Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Борисов, В. В. Гаель, М. И. Зеликин, Режимы с учащающимися переключениями и лагранжевы многообразия в задачах с фазовыми ограничениями, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 1, 3–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4435>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:55:07

УДК 517.977

В. Ф. Борисов

, В. В. Гаяль, М. И. Зеликин

Режимы с учащающимися переключениями и лагранжевы многообразия в задачах с фазовыми ограничениями

Для класса задач оптимального управления с фазовыми ограничениями найдена конструкция лагранжева многообразия, включающего экстремали со счетным числом касаний границы фазового ограничения. В основе построения лежит процедура разрешения особенностей гамильтоновой системы задачи в точке накопления точек контакта экстремалей с границей фазового ограничения.

Библиография: 9 наименований.

Ключевые слова: фазовые ограничения, принцип максимума Понтрягина, лагранжевы многообразия, чаттеринг-режимы, раздутие.

§ 1. Введение

В настоящей работе мы предлагаем метод построения синтеза в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями, включающего траектории с накоплением точек выхода на границу фазового ограничения. Отправной точкой нашего исследования послужили работы А. А. Милютина [1], [2], в которых было доказано существование таких траекторий для двух близких между собой задач с фазовыми ограничениями. Особенностью этих задач является наличие однопараметрической группы симметрий, а доказательство существования экстремалей со счетным числом выходов на границу фазового ограничения было основано на поиске автомодельного решения, инвариантного относительно действия некоторой дискретной подгруппы группы симметрий.

Ранее, в работах авторов [3], [4], встречалась похожая ситуация. Мы рассматривали класс разрывных гамильтоновых систем, правая часть которых претерпевает тангенциальный разрыв в точках некоторой регулярной гиперповерхности. Подобные разрывы типичны для систем, удовлетворяющих принципу максимума Л. С. Понтрягина. При этом главная (нелинейная) часть рассматриваемых систем представляла собой систему с однопараметрической группой симметрий и обладала семейством автомодельных решений, пересекающих поверхность разрыва по счетной последовательности точек на конечном интервале времени. Мы доказали, что возмущение главной части системы в достаточно широком классе гамильтоновых систем хотя и разрушает инвариантность относительно действия группы симметрий, но сохраняет существование

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 08-01-00474-а, 10-01-00293-а).

расслоения с кусочно гладкими слоями, заполненными траекториями со счетным числом пересечений с поверхностью разрыва. Для доказательства использовалась процедура разрешения особенности гамильтоновой системы в точке накопления переключений, а затем теорема об инвариантном многообразии диффеоморфизма с гиперболической особенностью в неподвижной точке.

Оказалось, что методы геометрической теории управления можно распространить и на решение задач с фазовыми ограничениями. В настоящей работе мы, отталкиваясь от задач А. А. Милютина, предлагаем конструкцию стратифицированного лагранжева многообразия расширенного фазового пространства. Это многообразие примыкает к границе фазового ограничения Γ и содержит экстремали со счетным числом точек выхода на границу. В точке выхода на фазовое ограничение лагранжево многообразие имеет особенность, так что при подходе к ней каждая индивидуальная траектория претерпевает скачок. Это не мешает, однако, использовать технику инвариантного интеграла Гильберта для доказательства лагранжевости многообразия, заполненного траекториями построенного семейства.

В работах [1], [2] для двух конкретных задач с фазовыми ограничениями были найдены автомодельные оптимальные траектории, выходящие на границу фазового ограничения со счетным числом точек касания границы Γ . В настоящей работе для этих двух задач построен оптимальный синтез и описана геометрия всех оптимальных траекторий с помощью построения стратифицированного лагранжева многообразия и разрешения особенности отображения последования Пуанкаре границы Γ на себя. Это позволило существенно расширить класс изучаемых задач. Разработанная нами техника позволила описать структуру стратифицированных лагранжевых многообразий, порожденных соответствующей гамильтоновой системой, для задач А. А. Милютина. Мы выделяем класс задач с фазовыми ограничениями, которые можно в определенном смысле рассматривать как возмущения соответствующих задач с симметрией, и доказываем сохранение лагранжевых подмногообразий с указанными свойствами.

