{\mathcal{I},\Pi}{D}(s))^{-1}$ обозначена функция, равная $(\overset{\mathcal{I}}{D}(s))^{-1}$ при $\operatorname{Re} s < (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$ и $(\overset{\Pi}{D}(s))^{-1}$ при $\operatorname{Re} s > (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$. С помощью первого равенства в (9.13) и выражений (9.12) находим, наконец, решение уравнения (9.1) в образах Меллина, по крайней мере для $g(\eta) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(s) &= \frac{\overset{\mathcal{I}}{D}(s)}{2} ((\overset{\mathcal{I}}{D}(s))^{-1} + (\overset{\Pi}{D}(s))^{-1}) \mathcal{G}(s) + \frac{(\overset{\mathcal{I}}{D}(s))^{-1} - (\overset{\Pi}{D}(s))^{-1}}{2\Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s} \\ &\times \frac{\text{v.p.}}{\pi i} \int_{\frac{1 \pm \operatorname{Re} \mu}{2} - i\infty}^{\frac{1 \pm \operatorname{Re} \mu}{2} + i\infty} \frac{\overset{\mathcal{I}}{D}(t)\Gamma(1 \pm \mu - t)(\rho')^t}{t-s} \mathcal{G}(t) dt \end{aligned} \quad (9.21)$$

при $\operatorname{Re} s = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$.

Оценим теперь норму функции $\mathcal{Y}((1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2 + i \operatorname{Im} s)$ как функции от $\operatorname{Im} s$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ через такую же норму функции $\mathcal{G}((1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2 + i \operatorname{Im} s)$. В силу аналитичности и не обращения в нуль на прямой $\operatorname{Re} s = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$ функций $\overset{\text{I}}{D}(s)$, $\overset{\text{II}}{D}(s)$, а также их асимптотики (9.19) очевидно, что на этой прямой

$$|\overset{\text{I}}{D}(s)|, \quad |\overset{\text{I}}{D}(s)|^{-1}, \quad |\overset{\text{II}}{D}(s)|, \quad |\overset{\text{II}}{D}(s)|^{-1} \leq C, \quad (9.22)$$

где C – некоторая постоянная, зависящая только от μ и γ . Так же, как и в (9.5), с помощью формулы Стирлинга получаем при $\rho' \in \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$, $\operatorname{Re} t = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$, что

$$|\Gamma(1 \pm \mu - t)(\rho')^t| \leq C(1 + |\operatorname{Im} t|)^{\frac{\pm \operatorname{Re} \mu}{2}} e^{-\varepsilon |\operatorname{Im} t|} |\rho'|^{\frac{1 \pm \operatorname{Re} \mu}{2}} \leq C_1(\varepsilon, \mu) |\rho'|^{\frac{1 \pm \operatorname{Re} \mu}{2}}. \quad (9.23)$$

Используя (9.15) и (9.17), имеем

$$\begin{aligned} (\overset{\text{I}}{D}(s))^{-1} - (\overset{\text{II}}{D}(s))^{-1} &= (\overset{\text{II}}{D}(s))^{-1} (D(s) - 1) \\ &= (\overset{\text{II}}{D}(s))^{-1} \frac{\sin \pi(\nu + \frac{\gamma}{2}) \sin \pi(\nu - \frac{\gamma}{2})}{\sin \pi s \sin \pi(\mp \mu + s)} (-1)^{q_+ - q_- + s_+ - s_-} \end{aligned} \quad (9.24)$$

и, применяя формулу Стирлинга и (9.6), получаем при $\operatorname{Re} s = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$ и при $\rho' \in \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$ оценку

$$\begin{aligned} \left| \frac{(\overset{\text{I}}{D}(s))^{-1} - (\overset{\text{II}}{D}(s))^{-1}}{2\Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s} \right| &\leq C(1 + |\operatorname{Im} s|)^{\frac{\mp \operatorname{Re} \mu}{2}} e^{-(\pi + \varepsilon) |\operatorname{Im} s|} |\rho'|^{-\frac{1 \pm \operatorname{Re} \mu}{2}} \\ &\leq C_2 |\rho'|^{-\frac{1 \pm \operatorname{Re} \mu}{2}}, \end{aligned} \quad (9.25)$$

где C_2 не зависит от ε . Поскольку преобразование Гильберта является ограниченным оператором в $L_2(\mathbb{R})$, используя (9.22), (9.23), (9.25) и производя элементарные оценки в (9.21), получаем в итоге оценку

$$\|\mathcal{Y}((1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2 + i\tau)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq C(\varepsilon) \|\mathcal{G}((1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2 + i\tau)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где $C(\varepsilon)$ зависит только от ε и параметров задачи μ и γ . Равенство (8.4) поэтому влечет ограниченность операторов $(I - Q_0^\pm)^{-1}$ в пространствах $L_2(\eta^{\pm \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R}_+)$:

$$\|y\|_{L_2(\eta^{\pm \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R}_+)} \leq C(\varepsilon) \|g\|_{L_2(\eta^{\pm \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R}_+)}.$$

Операторы $(I - Q_0^\pm)^{-1}$, определенные пока на $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, могут быть расширены на пространства $L_2(\eta^{\pm \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R}_+)$. Нетрудно показать, что формула (9.21) остается справедливой для любых $g(\eta) \in L_2(\eta^{\pm \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R}_+)$.

Полагая в лемме 8.2 $p = (1 \mp \operatorname{Re} \mu)/2$, в лемме 8.3 $p = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$, объединим эти леммы и только что полученный результат в виде следующего утверждения.

ЛЕММА 9.2. При $|\beta| \neq |\delta/\gamma \pm \pi/2|$, $\rho' \in \overline{\Sigma}_R^\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$ (см. (7.3)), и μ , удовлетворяющем (7.18), операторы $S_0^\pm$, $S_1^\pm$ и $S_r^\pm$ действуют ограниченно из $L_2(\eta^{\pm \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R}_+)$ в $L_2(\eta^{\mp \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R}_+)$ и имеют оценки норм (8.9), где $p = (1 \mp \operatorname{Re} \mu)/2$, операторы $Q_0^\pm$, $Q_1^\pm$ и $Q_r^\pm$ действуют ограниченно из $L_2(\eta^{\pm \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R}_+)$ в $L_2(\eta^{\pm \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R}_+)$ и имеют оценки норм (8.11), где $p = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$. Операторы $(I - Q_0^\pm)$ обратимы в пространствах $L_2(\eta^{\pm \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R}_+)$ и имеют оценки норм обратных

$$\|(I - Q_0^\pm)^{-1}\|_{L_2(\eta^{\pm \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R}_+) \rightarrow L_2(\eta^{\pm \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R}_+)} \leq C(\varepsilon, \mu). \quad (9.26)$$

В оценках (8.9), (8.11) и (9.26) постоянные зависят только от тех параметров, которые указаны в скобках; θ – любое, $0 < \theta < \min(\gamma, 1 - \gamma)$; $A_\pm$ определены в (6.16).

Образы Меллина функций $S_0^\pm u$, $S_1^\pm u$ могут быть найдены с использованием леммы 9.1 (формула (9.2)), функций $Q_0^\pm u$ – с использованием равенств (9.9), (9.10), а образы Меллина функций $(I - Q_0^\pm)^{-1}u$ выражаются формулой (9.21).

Далее перейдем к нахождению условий существования операторов $(I - Q^\pm)^{-1}$ и изучению их структуры при больших значениях параметра ρ' .

ЛЕММА 9.3. При $|\beta| \neq |\delta/\gamma \pm \pi/2|$ для любого ε , $0 < \varepsilon < \pi/2$, существует такое $\mathcal{R}(\varepsilon)$, что при $\rho' \in \overline{\Sigma}_R^\varepsilon$, $R = \mathcal{R}(\varepsilon)$ (см. (7.3)), операторы $(I - Q^\pm)$ обратимы в $L_2(\eta^{\pm \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R})$, причем $(I - Q^\pm)^{-1}$ представимы нормально сходящимися рядами:

$$(I - Q^\pm)^{-1} = (I - Q_0^\pm)^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} [(I - Q_0^\pm)^{-1} Q_\Delta^\pm]^n (I - Q_0^\pm)^{-1}, \quad (9.27)$$

где

$$Q_\Delta^\pm = Q_1^\pm + Q_r^\pm. \quad (9.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим оператор $(I - Q^\pm)$ в виде

$$(I - Q^\pm) = (I - Q_0^\pm)(I - (I - Q_0^\pm)^{-1} Q_\Delta^\pm).$$

Из оценок (8.11) при $p = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$ и (9.26) непосредственно следует, что

$$\|(I - Q_0^\pm)^{-1} Q_\Delta^\pm\|_{L_2(\eta^{\pm \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R}) \rightarrow L_2(\eta^{\pm \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R})} \leq C(\varepsilon, \gamma, \mu)/|\rho'|^\gamma,$$

и при достаточно большом $\mathcal{R}(\varepsilon)$ и $\rho' \in \overline{\Sigma}_R^\varepsilon$, $R = \mathcal{R}(\varepsilon)$, эти нормы станут меньше $q < 1$. Операторы $I - (I - Q_0^\pm)^{-1} Q_\Delta^\pm$ при таких ρ' будут обратимыми, а обратные к ним представимы рядами Неймана. Операторы $(I - Q^\pm)$ как произведения обратимых операторов также обратимы, и для $(I - Q^\pm)^{-1}$ получаем представление (9.27).

Используя (7.10), получим, что при $\rho' \in \overline{\Sigma}_R^\varepsilon$, где $R = \mathcal{R}(\varepsilon)$ – достаточно большое, справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} y_1^+ & y_2^+ \\ y_1^- & y_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I - Q^+)^{-1} Q^+[1] & (I - Q^+)^{-1} S^-[1] \\ (I - Q^-)^{-1} S^+[1] & (I - Q^-)^{-1} Q^-[1] \end{pmatrix}, \quad (9.29)$$

откуда, используя (9.27), имеем

$$\begin{aligned}
 y_{(3\mp 1)/2}^{\pm} &= (I - Q_0^{\pm})^{-1} Q_0^{\pm}[1] + (I - Q_0^{\pm})^{-1} Q_{\Delta}^{\pm}[1] \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} [(I - Q_0^{\pm})^{-1} Q_{\Delta}^{\pm}]^n (I - Q_0^{\pm})^{-1} Q_0^{\pm}[1] \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} [(I - Q_0^{\pm})^{-1} Q_{\Delta}^{\pm}]^n (I - Q_0^{\pm})^{-1} Q_{\Delta}^{\pm}[1], \\
 y_{(3\pm 1)/2}^{\pm} &= (I - Q_0^{\pm})^{-1} S_0^{\mp}[1] + (I - Q_0^{\pm})^{-1} S_{\Delta}^{\mp}[1] \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} [(I - Q_0^{\pm})^{-1} Q_{\Delta}^{\pm}]^n (I - Q_0^{\pm})^{-1} S_0^{\mp}[1] \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} [(I - Q_0^{\pm})^{-1} Q_{\Delta}^{\pm}]^n (I - Q_0^{\pm})^{-1} S_{\Delta}^{\mp}[1],
 \end{aligned} \tag{9.30}$$

где

$$S_{\Delta}^{\pm} = S_1^{\pm} + S_r^{\pm}. \tag{9.31}$$

Обозначим

$$\begin{pmatrix} y_1^+ & y_2^+ \\ y_1^- & y_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I - Q_0^+)^{-1} Q_0^+[1] & (I - Q_0^+)^{-1} S_0^-[1] \\ (I - Q_0^-)^{-1} S_0^+[1] & (I - Q_0^-)^{-1} Q_0^-[1] \end{pmatrix}. \tag{9.32}$$

Как следует из оценок (8.9) при $p = (1 \mp \operatorname{Re} \mu)/2$, (8.11) при $p = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$ и (9.26), по сравнению с $y_k^{\pm}$ оставшиеся члены в (9.30) будут $O(|\rho'|^{-\gamma})$ по норме пространств $L_2(\eta^{\pm \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R}_+)$, а потому $y_k^{\pm}$ являются главными частями функций $y_k^{\pm}$.

§ 10. Вычисление образов Меллина функций $y_1^{\pm}$ и $y_2^{\pm}$

В этом параграфе установим следующие формулы:

$$\mathfrak{M}[S_0^{\pm}[1]](s) = \pm(i)^{q_+ - q_-} (-1)^{s \mp} A_{\pm} \sin \pi \left(\nu \mp \frac{\gamma}{2} \right) \frac{\Gamma(\pm \mu + s)}{(\rho')^{\pm \mu + s} \sin \pi s}, \tag{10.1}$$

$$\mathfrak{M}[S_1^{\pm}[1]](s) = \pm(i)^{q_+ - q_-} (-1)^{s \mp} A_{\pm} d_{\pm} \sin \pi \left(\nu \mp \frac{\gamma}{2} \right) \frac{\Gamma(\pm \mu + \gamma + s)}{(\rho')^{\pm \mu + \gamma + s} \sin \pi s} \tag{10.2}$$

при $\operatorname{Re} s = (1 \mp \operatorname{Re} \mu)/2$;

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{M}[Q_0^{\pm}[1]](s) &= -(-1)^{q_+ - q_- + s_+ - s_-} \sin \pi \left(\nu + \frac{\gamma}{2} \right) \sin \pi \left(\nu - \frac{\gamma}{2} \right) \\
 &\quad \times \Gamma(\pm \mu + 1) \frac{\Gamma(s \mp \mu)}{\pi (\rho')^s s \sin \pi s},
 \end{aligned} \tag{10.3}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}[Q_1^\pm[1]](s) &= -(-1)^{q_+-q_-+s_+-s_-} \sin \pi \left(\nu + \frac{\gamma}{2} \right) \sin \pi \left(\nu - \frac{\gamma}{2} \right) \\ &\quad \times \frac{d_\pm \Gamma(\pm\mu + 1 + \gamma) \Gamma(s \mp \mu) + d_\mp \Gamma(\pm\mu + 1) \Gamma(s \mp \mu + \gamma)}{\pi(\rho')^{s+\gamma} (s + \gamma) \sin \pi s}, \end{aligned} \quad (10.4)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}[y_{(3\pm 1)/2}^{0\pm}](s) &= \mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} S_0^\mp[1]](s) \\ &= \mp(i)^{q_+-q_-} (-1)^{s\pm} A_\mp \sin \pi \left(\nu \pm \frac{\gamma}{2} \right) \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\frac{\hat{\gamma} \mp \mu}{2} + s) \Gamma(\frac{-\hat{\gamma} \mp \mu}{2} + s) \Gamma(1 - s)}{\pi(\rho')^{\mp\mu+s}}, \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}[y_{(3\mp 1)/2}^{0\pm}](s) &= \mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} Q_0^\pm[1]](s) \\ &= -(-1)^{q_+-q_-+s_+-s_-} \sin \pi \left(\nu + \frac{\gamma}{2} \right) \sin \pi \left(\nu - \frac{\gamma}{2} \right) \\ &\quad \times \Gamma \left(1 - \frac{\hat{\gamma} \mp \mu}{2} \right) \Gamma \left(1 - \frac{-\hat{\gamma} \mp \mu}{2} \right) \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\frac{\hat{\gamma} \mp \mu}{2} + s) \Gamma(\frac{-\hat{\gamma} \mp \mu}{2} + s) \Gamma(1 - s)}{\pi^2 s (\rho')^s} \end{aligned} \quad (10.6)$$

при $\operatorname{Re} s = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$, где μ и $\hat{\gamma}$ определены в (7.14) и (9.16) соответственно.

Формулы (10.1) и (10.2) следуют непосредственно из (7.13), (8.7) и выражения для $\mathfrak{M}[e^{-\xi\rho'}](s)$. Пользуясь формулой Стирлинга, нетрудно при $\rho' \in \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $R > 0$, получить оценку

$$|\mathfrak{M}[S_l^\pm[1]](s)| \leq C_l^\pm(\varepsilon) e^{-\pi|\operatorname{Im} s|} / |\rho'|^{\frac{1 \pm \operatorname{Re} \mu}{2} + l\gamma}, \quad l = 0, 1,$$

на прямой $\operatorname{Re} s = (1 \mp \operatorname{Re} \mu)/2$. Отсюда, в частности, следует, что $S_0^\pm[1]$ и $S_1^\pm[1]$ принадлежат пространству $L_2(\eta^{\mp \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R}_+)$.

Для доказательства формул (10.3) и (10.4) воспользуемся (7.16), (7.13), формулами (9.2) и (10.1), (10.2). Имеем

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}[Q_0^\pm[1]](s) &= -(-1)^{q_+-q_-+s_+-s_-} \sin \pi \left(\nu + \frac{\gamma}{2} \right) \sin \pi \left(\nu - \frac{\gamma}{2} \right) \\ &\quad \times \frac{1}{(\rho')^s \sin \pi s} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1 \mp \operatorname{Re} \mu}{2} - i\infty}^{\frac{1 \mp \operatorname{Re} \mu}{2} + i\infty} \frac{\Gamma(\mp\mu + s - t) \Gamma(\pm\mu + t)}{\sin \pi t} dt, \\ \mathfrak{M}[Q_1^\pm[1]](s) &= -(-1)^{q_+-q_-+s_+-s_-} \sin \pi \left(\nu + \frac{\gamma}{2} \right) \sin \pi \left(\nu - \frac{\gamma}{2} \right) \frac{1}{(\rho')^{s+\gamma} \sin \pi s} \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi i} \left[d_\pm \int_{\frac{1 \mp \operatorname{Re} \mu}{2} - i\infty}^{\frac{1 \mp \operatorname{Re} \mu}{2} + i\infty} \frac{\Gamma(\mp\mu + s - t) \Gamma(\pm\mu + \gamma + t)}{\sin \pi t} dt \right. \\ &\quad \left. + d_\mp \int_{\frac{1 \mp \operatorname{Re} \mu}{2} - i\infty}^{\frac{1 \mp \operatorname{Re} \mu}{2} + i\infty} \frac{\Gamma(\mp\mu + \gamma + s - t) \Gamma(\pm\mu + t)}{\sin \pi t} dt \right] \end{aligned} \quad (10.7)$$

при $\operatorname{Re} s > (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$. К интегралам в (10.7) применима лемма Барнса (см. [23], [24]). Действительно, все они имеют вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1 \mp \operatorname{Re} \mu}{2} - i\infty}^{\frac{1 \mp \operatorname{Re} \mu}{2} + i\infty} \frac{\Gamma(\mp \mu + \alpha_1 + s - t) \Gamma(\pm \mu + \alpha_2 + t)}{\sin \pi t} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1 \mp \operatorname{Re} \mu}{2} - i\infty}^{\frac{1 \mp \operatorname{Re} \mu}{2} + i\infty} \Gamma(\pm \mu + \alpha_2 + t) \Gamma(t) \Gamma(\mp \mu + \alpha_1 + s - t) \Gamma(1 - t) dt, \end{aligned}$$

где α_1, α_2 равны либо 0, либо γ , $\operatorname{Re} s > (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$. Нетрудно проверить, пользуясь (7.18), что полюсы функций $\Gamma(\pm \mu + \alpha_2 + t)$, $\Gamma(t)$ расположены слева, а полюсы $\Gamma(\mp \mu + \alpha_1 + s - t)$ (при $\operatorname{Re} s > (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$) и $\Gamma(1 - t)$ – справа от прямой $\operatorname{Re} t = (1 \mp \operatorname{Re} \mu)/2$, по которой проводится интегрирование. Вычисляя интегралы в (10.7) с помощью леммы Барнса, получим выражения (10.3) и (10.4).

Покажем справедливость (10.5) и (10.6). Функции

$$\mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} S_0^\mp[1]](s) \quad \text{и} \quad \mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} Q_0^\pm[1]](s)$$

являются решениями сингулярного интегрального уравнения (9.11) с правыми частями $\widehat{\mathcal{G}}(s)$, равными

$$\Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s \mathfrak{M}[S_0^\mp[1]](s) \quad \text{и} \quad \Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s \mathfrak{M}[Q_0^\pm[1]](s)$$

соответственно. Уравнение (9.11), как мы видели, сводится к неоднородной граничной задаче Гильберта (9.14) на прямой $\operatorname{Re} s = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$. При решении этой задачи основным этапом является разложение функции $\overset{\text{II}}{D}(s) \widehat{\mathcal{G}}(s)$ на прямой $\operatorname{Re} s = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$ в сумму двух функций, одна из которых аналитична слева, другая справа от этой прямой, и обе стремятся к нулю при $|s| \rightarrow \infty$. Воспользовавшись формулой дополнения для гамма-функции, имеем

$$\begin{aligned} \overset{\text{II}}{D}(s) \Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s \mathfrak{M}[S_0^\mp[1]](s) &= \frac{b^\pm \overset{\text{II}}{D}(s)}{\sin \pi s \sin \pi(\mp \mu + s)}, \\ \overset{\text{II}}{D}(s) \Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s \mathfrak{M}[Q_0^\pm[1]](s) &= \frac{a^\pm \overset{\text{II}}{D}(s)}{s \sin \pi s \sin \pi(\mp \mu + s)}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} b^\pm &= \mp(i)^{q_+ - q_-} (-1)^{s \pm} A_{\mp} \pi(\rho')^{\pm \mu} \sin \pi(\nu \pm \gamma/2), \\ a^\pm &= -(-1)^{q_+ - q_- + s_+ - s_-} \sin \pi(\nu + \gamma/2) \sin \pi(\nu - \gamma/2) \Gamma(\pm \mu + 1). \end{aligned}$$

Умножая равенство (9.24) на произведение $\overset{\text{II}}{D}(s) \overset{\text{II}}{D}(s)$, находим

$$\frac{\overset{\text{II}}{D}(s)}{\sin \pi s \sin \pi(\mp \mu + s)} = \frac{(-1)^{q_+ - q_- + s_+ - s_-}}{\sin \pi(\nu + \frac{\gamma}{2}) \sin \pi(\nu - \frac{\gamma}{2})} (\overset{\text{II}}{D}(s) - \overset{\text{II}}{D}(s)),$$

где $\overset{\text{л}}{D}(s)$ и $\overset{\text{п}}{D}(s)$ определены в (9.18), аналитичны соответственно слева и справа от прямой $\operatorname{Re} s = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$, а при $s \rightarrow \infty$ имеют поведение (9.19). Отсюда получаем искомые разложения

$$\begin{aligned} \overset{\text{л}}{D}(s)\Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s \mathfrak{M}[S_0^\mp[1]](s) &= b_1^\pm \{(1 - \overset{\text{л}}{D}(s)) - (1 - \overset{\text{п}}{D}(s))\}, \\ \overset{\text{п}}{D}(s)\Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s \mathfrak{M}[Q_0^\pm[1]](s) &= a_1^\pm \left\{ \frac{\overset{\text{л}}{D}(0) - \overset{\text{л}}{D}(s)}{s} - \frac{\overset{\text{п}}{D}(0) - \overset{\text{п}}{D}(s)}{s} \right\} \end{aligned} \quad (10.8)$$

(точка $s = 0$ лежит слева от прямой $\operatorname{Re} s = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$). Здесь

$$b_1^\pm, a_1^\pm = \frac{(-1)^{q_+ - q_- + s_+ - s_-}}{\sin \pi(\nu + \frac{\gamma}{2}) \sin \pi(\nu - \frac{\gamma}{2})} b^\pm, a^\pm$$

соответственно. Подставляя разложения (10.8) вместо $\overset{\text{л}}{D}(s)\widehat{\mathcal{G}}(s)$ в формуле (9.20) и следуя рассуждениям, приведенным после нее, находим с использованием (9.24) и формулы дополнения для гамма-функции, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1}S_0^\mp[1]](s) &= \frac{b^\pm (\overset{\text{п}}{D}(s))^{-1} \Gamma(s \mp \mu)}{\pi(\rho')^s \sin \pi s}, \\ \mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1}Q_0^\pm[1]](s) &= \frac{a^\pm \overset{\text{л}}{D}(0)(\overset{\text{п}}{D}(s))^{-1} \Gamma(s \mp \mu)}{\pi(\rho')^s \sin \pi s}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (9.18) и формулой дополнения для $\Gamma(s)$, отсюда получаем (10.5) и (10.6).

Существует простая связь поведения функции $f(\xi)$ в окрестностях нуля и бесконечности, а также свойства аналитической продолжимости $f(\xi)$ с аналитическими свойствами образа Меллина $\mathcal{F}(s)$ этой функции. Будем обозначать здесь и далее для $a < b$

$$\Pi_{a,b} = \{s \in \mathbb{C}: a < \operatorname{Re} s < b, \operatorname{Im} s \in \mathbb{R}\}. \quad (10.9)$$

ЛЕММА 10.1. Пусть функция $f(\xi)$, $\xi > 0$, имеет образ Меллина $\mathcal{F}(s)$ (8.1) на прямой $\operatorname{Re} s = p$, причем для $f(\xi)$ справедлива формула обращения (8.2). Пусть $\mathcal{F}(s)$ допускает аналитическое продолжение, которое обозначим так же $\mathcal{F}(s)$, с этой прямой в полосу (10.9), $a < p < b$, непрерывное вплоть до прямых $\operatorname{Re} s = a$ и $\operatorname{Re} s = b$ и имеющее в данной полосе конечное число полюсов $s_1, \dots, s_n$ кратностей $k_1, \dots, k_n$ соответственно, так что

$$a < \operatorname{Re} s_1 \leq \operatorname{Re} s_2 \leq \dots \leq \operatorname{Re} s_l < p < \operatorname{Re} s_{l+1} \leq \dots \leq \operatorname{Re} s_n < b.$$

Пусть, кроме того, функция $e^{\Delta|\operatorname{Im} s|}|\mathcal{F}(s)|$, где $\Delta > 0$, интегрируема на прямых $\operatorname{Re} s = a$, $\operatorname{Re} s = p$ и $\operatorname{Re} s = b$ и $e^{\Delta|\operatorname{Im} s|}|\mathcal{F}(s)| \rightarrow 0$ при $|\operatorname{Im} s| \rightarrow \infty$ равномерно по $\operatorname{Re} s$ на отрезке $[a, b]$.

Тогда функция $f(\xi)$ допускает аналитическое продолжение $f(\zeta)$ с положительной полюсы $\xi > 0$ в сектор $|\zeta| > 0$, $|\arg \zeta| < \Delta$, непрерывное в замыкании этого сектора, за исключением, быть может, начала координат:

$|\zeta| > 0$, $|\arg \zeta| \leq \Delta$; в окрестностях нуля и бесконечности это аналитическое продолжение $f(\zeta)$ допускает представления:

$$f(\zeta) = \sum_{\substack{s_j \\ a < \operatorname{Re} s_j < p}} \zeta^{-s_j} \sum_{r=0}^{k_j-1} (\ln \zeta)^r C_{k_j-1}^r \lim_{s \rightarrow s_j} \left(\frac{d}{ds} \right)^{k_j-1-r} [(s-s_j)^{k_j} \mathcal{F}(s)] + \varphi_a(\zeta) \quad (10.10_1)$$

при $0 < |\zeta| < M$, $|\arg \zeta| \leq \Delta$,

$$f(\zeta) = - \sum_{\substack{s_j \\ p < \operatorname{Re} s_j < b}} \zeta^{-s_j} \sum_{r=0}^{k_j-1} (\ln \zeta)^r C_{k_j-1}^r \lim_{s \rightarrow s_j} \left(\frac{d}{ds} \right)^{k_j-1-r} [(s-s_j)^{k_j} \mathcal{F}(s)] + \varphi_b(\zeta) \quad (10.10_2)$$

при $|\zeta| > M$, $|\arg \zeta| \leq \Delta$, где $M > 0$ – произвольное, $C_{k_j-1}^r$ – биномиальные коэффициенты, а для функций $\varphi_a(\zeta)$ и $\varphi_b(\zeta)$ в секторе $|\zeta| > 0$, $|\arg \zeta| \leq \Delta$ имеют место оценки

$$|\varphi_q(\zeta)| \leq |\zeta|^{-q} \int_{\mathbb{R}} e^{\Delta \sigma} |\mathcal{F}(q + i\sigma)| d\sigma, \quad q = a, b. \quad (10.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим интеграл

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \zeta^{-s} \mathcal{F}(s) ds. \quad (10.12)$$

В силу (8.2) функция $f(\zeta)$ на действительной оси совпадает с $f(\xi)$. Из оценки

$$\left| \int_{p-iA}^{p+iB} \zeta^{-s} \mathcal{F}(s) ds \right| \leq |\zeta|^{-p} \int_A^B e^{\Delta \sigma} |\mathcal{F}(p + i\sigma)| d\sigma, \quad (10.13)$$

справедливой для любых действительных A, B и $|\arg \zeta| \leq \Delta$, вытекает равномерная сходимость интеграла (10.12) при $0 < c < |\zeta| < C$, где c, C – произвольные фиксированные постоянные. Поэтому функция $f(\zeta)$ является регулярной в секторе $|\zeta| > 0$, $|\arg \zeta| < \Delta$, и непрерывной в секторе $|\zeta| > 0$, $|\arg \zeta| \leq \Delta$.

Деформируя теперь в (10.12) контур интегрирования до прямой $\operatorname{Re} s = a$, получим

$$f(\zeta) = \sum_{a < \operatorname{Re} s_j < p} \operatorname{res}_{s=s_j} [\zeta^{-s} \mathcal{F}(s)] + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \zeta^{-s} \mathcal{F}(s) ds.$$

Вычисляя вычеты и обозначая последний интеграл через $\varphi_a(\zeta)$, в силу только что проведенных рассуждений и оценки (10.13) при $A = -\infty$, $B = +\infty$ получаем справедливость разложения (10.10₁) и оценки (10.11) при $q = a$. Аналогично получаем разложение (10.10₂). Лемма доказана.

С помощью этой леммы и (10.5), (10.6) можно найти асимптотики функций $y_1^{\pm}(\eta)$, $y_2^{\pm}(\eta)$, $\eta > 0$, и их аналитических продолжений в окрестностях нуля и бесконечности. Однако для того, чтобы найти такие же асимптотики функций $y_1^{\pm}(\eta)$, $y_2^{\pm}(\eta)$ и их аналитических продолжений, необходимо знать аналитические свойства образов Меллина этих функций. Полученных результатов для этого пока недостаточно. Поэтому в следующем параграфе оценим все оставшиеся члены из (9.30) в нормах банаховых пространств голоморфных функций с фиксированными полюсами.

§ 11. Оценки образов Меллина в банаховых пространствах голоморфных функций с фиксированными полюсами

Согласно формулам (10.1)–(10.6), а также лемме 10.1 целесообразно ввести следующие банаховы пространства.

Для $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$, $\Delta \geq 0$, действительных $a < b$, целого $m \geq 0$, комплексных $s_1, \dots, s_n$, расположенных в полосе (10.9) и не обязательно попарно различных, определим

$$\mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,\Delta;m}(s_1, \dots, s_n) \quad (11.1)$$

как линейное пространство функций $\mathcal{F}(s; \rho')$, непрерывных на множестве

$$(\bar{\Pi}_{a,b} \setminus \{s_1, \dots, s_n\}) \times \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$$

(см. (7.3)), голоморфных по двум комплексным переменным s, ρ' на

$$(\Pi_{a,b} \setminus \{s_1, \dots, s_n\}) \times \Sigma_R^\varepsilon$$

(см., например, [25], [26]), для которых конечна норма

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,\Delta;m}(s_1, \dots, s_n)} &= \\ &= \sup_{\substack{s \in \bar{\Pi}_{a,b} \setminus \{s_1, \dots, s_n\} \\ \rho' \in \bar{\Sigma}_R^\varepsilon}} e^{\Delta |\operatorname{Im} s|} |\rho'|^{\operatorname{Re} s} \left| (s - b - 1)^{m-n} \prod_{j=1}^n (s - s_j) \mathcal{F}(s; \rho') \right|. \end{aligned} \quad (11.2)$$

В силу теоремы Вейерштрасса пространство (11.1) банахово.

Через $\mathcal{H}_{R,[a,a]}^{\varepsilon,\Delta;m}$ обозначим банахово пространство функций $\mathcal{F}(s; \rho')$, непрерывных на $\bar{\Pi}_{a,a} \times \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$, где $\bar{\Pi}_{a,a}$ – прямая $\operatorname{Re} s = a$, регулярных по ρ' на Σ_R^ε , для которых конечна норма вида (11.2).

Через $\mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,\Delta;\infty}(s_1, \dots, s_n)$ обозначим топологическое пространство, являющееся пересечением всех пространств $\mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,\Delta;m}(s_1, \dots, s_n)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, т. е.

$$\mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,\Delta;\infty}(s_1, \dots, s_n) = \bigcap_{m=0}^{\infty} \mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,\Delta;m}(s_1, \dots, s_n)$$

с обычным образом определенной базой окрестностей.

Если $(s_1, s_2, \dots, s_j, \dots)$ – некоторое конечное или бесконечное множество комплексных чисел, не лежащее полностью в полосе (10.9) и не пересекающееся с ее границей, то $\mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,\Delta;m}(s_1, s_2, \dots, s_j, \dots)$ – пространство $\mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,\Delta;m}(s_{l_1}, \dots, s_{l_n})$, где $s_{l_1}, \dots, s_{l_n}$ – те и только те из $s_1, s_2, \dots, s_j, \dots$, которые лежат в полосе (10.9). Аналогично определяется пространство $\mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,\Delta;\infty}(s_1, s_2, \dots, s_j, \dots)$.

Используя формулы (10.1)–(10.6), легко проверить с помощью формулы Стирлинга, что при любых $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$ справедливы оценки

$$\|\mathfrak{M}[S_0^\pm[1]]\|_{\mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,\pi;m}(\mp\mu-j;-j;1+j)} \leq \frac{C_m(\varepsilon, a, b)}{|\rho'| \pm \operatorname{Re} \mu}, \quad (11.3)$$

$$\|\mathfrak{M}[S_1^\pm[1]]\|_{\mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,\pi;m}(\mp\mu-\gamma-j;-j;1+j)} \leq \frac{C_m(\varepsilon, a, b)}{|\rho'| \pm \operatorname{Re} \mu + \gamma}, \quad (11.4)$$

$$\|\mathfrak{M}[Q_0^\pm[1]]\|_{\mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,\pi;m}(\pm\mu-j;-j;j)} \leq C_m(\varepsilon, a, b), \quad (11.5)$$

$$\|\mathfrak{M}[Q_1^\pm[1]]\|_{\mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,\pi;m}(\pm\mu-j;\pm\mu-\gamma-j;-j;1+j;-\gamma)} \leq \frac{C_m(\varepsilon, a, b)}{|\rho'|^\gamma}, \quad (11.6)$$

$$\|\mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1}S_0^\mp[1]]\|_{\mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,\pi;m}(\frac{\pm\mu-\hat{\gamma}}{2}-j;\frac{\pm\mu+\hat{\gamma}}{2}-j;1+j)} \leq \frac{C_m(\varepsilon, a, b)}{|\rho'|^\gamma \mp \operatorname{Re} \mu}, \quad (11.7)$$

$$\|\mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1}Q_0^\pm[1]]\|_{\mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,\pi;m}(\frac{\pm\mu-\hat{\gamma}}{2}-j;\frac{\pm\mu+\hat{\gamma}}{2}-j;j)} \leq C_m(\varepsilon, a, b) \quad (11.8)$$

при всех $m = 0, 1, 2, \dots$ и любых $a < b$ таких, что прямые $\operatorname{Re} s = a$ и $\operatorname{Re} s = b$ не проходят через точки (комплексные значения, указанные в скобках при обозначении пространств). Здесь $C_m(\varepsilon, a, b)$ – некоторые постоянные, зависящие от параметров, фигурирующих в скобках.

Вясним далее, каким пространствам типа (11.1) принадлежат $\mathfrak{M}[S_r^\pm[1]](s)$. Обратимся к формуле (7.13) и лемме 8.1. Имеем на прямой $\operatorname{Re} s = (1 \mp \operatorname{Re} \mu)/2$ при $\rho' \in \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$

$$\mathfrak{M}[S_r^\pm[1]](s) = \sin \pi \left(\nu \mp \frac{\gamma}{2} \right) \frac{\mathfrak{M}[r_\beta^\pm(\xi)e^{-\xi\rho'}](s)}{\sin \pi s}. \quad (11.9)$$

Покажем, что

$$\mathfrak{M}[r_\beta^\pm(\xi)e^{-\xi\rho'}](s) \in \mathcal{H}_{R, [\mp \operatorname{Re} \mu - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, 0; \infty} \quad \forall b > \mp \operatorname{Re} \mu - \gamma - \theta, \quad (11.10)$$

где $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$, $0 < \theta < \min(\gamma, 1 - \gamma)$ – произвольные.

Функция в левой части (11.10) представима интегралом вида (8.1), в котором подынтегральная функция $\xi^{s-1}r_\beta^\pm(\xi)e^{-\xi\rho'}$ является непрерывной функцией переменных ξ, s, ρ' на всяком множестве $[\alpha, A] \times \bar{\Pi}_{(\mp \operatorname{Re} \mu - \gamma - \theta), b} \times \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$ для любых α, A и b таких, что $0 < \alpha < A$, $b > \mp \operatorname{Re} \mu - \gamma - \theta$, $\varepsilon > 0$, $R > 0$, и голоморфной функцией комплексных переменных s, ρ' на множестве

$$\Pi_{(\mp \operatorname{Re} \mu - \gamma - \theta), b} \times \Sigma_R^\varepsilon. \quad (11.11)$$

Кроме того, такой интеграл в силу оценок (7.15) при $m = 0$ сходится равномерно по s, ρ' , принадлежащим любому компактному подмножеству множества (11.11). Отсюда в силу известных теорем об интегралах, непрерывно, а также голоморфно зависящих от параметров, получаем, что функция комплексных переменных s, ρ' из (11.10) является голоморфной на множестве (11.11) и непрерывной на замыкании этого множества.

Чтобы показать, что функция из (11.10) убывает в полосе $\overline{\Pi}_{(\mp \operatorname{Re} \mu - \gamma - \theta), b}$ быстрее любой степени $|\operatorname{Im} s|$, воспользуемся классической формулой

$$\int_0^\infty \xi^{s-1} \left(\xi \frac{d}{d\xi} \right)^m f(\xi) d\xi = (-s)^m \int_0^\infty \xi^{s-1} f(\xi) d\xi$$

(см., например, [22]), справедливой, например, для m раз непрерывно дифференцируемой функции $f(\xi)$ такой, что $(\xi \frac{d}{d\xi})^k f(\xi) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ для $k = 0, 1, \dots, m$. Поэтому, пользуясь оценками (7.15), при $\operatorname{Re} s \geq \pm \operatorname{Re} \mu - \gamma - \theta$, $\rho' \in \overline{\Sigma}_\varepsilon^R$ для любого $m = 0, 1, 2, \dots$ имеем

$$\begin{aligned} |s^m \mathfrak{M}[r_\beta^\pm(\xi) e^{-\xi \rho'}](s)| &= \left| \mathfrak{M} \left[\left(\xi \frac{d}{d\xi} \right)^m (r_\beta^\pm(\xi) e^{-\xi \rho'}) \right](s) \right| \\ &= \left| \int_0^\infty \xi^{s-1} \sum_{i=0}^m C_m^i P_i(\xi \rho') e^{-\xi \rho'} \left(\xi \frac{d}{d\xi} \right)^{m-i} r_\beta^\pm(\xi) d\xi \right| \\ &\leq \int_0^\infty \xi^{\operatorname{Re} s - 1} e^{-\frac{\xi |\rho'| \sin \varepsilon}{3}} \sum_{i=0}^m C_m^i P_i(\xi |\rho'|) e^{-\frac{\xi |\rho'| \sin \varepsilon}{3}} \\ &\quad \times e^{-\frac{\xi |\rho'| \sin \varepsilon}{3}} \left| \left(\xi \frac{d}{d\xi} \right)^{m-i} r_\beta^\pm(\xi) \right| d\xi \\ &\leq C_m(\theta, R, \varepsilon) \int_0^\infty \xi^{\operatorname{Re} s - 1 \pm \operatorname{Re} \mu + \gamma + \theta} e^{-\frac{\xi |\rho'| \sin \varepsilon}{3}} d\xi \\ &\leq \tilde{C}_m(\theta, R, \varepsilon) \Gamma(\operatorname{Re} s \pm \operatorname{Re} \mu + \gamma + \theta) / |\rho'|^{\operatorname{Re} s \pm \operatorname{Re} \mu + \gamma + \theta}, \end{aligned}$$

где $P_i(\xi \rho')$ – некоторые многочлены (i -й степени) с положительными целыми коэффициентами. Отсюда следуют включение (11.10) и оценки

$$\|\mathfrak{M}[r_\beta^\pm(\xi) e^{-\xi \rho'}]\|_{\mathcal{H}_{R, [\mp \operatorname{Re} \mu - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, 0; m}} \leq C_m(\varepsilon, \theta, b) / |\rho'|^{\pm \operatorname{Re} \mu + \gamma + \theta}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (11.12)$$

В итоге, используя (11.9) и (11.12), заключаем, что

$$\mathfrak{M}[S_r^\pm[1]](s) \in \mathcal{H}_{R, [\mp \operatorname{Re} \mu - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; \infty}(0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

и для произвольных $\varepsilon, R, \theta, b$ таких, что $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$, $0 < \theta < \min(\gamma, 1 - \gamma)$, $b > \mp \operatorname{Re} \mu - \gamma - \theta$, и для любого $m = 0, 1, 2, \dots$ имеют место оценки

$$\|\mathfrak{M}[S_r^\pm[1]]\|_{\mathcal{H}_{R, [\mp \operatorname{Re} \mu - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m}} \leq C_m(\varepsilon, \theta, b) / |\rho'|^{\pm \operatorname{Re} \mu + \gamma + \theta}. \quad (11.13)$$

При больших $|\rho'|$, $\rho' \in \overline{\Sigma}_R^\varepsilon$, справедливы разложения (9.30), причем образы Меллина некоторых функций в этих разложениях либо непосредственно вычислены (формулы (10.1)–(10.6)), либо оценены в пространствах типа (11.1) (оценка (11.13)). Для того чтобы получить аналогичные оценки всех остальных членов в (9.30), достаточно изучить, как действуют операторы $S_0^\pm, S_1^\pm, S_r^\pm$ и $(I - Q_0^\pm)^{-1}$ в образах Меллина в пространствах типа (11.1).