Необходимые условия оптимальности для задач с фазовыми ограничениями были получены еще в работе Л. С. Понтрягина и его учеников [5] при создании теории оптимального управления. Затем они были уточнены многими авторами (см., например, работы [6]–[9]). Приведем формулировку принципа максимума для задач с фазовыми ограничениями в удобной для нас форме.

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x, u) dt &\rightarrow \min, \\ \dot{x} &= \varphi(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^k, \\ x(0) &= x_0, \quad x(T) \in M \subset \mathbb{R}^n, \\ \Phi(x(t)) &\leq 0 \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь фазовая траектория $x(\cdot)$ есть абсолютно непрерывная функция от t ; управление $u(\cdot)$ – измеримая функция, принимающая значения в некотором компактном подмножестве U ; M – гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ (многообразие цели); $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ – функция, задающая фазовое ограничение. Будем

предполагать, что все функции являются достаточно гладкими, а многообразие M и граница фазового ограничения $\Gamma = \{x \mid \Phi(x) = 0\}$ являются гладкими регулярными подмногообразиями в $\mathbb{R}^n$.

Пусть пара $(x(\cdot), u(\cdot))$ является решением задачи (1.1). Предположим, что траектория $x(\cdot)$ выходит на границу Γ фазового ограничения в моменты времени, принадлежащие двум непересекающимся множествам: во-первых, в точках не более чем счетного множества $U_1 = \{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$ и, во-вторых, в точках некоторого множества $U_2 \subset [0, T]$ положительной меры. Пусть U_2 представляет собой объединение не более чем счетного набора непересекающихся отрезков.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В принципе, на оптимальной траектории могло бы реализоваться и более сложное множество $\mathcal{S}$ выхода оптимальной траектории на границу Γ фазового ограничения (например, канторово множество положительной меры). Однако в рассмотренных нами классах задач единственной нетривиальной особенностью множества $\mathcal{S}$ является счетное множество точек контакта оптимальной траектории с Γ на конечном интервале времени. Этот факт следует из единственности оптимальных траекторий и доказанной в теореме 4.2 и следствии 4.1 оптимальности построенного синтеза.

Тогда найдутся не равные одновременно нулю:

- а) число $\lambda_0 \geq 0$,
- б) функции $\psi(\cdot): [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$,
- в) набор неотрицательных чисел $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots\}$ (каждое δ_i отвечает точке t_i множества U_1),
- г) неотрицательная мера $d\xi \geq 0$, носитель которой принадлежит множеству U_2 ,

для которых выполнены следующие соотношения:

$$d\psi = -\frac{\partial H}{\partial x} dt - \nu_0(t) d\xi, \quad (1.2)$$

$$\max_{u \in U} H(t, \psi(t), x(t), u) = H(t, \psi(t), x(t), u(t)) \quad \text{п. в. на } [0, T] \setminus U_2. \quad (1.3)$$

В точках множества U_1 функция $\psi(t)$ претерпевает скачок первого рода, и при этом

$$\psi(t_n + 0) - \psi(t_n) = -\delta_n \nu_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.4)$$

Здесь

$$H(t, \psi, x, u) = -\lambda_0 f(t, x, u) + \psi \varphi(t, x, u)$$

– функция Понтрягина задачи (1.1), $\nu_i(x(t)) \in \partial \Phi|_{x(t) \in \Gamma}$, $i = 0, 1, \dots$, – векторы, перпендикулярные к границе Γ фазового ограничения $\Phi(x) \leq 0$, направленные внутрь области $\Phi(x) < 0$.

Кроме того, выполнены обычные условия трансверсальности $\psi(T) \perp T_{x(T)}M$ в точке выхода траектории $x(\cdot)$ на многообразие цели M .