Рассмотрим операторы $S_0^\pm$, $S_1^\pm$ и $S_r^\pm$. Выражения для образов Меллина функций $S_0^\pm y$ и $S_1^\pm y$ при $y(\eta) \in L_2(\eta^{\pm \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R}_+)$ найдем с помощью леммы 9.1 (формула (9.2)) при $p = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$ и формул (7.13). Чтобы получить выражение для образа Меллина функции $S_r^\pm y$, предположим еще, что $y(\eta) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$. Из оценок (7.15) легко следует, что при $\rho' \in \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$, функция $r_\beta^\pm(\xi)e^{-\xi\rho'}$ принадлежит $L_2(\xi^{2p-1}; \mathbb{R}_+)$, где $p > \mp \operatorname{Re} \mu - \gamma - \theta^*$, $\theta^* = \min(\gamma, 1 - \gamma)$. Поэтому, используя (8.7) и теорему о свертке (см. (8.5)), получим при $0 < \operatorname{Re} s < 1$, $\operatorname{Re} s > (1 \mp \operatorname{Re} \mu)/2 - \gamma - \theta^*$, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}[S_r^\pm y](s) &= \frac{\sin \pi(\nu \mp \frac{\gamma}{2})}{\sin \pi s} \mathfrak{M}[r_\beta^\pm(\xi)e^{-\xi\rho'} y(\xi)](s) \\ &= \frac{\sin \pi(\nu \mp \frac{\gamma}{2})}{\sin \pi s} \int_{\frac{1 \pm \operatorname{Re} \mu}{2} - i\infty}^{\frac{1 \pm \operatorname{Re} \mu}{2} + i\infty} \mathfrak{M}[r_\beta^\pm(\xi)e^{-\xi\rho'}](s-t) \mathcal{Y}(t) dt, \end{aligned} \quad (11.14)$$

где $\mathcal{Y}(t) = \mathfrak{M}[y](t)$. С помощью операции замыкания нетрудно убедиться в справедливости этой формулы в полосе $(1 \mp \operatorname{Re} \mu)/2 - \gamma - \theta^* < \operatorname{Re} s \leq (1 \mp \operatorname{Re} \mu)/2$ для любой функции $y \in L_2(\eta^{\pm \operatorname{Re} \mu}; \mathbb{R}_+)$.

Свертки в (11.14) и (9.2) будем оценивать с помощью следующей леммы.

ЛЕММА 11.1. Пусть функции $\mathcal{R}(s; \rho')$ и $\mathcal{Y}(s; \rho')$ принадлежат пространствам $\mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,0;m+2}$ и $\mathcal{H}_{[c,d]}^{\varepsilon,0;m}$ соответственно, где $a < b$, $c \leq d$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$, $m \geq 0$ — целое. Тогда функция

$$\mathcal{F}(s; \rho') = \frac{1}{2\pi i} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \mathcal{R}(s-t; \rho') \mathcal{Y}(t; \rho') dt, \quad (11.15)$$

где p — произвольное действительное число, $c \leq p \leq d$, принадлежит пространству $\mathcal{H}_{R,[a+c,b+d]}^{\varepsilon,0;m}$ и имеет место оценка

$$\|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}_{R,[a+c,b+d]}^{\varepsilon,0;m}} \leq 2^{m-1} \|\mathcal{R}\|_{\mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,0;m+2}} \|\mathcal{Y}\|_{\mathcal{H}_{[c,d]}^{\varepsilon,0;m}}. \quad (11.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим сначала голоморфность функции (11.15) по комплексным переменным s, ρ' на множестве

$$\Pi_{(a+c),(b+d)} \times \Sigma_R^\varepsilon \quad (11.17)$$

и непрерывность ее на замыкании этого множества. Для любого фиксированного $p \in [c, d]$ подынтегральная функция в интеграле (11.15) является непрерывной функцией переменных $s, \operatorname{Im} t, \rho'$ на множестве $\bar{\Pi}_{(a+p),(b+p)} \times \mathbb{R} \times \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$ и голоморфной по переменным s, ρ' на множестве

$$\Pi_{(a+p),(b+p)} \times \Sigma_R^\varepsilon. \quad (11.18)$$

Кроме того, в силу принадлежности $\mathcal{R}(s; \rho')$ и $\mathcal{Y}(s; \rho')$ соответствующим пространствам интеграл (11.15) сходится абсолютно и равномерно по s и ρ' , принадлежащим любому компактному подмножеству множества (11.18). Поэтому функция

$\mathcal{F}(s; \rho')$ для любого $p \in [c, d]$ является голоморфной функцией переменных s, ρ' на множестве (11.18) и непрерывной на замыкании этого множества. Поскольку полосу $\overline{\Pi}_{(a+c), (b+d)}$ может быть покрыта (с налеганием) конечным числом полос вида $\overline{\Pi}_{(a+p), (b+p)}$, отсюда следует доказываемое утверждение для функции (11.15) на множестве (11.17).

Покажем справедливость (11.16). Из определения (11.2) следуют оценки

$$\begin{aligned} |\rho'|^{\operatorname{Re} s} |\mathcal{R}(s; \rho')| &\leq \|\mathcal{R}\|_{\mathcal{H}_{R, [a, b]}^{\varepsilon, 0; m+2}} |s - b - 1|^{-(m+2)}, & s \in \overline{\Pi}_{a, b}, \\ |\rho'|^{\operatorname{Re} t} |\mathcal{Y}(t; \rho')| &\leq \|\mathcal{Y}\|_{\mathcal{H}_{R, [c, d]}^{\varepsilon, 0; m}} |t - d - 1|^{-m}, & s \in \overline{\Pi}_{c, d}, \end{aligned}$$

при $\rho' \in \overline{\Sigma}_\varepsilon^R$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}_{R, [a+c, b+d]}^{\varepsilon, 0; m}} &= \sup_{\substack{s \in \overline{\Pi}_{(a+c), (b+d)} \\ \rho' \in \overline{\Sigma}_R^\varepsilon}} |\rho'|^{\operatorname{Re} s} |(s - b - d - 1)^m \mathcal{F}(s; \rho')| \\ &\leq (2\pi)^{-1} \|\mathcal{R}\|_{R, [a, b]}^{\varepsilon, 0; m+2} \|\mathcal{Y}\|_{R, [c, d]}^{\varepsilon, 0; m} \\ &\quad \times \sup_{p \in [c, d]} \sup_{s \in [a+p, b+p]} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \frac{|s - b - d - 1|^m |dt|}{|s - t - b - 1|^{m+2} |t - d - 1|^m}. \end{aligned} \quad (11.19)$$

Для оценки последнего интеграла воспользуемся неравенством

$$|s - b - d - 1| / |s - t - b - 1| \leq 2|t - d - 1|, \quad (11.20)$$

справедливым при $\operatorname{Re} t \leq d$, $\operatorname{Re}(s - t) \leq b$. Аналогичные неравенства используют обычно при оценке сверток (см. [27]). Неравенство (11.20) легко получается следующим образом: поскольку $|s - t - b - 1| \geq 1$, $|t - d - 1| \geq 1$, а значит, произведение $|s - t - b - 1| |t - d - 1|$ не меньше и $|s - t - b - 1|$, и $|t - d - 1|$, то, так как $\operatorname{Re} s \leq b + d$, имеем

$$2|s - t - b - 1| |t - d - 1| \geq (|s - t - b - 1| + |t - d - 1|) \geq |s - b - d - 2| > |s - b - d - 1|.$$

Используя неравенство (11.20), оценим интеграл из формулы (11.19) величиной

$$2^m \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \frac{|dt|}{|s - t - b - 1|^2} \leq 2^m \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau}{1 + \tau^2} = 2^m \pi,$$

что и приводит к оценке (11.16). Лемма доказана.

Как следствие леммы 11.1, формулы (11.14) и оценок (11.12) получаем оценки для операторов $S_r^\pm$ в образах Меллина.

ЛЕММА 11.2. Пусть c и d – действительные числа, $c < (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2 < d$, и $\rho' \in \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$ (см. (7.3)). Тогда при $|\beta| \neq |\delta/\gamma \pm \pi/2|$ операторы $S_r^\pm$ в образах Меллина действуют непрерывно из пространства $\mathcal{H}_{R,[c,d]}^{\varepsilon,\pi;\infty}$ в $\mathcal{H}_{R,[c \mp \operatorname{Re} \mu - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon,\pi;\infty}(0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, где θ и b – любые, $0 < \theta < \theta^* = \min(\gamma, 1 - \gamma)$, $b > c \mp \operatorname{Re} \mu - \gamma - \theta$, и для любого $m = 0, 1, 2, \dots$ справедливы оценки

$$\|\mathfrak{M}[S_r^\pm y]\|_{\mathcal{H}_{R,[c \mp \operatorname{Re} \mu - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon,\pi;m}(0, \pm 1, \pm 2, \dots)} \leq \frac{C_m(\varepsilon, \theta, b)}{|\rho'|^{\pm \operatorname{Re} \mu + \gamma + \theta}} \|\mathfrak{M}[y]\|_{\mathcal{H}_{R,[c,d]}^{\varepsilon,\pi;m}},$$

где постоянные $C_m(\varepsilon, \theta, b)$ зависят только от m , ε , θ , b и β (параметр β появляется в формуле (3.14) и далее).

При доказательстве этой леммы используется также тривиальная оценка

$$\|\mathcal{Y}\|_{\mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,\Delta';m}(s_1, \dots, s_n)} \leq \|\mathcal{Y}\|_{\mathcal{H}_{R,[a,b]}^{\varepsilon,\Delta;m}(s_1, \dots, s_n)}$$

при $0 \leq \Delta' < \Delta$ и любом $m = 0, 1, 2, \dots$.

Получим аналогичные оценки для операторов $S_0^\pm$ и $S_1^\pm$.

ЛЕММА 11.3. Пусть $s_1, \dots, s_n$ – комплексные числа такие, что

$$c < \operatorname{Re} s_1 \leq \operatorname{Re} s_2 \leq \dots \leq \operatorname{Re} s_l < (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2 < \operatorname{Re} s_{l+1} \leq \dots \leq \operatorname{Re} s_n < d. \quad (11.21)$$

При $\rho' \in \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$ (см. (7.3)), операторы $S_0^\pm$ в образах Меллина действуют из $\mathcal{H}_{R,[c,d]}^{\varepsilon,\pi;m}(s_1, \dots, s_n)$ в пространства

$$\mathcal{H}_{R,[c \mp \operatorname{Re} \mu + \varepsilon_1, b]}^{\varepsilon,\pi;m} \left(\begin{matrix} \mp \mu + s_1 - j; \dots; \mp \mu + s_l - j; -j; 1+j \\ j = 0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right),$$

операторы $S_1^\pm$ – из $\mathcal{H}_{R,[c,d]}^{\varepsilon,\pi;m}(s_1, \dots, s_n)$ в пространства

$$\mathcal{H}_{R,[c \mp \operatorname{Re} \mu - \gamma + \varepsilon_1, b_1]}^{\varepsilon,\pi;m} \left(\begin{matrix} \mp \mu + s_1 - \gamma - j; \dots; \mp \mu + s_l - \gamma - j; -j; 1+j \\ j = 0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right),$$

где $\varepsilon_1 > 0$ – любое, b и b_1 – любые действительные числа, большие $(c \mp \operatorname{Re} \mu + \varepsilon_1)$ и $(c \mp \operatorname{Re} \mu - \gamma + \varepsilon_1)$ соответственно. При этом имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{M}[S_0^\pm y]\|_{\mathcal{H}_{R,[c \mp \operatorname{Re} \mu + \varepsilon_1, b]}^{\varepsilon,\pi;m} \left(\begin{matrix} \mp \mu + s_1 - j; \dots; \mp \mu + s_l - j; -j; 1+j \\ j = 0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right)} & \\ \leq \frac{C_m(\varepsilon, \varepsilon_1, b)}{|\rho'|^{\pm \operatorname{Re} \mu}} \|\mathfrak{M}[y]\|_{\mathcal{H}_{R,[c,d]}^{\varepsilon,\pi;m}(s_1, \dots, s_n)}, & \quad (11.22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{M}[S_1^\pm y]\|_{\mathcal{H}_{R,[c \mp \operatorname{Re} \mu - \gamma + \varepsilon_1, b_1]}^{\varepsilon,\pi;m} \left(\begin{matrix} \mp \mu + s_1 - \gamma - j; \dots; \mp \mu + s_l - \gamma - j; -j; 1+j \\ j = 0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right)} & \\ \leq \frac{C_m(\varepsilon, \varepsilon_1, b_1)}{|\rho'|^{\pm \operatorname{Re} \mu + \gamma}} \|\mathfrak{M}[y]\|_{\mathcal{H}_{R,[c,d]}^{\varepsilon,\pi;m}(s_1, \dots, s_n)} & \quad (11.23) \end{aligned}$$

для любых $m = 0, 1, 2, \dots$, где $C_m(\varepsilon, \varepsilon_1, b)$ – различные постоянные, зависящие только от m , ε , ε_1 , b и β .

где $C(h) = \sup_{c \leq \operatorname{Re} s \leq h} |(s-d-1)^n / \prod_{\ell=1}^n (s-s_\ell)|$. Нетрудно проверить, что $\mathcal{R}(s; \rho') \in \mathcal{H}_{R, [-\operatorname{Re} \alpha + \varepsilon_1, b-c]}^{\varepsilon, 0; m}$ при ε_1 и b (или b_1) таких, как в формулировке леммы 11.3, и при любом $m = 0, 1, 2, \dots$ имеют место оценки

$$\|\mathcal{R}\|_{\mathcal{H}_{R, [-\operatorname{Re} \alpha + \varepsilon_1, b-c]}^{\varepsilon, 0; m}} \leq C_m(\varepsilon, \varepsilon_1, b) / |\rho'|^{\operatorname{Re} \alpha}.$$

С помощью этих оценок и леммы 11.1 аналогично лемме 11.2 заключаем, что $(\sin \pi s)^{-1} \mathcal{F}_c(s; \rho') \in \mathcal{H}_{R, [c-\operatorname{Re} \alpha + \varepsilon_1, b]}^{\varepsilon, \pi; m}(0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ при любом $m = 0, 1, 2, \dots$, и справедливы оценки

$$\|(\sin \pi s)^{-1} \mathcal{F}_c(s; \rho')\|_{\mathcal{H}_{R, [c-\operatorname{Re} \alpha + \varepsilon_1, b]}^{\varepsilon, \pi; m}} \left(\begin{matrix} -j; 1+j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right) \leq \frac{1}{|\rho'|^{\operatorname{Re} \alpha}} \tilde{C}_m(\varepsilon, \varepsilon_1, b) \|\mathcal{Y}\|_{\mathcal{H}_{R, [c, d]}^{\varepsilon, \pi; m}}(s_1, \dots, s_n). \quad (11.29)$$

Перейдем к рассмотрению функций $f_\ell(s; \rho')$, определенных в (11.28). Точка $t = \sigma_\ell$ является полюсом порядка k_ℓ функции $\mathcal{Y}(t; \rho')$ как функции t . При $\operatorname{Re} s \geq (1 \mp \operatorname{Re} \mu)/2$, $\alpha = \pm \mu$, или $\alpha = \pm \mu + \gamma$, функция $\Gamma(\alpha + s - t)$ по переменной t будет регулярной в круге $|t - \sigma_\ell| \leq r_\ell$ для $\operatorname{Re} \sigma_\ell < (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$. Подставляя во второе равенство (11.28) выражение (11.25) с разложением функции $\Gamma(\alpha + s - t)$ в ряд по степеням $(t - \sigma_\ell)$, получим

$$f_\ell(s; \rho') = \sum_{k=0}^{k_\ell-1} \frac{\Gamma^{(k)}(\alpha + s - \sigma_\ell)}{k! (\rho')^{\alpha+s}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\sigma_\ell - t|=r_\ell} (\rho')^t (\sigma_\ell - t)^k \mathcal{Y}(t; \rho') dt. \quad (11.30)$$

Оценим функцию $\Gamma^{(k)}(\alpha + s - \sigma_\ell)(\rho')^{-(\alpha+s)}$ в подходящей норме. Для этой функции точки $(\sigma_\ell - \alpha - j)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, являются полюсами, причем порядка $k+1$. Оценим ее при больших s . Дифференцируя почленно асимптотический ряд для $\ln \Gamma(s)$ (что возможно в силу леммы 5.1), при $|\arg s| \leq \pi - \Delta$, $\Delta > 0$, имеем

$$\frac{\Gamma^{(1)}(s)}{\Gamma(s)} \approx H_1(s), \quad H_1(s) = \ln s - \frac{1}{s} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r B_r}{2r s^{2r}},$$

где B_r — числа Бернулли (см. [24]). Обозначим через $H_k(s)$ асимптотический ряд по степеням $\ln s$ и s^{-1} для функции $\Gamma^{(k)}(s)/\Gamma(s)$. Дифференцируя функцию $\Gamma^{(k-1)}(s)/\Gamma(s)$, получим рекуррентное соотношение

$$\frac{\Gamma^{(k)}(s)}{\Gamma(s)} \approx \frac{\Gamma^{(k-1)}(s)}{\Gamma(s)} \frac{\Gamma^{(1)}(s)}{\Gamma(s)} + H_{k-1}^{(1)}(s) \approx H_{k-1}(s) H_1(s) + H_{k-1}^{(1)}(s),$$

откуда заключаем, что в любом секторе $|\arg s| \leq \pi - \Delta$, $\Delta > 0$,

$$\Gamma^{(k)}(s) \sim (\ln s)^k \Gamma(s).$$

В силу этого и формулы Стирлинга, как прежде, получаем для любого $m = 0, 1, 2, \dots$ при $k \leq k_\ell - 1$ оценки

$$\begin{aligned} & \left\| \Gamma^{(k)}(\alpha + s - \sigma_\ell) / (\rho')^{\alpha+s} \right\| \\ & \quad \mathcal{H}_{R, [c - \operatorname{Re} \alpha + \varepsilon_1, b]}^{\varepsilon, 0; m} \left(\overbrace{-\operatorname{Re} \alpha + \sigma_\ell - j; \dots; -\operatorname{Re} \alpha + \sigma_\ell - j}^{k_\ell \text{ раз}} \right)_{j=0, 1, 2, \dots} \\ & \leq C_m(\varepsilon, c, b, \varepsilon_1) / |\rho'|^{\operatorname{Re} \alpha}. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Оценим, наконец, интегралы из формулы (11.30). Очевидно, для $k \geq 0$

$$\begin{aligned} & \left| \oint_{|\sigma_\ell - t| = r_\ell} (\rho')^t (\sigma_\ell - t)^k \mathcal{Y}(t; \rho') dt \right| \leq \\ & \leq 2\pi r_\ell \sup_{|\sigma_\ell - t| = r_\ell} e^{-\frac{\pi}{2} |\operatorname{Im} t|} \left| \frac{(t - d - 1)^{m-n}}{(t - \sigma_\ell)^k} \prod_{j=1}^n (t - s_j) \right|^{-1} \\ & \quad \times \sup_{c \leq \operatorname{Re} t \leq d} e^{\pi |\operatorname{Im} t|} |\rho'|^{\operatorname{Re} t} \left| (t - d - 1)^{m-n} \prod_{j=1}^n (t - s_j) \mathcal{Y}(t; \rho') \right| \\ & \leq C_m(k, \sigma_\ell, r_\ell) \|\mathcal{Y}\|_{\mathcal{H}_{R, [c, d]}^{\varepsilon, \pi; m}(s_1, \dots, s_n)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11.32)$$

Обращаясь к формулам (11.27), (11.30), используя все полученные результаты и оценки (11.29), (11.31) и (11.32), а также неравенство

$$\|\mathcal{Y}\|_{\mathcal{H}_{R, [c, d]}^{\varepsilon, \Delta; m}(s_1, \dots, s_n, s_{n+1}, \dots, s_{n+p})} \leq C(s_{n+1}, \dots, s_{n+p}) \|\mathcal{Y}\|_{\mathcal{H}_{R, [c, d]}^{\varepsilon, \Delta; m}(s_1, \dots, s_n)}, \quad (11.33)$$

справедливое для любой функции $\mathcal{Y}(s) \in \mathcal{H}_{R, [c, d]}^{\varepsilon, \Delta; m}(s_1, \dots, s_n)$, где

$$C(s_{n+1}, \dots, s_{n+p}) = \sup_{c \leq \operatorname{Re} s \leq d} |(s - s_{n+1}) \dots (s - s_{n+p})(s - d - 1)^{-p}|,$$

получаем все утверждения леммы 11.3.

ЗАМЕЧАНИЕ 11.1. Как видно из доказательства леммы 11.3, в случае, когда в круглых скобках при обозначении пространств в левых частях неравенств (11.22) или (11.23) имеют место равенства вида $\mp \mu + s_\alpha - j_\alpha = \mp \mu + s_\beta - j_\beta$ при некоторых $s_\alpha, s_\beta, s_\alpha \neq s_\beta$, и целых $j_\alpha \geq 0, j_\beta \geq 0$, число полюсов в обозначении этих пространств из соображений аддитивности можно уменьшить. А именно, пусть выполнены все условия леммы 11.3. Если в (11.26) для некоторых положительных целых $\alpha_1, \dots, \alpha_t, t \leq q$, таких, что $\operatorname{Re} \sigma_{\alpha_1}, \dots, \operatorname{Re} \sigma_{\alpha_t} < (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$, найдутся такие целые неотрицательные числа $j_{\alpha_1}, \dots, j_{\alpha_t}$, что выполнены равенства

$$\sigma_{\alpha_1} - j_{\alpha_1} = \sigma_{\alpha_2} - j_{\alpha_2} = \dots = \sigma_{\alpha_t} - j_{\alpha_t},$$

то в круглых скобках для обозначений пространств в левых частях оценок (11.22) и (11.23) следует исключить $[k_{\alpha_1} + \dots + k_{\alpha_t} - \max(k_{\alpha_1}, \dots, k_{\alpha_t})]$ чисел $\mp \mu + \sigma_{\alpha_1} - j_{\alpha_1}$ и $\mp \mu + \sigma_{\alpha_1} - \gamma - j_{\alpha_1}$ соответственно, оставив только $\max(k_{\alpha_1}, \dots, k_{\alpha_t})$ из них.

С помощью полученных результатов нетрудно установить оценки $\mathfrak{M}[Q_r^\pm[1]](s)$ в соответствующих нормах, а также описание действия операторов $Q_1^\pm$ и $Q_r^\pm$ в пространствах Меллина.

ЛЕММА 11.4. При $|\beta| \neq |\delta/\gamma \pm \pi/2|$ для любого $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$, для любых $0 < \theta < \theta^* = \min(\gamma, 1 - \gamma)$ и $m = 0, 1, 2, \dots$ функции $\mathfrak{M}[Q_r^\pm[1]](s)$ принадлежат пространствам $\mathcal{H}_{R, [\max(0, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{smallmatrix} \pm \mu - \gamma, \pm \mu; j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{smallmatrix} \right)$ при любом b , $b \geq \max(0, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta$, и при этом справедливы оценки

$$\|\mathfrak{M}[Q_r^\pm[1]]\|_{\mathcal{H}_{R, [\max(0, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{smallmatrix} \pm \mu - \gamma, \pm \mu; j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{smallmatrix} \right)} \leq C_m(\varepsilon, \theta, b)/|\rho'|^{\gamma+\theta},$$

где постоянные $C_m(\varepsilon, \theta, b)$ зависят только от m , ε , θ , b и β .

Эта лемма доказывается оценкой всех слагаемых правой части равенства

$$Q_r^\pm[1] = S_1^\mp S_1^\pm[1] + S_r^\mp (S_0^\pm + S_1^\pm)[1] + (S_0^\mp + S_1^\mp + S_r^\mp) S_r^\pm[1]$$

с помощью оценок (11.3), (11.4), (11.13), леммы 11.2, леммы 11.3 и замечания 11.1, а также неравенств (11.33).

ЛЕММА 11.5. Пусть $s_1, \dots, s_n$ — комплексные числа, удовлетворяющие (11.21). При $|\beta| = |\delta/\gamma \pm \pi/2|$, $\rho' \in \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$, операторы $Q_r^\pm$ в образах Меллина действуют ограниченно из пространства $\mathcal{H}_{R, [c, d]}^{\varepsilon, \pi; m}(s_1, \dots, s_n)$ в пространства

$$\mathcal{H}_{R, [\max(\operatorname{Re} s_l, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{smallmatrix} \mp \mu - \gamma, \pm \mu; -j; 1+j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{smallmatrix} \right),$$

где θ и b — любые числа, удовлетворяющие неравенствам $0 < \theta < \theta^* = \min(\gamma, 1 - \gamma)$, $b \geq \max(\operatorname{Re} s_l, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta$, $m = 0, 1, 2, \dots$. При этом имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{M}[Q_r^\pm y]\|_{\mathcal{H}_{R, [\max(\operatorname{Re} s_l, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{smallmatrix} \pm \mu - \gamma, \pm \mu; -j; 1+j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{smallmatrix} \right)} &\leq \\ &\leq \frac{C_m(\varepsilon, \theta, b)}{|\rho'|^{\gamma+\theta}} \|\mathfrak{M}[y]\|_{\mathcal{H}_{R, [c, d]}^{\varepsilon, \pi; m}(s_1, \dots, s_n)}, \end{aligned}$$

где $C_m(\varepsilon, \theta, b)$ — постоянные, зависящие только от m , ε , θ , b и β .

ЛЕММА 11.6. В условиях леммы 11.5 операторы $Q_1^\pm$ в образах Меллина действуют ограниченно из пространства $\mathcal{H}_{R, [c, d]}^{\varepsilon, \pi; m}(s_1, \dots, s_n)$ в пространства $\mathcal{H}_{R, [c - \gamma + \varepsilon_1, b]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{smallmatrix} s_1 - \gamma - j; \dots; s_l - \gamma - j; \pm \mu - \gamma - j; \pm \mu - j; -j; 1+j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{smallmatrix} \right)$ при любых $\varepsilon_1 > 0$, $b \geq c - \gamma + \varepsilon_1$, $m = 0, 1, 2, \dots$. При этом справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{M}[Q_1^\pm y]\|_{\mathcal{H}_{R, [c - \gamma + \varepsilon_1, b]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{smallmatrix} s_1 - \gamma - j; \dots; s_l - \gamma - j; \pm \mu - \gamma - j; \pm \mu - j; -j; 1+j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{smallmatrix} \right)} &\leq \\ &\leq \frac{C_m(\varepsilon, \varepsilon_1, b)}{|\rho'|^\gamma} \|\mathfrak{M}[y]\|_{\mathcal{H}_{R, [c, d]}^{\varepsilon, \pi; m}(s_1, \dots, s_n)}, \end{aligned}$$

где постоянные $C_m(\varepsilon, \varepsilon_1, b)$ зависят только от m , ε , ε_1 , b и β .

Леммы 11.5 и 11.6 можно доказать, оценивая каждое слагаемое правых частей соответствующих равенств (7.16) с применением леммы 11.2, леммы 11.3 и замечания 11.1.

Перейдем теперь к исследованию действия операторов $(I - Q_0^\pm)^{-1}$ в образах Меллина.

ЛЕММА 11.7. Пусть комплексные числа $s_1, \dots, s_n$ удовлетворяют (11.21) и функция $\mathfrak{M}[y](s)$, определенная на прямой $\operatorname{Re} s = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$, допускает аналитическое продолжение $\mathfrak{M}[y](s) \in \mathcal{H}_{R,[c,d]}^{\varepsilon, \pi; m}(s_1, \dots, s_n)$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Разобьем множество $s_1, \dots, s_n$ на подгруппы (11.26) равных чисел и через $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ обозначим те и только те, для которых $\operatorname{Re} \sigma_l < (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$. Обозначим, кроме того, через δ_λ^σ континуальный символ Кронекера

$$\delta_\lambda^\sigma = \begin{cases} 1 & \text{при } \sigma = \lambda, \\ 0 & \text{при } \sigma \neq \lambda \end{cases}$$

для любых комплексных σ и λ .

При $\rho' \in \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$, для любого $m = 0, 1, 2, \dots$ операторы $(I - Q_0^\pm)^{-1}$ в образах Меллина действуют ограниченно из пространства $\mathcal{H}_{R,[c,d]}^{\varepsilon, \pi; m}(s_1, \dots, s_n)$ в пространства

$$\mathcal{H}_{R,[c+\varepsilon_1,d]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{array}{c} \pm\mu - \frac{\gamma}{2} - j; \pm\mu + \frac{\gamma}{2} - j; \quad \overbrace{\sigma_1, \dots, \sigma_1}^{k_1 - \delta_{\pm\mu-j}^{\sigma_1} - \delta_{-j}^{\sigma_1}}, \dots, \overbrace{\sigma_p, \dots, \sigma_p}^{k_p - \delta_{\pm\mu-j}^{\sigma_p} - \delta_{-j}^{\sigma_p}}, \overbrace{s_{l+1}, \dots, s_n, 1, 2, \dots}^{j=0,1,2,\dots} \end{array} \right), \quad (11.34)$$

где $\overbrace{s_{l+1}, \dots, s_n, 1, 2, \dots}$ — последовательность, получаемая из последовательности $s_{l+1}, \dots, s_n, 1, 2, \dots$ удалением из подпоследовательности $1, 2, \dots$ тех целых чисел, которые совпадают с какими-нибудь из $s_{l+1}, \dots, s_n$; ε_1 — любое, удовлетворяющее неравенствам $\varepsilon_1 > 0$, $c + \varepsilon_1 \leq d$. При этом нормы функций $\mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1}y](s)$ в соответствующих пространствах (11.34) оцениваются величинами

$$C_m(\varepsilon, \varepsilon_1) \|\mathfrak{M}[y]\|_{\mathcal{H}_{R,[c,d]}^{\varepsilon, \pi; m}(s_1, \dots, s_n)},$$

где постоянные $C_m(\varepsilon, \varepsilon_1)$ зависят только от $m, \varepsilon, \varepsilon_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим, как и выше, $\mathcal{Y}(s; \rho') = \mathfrak{M}[y](s)$. Используя в (9.21) (с соответствующими переобозначениями) формулу Сохоцкого–Племеля о предельном значении интеграла типа Коши слева на прямой $\operatorname{Re} t = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$ и деформируя контур интегрирования до прямой $\operatorname{Re} t = c$, получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1}y](s) &= \mathcal{Y}(s; \rho') + \frac{(\overset{\Pi}{D}(s))^{-1} - (\overset{\Pi}{D}(s))^{-1}}{\Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1 \pm \operatorname{Re} \mu}{2} - i\infty}^{\frac{1 \pm \operatorname{Re} \mu}{2} + i\infty} \frac{\overset{\Pi}{D}(t)\Gamma(1 \pm \mu - t)(\rho')^t}{t - s} \mathcal{Y}(t; \rho') dt \right)_\pm \\ &= \mathcal{Y}(s; \rho') + \frac{(\overset{\Pi}{D}(s))^{-1} - (\overset{\Pi}{D}(s))^{-1}}{\Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\overset{\Pi}{D}(t)\Gamma(1 \pm \mu - t)(\rho')^t}{t - s} \mathcal{Y}(t; \rho') dt \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\operatorname{Re} t=c}^{\frac{1 \pm \operatorname{Re} \mu}{2}} \operatorname{res} \left[\frac{\overset{\Pi}{D}(t)\Gamma(1 \pm \mu - t)(\rho')^t}{t - s} \mathcal{Y}(t; \rho') \right] \right\}. \quad (11.35) \end{aligned}$$

Заметим, что, так как $(1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2 > 0$, функция $\overset{\text{I}}{D}(t)\Gamma(1 \pm \mu - t)(\rho')^t/(t - s)$ как функция t является аналитической слева от прямой $\operatorname{Re} t = (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$. Воспользовавшись (9.24) и (9.18), а также формулой дополнения для гамма-функции, преобразуем множитель, стоящий перед фигурными скобками в (11.35), к виду

$$\begin{aligned} & ((\overset{\text{I}}{D}(s))^{-1} - (\overset{\text{II}}{D}(s))^{-1})/\Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s \\ &= \pi^{-2}(-1)^{q_+ - q_- + s_+ - s_-} \sin \pi(\nu - \gamma/2) \sin \pi(\nu + \gamma/2) \\ & \quad \times \Gamma((\mp \mu - \hat{\gamma})/2 + s) \Gamma((\mp \mu + \hat{\gamma})/2 + s) \Gamma(1 - s)/(\rho')^s. \end{aligned} \quad (11.36)$$

Оценим сначала интеграл в последнем представлении (11.35). В силу определения (11.2) имеем

$$|\mathcal{Y}(t; \rho')| \leq \frac{C_m(s_1, \dots, s_n) e^{-\pi |\operatorname{Im} t|}}{|\rho'|^{\operatorname{Re} t} ((\operatorname{Im} t)^2 + 1)^{\frac{m}{2}}} \|\mathcal{Y}\|_{\mathcal{H}_{R,[c,d]}^{\varepsilon, \pi; m}(s_1, \dots, s_n)}, \quad \operatorname{Re} t = c, \quad (11.37)$$

и, используя формулу Стирлинга, получаем следующую оценку при $\rho' \in \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$, $\operatorname{Re} s \geq c + \varepsilon_1$:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\overset{\text{I}}{D}(t)\Gamma(1 \pm \mu - t)(\rho')^t}{t - s} \mathcal{Y}(t; \rho') dt \right| \leq \\ & \leq C_m(\varepsilon_1, s_1, \dots, s_n) \|\mathcal{Y}\|_{\mathcal{H}_{R,[c,d]}^{\varepsilon, \pi; m}(s_1, \dots, s_n)}. \end{aligned}$$

При этом нетрудно проверить, используя оценку (11.37), что оцениваемый интеграл является голоморфной функцией двух переменных s, ρ' на множестве $\{s: \operatorname{Re} s > c + \varepsilon_1\} \times \Sigma_R^\varepsilon$.

Множитель (11.36) принадлежит пространствам

$$\mathcal{H}_{R,[c+\varepsilon_1,d]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{array}{c} \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2} - j; \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2} - j; 1 + j \\ j = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right),$$

и имеют место оценки

$$\left\| \frac{(\overset{\text{I}}{D}(s))^{-1} - (\overset{\text{II}}{D}(s))^{-1}}{\Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s} \right\|_{\mathcal{H}_{R,[c+\varepsilon_1,d]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{array}{c} \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2} - j; \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2} - j; 1 + j \\ j = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right)} \leq C_m(\varepsilon, \varepsilon_1, d).$$

В итоге получаем, что произведение интеграла, стоящего в фигурных скобках формулы (11.35), и функции (11.36) принадлежит соответствующему пространству типа (11.1), и справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{(\overset{\text{I}}{D}(s))^{-1} - (\overset{\text{II}}{D}(s))^{-1}}{\Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s} \right. \\ & \quad \times \left. \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\overset{\text{I}}{D}(t)\Gamma(1 \pm \mu - t)(\rho')^t}{t - s} \mathcal{Y}(t; \rho') dt \right\|_{\mathcal{H}_{R,[c+\varepsilon_1,d]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{array}{c} \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2} - j; \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2} - j; 1 + j \\ j = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right)} \\ & \leq C_m(\varepsilon, \varepsilon_1) \|\mathcal{Y}\|_{\mathcal{H}_{R,[c,d]}^{\varepsilon, \pi; m}(s_1, \dots, s_n)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11.38)$$

Теперь оценим оставшуюся часть в последнем представлении (11.35):

$$\mathcal{E}(s; \rho') = \mathcal{E}_1(s; \rho') + \mathcal{E}_2(s; \rho'), \quad (11.39)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(s; \rho') &= \frac{1}{\bar{D}(s)\Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s} \left\{ \bar{D}(s)\Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s \mathcal{Y}(s; \rho') \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{t=c \\ \text{Re } t=c}}^{\frac{1+\text{Re } \mu}{2}} \text{res} \left[\frac{\bar{D}(t)\Gamma(1 \pm \mu - t)(\rho')^t}{t-s} \mathcal{Y}(t; \rho') \right] \right\}, \\ \mathcal{E}_2(s; \rho') &= -\frac{1}{\bar{D}(s)\Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s} \\ &\quad \times \sum_{\substack{t=c \\ \text{Re } t=c}}^{\frac{1+\text{Re } \mu}{2}} \text{res} \left[\frac{\bar{D}(t)\Gamma(1 \pm \mu - t)(\rho')^t}{t-s} \mathcal{Y}(t; \rho') \right]. \end{aligned} \quad (11.40)$$

Покажем, что $\mathcal{E}_1(s; \rho')$ как функция s не имеет особенностей в полосе $c \leq \text{Re } s \leq (1 \pm \text{Re } \mu)/2$. Действительно, функция $\bar{D}(s)\Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s$ является аналитической функцией s и не обращается в нуль в этой полосе. Далее, предположим, что некоторая функция $\mathcal{F}(s)$ аналитична в этой полосе, за исключением точек $\sigma_1, \dots, \sigma_p$, которые являются ее полюсами кратностей $k_1, \dots, k_p$ соответственно. Покажем, что функция, аналогичная функции, стоящей в фигурных скобках в (11.40), не имеет особенностей в полосе $c \leq \text{Re } s \leq (1 \pm \text{Re } \mu)/2$. В самом деле, при $\text{Re } s = (1 \pm \text{Re } \mu)/2$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(s) + \sum_{\substack{t=c \\ \text{Re } t=c}}^{\frac{1+\text{Re } \mu}{2}} \text{res} \left\{ \frac{\mathcal{F}(t)}{t-s} \right\} &= \mathcal{F}(s) - \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{k_j-1} \frac{1}{(s - \sigma_j)^{k+1}} \frac{1}{2\pi i} \\ &\quad \times \oint_{|t-\sigma_j|=r_j} \mathcal{F}(t)(t - \sigma_j)^k dt, \end{aligned} \quad (11.41)$$

где $r_j > 0$, $j = 1, \dots, p$, настолько малы, что круги $|t - \sigma_j| \leq r_j$ не пересекаются и лежат в полосе $c < \text{Re } t < (1 \pm \text{Re } \mu)/2$. Нетрудно видеть, что правая часть (11.41) не имеет особенностей в точках $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ и, очевидно, регулярна в остальных точках рассматриваемой полосы.

Таким образом, в полосе $c \leq \text{Re } s \leq (1 \pm \text{Re } \mu)/2$ все особенности функции (11.39) являются особенностями функции $\mathcal{E}_2(s; \rho')$, которую аналогично (11.41), воспользовавшись также формулами (9.18) и формулой дополнения для гамма-функции, приводим к следующему виду:

$$\mathcal{E}_2(s; \rho') = \frac{\sin \pi(\mp \mu + s)\Gamma(\frac{\mp \mu + \hat{\gamma}}{2} + s)\Gamma(\frac{\mp \mu - \hat{\gamma}}{2} + s)}{i2\pi^2\Gamma(s)(\rho')^s} \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{k_j-1} (s - \sigma_j)^{-(k+1)} I_j^k, \quad (11.42)$$

где

$$I_j^k = \oint_{|t-\sigma_j|=r_j} \overset{\Pi}{D}(t) \Gamma(1 \pm \mu - t) (\rho')^t (t - \sigma_j)^k \mathcal{Y}(t; \rho') dt. \quad (11.43)$$

Полюсами функции $\mathcal{E}_2(s; \rho')$ (как функции s) являются точки $((\pm\mu - \hat{\gamma})/2 - j)$, $((\pm\mu + \hat{\gamma})/2 - j)$, $j = 0, 1, 2, \dots$, а также точки $\sigma_1, \dots, \sigma_p$, причем σ_α , $\alpha = 1, \dots, p$, имеют кратности $k_\alpha - \delta_{\pm\mu-j}^{\sigma_\alpha} - \delta_{-j}^{\sigma_\alpha}$, $j = 0, 1, 2, \dots$ (отметим, что $\operatorname{Re}(1 \pm \mu) > (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$).

Наконец, в полосе $(1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2 \leq \operatorname{Re} s \leq d$ функция $\mathcal{Y}(s; \rho')$ имеет полюсы $s_{l+1}, \dots, s_n$, а у оставшейся части в последнем представлении (11.35) в силу (11.36) и неравенства $\operatorname{Re}(\pm\mu + \hat{\gamma})/2 < (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2$ простыми полюсами являются точки $1, 2, \dots$, поскольку выражение в фигурных скобках из (11.35) представляет собой регулярную функцию переменной s в полосе $(1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2 \leq \operatorname{Re} s \leq d$ (в чем легко убедиться, представляя сумму вычетов в фигурных скобках из (11.35) в таком же виде, как в (11.41) или (11.42)).