Соотношения (1.2), (1.3) во внутренних точках фазового ограничения ($\Phi < 0$) – это обычный принцип максимума Л. С. Понтрягина, как для задач без фазовых ограничений. Условие (1.2) означает, что при движении вдоль

границы фазового ограничения скорость сопряженных переменных может изменяться в направлении, перпендикулярном к границе фазового ограничения. Условие (1.4) означает, что в точках касания экстремали и фазового ограничения сопряженные переменные могут претерпевать скачок в направлении, перпендикулярном к границе фазового ограничения.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В работе [6] выписываются условия, при которых мера $d\xi$ в уравнении (1.2) не имеет сингулярной составляющей, т.е. мера $d\xi$ задается с помощью некоторой монотонно неубывающей функции $\xi(t)$ ограниченной вариации, постоянной всюду вне U_2 , $d\xi = \dot{\xi}(t) dt$. В задачах, которые будут рассмотрены в настоящей статье, непосредственно проверяется, что движение экстремалей вдоль границы фазового ограничения возможно только на некотором замкнутом отрезке времени (а не на канторовом множестве положительной меры, например). Поэтому для этих задач можно доказать отсутствие сингулярной составляющей меры $d\xi$.

§ 2. Автомодельные решения в задаче с симметрией

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу (см. [1])

$$\int_0^T y dt \rightarrow \min, \quad (2.1)$$

$$\dot{y} = z, \quad \dot{z} = w, \quad \dot{w} = u, \quad u \in [-1, 1], \quad (2.2)$$

$$y \geq 0,$$

$$y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0, \quad w(0) = w_0, \quad y(T) = z(T) = w(T) = 0. \quad (2.3)$$

Допустимыми считаются абсолютно непрерывные функции $y(\cdot)$, $z(\cdot)$, $w(\cdot)$ и измеримая функция $u(\cdot)$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (2.2) и граничным условиям (2.3). Особенностью задачи является наличие фазового ограничения $y \geq 0$.

Поскольку множество допустимых траекторий $*$ -слабо компактно, а минимизируемый функционал полунепрерывен снизу, решение задачи (2.1)–(2.3) существует всегда, когда найдется хотя бы одна допустимая траектория, которая удовлетворяет граничным условиям и на которой интеграл (2.1) сходится. Сформулируем необходимые и достаточные условия оптимальности соответствующих траекторий.

Пусть $(\hat{y}(\cdot), \hat{z}(\cdot), \hat{w}(\cdot))$ – оптимальная траектория задачи (2.1)–(2.3), определенная на некотором отрезке $[0, T]$, и $\hat{u}(\cdot)$ – управление на ней. Предположим, что траектория пересекает границу фазового ограничения $y = 0$ в точках двух множеств: во-первых, в точках не более чем счетного множества $U_1 = \{t_n\}$ и, во-вторых, в точках некоторого множества положительной меры $U_2 = \bigcup_n [a_n, b_n]$. Выпишем функцию Понтрягина

$$H(\psi_1, \psi_2, \psi_3, y, z, w, u) = \psi_1 z + \psi_2 w + \psi_3 u - \lambda_0 y.$$

Сопряженная система уравнений имеет вид

$$\dot{\psi}_1 = \lambda_0 - \dot{\xi}(t), \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_3 = -\psi_2. \quad (2.4)$$

Здесь $\xi(t)$ – монотонно неубывающая функция ограниченной вариации, постоянная вне множества U_2 , $\lambda_0 \geq 0$.

Условие максимума имеет вид

$$\max_{u \in [-1, 1]} \psi_3(t)u = \psi_3(t)\hat{u}(t) \quad \text{п. в. на } [0, T]. \quad (2.5)$$

Решения сопряженной системы (2.4) являются абсолютно непрерывными функциями всюду, за исключением, возможно, точек множества U_1 , в которых функция $\psi(t)$ может иметь скачки первого рода

$$\psi_1(t_n + 0) - \psi_1(t_n) = -\delta_n \leq 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

Поскольку наша задача принадлежит классу задач выпуклого программирования, необходимые условия в данной задаче одновременно являются и достаточными. Проверим это.