Перейдем к оценке функции $\mathcal{E}(s; \rho')$ по норме пространства (11.34). Для сокращения записи обозначим через $\tau_1, \dots, \tau_N$ подмножество всех тех чисел из множества

$$\begin{aligned} \frac{\pm\mu - \hat{\gamma}}{2} - j; \frac{\pm\mu + \hat{\gamma}}{2} - j; \overbrace{\sigma_1, \dots, \sigma_1}^{k_1 - \delta_{\pm\mu-j}^{\sigma_1} - \delta_{-j}^{\sigma_1}}, \dots, \overbrace{\sigma_p, \dots, \sigma_p}^{k_p - \delta_{\pm\mu-j}^{\sigma_p} - \delta_{-j}^{\sigma_p}}, s_{l+1}, \dots, s_n, 1, 2, \dots, \\ j = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (11.44)$$

которые лежат в полосе $\Pi_{c,d}$ (повторенные, естественно, столько раз, сколько раз они встречаются во множестве (11.44)). Итак, оценим $\|\mathcal{E}\|_{\mathcal{H}_{R,[c,d]}^{\varepsilon,\tau;m}(\tau_1, \dots, \tau_N)}$.

Разобьем полосу $c \leq \operatorname{Re} s \leq d$ на подмножества

$$\begin{aligned} Q_A^\Pi &= \{s: c \leq \operatorname{Re} s \leq (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2, |\operatorname{Im} s| \leq A\}, \\ Q_A^\Pi &= \{s: (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2 \leq \operatorname{Re} s \leq d\} \cup \{s: c \leq \operatorname{Re} s \leq (1 \pm \operatorname{Re} \mu)/2, |\operatorname{Im} s| \geq A\} \end{aligned}$$

и выберем A настолько большим, чтобы $A \geq |\operatorname{Im} \tau_j| + 1 \quad \forall j = 1, \dots, N$. Обозначим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}\|_{\mathcal{H}_{R,Q_A^\Pi}^{\varepsilon,\Delta;m}(\tau_1, \dots, \tau_N)} &= \sup_{s \in Q_A^\Pi, \rho' \in \overline{\Sigma}_R^\varepsilon} e^{\Delta |\operatorname{Im} s|} |\rho'|^{\operatorname{Re} s} \\ &\times \left| (s - d - 1)^{m-N} \prod_{i=1}^N (s - \tau_i) \mathcal{E}(s; \rho') \right|, \end{aligned} \quad (11.45)$$

где Q_A^Π означает либо Q_A^Π , либо Q_A^Π , $\Delta \geq 0$. Будем проводить оценки отдельно в каждом подмножестве Q_A^Π и Q_A^Π . Представим теперь

$$\mathcal{E}(s; \rho') = \mathcal{Y}(s; \rho') + \mathcal{E}_3(s; \rho'), \quad (11.46)$$

где

$$\mathcal{E}_3(s; \rho') = \frac{(\overset{\Pi}{D}(s))^{-1} - (\overset{\Pi}{D}(s))^{-1}}{\Gamma(1 \pm \mu - s)(\rho')^s} \sum_{\operatorname{Re} t=c}^{\frac{1 \pm \operatorname{Re} \mu}{2}} \operatorname{res} \left[\frac{\overset{\Pi}{D}(t) \Gamma(1 \pm \mu - t) (\rho')^t}{t - s} \mathcal{Y}(t; \rho') \right],$$

и, как было установлено выше,

$$\sum_{\substack{1 \pm \operatorname{Re} \mu \\ 2 \\ \operatorname{Re} t = c}} \operatorname{res} \left[\frac{D(t) \Gamma(1 \pm \mu - t) (\rho')^t}{t - s} \mathcal{Y}(t; \rho') \right] = (2\pi i)^{-1} \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{k_j-1} (s - \sigma_j)^{-(k+1)} I_j^k. \quad (11.47)$$

Оценим сначала интегралы из формулы (11.43). Имеем

$$\begin{aligned} |I_j^k| &\leq \oint_{|t-\sigma_j|=r_j} e^{-\frac{\pi}{2} |\operatorname{Im} t|} \left| \frac{D(t) \Gamma(1 \pm \mu - t) (t - \sigma_j)^k (t - d - 1)^{n-m}}{\prod_{\iota=1}^n (t - s_\iota)} \right| \\ &\quad \times e^{\pi |\operatorname{Im} t|} |\rho'|^{\operatorname{Re} t} \left| (t - d - 1)^{m-n} \prod_{\iota=1}^n (t - s_\iota) \mathcal{Y}(t; \rho') \right| |dt| \\ &\leq C_m(j, k) \|\mathcal{Y}\|_{\mathcal{H}_{R, [c, d]}^{\varepsilon, \pi; m}(s_1, \dots, s_n)}, \quad j = 1, \dots, p, \end{aligned}$$

причем оцениваемые интегралы будут регулярными функциями переменной ρ' в Σ_R^ε .

Используя (11.46), (11.47), (11.36) и предыдущую оценку, имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}\|_{\mathcal{H}_{R, Q_A^n}^{\varepsilon, \pi; m}(\tau_1, \dots, \tau_N)} &\leq \|\mathcal{Y}\|_{\mathcal{H}_{R, Q_A^n}^{\varepsilon, \pi; m}(\tau_1, \dots, \tau_N)} + \|\mathcal{E}_3\|_{\mathcal{H}_{R, Q_A^n}^{\varepsilon, \pi; m}(\tau_1, \dots, \tau_N)} \\ &\leq \frac{1}{C(A; \tau_1, \dots, \tau_N)} \|\mathcal{Y}\|_{\mathcal{H}_{R, [c, d]}^{\varepsilon, \pi; m}(s_1, \dots, s_N)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{k_j-1} C_m^n(\varepsilon, k, j; \tau_1, \dots, \tau_N) |I_j^k| \\ &\leq \frac{2}{C_m(A; \varepsilon; \tau_1, \dots, \tau_N)} \|\mathcal{Y}\|_{\mathcal{H}_{R, [c, d]}^{\varepsilon, \pi; m}(s_1, \dots, s_N)}, \end{aligned} \quad (11.48)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{1}{C(A; \tau_1, \dots, \tau_N)} &= \sup_{s \in Q_A^n} \left| (s - d - 1)^{n-N} \prod_{\iota=1}^N (s - \tau_\iota) / \prod_{\iota=1}^n (s - s_\iota) \right|, \\ C_m^n(\varepsilon, k, j; \tau_1, \dots, \tau_N) &= \frac{|\sin \pi(\nu - \frac{\gamma}{2}) \sin \pi(\nu + \frac{\gamma}{2})|}{2\pi^3} \\ &\quad \times \left\| \frac{\Gamma(\frac{\mp \mu + \hat{\gamma}}{2} + s) \Gamma(\frac{\mp \mu - \hat{\gamma}}{2} + s) \Gamma(1 - s)}{(\rho')^s (s - \sigma_j)^{k+1}} \right\|_{\mathcal{H}_{R, Q_A^n}^{\varepsilon, \pi; m}(\tau_1, \dots, \tau_N)} \end{aligned} \quad (11.49)$$

— константы, конечные в силу выбора Q_A^n .

Оценим $\mathcal{E}(s; \rho')$ по множеству Q_A^n . Как было показано выше, у функции $\mathcal{E}(s; \rho')$ особенностями в полосе $c \leq \operatorname{Re} s \leq d$ являются только полюсы $\tau_1, \dots, \tau_N$. Следовательно, функции

$$e^{\mp i\pi s} (\rho')^s (s - d - 1)^{m-N} \prod_{\iota=1}^N (s - \tau_\iota) \mathcal{E}(s; \rho')$$

как функции s являются аналитическими без особенностей во внутренности Q_A^η и по принципу максимума их модули достигают (при фиксированном ρ') своих наибольших значений на границе ∂Q_A^η области Q_A^η . Поэтому, пользуясь определениями (11.45), (11.46), соотношениями (11.47), (11.36), некоторыми очевидными неравенствами и неравенством треугольника, можно получить оценку

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{E}\|_{\mathcal{H}_{R,Q_A^\eta}^{\varepsilon,\pi;m}(\tau_1,\dots,\tau_N)} &\leq \sum_{\pm} \|e^{\mp i\pi s} \mathcal{E}(s; \rho')\|_{\mathcal{H}_{R,Q_A^\eta}^{\varepsilon,\pi;m}(\tau_1,\dots,\tau_N)} \\
 &\leq e^{\frac{\pi}{2}A} \sup_{s \in \partial Q_A^\eta, \rho' \in \bar{\Sigma}_R^\varepsilon} \left| e^{\mp i\pi s} (\rho')^s (s-d-1)^{m-N} \prod_{\iota=1}^N (s-\tau_\iota) \mathcal{E}(s; \rho') \right| \\
 &\leq e^{\pi A} \overset{1}{C}(A; \tau_1, \dots, \tau_N) \sum_{\pm} \|e^{\mp i\pi s} \mathcal{Y}(s; \rho')\|_{\mathcal{H}_{R,[c,d]}^{\varepsilon,\pi;m}(s_1,\dots,s_N)} \\
 &\quad + e^{\frac{\pi}{2}A} \sum_{j=1}^p \sum_{k=0}^{k_j-1} C_m^\eta(A; \varepsilon, k, j; \tau_1, \dots, \tau_N) |I_j^k| \\
 &\leq \overset{3}{C}_m(A; \varepsilon; \tau_1, \dots, \tau_N) \|\mathcal{Y}\|_{\mathcal{H}_{R,[c,d]}^{\varepsilon,\pi;m}(s_1,\dots,s_N)}, \tag{11.50}
 \end{aligned}$$

где $\overset{1}{C}(A; \tau_1, \dots, \tau_N)$ – постоянная из (11.49), а

$$\begin{aligned}
 C_m^\eta(A; \varepsilon, k, j; \tau_1, \dots, \tau_N) &= 2^{-1} \pi^{-3} |\sin \pi(\nu - \gamma/2) \sin \pi(\nu + \gamma/2)| \\
 &\quad \times \sum_{\pm} \sup_{s \in \partial Q_A^\eta} \left| e^{\mp i\pi s} (s - \sigma_j)^{-(k+1)} (s-d-1)^{m-N} \right. \\
 &\quad \times \left. \prod_{\iota=1}^N (s - \tau_\iota) \Gamma((\mp)\mu - \hat{\gamma})/2 + s) \Gamma((\mp)\mu + \hat{\gamma})/2 + s) \Gamma(1-s) \right|.
 \end{aligned}$$

В последнем выражении знак $(\mp)$ берется соответствующим индексом $\pm$ оператора $(I - Q_0^\pm)^{-1}$ и не учитывается при суммировании $\sum_{\pm}$. Здесь существенно используется то, что полюсы $\tau_1, \dots, \tau_N$ не попадают на ∂Q_A^η .

Наконец, используя при оценке последнего выражения в (11.35) неравенства (11.38), (11.48) и (11.50), получаем оценки леммы 11.7, что и завершает ее доказательство.

Оценим теперь функции $\mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} S_\Delta^\mp[1]](s)$, $\mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} Q_\Delta^\mp[1]](s)$, а также опишем действие операторов $(I - Q_0^\pm)^{-1} Q_\Delta^\pm$ в соответствующих пространствах типа (11.1).

ЛЕММА 11.8. *При $|\beta| \neq |\delta/\gamma \pm \pi/2|$ функции $\mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} S_\Delta^\mp[1]](s)$ и $\mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} Q_\Delta^\pm[1]](s)$ принадлежат для любого $m = 0, 1, 2, \dots$ банаховым пространствам*

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_{R, [\pm \operatorname{Re} \mu - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m} &\left(\begin{array}{c} \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2} - j; \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2} - j; \pm \mu - \gamma; 1 + j \\ j = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right), \\
 \mathcal{H}_{R, [\max(0, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m} &\left(\begin{array}{c} \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2} - j; \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2} - j; \pm \mu - \gamma; -\gamma; 1 + j \\ j = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

соответственно, где $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$, θ и b – любые, $0 < \theta < \theta^* = \min(\gamma, 1 - \gamma)$, $b > \pm \operatorname{Re} \mu - \gamma - \theta$ и $b \geq \max(0, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta$ соответственно. При этом имеют место оценки

$$\begin{aligned} & \|\mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} S_\Delta^\mp[1]]\|_{\mathcal{H}_{R, [\pm \operatorname{Re} \mu - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m}} \left(\begin{array}{c} \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2} - j; \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2} - j; \pm \mu - \gamma; 1 + j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{array} \right) \\ & \leq C_m(\varepsilon, \theta, b) / |\rho'|^{\mp \operatorname{Re} \mu + \gamma}, \\ & \|\mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} Q_\Delta^\pm[1]]\|_{\mathcal{H}_{R, [\max(0, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m}} \left(\begin{array}{c} \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2} - j; \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2} - j; \pm \mu - \gamma; -\gamma; 1 + j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{array} \right) \\ & \leq C_m(\varepsilon, \theta, b) / |\rho'|^\gamma, \end{aligned} \quad (11.51)$$

где $C_m(\varepsilon, \theta, b)$ – некоторые постоянные, зависящие только от m , ε , b и β .

Эта лемма доказывается при использовании представлений (9.28) и (9.31), оценок (11.4), (11.6), лемм 11.4 и 11.7, а также неравенств вида (11.33).

ЛЕММА 11.9. Пусть $|\beta| \neq |\delta/\gamma \pm \pi/2|$, $s_1, \dots, s_n$ – комплексные числа, удовлетворяющие (11.21), $\rho' \in \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$. Тогда операторы $(I - Q_0^\pm)^{-1} Q_\Delta^\pm$ в образах Меллина действует ограниченно из пространства $\mathcal{H}_{R, [c, d]}^{\varepsilon, \pi; m}(s_1, \dots, s_n)$ в пространства

$$\mathcal{H}_{R, [\max(\operatorname{Re} s_l, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{array}{c} \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2} - j; \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2} - j; s_1 - \gamma, \dots, s_l - \gamma; \pm \mu - \gamma; 1 + j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

при любом $m = 0, 1, 2, \dots$, любых θ и b , удовлетворяющих неравенствам $0 < \theta < \theta^* = \min(\gamma, 1 - \gamma)$, $b \geq \max(\operatorname{Re} s_l, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta$, при этом нормы функций $\mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} Q_\Delta^\pm[y]](s)$ в соответствующих последних пространствах оцениваются величинами

$$\frac{\hat{C}_m(\varepsilon, \theta, b)}{|\rho'|^\gamma} \|\mathfrak{M}[y]\|_{\mathcal{H}_{R, [c, d]}^{\varepsilon, \pi; m}(s_1, \dots, s_n)}, \quad (11.52)$$

где $\hat{C}_m(\varepsilon, \theta, b)$ – постоянные, зависящие только от m , ε , θ , b , β и, конечно, от $s_1, \dots, s_n$.

Эта лемма доказывается с помощью лемм 11.5–11.7.

§ 12. Решение граничной задачи Гильберта (3.17) при больших $|\rho'|$ и его асимптотика

Исследуем сходимость рядов (9.30) в образах Меллина в пространствах типа (11.1). Пусть

$$y_\alpha^\pm = y_\alpha^0 \pm \frac{\Delta}{y_\alpha^\pm}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (12.1)$$

где y_α^0 определены в (9.32), а соответствующие выражения для $\frac{\Delta}{y_\alpha^\pm}$ могут быть найдены из (9.30).

ЛЕММА 12.1. При $|\beta| \neq |\delta/\gamma \pm \pi/2|$ для любых ε , θ , b и m , $0 < \varepsilon < \pi/2$, $0 < \theta < \theta^* = \min(\gamma, 1 - \gamma)$, $b \geq \max\{0, (\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma})/2, \pm \operatorname{Re} \mu\} - \gamma - \theta$,

$m = 0, 1, 2, \dots$, существует столь большое $R(m, \varepsilon, \theta, b)$, зависящее от m , ε , θ , b и β , что при $R \in R(m, \varepsilon, \theta, b)$ функции $\mathfrak{M}[y_{(3\mp 1)/2}^{\Delta \pm}](s)$ принадлежат пространствам

$$\mathcal{H}_{R, [\max(0, \frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2}, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{matrix} \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2} - \gamma, \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2} - \gamma, \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2}, \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2}, \pm \mu - \gamma, -\gamma; 1+j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right), \quad (12.2_1)$$

а функции $\mathfrak{M}[y_{(3\pm 1)/2}^{\Delta \pm}](s)$ – пространствам

$$\mathcal{H}_{R, [\max(\frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2}, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{matrix} \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2} - \gamma, \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2} - \gamma, \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2}, \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2}, \pm \mu - \gamma; 1+j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right). \quad (12.2_2)$$

При этом нормы этих функций в пространствах (12.2₁) и (12.2₂) соответственно оцениваются величинами

$$\tilde{C}_m(\varepsilon, \theta, b)/|\rho'|^\gamma, \quad \tilde{C}_m(\varepsilon, \theta, b)/|\rho'|^{\mp \operatorname{Re} \mu + \gamma}, \quad (12.3)$$

где постоянные $\tilde{C}_m(\varepsilon, \theta, b)$ зависят только от m , ε , θ , b и β . Ряды (9.30) в образах Меллина сходятся нормально в соответствующих банаховых пространствах (12.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем справедливость, например, первой оценки в (12.3). Пользуясь леммой 11.9, оценками (11.8) и вторым неравенством в (11.51), для любого $R > 0$ получаем, что нормы функций $\mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} Q_\Delta^\pm (I - Q_0^\pm)^{-1} \times Q_0^\pm[1]](s)$ в пространствах

$$\mathcal{H}_{R, [\max(0, \frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2}, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{matrix} \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2} - \gamma, \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2} - \gamma, \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2}, \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2}, \pm \mu - \gamma, -\gamma; 1+j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right)$$

оцениваются величинами

$$\frac{\hat{C}_m(\varepsilon, \theta, b)}{|\rho'|^\gamma} \|\mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} Q_0^\pm[1]]\|_{\mathcal{H}_{R, [\max(0, \frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2}, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{matrix} \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2}, \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2}; j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right)};$$

при $n \geq 2$ нормы функций $\mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} Q_\Delta^\pm]^n (I - Q_0^\pm)^{-1} Q_0^\pm[1]](s)$ в пространствах

$$\mathcal{H}_{R, [\max(0, \frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2}, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{matrix} \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2} - \gamma, \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2} - \gamma, \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2}, \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2}, \pm \mu - \gamma; 1+j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right)$$

оцениваются величинами

$$\left(\frac{\hat{C}_m(\varepsilon, \theta, b)}{|\rho'|^\gamma} \right)^n \|\mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} Q_0^\pm[1]]\|_{\mathcal{H}_{R, [\max(0, \frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2}, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{matrix} \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2}, \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2}; j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{matrix} \right)};$$

при $n \geq 1$ нормы функций $\mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} Q_\Delta^\pm]^n (I - Q_0^\pm)^{-1} Q_\Delta^\pm[1](s)$ в пространствах

$$\mathcal{H}_{R, [\max(0, \frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2}, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{array}{c} \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2} - \gamma, \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2} - \gamma, \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2}, \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2}, \pm \mu - \gamma; 1+j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{array} \right)$$

оцениваются величинами

$$\left(\frac{\hat{C}_m(\varepsilon, \theta, b)}{|\rho'|^\gamma} \right)^n \times \left\| \mathfrak{M}[(I - Q_\Delta^\pm)^{-1} Q_\Delta^\pm[1]] \right\|_{\mathcal{H}_{R, [\max(0, \pm \operatorname{Re} \mu) - \gamma - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m}} \left(\begin{array}{c} \frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2} - j, \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2} - j; \pm \mu - \gamma; -\gamma; 1+j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{array} \right).$$

Здесь $\hat{C}_m(\varepsilon, \theta, b)$ при каждом m – некоторая постоянная, которая может быть оценена с помощью постоянных из (11.52), обозначенных так же $\hat{C}_m(\varepsilon, \theta, b)$. Отсюда, обращаясь к разложениям (9.30) и используя неравенства вида (11.33), получим, что соответствующие ряды для $\mathfrak{M}[y_{(3 \mp 1)/2}^{\Delta \pm}](s)$ сходятся нормально в пространствах (12.21), если выполнено условие

$$\hat{C}_m(\varepsilon, \theta, b)/|\rho'|^\gamma < 1,$$

и при этом имеют место первые оценки из (12.3). Аналогично проверяется справедливость утверждения леммы для функций $\mathfrak{M}[y_{(3 \pm 1)/2}^{\Delta \pm}](s)$.