Предположим, что траектория $(\hat{y}(\cdot), \hat{z}(\cdot), \hat{w}(\cdot))$ с управлением $\hat{u}(\cdot)$ определена на некотором отрезке $[0, T]$ и удовлетворяет соотношениям (2.2)–(2.6) при $\lambda_0 \neq 0$. Тогда без ограничения общности можно считать, что $\lambda_0 = 1$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Траектория $(\hat{y}(\cdot), \hat{z}(\cdot), \hat{w}(\cdot))$ является оптимальной в задаче (2.1)–(2.3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(y(\cdot), z(\cdot), w(\cdot))$ – произвольная допустимая траектория задачи (2.1)–(2.3) с управлением $u(\cdot)$ и теми же граничными условиями. Доопределив, если потребуется, траекторию $(\hat{y}(\cdot), \hat{z}(\cdot), \hat{w}(\cdot))$ или $(y(\cdot), z(\cdot), w(\cdot))$ тождественным нулем, получим, что обе траектории будут определены на одном и том же отрезке времени $[0, T]$. Проинтегрируем соотношение

$$u(t)\psi_3(t) \leq \hat{u}(t)\psi_3(t)$$

по отрезку $[0, T]$ с учетом одинаковых граничных условий:

$$\begin{aligned} \int_0^T u(t)\psi_3(t) dt &\leq \int_0^T \hat{u}(t)\psi_3(t) dt \Leftrightarrow \int_0^T \psi_3(t) dw(t) \leq \int_0^T \psi_3(t) d\hat{w}(t), \\ \int_0^T w(t)\psi_2(t) dt &\leq \int_0^T \hat{w}(t)\psi_2(t) dt \Leftrightarrow \int_0^T \psi_2(t) dz(t) \leq \int_0^T \psi_2(t) d\hat{z}(t), \\ \int_0^T z(t)\psi_1(t) dt &\leq \int_0^T \hat{z}(t)\psi_1(t) dt \Leftrightarrow \int_0^T \psi_1(t) dy(t) \leq \int_0^T \psi_1(t) d\hat{y}(t). \end{aligned}$$

Очередное интегрирование по частям требует аккуратности, поскольку в точках выхода траектории $\hat{y}(t)$ на границу фазового ограничения $y = 0$ функция $\psi_1(t)$ претерпевает разрыв первого рода в точках множества U_1 и имеет скачок производной в точках множества U_2 :

$$\begin{aligned} \sum_n y(t_n)\delta_n - \int_{[0, T] \setminus U_1} y(t) d\psi_1(t) &\leq - \int_0^T \hat{y}(t) d\psi_1(t) \\ &- \int_{[0, T] \setminus (U_1 \cup U_2)} y(t) dt + \sum_n y(t_n)\delta_n + \int_{U_2} y(t) d\xi(t) \leq - \int_0^T \hat{y}(t) dt. \end{aligned}$$

Перегруппировав слагаемые, с учетом неравенства $y(t) \geq 0$ получим

$$\int_0^T \widehat{y}(t) dt \leq \int_0^T y(t) dt - \sum_n y(t_n) \delta_n - \int_{U_2} y(t) d\xi(t).$$

Поскольку $y(t) \geq 0$, $\delta_n \geq 0$ и $d\xi(t) \geq 0$, получаем требуемое соотношение

$$\int_0^T \widehat{y}(t) dt \leq \int_0^T y(t) dt.$$

Теорема доказана.

2.2. Выход на границу фазового ограничения со счетным числом переключений. Задача (2.1)–(2.3) обладает однопараметрической масштабной группой симметрий. Если $(\widehat{y}(\cdot), \widehat{z}(\cdot), \widehat{w}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ – решение задачи (2.1)–(2.3) с начальными условиями y_0, z_0, w_0 , то для произвольного числа $\lambda > 0$ траектория $(y_\lambda(t), z_\lambda(t), w_\lambda(t), u_\lambda(t))$,

$$y_\lambda(t) = \lambda^3 \widehat{y}\left(\frac{t}{\lambda}\right), \quad z_\lambda(t) = \lambda^2 \widehat{z}\left(\frac{t}{\lambda}\right), \quad w_\lambda(t) = \lambda \widehat{w}\left(\frac{t}{\lambda}\right), \quad u_\lambda(t) = \widehat{u}\left(\frac{t}{\lambda}\right),$$

является решением задачи (2.1)–(2.3) с начальными условиями $\lambda^3 y_0, \lambda^2 z_0, \lambda w_0$. Действие масштабной группы

$$g_\lambda: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad g_\lambda(y, z, w) = (\lambda^3 y, \lambda^2 z, \lambda w)$$

сохраняет фазовое ограничение $y \geq 0$.

В пространстве орбит, для которых $w \neq 0$, можно ввести координаты

$$\frac{y}{w^3}, \quad \frac{z}{w^2}$$

и определить ε -окрестность (орбитальную метрику) формулами

$$\left| \frac{y_1}{w_1^3} - \frac{y_2}{w_2^3} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{z_1}{w_1^2} - \frac{z_2}{w_2^2} \right| < \varepsilon. \quad (2.7)$$

Найдем *автомодельные* решения задачи (2.1)–(2.3), которые возвращаются на границу фазового ограничения

$$\Gamma = \{(\psi_1, \psi_2, \psi_3, y, z, w) \mid y = 0\}$$

в моменты времени, образующие счетную последовательность. Нетрудно видеть, что решение $(\widehat{y}(\cdot), \widehat{z}(\cdot), \widehat{w}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ системы (2.2) может находиться в точках поверхности $y = 0$ на некотором ненулевом интервале времени тогда и только тогда, когда $(\widehat{y}(\cdot), \widehat{z}(\cdot), \widehat{w}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)) \equiv 0$. При нашем выборе краевых условий решения задачи (2.1)–(2.3) не содержат участка, на котором $y \equiv 0$. Следовательно, при поиске экстремалей с нужными нам свойствами в уравнениях принципа максимума можно положить $\xi(t) \equiv 0$ и рассматривать систему

$$\dot{\psi}_1 = 1, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_3 = -\psi_2, \quad (2.8)$$

$$\max_{u \in [-1, 1]} \psi_3(t)u = \psi_3(t)\widehat{u}(t) \quad \text{п. в. на } [0, T], \quad (2.9)$$

$$\psi_1(t_n + 0) - \psi_1(t_n) = -\delta_n \leq 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Пусть в некоторый момент времени $t = t_0$ траектория

$$(y(\cdot), z(\cdot), w(\cdot), u(\cdot), \psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot), \psi_3(\cdot))$$

системы (2.8)–(2.10) оказалась в точке поверхности $y = 0$. Из представления

$$y(t) = y(t_0) + z(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}w(t_0)(t - t_0)^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (t - s)^2 u(s) ds$$

следует, что для того, чтобы траектория могла вернуться в область $y > 0$, необходимо, чтобы

$$y(t_0) = 0, \quad z(t_0) = 0, \quad w(t_0) \geq 0.$$

Условие скачка переменной ψ_1 в момент “срыва” с поверхности $y = 0$ определяет пучок траекторий системы (2.8)–(2.10) с начальными условиями

$$y(t_0) = 0, \quad z(t_0) = 0, \quad w(t_0) \geq 0, \quad \psi_1(t_0) - \delta, \quad \psi_2(t_0), \quad \psi_3(t_0).$$

Мы увидим далее, что существует единственное значение скачка $\psi_1(t_0 + 0) - \psi_1(t_0) = -\delta_0 < 0$, для которого траектория из этого пучка может вернуться на поверхность $y = 0$ в некоторый момент времени $t_1 > t_0$. Для остальных значений скачка δ_0 траектория либо вообще не пересекает поверхность $y = 0$, либо пересекает ее в точке, в которой $y = z = 0$, $w < 0$, после чего ее уже не удастся продолжить допустимой траекторией системы (2.8)–(2.10) (рис. 1).