Значения μ , определенного формулой (7.14), выберем в соответствии с данными табл. 7 (см. § 7) согласно двум случаям, которым отвечают табл. 1 и 2 (см. § 3):

I. при $|\delta| < \pi\gamma/2$

$$\mu = -2\nu, \quad s_+ - s_- + q_+ - q_- = \operatorname{sign} \delta; \quad (12.4_1)$$

II. при $|\delta| \geq \pi\gamma/2$, $\nu \neq \pm\gamma/2$ (вольтерров случай мы не рассматриваем)

$$\mu = -2\nu + \operatorname{sign} \delta, \quad s_+ - s_- + q_+ - q_- = 0. \quad (12.4_2)$$

Как следует из (7.14), (1.5) и (9.16) при таком выборе μ

$$|\operatorname{Re} \mu| = \{2|\delta|/\pi \text{ в случае I, } 1 - 2|\delta|/\pi \text{ в случае II}\} \leq \hat{\gamma}.$$

При этом выполнены неравенства

$$0 \leq (\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma})/2, \quad \pm \operatorname{Re} \mu \leq (\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma})/2$$

и неравенства

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\pm \mu - \hat{\gamma}}{2} \right), \quad \operatorname{Re} \left(\frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2} - \gamma \right), \quad \operatorname{Re}(\pm \mu - \gamma), \quad -\gamma < \frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2} - \theta$$

для любого θ , $0 < \theta < \min(\gamma, 1 - \gamma)$.

Вследствие последних неравенств при таком выборе μ лемму 12.1 можно несколько упростить.

ЛЕММА 12.2. При выполнении условий леммы 12.1 и при μ , определяемом формулой (12.4₁) или (12.4₂), для любого $b \geq (\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma})/2 - \theta$ существует столь большое $R(m, \varepsilon, \theta, b)$, зависящее от $m, \varepsilon, \theta, b$ и β , что при $R \geq R(m, \varepsilon, \theta, b)$ функции $\mathfrak{M}[y_{\alpha}^{\pm}](s)$, $\alpha = 1, 2$, принадлежат пространствам

$$\mathcal{H}_{R, [\frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2} - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{array}{c} \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2}; 1+j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{array} \right). \quad (12.5)$$

При этом имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{M}[y_{(3 \mp 1)/2}^{\pm}]\|_{\mathcal{H}_{R, [\frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2} - \theta, b]}^{\varepsilon, \pi; m} \left(\begin{array}{c} \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2}; 1+j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{array} \right)} &\leq \frac{\tilde{C}_m(\varepsilon, \theta, b)}{|\rho'|^{\gamma}}, \\ \|\mathfrak{M}[y_{(3 \pm 1)/2}^{\pm}]\|_{\mathcal{H}_{R, [\frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2} - \theta, b]}^{\varepsilon', \pi; m} \left(\begin{array}{c} \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2}; 1+j \\ j=0, 1, 2, \dots \end{array} \right)} &\leq \frac{\tilde{C}_m(\varepsilon, \theta, b)}{|\rho'|^{\pm \operatorname{Re} \mu + \gamma}}. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Ряды для $\mathfrak{M}[y_{\alpha}^{\pm}](s)$, получающиеся на основании формул (12.1), (9.30) и (9.32), сходятся нормально в пространствах (12.5).

Перейдем к исследованию асимптотик при $|\rho'| \rightarrow \infty$ функций $y_{\alpha}^{\pm}(\xi; \rho')$, $\alpha = 1, 2$, и их аналитических продолжений по ξ при малых и больших $|\xi|$. Для этого предварительно сформулируем следующую лемму.

ЛЕММА 12.3. Пусть $\mathcal{F}(s; \rho') \in \mathcal{H}_{R, [a, b]}^{\varepsilon, \Delta; m}(s_1, \dots, s_n)$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R > 0$, $\Delta \geq 0$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Если s_k — простой полюс (т. е. s_k отлично от всех $s_1, \dots, s_{k-1}, s_{k+1}, \dots, s_n$), то вычет $\lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) \mathcal{F}(s; \rho')$ является аналитической функцией $\rho' \in \Sigma_R^{\varepsilon}$ и справедлива оценка

$$\left| \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) \mathcal{F}(s; \rho') \right| \leq \frac{C_m(s_1, \dots, s_n)}{|\rho'|^{\operatorname{Re} s_k}} \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}_{R, [a, b]}^{\varepsilon, \Delta; m}(s_1, \dots, s_n)}, \quad (12.7)$$

где

$$C_m(s_1, \dots, s_n) = e^{-\Delta |\operatorname{Im} s_k|} \left| (s_k - b - 1)^{n-m} / \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (s_i - s_k) \right|.$$

При $m \geq 2$ интеграл (10.12) при $p \neq \operatorname{Re} s_1, \dots, \operatorname{Re} s_n$, $a \leq p \leq b$ (обратный образ Меллина функции $\mathcal{F}(s; \rho')$), является голоморфной функцией двух комплексных переменных ζ, ρ' на множестве $\{\zeta: |\zeta| > 0, |\arg \zeta| < \Delta\} \times \Sigma_R^{\varepsilon}$ и непрерывной функцией на множестве $\{\zeta: |\zeta| > 0, |\arg \zeta| \leq \Delta\} \times \bar{\Sigma}_R^{\varepsilon}$, и для ζ, ρ' из последнего множества имеет место оценка

$$|f(\zeta; \rho')| \leq C_m(s_1, \dots, s_n; p) |\zeta|^{-p} |\rho'|^{-p} \|\mathcal{F}\|_{\mathcal{H}_{R, [a, b]}^{\varepsilon', \Delta; m}(s_1, \dots, s_n)}, \quad (12.8)$$

где

$$C_m(s_1, \dots, s_n; p) = \frac{1}{2\pi} \int_{p-i\infty}^{p+i\infty} \left| (s - b - 1)^{n-m} / \prod_{j=1}^n (s - s_j) \right| |ds|.$$

Неравенство (12.7) легко получается из определения (11.2). Неравенство (12.8) следует также из (11.2) и оценок вида (10.11).

ТЕОРЕМА 12.1. При $|\beta| \neq |\delta/\gamma \pm \pi/2|$ для любых ε и θ , $0 < \varepsilon < \pi/2$, $0 < \theta < \theta^* = \min(\gamma, 1 - \gamma)$, существует $R = R(2, \varepsilon, \theta, 2.5)$, где $R(m, \varepsilon, \theta, b)$ – величина, фигурирующая в лемме 12.2, такое, что при $\rho' \in \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$ (см. (7.3)) система интегральных уравнений (7.7) (см. также (7.9), (9.29), (9.30)) имеет единственное решение. Компоненты $y_\alpha^\pm(\xi; \rho')$, $\alpha = 1, 2$, этого решения допускают аналитические продолжения $y_\alpha^\pm(\zeta; \rho')$ по переменной ξ в плоскость с разрезом по лучу $\zeta = -\eta$, $0 \leq \eta < \infty$, и являются голоморфными функциями переменных ζ , ρ' на множестве $\{\zeta: |\zeta| > 0, |\arg \zeta| < \pi\} \times \Sigma_R^\varepsilon$, непрерывными на множестве $\{\zeta: |\zeta| > 0, |\arg \zeta| \leq \pi\} \times \bar{\Sigma}_R^\varepsilon$ (множество $\{\zeta: |\zeta| > 0, |\arg \zeta| \leq \pi\}$ следует рассматривать как множество на римановой поверхности функции $\ln \zeta$, при этом предельные значения функций $y_\alpha^\pm(\xi; \rho')$ на верхнем и нижнем берегах разреза различны). Имеют место следующие асимптотические представления:

– в окрестности точки $\zeta = 0$, $|\arg \zeta| \leq \pi$,

$$\begin{aligned} y_{(3 \mp 1)/2}^\pm(\zeta; \rho') &= -1 + \frac{\zeta^{-\frac{\pm\mu+\hat{\gamma}}{2}}}{(\rho')^{\frac{\pm\mu+\hat{\gamma}}{2}}} \left(\frac{\Gamma(\hat{\gamma})}{\Gamma(\frac{\hat{\gamma} \mp \mu}{2})} + \frac{\tilde{C}_{(3 \mp 1)/2}^\pm(\rho')}{(\rho')^\gamma} \right) \\ &\quad + O_{\rho'}(|\zeta|^{-\frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2} + \theta}), \\ y_{(3 \pm 1)/2}^\pm(\zeta; \rho') &= \frac{\zeta^{-\frac{\pm\mu+\hat{\gamma}}{2}}}{(\rho')^{\frac{\pm\mu+\hat{\gamma}}{2}}} \left((i)^{q+ - q-} (-1)^{s \pm} A_\mp \frac{\sin \pi(\nu \pm \frac{\gamma}{2}) \Gamma(\hat{\gamma})}{\sin \pi(\frac{\mp\mu+\hat{\gamma}}{2}) \Gamma(\frac{\pm\mu+\hat{\gamma}}{2})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{C}_{(3 \pm 1)/2}^\pm(\rho')}{(\rho')^\gamma} \right) + O_{\rho'}(|\zeta|^{-\frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2} + \theta}), \end{aligned} \quad (12.9)$$

где $|O_{\rho'}(|\zeta|^{-\frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2} + \theta})| \leq C(\varepsilon, \theta, \rho') |\zeta|^{-\frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2} + \theta}$ с постоянной $C(\rho, \theta, \rho')$, зависящей только от ε , θ , ρ' и β ;

– при любых ζ , $|\arg \zeta| \leq \pi$,

$$\begin{aligned} y_{(3 \mp 1)/2}^\pm(\zeta; \rho') &= \frac{1}{\zeta \rho'} \left(\frac{\hat{\gamma}^2 - \mu^2}{4} + \frac{\tilde{C}_{(3 \mp 1)/2}^\pm(\rho')}{(\rho')^\gamma} \right) + O(|\zeta|^{-1-\varepsilon_2} |\rho'|^{-1-\varepsilon_2}), \\ y_{(3 \pm 1)/2}^\pm(\zeta; \rho') &= \frac{1}{\zeta (\rho')^{\mp\mu+1}} \left((i)^{q+ - q-} (-1)^{s \pm} A_\mp \right. \\ &\quad \times \left\{ \begin{array}{ll} \Gamma(1 - (\pm\mu + \hat{\gamma})/2) / \Gamma((\pm\mu - \hat{\gamma})/2) & \text{в случае I} \\ (-1)^{\frac{1 \pm \operatorname{sign} \delta}{2}} \Gamma(1 - (\pm\mu - \hat{\gamma})/2) / \Gamma((\pm\mu + \hat{\gamma})/2) & \text{в случае II} \end{array} \right\} \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{C}_{(3 \pm 1)/2}^\pm(\rho')}{(\rho')^\gamma} \right) + O(|\zeta|^{-1-\varepsilon_2} |\rho'|^{\pm \operatorname{Re} \mu - 1 - \varepsilon_2}) \end{aligned} \quad (12.10)$$

(см. (12.4)), здесь ε_2 – любое, $0 < \varepsilon_2 < 1$,

$$\begin{aligned} |O(|\zeta|^{-1-\varepsilon_2} |\rho'|^{-1-\varepsilon_2})| &\leq C(\varepsilon, \varepsilon_2) |\zeta|^{-1-\varepsilon_2} |\rho'|^{-1-\varepsilon_2}, \\ |O(|\zeta|^{-1-\varepsilon_2} |\rho'|^{\pm \operatorname{Re} \mu - 1 - \varepsilon_2})| &\leq C(\varepsilon, \varepsilon_2) |\zeta|^{-1-\varepsilon_2} |\rho'|^{\pm \operatorname{Re} \mu - 1 - \varepsilon_2} \end{aligned}$$

для любых ζ , $|\zeta| > 0$, $|\arg \zeta| \leq \pi$, любых $\rho' \in \Sigma_R^\varepsilon$, $R = R'(\varepsilon, \beta)$, с постоянными $C(\varepsilon, \varepsilon_2)$, зависящими только от ε , ε_2 и β .

Функции $\overset{0}{C}_\alpha^\pm(\rho')$ и $\overset{\infty}{C}_\alpha^\pm(\rho')$, $\alpha = 1, 2$, являются аналитическими и ограниченными при $\rho' \in \overline{\Sigma}_R^\varepsilon$, $R = R'(\varepsilon, \beta)$:

$$|\overset{0}{C}_\alpha^\pm(\rho')| \leq C(\varepsilon, \theta, \beta), \quad |\overset{\infty}{C}_\alpha^\pm(\rho')| \leq C(\varepsilon, \beta).$$

Через $R'(\varepsilon, \beta)$ обозначено $R(2, \varepsilon, \theta, 2.5)$ при некотором фиксированном θ . Числа $q_\pm$ введены в (6.4), $s_\pm$ определены в (6.20), $A_\pm$ — в (6.15).

Доказательство этой теоремы основывается на применении леммы 10.1. Действительно, чтобы получить (12.9), согласно (10.5), (10.6) и лемме 12.3 представим

$$\begin{aligned} y_{(3 \mp 1)/2}^\pm(\zeta; \rho') &= \lim_{s \rightarrow 0} s \mathfrak{M}[\overset{0}{y}_{(3 \mp 1)/2}](s) \\ &\quad + \zeta^{-\frac{\pm\mu+\hat{\gamma}}{2}} \lim_{s \rightarrow \frac{\pm\mu+\hat{\gamma}}{2}} (s - (\pm\mu + \hat{\gamma})/2) (\mathfrak{M}[\overset{0}{y}_{(3 \mp 1)/2}](s) + \mathfrak{M}[\overset{\Delta}{y}_{(3 \mp 1)/2}](s)) \\ &\quad + O_{\rho'}(|\zeta|^{-\frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2} + \theta}), \\ y_{(3 \pm 1)/2}^\pm(\zeta; \rho') &= \zeta^{-\frac{\pm\mu+\hat{\gamma}}{2}} \lim_{s \rightarrow \frac{\pm\mu+\hat{\gamma}}{2}} (s - (\pm\mu + \hat{\gamma})/2) \\ &\quad \times (\mathfrak{M}[\overset{0}{y}_{(3 \pm 1)/2}](s) + \mathfrak{M}[\overset{\Delta}{y}_{(3 \pm 1)/2}](s)) + O_{\rho'}(|\zeta|^{-\frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2} + \theta}). \end{aligned}$$

Поскольку $\nu \neq \pm\gamma/2$, то $(\pm\mu + \hat{\gamma})/2$ не могут быть равными целым числам. При вычислении вычетов

$$\begin{aligned} &\lim_{s \rightarrow 0} s \mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} Q_0^\pm[1]](s), \\ &\lim_{s \rightarrow (\pm\mu+\hat{\gamma})/2} \left(s - \frac{\pm\mu+\hat{\gamma}}{2} \right) \mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} Q_0^\pm[1]](s), \\ &\lim_{s \rightarrow (\pm\mu+\hat{\gamma})/2} \left(s - \frac{\pm\mu+\hat{\gamma}}{2} \right) \mathfrak{M}[(I - Q_0^\pm)^{-1} S_0^\mp[1]](s) \end{aligned}$$

воспользуемся выражениями (10.6), (10.5) и равенством

$$\Gamma\left(1 - \frac{\hat{\gamma} \mp \mu}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{-\hat{\gamma} \mp \mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\hat{\gamma} \mp \mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-\hat{\gamma} \mp \mu}{2}\right) = \frac{\pi^2 (-1)^{q_+ - q_- + s_+ - s_-}}{\sin \pi(\nu + \frac{\gamma}{2}) \sin \pi(\nu - \frac{\gamma}{2})}, \quad (12.11)$$

справедливым в силу выбора (12.4) значений μ . Для оценки

$$\lim_{s \rightarrow \frac{\pm\mu+\hat{\gamma}}{2}} (s - (\pm\mu + \hat{\gamma})/2) \mathfrak{M}[\overset{\Delta}{y}_\alpha^\pm](s), \quad \alpha = 1, 2,$$

воспользуемся леммой 12.3 (неравенством (12.7)) и леммой 12.2 (оценками (12.6)) при $m = 2$. В результате приходим к (12.9).

Для вывода (12.10) воспользуемся равенством (10.10₂) и представим для $\alpha = 1, 2$:

$$\begin{aligned} y_{\alpha}^{\pm}(\zeta; \rho') &= -\zeta^{-1} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1) (\mathfrak{M}[y_{\alpha}^{\pm}]^0(s) + \mathfrak{M}[y_{\alpha}^{\pm}]^{\Delta}(s)) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\varepsilon_2-i\infty}^{1+\varepsilon_2+i\infty} \zeta^{-s} \mathfrak{M}[y_{\alpha}^{\pm}](s) ds. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Оценивая интегралы в (12.12) с помощью леммы 12.3 (неравенство (12.8)) и оценок (11.7), (11.8), (12.6), получим, что эти интегралы суть

$$O(|\zeta|^{-1-\varepsilon_2} |\rho'|^{-1-\varepsilon_2}) \quad \text{и} \quad O(|\zeta|^{1-\varepsilon_2} |\rho'|^{\pm \operatorname{Re} \mu - 1 - \varepsilon_2})$$

соответственно для функций $y_{(3 \mp 1)/2}^{\pm}$ и $y_{(3 \pm 1)/2}^{\pm}$. Вычет $\lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \mathfrak{M}[y_{\alpha}^{\pm}]^0(s)$ вычислим, исходя из (10.6), (10.5) и пользуясь соотношением (12.11), равенствами

$$\begin{aligned} \sin \pi((\pm \mu - \hat{\gamma})/2) &= \mp \sin \pi(\nu \pm \gamma/2) && \text{в случае I,} \\ \sin \pi((\pm \mu + \hat{\gamma})/2) &= \mp (-1)^{\frac{1 \pm \operatorname{sign} \delta}{2}} \sin \pi(\nu \pm \gamma/2) && \text{в случае II} \end{aligned} \quad (12.13)$$

(см. (12.4)) и формулой дополнения. Вычет $\lim_{s \rightarrow 1} (s-1) \mathfrak{M}[y_{\alpha}^{\pm}]^{\Delta}(s)$ оценим с помощью леммы 12.3 и неравенств (12.6). Таким образом приходим к (12.10).

Перейдем теперь по формулам (7.6), (7.1) и (6.5) к матрице $\Phi(\zeta; \rho')$, у которой компоненты столбцов $\varphi_j = (\varphi_j^+, \varphi_j^-)^T$ имеют вид

$$\varphi_j^{\pm}(\zeta; \rho') = \chi_{\beta}^{\pm}(\zeta) (\delta_j^{\pm} + y_j^{\pm}(\mp i \zeta; \rho')), \quad j = 1, 2, \quad -\pi \pm \pi/2 \leq \arg \zeta \leq \pi \pm \pi/2, \quad (12.14)$$

где $\delta_1^+ = \delta_2^- = 1$, $\delta_2^+ = \delta_1^- = 0$, функции $\chi_{\beta}^{\pm}(\zeta)$ введены в § 6, а сами столбцы являются решениями однородной граничной задачи Гильберта (3.17). Компоненты (12.14) в силу (12.9), (12.10) и (6.21) имеют следующие асимптотические поведения в окрестностях $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$ при фиксированном $\rho' \in \overline{\Sigma}_R^{\varepsilon}$:

$$\varphi_j^{\pm}(\zeta; \rho') = \zeta^{\mp \nu - \frac{\gamma}{2} + s_{\pm} + q_{\pm} - \frac{\pm \mu + \hat{\gamma}}{2}} (c(\rho'))_j^{\pm} (1 + o(|\zeta|^{\theta})) \quad (12.15_1)$$

при $\zeta \rightarrow 0$, где $(c(\rho'))_j^{\pm}$ — некоторые постоянные, зависящие от ρ' , и

$$\varphi_j^{\pm}(\zeta; \rho') = \zeta^{q_{\pm}} (\delta_j^{\pm} + O(|\zeta|^{-\gamma})) \quad (12.15_2)$$

при $|\zeta| \rightarrow \infty$ на множествах $-\pi \pm \pi/2 \leq \arg \zeta \leq \pi \pm \pi/2$ (на римановой поверхности функции $\ln \zeta$), θ — любое, $0 < \theta < \min(\gamma, 1 - \gamma)$. Как следует из (6.21), (6.13) и (12.9), $(c(\rho'))_j^{\pm} \neq 0$. Из представления (12.15₂) видно, что порядок убывания при $|\zeta| \rightarrow \infty$ решения $\varphi_1(\zeta; \rho')$ равен $-q_+$, решения $\varphi_2(\zeta; \rho')$ равен $-q_-$.