Рис. 1. Пересечение траекторий с границей фазового ограничения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Назовем решение $(y(\cdot), z(\cdot), w(\cdot), \psi_1(\cdot), \psi_2(\cdot), \psi_3(\cdot))$ системы (2.8)–(2.10) *автомодельным с параметром λ* , если

$$\begin{aligned} y(t + \tau) &= \lambda^3 y\left(\frac{t}{\lambda}\right), & z(t + \tau) &= \lambda^2 z\left(\frac{t}{\lambda}\right), & w(t + \tau) &= \lambda w\left(\frac{t}{\lambda}\right), \\ \psi_1(t + \tau) &= \lambda^3 \psi_1\left(\frac{t}{\lambda}\right), & \psi_2(t + \tau) &= \lambda^2 \psi_2\left(\frac{t}{\lambda}\right), & \psi_3(t + \tau) &= \lambda \psi_3\left(\frac{t}{\lambda}\right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

для некоторого $\tau > 0$ при любом $t \geq 0$ (кроме тех моментов времени, в которых траектория касается границы $y = 0$ и переменная ψ_1 имеет скачок).

Если мы найдем допустимую траекторию, которая два раза касается поверхности $y = 0$, и эта траектория окажется автомодельной, то она возвратится на поверхность $y = 0$ счетное число раз. В силу (2.11) интервалы времени между последовательными возвращениями на границу, а также координаты соответствующих точек касания образуют геометрические прогрессии. Поэтому точки возвращения на границу $y = 0$ автомодельных траекторий с коэффициентом сжатия $\lambda \in (0, 1)$ накапливаются к началу координат, а сами траектории попадают в начало координат в конечный момент времени. Если $\lambda > 1$, то соответствующие автомодельные траектории в прямом времени выходят из начала координат с накоплением точек касания в попятном времени к началу координат.

Выпишем уравнения автомодельных траекторий. Можно проверить непосредственным вычислением, что система (2.8)–(2.10) не имеет автомодельных траекторий, для которых точка их касания с границей $y = 0$ происходит в момент смены знака управления $u(t) = \text{sign } \psi_3(t)$. На интервале времени, на котором траектория остается в полупространстве $y > 0$, функция $\psi_3(t)$ является многочленом третьей степени. В силу условия $u(t) = \text{sign } \psi_3(t)$ отсюда следует, что на этом участке времени может быть не более трех смен знака управления. Однако тогда автомодельные траектории на интервале времени между двумя последовательными возвращениями на границу $y = 0$ имеют ровно два переключения управления (они возвращаются на границу $y = 0$ с тем же знаком $\psi_3(t)$, с которым сошли с нее). С помощью прямого вычисления получаем, что смена знака управления с $u = 1$ на $u = -1$ и затем вновь на $u = 1$ для автомодельного решения с коэффициентом сжатия $\lambda \in (0, 1)$ невозможна. Поэтому будем искать решения системы (2.8)–(2.10), которые покидают границу $y = 0$ с управлением $u = -1$, затем продолжают участком траектории с управлением $u = 1$ и на третьем участке знакопостоянства управления $u = -1$ возвращаются на поверхность $y = 0$, попадая на орбиту исходной точки (за исключением координаты ψ_1 , которая всего лишь должна быть меньше или равна координате ψ_1 соответствующей точки орбиты; рис. 2).

Рис. 2. Автомодельная траектория

Пусть $[0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$ – интервалы знакопостоянства управления. Уравнения начальных условий $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, w_0 , ψ_{10} , ψ_{20} , ψ_{30} соответствующей автомодельной траектории имеют вид

$$\begin{aligned}
 w_0 - t_1 + t_2 - t_3 &= \lambda w_0, \\
 w_0 t_1 - \frac{1}{2} t_1^2 + (w_0 - t_1) t_2 + \frac{1}{2} t_2^2 - (w_0 - t_1 + t_2) t_3 - \frac{1}{2} t_3^2 &= 0, \\
 \frac{1}{6} w_0 t_1^3 - t_1^4 + \left(w_0 t_1 - \frac{1}{2} t_1^2 \right) t_2 + \frac{1}{2} (w_0 - t_1) t_2^2 + \frac{1}{6} t_2^3 \\
 + \left(w_0 t_1 - \frac{1}{2} t_1^2 + (w_0 - t_1) t_2 + \frac{1}{2} t_2^2 \right) t_3 + \frac{1}{2} (w_0 - t_1 + t_2) t_3^2 - \frac{1}{6} t_3^3 &= 0, \\
 \psi_{20} - \psi_{10} (t_1 + t_2 + t_3) - \frac{1}{2} (t_1 + t_2 + t_3)^2 &= \lambda^2 \psi_{20}, \\
 \psi_{30} - \psi_{20} (t_1 + t_2 + t_3) + \frac{1}{2} \psi_{10} (t_1 + t_2 + t_3)^2 + \frac{1}{6} (t_1 + t_2 + t_3)^3 &= \lambda^3 \psi_{30}, \\
 \psi_{30} - \psi_{20} t_1 + \frac{1}{2} \psi_{10} t_1^2 + \frac{1}{6} t_1^3 &= 0, \\
 \psi_{30} - \psi_{20} (t_1 + t_2) + \frac{1}{2} \psi_{10} (t_1 + t_2)^2 + \frac{1}{6} (t_1 + t_2)^3 &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Кроме ограничений в форме равенств, должны быть выполнены еще четыре неравенства, связанные с соотношением $u(t) = \text{sign } \psi_3(t)$ и условием скачка переменной ψ_1 в момент $t_1 + t_2 + t_3$ возвращения на поверхность $y = 0$:

$$\begin{aligned}
 \psi_{30} - \psi_{20} t + \frac{1}{2} \psi_{10} t^2 + \frac{1}{6} t^3 &\leq 0 \quad \forall t \in (0, t_1) \cup (t_2, t_3), \\
 \psi_{30} - \psi_{20} t + \frac{1}{2} \psi_{10} t^2 + \frac{1}{6} t^3 &\geq 0 \quad \forall t \in (t_1, t_2), \\
 \lambda \psi_{10} &< \psi_{10} + (t_1 + t_2 + t_3).
 \end{aligned}$$

В данной системе восемь неизвестных и семь уравнений. Заметим, что если эта система уравнений имеет хотя бы одно нетривиальное решение, то оно определяет целое однопараметрическое семейство решений (в частности, все точки орбит однопараметрической группы, проходящих через данное решение, также будут решениями). Поэтому один из параметров можно нормировать, например всегда можно считать, что $t_1 = 1$.

Решая систему (2.12) численно, получаем единственное решение

$$\begin{aligned}
 w_0 &\approx 0.5010, & \psi_{10} &\approx -1.6813, \\
 \psi_{20} &\approx -1.3507, & \psi_{30} &\approx -0.6767.
 \end{aligned}$$

Имеем следующие моменты переключений управления:

$$t_1 = 1, \quad t_1 + t_2 \approx 1.8552,$$

а также момент возвращения на границу фазового ограничения

$$t_1 + t_2 + t_3 \approx 2.1283$$

и коэффициент сжатия

$$\lambda^* \approx 0.1661.$$

Скачок переменной ψ_1 в момент $t = t_1 + t_2 + t_3$ на автомодельном решении имеет вид

$$\lambda^* \psi_{10} - (\psi_{10} + t_1 + t_2 + t_3) = -0.7262 < 0.$$

Наконец, график функции $\psi_3(t)$, определяющей знак управления $u(t)$, изображен на рис. 3.

Рис. 3. Переключения на автомодельной траектории

Очевидно, что, кроме группы симметрий g_λ , множество решений системы (2.8)–(2.10) выдерживает действие еще одного преобразования

$$(y(t), z(t), w(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t)) \rightarrow (y(-t), -z(-t), w(-t), -\psi_1(-t), \psi_2(-t), -\psi_3(-t)).$$

В частности, каждой траектории системы, входящей в начало координат, отвечает траектория, выходящая из начала координат. Поэтому, кроме найденного семейства автомодельных решений, система (2.8)–(2.10) имеет второе семейство с параметром $\frac{1}{\lambda^*} = 6.021605786$. Траектории этого семейства выходят из начала координат со счетным числом пересечений границы фазового ограничения Γ , накапливающихся в попятном времени к моменту выхода из начала координат. Отметим, что последовательность смены знака управления на траекториях этого семейства противоположная: они касаются границы $y = 0$ при управлении $u = 1$, затем в течение некоторого времени двигаются с управлением $u = -1$, а затем вновь меняют управление на $u = 1$ и возвращаются на границу $y = 0$ (после чего всё повторяется счетное число раз).