Числа $q_{\pm}$ выберем следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{I. } q_{\pm} &= -s_{\pm} && \text{при } |\delta| < \pi\gamma/2; \\ \text{II. } q_{\pm} &= (1 \pm \operatorname{sign} \delta)/2 - s_{\pm} && \text{при } |\delta| \geq \pi\gamma/2. \end{aligned} \quad (12.16)$$

В силу такого выбора показателей $q_{\pm}$ имеем, что при $\zeta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \text{I. } \varphi_j^{\pm}(\zeta; \rho') &= \zeta^{-\gamma} (c(\rho'))_j^{\pm} (1 + o(|\zeta|^{\theta})) \quad \text{для } |\delta| < \pi\gamma/2; \\ \text{II. } \varphi_j^{\pm}(\zeta; \rho') &= (c(\rho'))_j^{\pm} (1 + o(|\zeta|^{\theta})) \quad \text{для } |\delta| \geq \pi\gamma/2. \end{aligned} \quad (12.16_1)$$

Отметим теперь, что в силу леммы 6.2 суммарный индекс $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2$ задачи (3.17) равен $s_+ + s_-$. Сумма порядков $(-q_+ - q_-)$ убывания при $|\zeta| \rightarrow \infty$ решений (12.14) равна:

$$\begin{aligned} \text{I. } -q_+ - q_- &= s_+ + s_- = \varkappa \quad \text{для } |\delta| < \pi\gamma/2; \\ \text{II. } -q_+ - q_- &= s_+ + s_- - 1 = \varkappa - 1 \quad \text{для } |\delta| \geq \pi\gamma/2. \end{aligned} \quad (12.16_2)$$

Из теоремы 4.2 с учетом первых равенств из (12.16₁) и (12.16₂) непосредственно вытекает, что в случае I матрица $\Phi(\zeta; \rho')$ с элементами (12.14) является канонической матрицей решений задачи (3.17) при всех $|\beta| \neq |\delta/\gamma \pm \pi/2|$, частные индексы которой совпадают с s_+ и s_- .

В случае II следует воспользоваться теоремой 4.3. С помощью выражений (12.16) и данных, приведенных в табл. 4 (см. § 6), получаем данные табл. 8.

II. $|\delta| \geq \pi\gamma/2$

ТАБЛИЦА 8

β	$ \beta < \frac{\pi}{2} - \frac{ \delta }{\gamma}$	$\frac{ \delta }{\gamma} - \frac{\pi}{2} < \beta < \frac{ \delta }{\gamma} + \frac{\pi}{2}$	$ \beta > \frac{ \delta }{\gamma} + \frac{\pi}{2}$
$-q_{\pm}$	$-(1 \mp \text{sign } \delta)/2$	0	$-(1 \pm \text{sign } \delta)/2$

Отсюда в силу теоремы 4.3 с учетом вторых равенств из (12.16₁) и (12.16₂) заключаем, что при $|\delta| \geq \pi\gamma/2$ частные индексы имеют значения, представленные в табл. 9.

II. $|\delta| \geq \pi\gamma/2$

ТАБЛИЦА 9

β	$ \beta < \frac{ \delta }{\gamma} - \frac{\pi}{2}$	$\frac{ \delta }{\gamma} - \frac{\pi}{2} < \beta < \frac{ \delta }{\gamma} + \frac{\pi}{2}$	$ \beta > \frac{ \delta }{\gamma} + \frac{\pi}{2}$
$\varkappa_1$	0	1	0
$\varkappa_2$	0	0	0

Таким образом, в случае II убывающее при $|\zeta| \rightarrow \infty$ нетривиальное решение задачи (3.17), имеющее в окрестности $\zeta = 0$ порядок $\zeta^{-\gamma}$, возможно только при условии $|\delta|/\gamma - \pi/2 < |\beta| < |\delta|/\gamma + \pi/2$. Как следует из теоремы 4.3, компоненты такого решения $\varphi_3(\zeta; \rho')$ имеют вид

$$\varphi_3^{\pm}(\zeta; \rho') = (h_1(\rho')\varphi_1^{\pm}(\zeta; \rho') + h_2(\rho')\varphi_2^{\pm}(\zeta; \rho'))/\zeta,$$

где $h_1(\rho')$ и $h_2(\rho')$ – некоторые функции, отношение которых можно определить условием $|\varphi_3^{\pm}(\zeta; \rho')| < c|\zeta|^{-1+\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1 > 0$.

Используя (12.9), (12.14) и конкретные значения q_+ и q_- из табл. 8, а также (12.16), находим, что при $|\delta| \geq \pi\gamma/2$

$$\begin{aligned}\varphi_{(3\mp 1)/2}^{\pm}(\zeta; \rho') &= \chi_{\beta}^{\pm}(\zeta) \left\{ \frac{(-i\zeta)^{-\frac{\pm\mu+\hat{\gamma}}{2}}}{(\rho')^{\frac{\pm\mu+\hat{\gamma}}{2}}} \left(\frac{\Gamma(\hat{\gamma})}{\Gamma(\frac{\hat{\gamma}\mp\mu}{2})} + \frac{\overset{0}{C}_{(3\mp 1)/2}^{\pm}(\rho')}{(\rho')^{\gamma}} \right) \right. \\ &\quad \left. + O_{\rho'}(|\zeta|^{-\frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2} + \theta}) \right\}, \\ \varphi_{(3\pm 1)/2}^{\pm}(\zeta; \rho') &= \chi_{\beta}^{\pm}(\zeta) \left\{ \frac{(-i\zeta)^{-\frac{\pm\mu+\hat{\gamma}}{2}}}{(\rho')^{\frac{\mp\mu+\hat{\gamma}}{2}}} \left(\frac{\Gamma(\hat{\gamma})A_{\mp}}{\Gamma(\frac{\hat{\gamma}\pm\mu}{2})} + \frac{\overset{0}{C}_{(3\pm 1)/2}^{\pm}(\rho')}{(\rho')^{\gamma}} \right) \right. \\ &\quad \left. + O_{\rho'}(|\zeta|^{-\frac{\pm \operatorname{Re} \mu + \hat{\gamma}}{2} + \theta}) \right\}\end{aligned}$$

при $|\zeta| \rightarrow 0$, $\rho' \in \Sigma_R^{\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < \pi/2$, $R = \mathcal{R}(\varepsilon, \theta)$ – некоторое достаточно большое число, зависящее от ε , θ и β . В этом случае в силу (12.16₁) существование решения $\varphi_3(\zeta; \rho')$, о котором говорилось выше, возможно только тогда, когда $\det \|(c(\rho'))_j^{\pm}\| = 0$. Данное условие при использовании последних представлений для компонент $\varphi_j^{\pm}(\zeta; \rho')$, $j = 1, 2$, и асимптотических разложений (6.21₁) влечет необходимость выполнения равенства

$$\begin{aligned}\frac{\frac{\Gamma(\hat{\gamma})}{\Gamma(\frac{\hat{\gamma}-\mu}{2})} + \frac{\overset{0}{C}_1^{+}(\rho')}{(\rho')^{\gamma}}}{\frac{\Gamma(\hat{\gamma})A_{-}}{\Gamma(\frac{\hat{\gamma}+\mu}{2})} + \frac{\overset{0}{C}_2^{+}(\rho')}{(\rho')^{\gamma}}} &= \frac{\frac{\Gamma(\hat{\gamma})A_{+}}{\Gamma(\frac{\hat{\gamma}-\mu}{2})} + \frac{\overset{0}{C}_1^{-}(\rho')}{(\rho')^{\gamma}}}{\frac{\Gamma(\hat{\gamma})}{\Gamma(\frac{\hat{\gamma}+\mu}{2})} + \frac{\overset{0}{C}_2^{-}(\rho')}{(\rho')^{\gamma}}} \stackrel{\text{def}}{=} h(\rho').\end{aligned}\quad (12.17)$$

Соотношение $A_+A_- = 1$ из (6.16), естественно, согласуется с (12.17). Функция $h(\rho')$, как видим, является аналитической в $\Sigma_{\mathcal{R}(\varepsilon, \theta)}^{\varepsilon}$, и для нее справедливо разложение

$$h(\rho') = \frac{\Gamma(\frac{\hat{\gamma}+\mu}{2})}{\Gamma(\frac{\hat{\gamma}-\mu}{2})} A_+ + \frac{\overset{0}{c}(\rho')}{(\rho')^{\gamma}},$$

где $\overset{0}{c}(\rho')$ – аналитическая функция, ограниченная на $\bar{\Sigma}_{\mathcal{R}(\varepsilon, \theta)}$. Решением $\varphi_3(\zeta; \rho')$ задачи (3.17), убывающим при $|\zeta| \rightarrow \infty$, является решение, компоненты которого имеют вид

$$\varphi_3^{\pm}(\zeta; \rho') = (\varphi_1^{\pm}(\zeta; \rho') - (\rho')^{\mu} h(\rho') \varphi_2^{\pm}(\zeta; \rho')) / \zeta. \quad (12.18)$$

Таким образом, приходим к следующей основной теореме, описывающей совокупность решений граничной задачи Гильберта (3.17), стремящихся к нулю при $|\zeta| \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 12.2. *Для любых ε и β , $0 < \varepsilon < \pi/2$, $|\beta| \neq |\delta/\gamma \pm \pi/2|$, существует столь большое число $\mathcal{R}(\varepsilon, \beta)$, зависящее только от ε и β , что при $\rho' \in \bar{\Sigma}_{\mathcal{R}(\varepsilon, \theta)}^{\varepsilon}$ (см. (7.3)) граничная задача Гильберта (3.17) имеет следующие частные индексы.*

I. При $|\delta| < \pi\gamma/2$ частные индексы определены в табл. 10.

Таблица 10

β	$ \beta < \frac{\pi}{2} - \frac{ \delta }{\gamma}$	$\frac{\pi}{2} - \frac{ \delta }{\gamma} < \beta < \frac{\pi}{2} + \frac{ \delta }{\gamma}$	$ \beta > \frac{\pi}{2} + \frac{ \delta }{\gamma}$
κ_1	1	1	0
κ_2	1	0	0

II. При $|\delta| \geq \pi\gamma/2$ частные индексы определены в табл. 9.

При этом компоненты любого решения $\varphi(\zeta; \rho')$ задачи (3.17), стремящегося к нулю при $|\zeta| \rightarrow \infty$, имеют вид:

а) в случае I при $|\beta| < \pi/2 - |\delta|/\gamma$

$$\varphi^\pm(\zeta; \rho') = c_1(\rho')\varphi_1^\pm(\zeta; \rho') + c_2(\rho')\varphi_2^\pm(\zeta; \rho'); \quad (12.19_1)$$

б) в случае I при $\pi/2 - |\delta|/\gamma < |\beta| < \pi/2 + |\delta|/\gamma$

$$\varphi^\pm(\zeta; \rho') = c(\rho') \begin{cases} \varphi_1^\pm(\zeta; \rho'), & \delta > 0, \\ \varphi_2^\pm(\zeta; \rho'), & \delta < 0; \end{cases} \quad (12.19_2)$$

в) в случае II при $|\delta|/\gamma - \pi/2 < |\beta| < |\delta|/\gamma + \pi/2$

$$\varphi^\pm(\zeta; \rho') = c(\rho')\varphi_3^\pm(\zeta; \rho'), \quad (12.20)$$

где $\varphi_1^\pm(\zeta; \rho')$, $\varphi_2^\pm(\zeta; \rho')$ определяются формулой (12.14), $\varphi_3^\pm(\zeta; \rho')$ – формулой (12.18), $c_1(\rho')$, $c_2(\rho')$, $c(\rho')$ – некоторые постоянные (зависящие от ρ').

При остальных β не существует нетривиальных решений задачи (3.17), удовлетворяющих в окрестности точки $\zeta = 0$ оценке (4.15) и стремящихся к нулю при $|\zeta| \rightarrow \infty$.

Отметим, что $\mathcal{R}(\varepsilon, \beta)$ можно выбрать не зависящим от θ , поскольку θ в предыдущих рассуждениях можно фиксировать.

§ 13. Асимптотические разложения собственных значений

Ранее мы использовали условие (3.7) аналитичности $\tilde{U}(z; \lambda)$ на линии разрыва аналитического продолжения (3.5) символа (1.2), (1.3), которое привело к граничной задаче (3.17). Был найден вид решения $\varphi^\pm(\zeta; \rho')$ этой задачи и в силу замен (3.18) и (3.14) – вид функций $\tilde{\Phi}^\pm(z; \lambda)$ (см. (3.2), (3.3)). Используя теперь условие (3.8), получим характеристические уравнения. Вследствие равенства $\tilde{\mathcal{F}}(z) = 0$, замен (3.14) и (3.18) и рассуждений, приведенных перед формулами (3.22), можно переписать условие (3.8) в виде

$$\varphi^+(\zeta_j; \rho') + \varphi^-(\zeta_j; \rho')e^{-i\zeta_j\rho'} = 0, \quad (13.1)$$

где через ζ_j обозначены корни $\zeta_{\text{л}}$ или $\zeta_{\text{п}}$ из (3.24), существующие при данном β . Необходимо найти такие ρ' , при которых существует нетривиальное решение $\varphi^\pm(\zeta; \rho')$ однородной граничной задачи (3.17), допускающие оценку (4.15) в окрестности

точки $\zeta = 0$, стремящиеся к нулю при $|\zeta| \rightarrow \infty$ и удовлетворяющее условию (13.1). Эти ρ' будут соответствовать собственным значениям исходного оператора.

Перейдем к конкретному рассмотрению выделенных ранее случаев.

I. $|\delta| < \pi\gamma/2$.

а) $|\beta| < \pi/2 - |\delta|/\gamma$. Существуют одновременно два корня $\zeta_{\text{л}}$ и $\zeta_{\text{п}}$, определяемые формулами (3.24). Используя (12.19₁), перепишем (13.1) в виде системы уравнений для постоянных c_1 и c_2 :

$$\sum_{k=1}^2 c_k (\varphi_k^+(\zeta_j; \rho') + \varphi_k^-(\zeta_j; \rho') e^{-i\zeta_j \rho'}) = 0, \quad \zeta_1 = \zeta_{\text{л}}, \quad \zeta_2 = \zeta_{\text{п}}. \quad (13.2)$$

Условие существования нетривиального решения (c_1, c_2) системы (13.2):

$$\Delta(\rho') = \det \|\varphi_k^+(\zeta_j; \rho') + \varphi_k^-(\zeta_j; \rho') e^{-i\zeta_j \rho'}\|_{k,j=1,2} = 0, \quad (13.3)$$

$$\rho' \in \bar{\Sigma}_{\mathcal{R}(\varepsilon, \beta)}, \quad 0 < \varepsilon < \pi/2,$$

представляет собой характеристическое уравнение для определения характеристических чисел ρ_l , а потому и собственных значений λ_l .

б) $\pi/2 - |\delta|/\gamma < |\beta| < \pi/2 + |\delta|/\gamma$. При таких β существует только один корень: либо $\zeta_{\text{л}}$, либо $\zeta_{\text{п}}$. Из (12.19₂) следует, что характеристические уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1^+(\zeta_j; \rho') + \varphi_1^-(\zeta_j; \rho') e^{-i\zeta_j \rho'} &= 0 \quad \text{при } \delta > 0, \\ \varphi_2^+(\zeta_j; \rho') + \varphi_2^-(\zeta_j; \rho') e^{-i\zeta_j \rho'} &= 0 \quad \text{при } \delta < 0, \end{aligned} \quad (13.4)$$

где ζ_j согласно данным, приведенным в табл. 1 (см. § 3), равны: $\zeta_j = \zeta_{\text{л}}$ при $\beta \in (-\frac{|\delta|}{\gamma} + \frac{\pi}{2} \text{sign } \delta, \frac{|\delta|}{\gamma} + \frac{\pi}{2} \text{sign } \delta)$ и $\zeta_j = \zeta_{\text{п}}$ при $\beta \in (-\frac{|\delta|}{\gamma} - \frac{\pi}{2} \text{sign } \delta, \frac{|\delta|}{\gamma} - \frac{\pi}{2} \text{sign } \delta)$.

II. $|\delta| \geq \pi\gamma/2$. При $|\delta|/\gamma - \frac{\pi}{2} < |\beta| < |\delta|/\gamma + \frac{\pi}{2}$ в силу (12.20) получим характеристическое уравнение

$$\varphi_3^+(\zeta_j; \rho') + \varphi_3(\zeta_j; \rho') e^{-i\zeta_j \rho'} = 0, \quad (13.5)$$

где согласно данным, приведенным в табл. 2 (см. § 3), $\zeta_j = \zeta_{\text{л}}$ при $\beta \in (\delta/\gamma - \pi/2, \delta/\gamma + \pi/2)$ и $\zeta_j = \zeta_{\text{п}}$ при $\beta \in (-\delta/\gamma - \pi/2, -\delta/\gamma + \pi/2)$.

В силу (12.14), (12.10) и (12.18) получаем при фиксированном $\zeta \neq 0$ и $|\rho'| \rightarrow \infty$ следующую асимптотику функций $\varphi_j^{\pm}(\zeta; \rho')$:

$$\begin{aligned} \varphi_{(3 \mp 1)/2}^{\pm}(\zeta; \rho') &= \chi_{\beta}^{\pm}(\zeta) \left(1 \pm \frac{i(\hat{\gamma}^2 - \mu^2)}{4\rho'} + O_{\zeta}(|\rho'|^{-1-\gamma}) \right), \\ \varphi_{(3 \pm 1)/2}^{\pm}(\zeta; \rho') &= \chi_{\beta}^{\pm}(\zeta) \cdot \begin{cases} \mp \frac{iA_{\mp}\Gamma(1 \pm \nu - \frac{\gamma}{2})}{\zeta(\rho')^{\pm 2\nu+1}\Gamma(\mp \nu - \frac{\gamma}{2})} \\ \quad \times (1 + O_{\zeta}(|\rho'|^{-1-\gamma})) & \text{в случае I,} \\ \pm \frac{iA_{\mp}\Gamma(1 - \frac{\pm\mu - \hat{\gamma}}{2})}{\zeta(\rho')^{\mp \mu+1}\Gamma(\frac{\pm\mu + \hat{\gamma}}{2})} \\ \quad \times (1 + O_{\zeta}(|\rho'|^{-1-\gamma})) & \text{в случае II,} \end{cases} \quad (13.6) \\ \varphi_3^+(\zeta; \rho') &= \chi_{\beta}^+(\zeta) \zeta^{-1} (1 + O_{\zeta}(|\rho'|^{-1})), \\ \varphi_3^-(\zeta; \rho') &= -\chi_{\beta}^-(\zeta) \zeta^{-1} \frac{\Gamma(\frac{\hat{\gamma} + \mu}{2})}{\Gamma(\frac{\hat{\gamma} - \mu}{2})} A_+(\rho')^{-\mu} (1 + O_{\zeta}(|\rho'|^{-\gamma})), \end{aligned}$$

где $|O_\zeta(|\rho'|^{-\alpha})| \leq C(\zeta; \beta)|\rho'|^{-\alpha}$. Используя в (13.3)–(13.5) эти формулы, а также замечание 1.1, получим асимптотику собственных значений рассматриваемого нами оператора.

ТЕОРЕМА 13.1. *Оператор K (1.6) с образом Фурье ядра вида (1.3) имеет бесконечное число собственных значений при всех k и δ из (1.3), за исключением вольтеррова случая, т. е. случая, соответствующего $k = 1$, $|\delta| = \pi\gamma/2$. Собственные значения λ_l при больших l допускают следующие асимптотические представления.*

1°. При $\delta = 0$

$$\lambda_l = \left(\frac{2\pi l}{(1+k^{\frac{1}{\gamma}})T} \right)^{-\gamma} \left[1 + \frac{i\gamma}{2\pi l} \ln \left(-\frac{a_2}{a_1} \right) + \frac{\delta_{-2}}{(2\pi l)^2} + \frac{\delta_{-2-2\nu} \exp\left(\frac{i2\pi l}{1+k^{\frac{1}{\gamma}}}\right)}{(2\pi l)^{2\nu+2}} + \frac{\delta_{-2+2\nu} \exp\left(\frac{i2\pi l}{1+k^{\frac{1}{\gamma}}}\right)}{(2\pi l)^{-2\nu+2}} + O(l^{-2-\gamma}) \right]. \quad (13.7)$$

2°. При $\delta \neq 0$ собственные значения можно разбить на две серии λ_l^+ и λ_l^- , для каждой из которых справедливы асимптотические представления

$$\begin{aligned} \lambda_l^+ &= k e^{i\delta} \left(\frac{2\pi l}{T} \right)^{-\gamma} \left[1 - i\hat{\mu}\gamma \frac{\ln 2\pi l}{2\pi l} - \frac{\hat{\mu}(\delta + \beta_+ \gamma - i \ln k) + i\gamma \ln a_{\beta_+}(\zeta_{\text{п}})}{2\pi l} + O(|l|^{-1-\gamma}) \right], \\ \lambda_l^- &= e^{-i\delta} \left(\frac{2\pi l}{T} \right)^{-\gamma} \left[1 + i\hat{\mu}\gamma \frac{\ln 2\pi l}{2\pi l} - \frac{\hat{\mu}(\delta - \beta_- \gamma) - i\gamma \ln a_{\beta_-}(\zeta_{\text{п}})}{2\pi l} + O(|l|^{-1-\gamma}) \right]. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Здесь l – натуральное, $l \rightarrow +\infty$,

$$\hat{\mu} = -2\nu + \text{sign } \delta, \quad (13.9)$$

δ_{-2} , $\delta_{-2-2\nu}$, $\delta_{-2+2\nu}$, a_1 , a_2 , $a_{\beta_-}(\zeta_{\text{п}})$, $a_{\beta_+}(\zeta_{\text{п}})$ – некоторые числа, причем

$$a_1 = -\chi_0^-(\zeta_{\text{л}})\chi_0^+(\zeta_{\text{п}}), \quad a_2 = -\chi_0^+(\zeta_{\text{л}})\chi_0^-(\zeta_{\text{п}}), \quad (13.10)$$

где корни $\zeta_{\text{л}}$, $\zeta_{\text{п}}$ вычисляются по формулам (3.24) при $\beta = 0$,

$$a_{\beta}(\zeta) = A_- \frac{\chi_{\beta}^+(\zeta)\Gamma\left(\frac{(1-\gamma)-\hat{\mu}}{2}\right)}{\chi_{\beta}^-(\zeta)\Gamma\left(\frac{(1-\gamma)+\hat{\mu}}{2}\right)} \cdot \begin{cases} i(\zeta)^{\text{sign } \delta} & \text{при } |\delta| < \pi\gamma/2, \\ 1 & \text{при } |\delta| \geq \pi\gamma/2, \end{cases} \quad (13.11)$$

числа $\beta_{\mp}$, фигурирующие в (13.8) и используемые при вычислении корней $\zeta_{\text{л}}$ и $\zeta_{\text{п}}$ в этих формулах, можно взять произвольными, принадлежащими интервалам $(-\frac{|\delta|}{\gamma} \pm \frac{\pi}{2} \text{sign } \delta, \frac{|\delta|}{\gamma} \pm \frac{\pi}{2} \text{sign } \delta)$ при $|\delta| < \frac{\pi\gamma}{2}$ и $(-\frac{\pi}{2} \pm \frac{\delta}{\gamma}, \frac{\pi}{2} \pm \frac{\delta}{\gamma})$ при $|\delta| \geq \frac{\pi\gamma}{2}$; ν определено в (1.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала справедливость (13.8). При $|\delta| < \pi\gamma/2$ выберем числа $\beta_{\mp} \in (-\frac{|\delta|}{\gamma} \pm \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \delta, \frac{|\delta|}{\gamma} \pm \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \delta)$ так, чтобы два сектора $-\frac{\pi}{2} + \beta_{\mp} + \varepsilon < \arg \rho < \frac{\pi}{2} + \beta_{\mp} - \varepsilon$ пересекались при достаточно малом $\varepsilon > 0$, например $\beta_{\mp} = \pm \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \delta \mp \delta/(2\gamma)$. Нетрудно видеть, что эти секторы при достаточно малом ε покроют сектор (3.13). Таким образом, в качестве β в (13.4) можно использовать эти два значения $\beta_{\mp}$. В случае $|\delta| \geq \pi\gamma/2$ заметим, что если при некотором β оба частных индекса задачи (3.17) равны нулю, то в секторе $\beta - \frac{\pi}{2} + \varepsilon < \arg \rho < \beta + \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ при достаточно больших $|\rho|$ не существует нетривиальных решений задачи (3.17), стремящихся к нулю при $|\zeta| \rightarrow \infty$, и, следовательно, не существуют собственные значения. Поэтому, как следует из табл. 9 (см. § 12) и условия (3.16), характеристические значения ρ_l , соответствующие собственным значениям λ_l , могут быть асимптотически расположены только в секторах $\pm\delta/\gamma - \varepsilon < \arg \rho < \pm\delta/\gamma + \varepsilon$ и, таким образом, в (13.5) достаточно ограничиться значениями $\beta_{\mp} = \pm\delta/\gamma$.

Обращаясь к формулам (13.6), нетрудно видеть, что уравнения (13.4) и (13.5) могут быть преобразованы к одному виду:

$$e^{-i\zeta_j \rho'} = a_{\beta}(\zeta_j)(\rho')^{\hat{\mu}} [1 + O(|\rho'|^{-\gamma})], \quad |\arg \rho'| < \pi/2 - \varepsilon, \quad (13.12)$$

где $\zeta_j = \zeta_l$ при $\beta = \beta_-$ и $\zeta_j = \zeta_n$ при $\beta = \beta_+$, $a_{\beta}(\zeta)$ и $\hat{\mu}$ определены (13.11) и (13.9) соответственно. Используя формулы (3.24) и (3.14), перепишем (13.12) в виде

$$\begin{aligned} \exp(ie^{-i\frac{\delta}{\gamma}} \rho) &= a_{\beta_-}(\zeta_l) e^{-i\hat{\mu}\beta_-}(\rho)^{\hat{\mu}} [1 + O(|\rho|^{-\gamma})], \quad |\arg \rho - \beta_-| < \pi/2 - \varepsilon, \\ \exp(-ik^{\frac{1}{\gamma}} e^{i\frac{\delta}{\gamma}} \rho) &= a_{\beta_+}(\zeta_n) e^{-i\hat{\mu}\beta_+}(\rho)^{\hat{\mu}} [1 + O(|\rho|^{-\gamma})], \quad |\arg \rho - \beta_+| < \pi/2 - \varepsilon. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Логарифмируя уравнения (13.13), приведем их к эквивалентным совокупностям уравнений

$$\rho = \Psi_l^{\mp}(\rho) + O(|\rho|^{-\gamma}), \quad (13.14)$$

где l – натуральное число, а

$$\begin{aligned} \Psi_l^{-}(\rho) &= e^{i\frac{\delta}{\gamma}} [2\pi l - i\hat{\mu} \ln \rho - \beta_- \hat{\mu} - i \ln a_{\beta_-}(\zeta_l)], \\ \Psi_l^{+}(\rho) &= k^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-i\frac{\delta}{\gamma}} [2\pi l + i\hat{\mu} \ln \rho + \beta_+ \hat{\mu} + i \ln a_{\beta_+}(\zeta_n)]. \end{aligned}$$

Отметим, что секторы

$$\pm\delta/\gamma - \varepsilon_1 < \arg \rho < \pm\delta/\gamma + \varepsilon_1, \quad (13.15)$$

где $\varepsilon_1 > 0$ – достаточно малое, содержатся в секторе (3.13) при ε – также достаточно малом.

Нетрудно видеть, сравнивая порядки возрастания левых и правых частей уравнений (13.13), что вне секторов (13.15) не может существовать достаточно больших по модулю решений этих уравнений. Таким образом, все решения уравнений (13.13), начиная с достаточно большого по модулю значения, лежат в секторах (13.15). Нетрудно также убедиться в том, что функции $\Psi_l^{\mp}(\rho)$ в областях

$\pm\delta/\gamma - \varepsilon_1 \leq \arg \rho \leq \pm\delta/\gamma + \varepsilon_1$, $2\pi l(1 - \varepsilon_2) \leq |\rho| \leq 2\pi l(1 + \varepsilon_2)$ при $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2/(1 - \varepsilon_2) \leq 1/4$, начиная с достаточно большого l , удовлетворяют условиям принципа сжатых отображений, откуда следует, что в каждом таком множестве (при фиксированном l) соответствующее уравнение $\rho = \Psi_l^\mp(\rho)$ имеет единственное решение вида $\tilde{\rho}_l^\mp = \rho_l^\mp + O(\frac{\ln l}{l})$, где

$$\rho_l^\mp = \begin{cases} e^{i\frac{\delta}{\gamma}} \left[2\pi l - i\hat{\mu} \ln 2\pi l + \hat{\mu} \left(\frac{\delta}{\gamma} - \beta_- \right) - i \ln a_{\beta_-}(\zeta_l) \right], \\ k^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-i\frac{\delta}{\gamma}} \left[2\pi l + i\hat{\mu} \ln 2\pi l + \hat{\mu} \left(\frac{\delta}{\gamma} + \beta_+ - \frac{i}{\gamma} \ln k \right) + i \ln a_{\beta_+}(\zeta_l) \right]. \end{cases} \quad (13.16)$$

Далее, применяя теорему Руше, нетрудно установить, что уравнения (13.14), начиная с достаточно больших l , имеют единственные решения вида

$$\rho_l^\mp = \rho_l^\mp + O(|l|^{-\gamma}) \quad (13.17)$$

в областях $\pm\delta/\gamma - \varepsilon_1 < \arg \rho < \pm\delta/\gamma + \varepsilon_1$, $|\rho'| > \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ достаточно велико. Ясно также, что $\beta_\mp$ можно выбрать произвольными из интервалов, приведенных в конце формулировки теоремы 13.1. Возводя (13.17) в степень $-\gamma$ и используя формулы (13.16) и замечание 1.1, приходим к (13.8).

Чтобы получить (13.7), преобразуем (13.3) к виду

$$\delta_{l,\Pi}^{+,+}(\rho) + \delta_{l,\Pi}^{-,+}(\rho)e^{-i\zeta_l\rho} + \delta_{l,\Pi}^{+,-}(\rho)e^{-i\zeta_\Pi\rho} + \delta_{l,\Pi}^{-,-}(\rho)e^{-i(\zeta_l+\zeta_\Pi)\rho} = 0; \quad (13.18)$$

здесь $\beta = 0$, $\rho' = \rho$ (в силу условий (3.16) и (3.13) достаточно ограничиться значением $\beta = 0$),

$$\delta_{l,\Pi}^{\pm,\pm}(\rho) = \begin{vmatrix} \varphi_1^\pm(\zeta_l; \rho) & \varphi_2^\pm(\zeta_l; \rho) \\ \varphi_1^\pm(\zeta_\Pi; \rho) & \varphi_2^\pm(\zeta_\Pi; \rho) \end{vmatrix}, \quad \delta_{l,\Pi}^{\mp,\pm}(\rho) = \begin{vmatrix} \varphi_1^\mp(\zeta_l; \rho) & \varphi_2^\mp(\zeta_l; \rho) \\ \varphi_1^\pm(\zeta_\Pi; \rho) & \varphi_2^\pm(\zeta_\Pi; \rho) \end{vmatrix}$$

и эти детерминанты являются аналитическими функциями ρ в секторе $|\arg \rho| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ — достаточно малое, при $|\rho| > \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ — достаточно большое. Используя формулы (13.6) и (3.24), преобразуем (13.18) к виду

$$\begin{aligned} \Delta(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{a^+ [1 + O(|\rho|^{-\gamma})]}{(\rho)^{2\nu+1}} + a_1 \left[1 + \frac{\alpha_1}{\rho} + O(|\rho|^{-1-\gamma}) \right] e^{i\rho} \\ + a_2 \left[1 - \frac{\alpha_1}{\rho} + O(|\rho|^{-1-\gamma}) \right] e^{-ik^{\frac{1}{\gamma}}\rho} + \frac{a^- [1 + O(|\rho|^{-\gamma})]}{(\rho)^{-2\nu+1}} e^{i(1-k^{\frac{1}{\gamma}})\rho} = 0, \end{aligned} \quad (13.19)$$

где a_1, a_2 определены в (13.10),

$$\begin{aligned} a^\pm &= -2ik^{-\frac{1}{2\gamma}} \cos\left(\frac{\pi\nu}{\gamma}\right) A_\mp \frac{\Gamma(1 \pm \nu - \gamma/2)}{\Gamma(\mp \nu - \gamma/2)} \chi_0^\pm(\zeta_l) \chi_0^\mp(\zeta_\Pi), \\ \alpha_1 &= 2i \left(\left(\frac{\gamma}{2} \right)^2 - \nu^2 \right) k^{-\frac{1}{2\gamma}} \cos\left(\frac{\pi\nu}{\gamma}\right). \end{aligned} \quad (13.20)$$

В полосе $|\operatorname{Im} \rho| \geq A$, где A – некоторое достаточно большое число, $\Delta(\rho) \neq 0$ при достаточно больших $|\rho|$, и поэтому нет корней уравнения (13.19). Действительно, например, при $\operatorname{Im} \rho \geq A$, объединяя в выражении (13.19) третий член с четвертым, а также первый член со вторым, имеем

$$|\Delta(\rho)| > (|a_2 + O(|\rho|^{-1})| - e^{-A} O(|\rho|^{-\gamma})) e^{k \frac{1}{\gamma} A} - O(|\rho|^{-\gamma}) - |a_1 + O(|\rho|^{-1})| e^{-A} > 0$$

при достаточно большом A и $\rho > \mathcal{R}$. Поэтому для нахождения асимптотики решений уравнения (13.19) можно ограничиться проведением рассмотрений в полосе $|\operatorname{Im} \rho| \leq A$, где A достаточно велико.

Умножая (13.19) на $e^{ik \frac{1}{\gamma} \rho}$, выделяя в левую часть уравнения только $e^{i(1+k \frac{1}{\gamma}) \rho}$, логарифмируя получившееся после этого уравнение, с учетом ограниченности экспонент $e^{i\rho}$, $e^{ik \frac{1}{\gamma} \rho}$ в полосе $|\operatorname{Im} \rho| \leq A$ приходим к эквивалентной уравнению (13.19) при достаточно больших $|\rho|$ совокупности уравнений:

$$i(1 + k \frac{1}{\gamma}) \rho = i2\pi l + \ln \left(-\frac{a_2}{a_1} \right) - \frac{2\alpha_1}{\rho} + \frac{a^+ e^{ik \frac{1}{\gamma} \rho}}{a_2(\rho)^{2\nu+1}} + \frac{a^- e^{i\rho}}{a_2(\rho)^{-2\nu+1}} + O(|\rho|^{-1-\gamma}), \quad (13.21)$$

где l – натуральное. Отсюда с помощью теоремы Руше получаем, что при достаточно больших l существуют (при каждом фиксированном l) единственные решения уравнений (13.21) в полосе $|\operatorname{Im} \rho| \leq A$ для $|\rho| > \mathcal{R}$, имеющие вид

$$\rho_l = \frac{2\pi l}{1 + k \frac{1}{\gamma}} - \frac{i}{1 + k \frac{1}{\gamma}} \ln \left(-\frac{a_2}{a_1} \right) + \frac{\delta_{-1}}{2\pi l} + \sum_{\pm} \frac{\delta_{-1 \pm 2\nu} \exp \left(\frac{i2\pi l}{1 + k \frac{1}{\gamma}} \right)}{(2\pi l)^{1 \mp 2\nu}} + O(|l|^{-1-\gamma}), \quad (13.22)$$

где

$$\delta_{-1} = 2i\alpha_1, \quad \delta_{-1 \mp 2\nu} = -i \frac{a^{\pm}}{a_2} \left(-\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{1}{1+k \frac{1}{\gamma}}} (1 + k \frac{1}{\gamma})^{\pm 2\nu}.$$

Возводя (13.22) в степень $-\gamma$ и учитывая замечание 1.1, приходим к разложению (13.7). Теорема 13.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 13.1. В случае $\delta = 0$, $k = 1$, т.е. когда $\nu = 0$, величина $-a_2/a_1$ может быть достаточно просто вычислена (см. [11]):

$$-a_2/a_1 = e^{i\pi(1-\frac{\gamma}{2})}.$$

Кроме того, $\exp \left(\frac{i2\pi l}{1+k \frac{1}{\gamma}} \right) = \exp \left(\frac{i2\pi l}{1+k \frac{1}{\gamma}} \right) = (-1)^l$, и из формулы (13.7) следует, что в этом случае собственные значения оператора (1.6) можно разбить на две серии λ_n^+ и λ_n^- , соответствующие четным и нечетным номерам l из (13.7), для каждой из которых справедливо асимптотическое разложение

$$\lambda_n^{\pm} = \left(\frac{2\pi n}{T} \right)^{-\gamma} \left[1 \mp \frac{\gamma(1 \mp \frac{\gamma}{2})}{4n} + \frac{\delta_{\mp 2}^{\pm}}{n^2} + O(n^{-2-\gamma}) \right]. \quad (13.23)$$

Для получения (13.23) необходимо положить в (13.7) $l = 2n$ и $l = 2n - 1$ соответственно.

Список литературы

1. *Пальцев Б. В.* Асимптотика спектра и собственных функций интегральных операторов свертки на конечном интервале с однородным преобразованием Фурье ядра // ДАН СССР. 1974. Т. 218. №1. С. 28–31.
2. *Rosenblatt M.* Some results on the asymptotic behaviour of eigenvalues for a class of integral equations with translation kernels // J. Math. Mech. 1963. V. 12. № 4. P. 619–628.
3. *Widom H.* Asymptotic behaviour of the eigenvalues of certain integral equations. I // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 109. № 2. P. 278–295.
4. *Widom H.* Asymptotic behaviour of the eigenvalues of certain integral equations. II // Arch. Rat. Mech. Anal. 1964. V. 17. № 3. P. 215–229.
5. *Евграфов М. А.* Об одном интегральном преобразовании и его применении к оценке числа собственных значений некоторых интегральных операторов // Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 17. С. 273–292.
6. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра слабо полярных операторов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1970. Т. 34. №6. С. 1142–1158.
7. *Мордасова Г. М.* Асимптотика собственных значений линейного интегрального уравнения с разрывным ядром // ДАН СССР. 1962. Т. 42. №5. С. 1023–1025.
8. *Захар-Иткин М. Х.* О росте собственных чисел линейного интегрального уравнения // Вестн. МГУ. Математика, механика. 1966. №4. С. 3–19.
9. *Пальцев Б. В.* Асимптотическое поведение собственных значений операторов свертки на конечном интервале с ядрами, преобразования Фурье которых рациональны // ДАН СССР. 1970. Т. 194. №4. С. 774–777.
10. *Пальцев Б. В.* Разложение по собственным функциям интегральных операторов свертки на конечном интервале с ядрами, преобразования Фурье которых рациональны. “Слабо” несамосопряженные регулярные ядра // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1972. Т. 36. №3. С. 591–634.
11. *Ukai S.* Asymptotic distribution of eigenvalues of the kernel in the Kirkwood–Riseman integral equation // J. Math. Phys. 1971. V. 12. № 1. P. 83–92.
12. *Гахов Ф. Д.* Краевая задача Римана для систем n пар функций // УМН. 1952. Т. 7. №4. С. 3–54.
13. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970.
14. *Мухелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
15. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // УМН. 1958. Т. 13. №2. С. 3–73.
16. *Ганин М. П.* Об одном интегральном уравнении Фредгольма с ядром, зависящим от разности аргументов // Изв. вузов. “Математика”. 1963. Т. 13. №2. С. 31–34.
17. *Шубин М. А.* Факторизация зависящих от параметра матриц-функций в нормированных кольцах и связанные с ней вопросы теории нетеровских операторов // Матем. сб. 1967. Т. 73. №4. С. 610–629.
18. *Шубин М. А.* Факторизация матриц, зависящих от параметра и эллиптические уравнения в полупространстве // Матем. сб. 1971. Т. 85. №1. С. 65–84.
19. *Копсон Э.* Асимптотические разложения. М.: Мир, 1966.
20. *Хиршман И. И., Уиддер Д. В.* Преобразования типа свертки. М.: ИЛ, 1958.
21. *Хведелидзе Б. В.* Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения // Тр. Тбилис. матем. ин-та. 1956. Т. XXIII. С. 3–158.
22. *Гитчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.–Л.: Гостехиздат, 1948.
23. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Ч. II. Трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1963.
24. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973.
25. *Владимиров В. С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.

26. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. II. М.: Наука, 1976.
27. *Кон Дж. Дж., Ниренберг Л.* Алгебра псевдодифференциальных операторов // Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1967. С. 9–62.
28. *Пальцев Б. В.* О задаче Дирихле для одного псевдодифференциального уравнения, встречающегося в теории случайных процессов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. № 6. С. 1348–1387.
29. *Пальцев Б. В.* Уравнения свертки на конечном интервале для одного класса символов, имеющих степенную асимптотику на бесконечности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. № 2. С. 322–393.
30. *Пальцев Б. В.* Обобщение метода Винера–Хопфа для уравнений свертки на конечном интервале с символами, имеющими степенную асимптотику на бесконечности // Матем. сб. 1980. Т. 113. № 3. С. 355–399.
31. *Пальцев Б. В.* Об одном методе построения канонической матрицы решений задачи Гильберта, возникающей при решении уравнений свертки на конечном интервале // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 6. С. 1332–1390.
32. *Пальцев Б. В.* О канонической матрице решений задачи линейного сопряжения с кусочно-непрерывным матричным коэффициентом на элементарной кусочно-гладкой кривой // ДАН СССР. 1987. Т. 297. № 5. С. 1054–1058.
33. *Пальцев Б. В.* Об условиях, обеспечивающих непрерывность вплоть до контура и степенное поведение в окрестностях узловых точек решений однородной задачи линейного сопряжения с кусочно-непрерывным матричным коэффициентом // ДАН СССР. 1988. Т. 299. № 3. С. 558–562.
34. *Хведелидзе Б. В.* Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной // Итоги науки и техники. Сер. “Современные проблемы математики”. Т. 7. М.: ВИНТИ, 1975. С. 5–162.

Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН
E-mail: paltsev@ccas.ru

Поступило в редакцию
23.V.2002