ТЕОРЕМА 2.2. *Существует однопараметрическое семейство $\mathfrak{W}^+$ решений системы (2.8)–(2.10), которые приходят в начало координат со счетным числом контактов с границей фазового ограничения $y = 0$. Совокупность точек контакта образует гладкую кривую Γ^+ – орбиту масштабной группы g_λ . Траектории семейства $\mathfrak{W}^+$ заполняют некоторое двумерное многообразие $\mathfrak{M}^+$*

в расширенном 6-мерном пространстве переменных $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, y, z, w)$. Кроме того, существует второе однопараметрическое семейство $\mathfrak{M}^-$ решений системы (2.8)–(2.10), которые выходят из начала координат со счетным числом контактов с границей фазового ограничения. Совокупность точек контакта образует гладкую кривую – орбиту масштабной группы.

2.3. Отображение последования Пуанкаре $\Gamma \rightarrow \Gamma$. Определим все траектории системы (2.8)–(2.10), находящиеся в окрестности многообразия $\mathfrak{M}^+$, которые имеют по крайней мере два пересечения с границей фазового ограничения. Начальные условия таких траекторий должны удовлетворять условиям $y(0) = 0, z(0) = 0, w(0) \geq 0$. Тем самым, траектории параметризуются начальными значениями $w(0), \psi_1(0), \psi_2(0), \psi_3(0)$.

Для того чтобы эти траектории в некоторый момент времени $t > 0$ могли вновь попасть на поверхность $y = 0$, необходимо, чтобы в момент t выхода на фазовое ограничение выполнялось еще одно дополнительное условие $z(t) = 0$. Тем самым, параметр $\psi_1(0)$ фактически не является координатой на множестве начальных условий, для которых определено отображение последования: значение $\psi_1(0)$ определяется как однозначная функция от начальных значений $w(0), \psi_2(0), \psi_3(0)$ условием $z(t) = 0$. В результате отображение Пуанкаре определено в точках некоторого 3-мерного подмногообразия поверхности $y = 0$.

В точке начала координат отображение Пуанкаре является вырожденным. Поэтому для определения его структуры в окрестности многообразия $\mathfrak{M}^+$ нам следует разрешить особенность отображения с помощью процедуры σ -раздутия. Определим замену переменных, после которой отображение Пуанкаре станет диффеоморфизмом в окрестности кривой $\Gamma^+ = \mathfrak{M}^+ \cap \{y = 0\}$. Отображение Пуанкаре коммутирует с группой симметрий g_λ системы, поэтому можно определить соответствующее ему факторотображение на многообразии орбит действия группы. В качестве координат на множестве орбит действия группы симметрий g_λ возьмем значения

$$\xi_1 = \frac{\psi_2}{w^2}, \quad \xi_2 = \frac{\psi_3}{w^3}.$$

Факторотображение отображения последования $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow (\Xi_1, \Xi_2)$ в координатах (ξ_1, ξ_2) задается следующим образом.

Пусть $(y_0, z_0, w_0, \psi_{10}, \psi_{20}, \psi_{30})$ – некоторая точка на поверхности $y = 0, y_0 = z_0 = 0, w_0 = w > 0, \psi_{30} < 0$. Обозначим через $(y(t), z(t), w(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$ траекторию системы (2.8)–(2.10), выходящую из этой точки $(\psi_1(+0) = \psi_{10})$. Обозначим через t_1 момент первой смены знака функции $\psi_3(t)$. Положим

$$\theta = \frac{\psi_{10}}{w}, \quad \xi_1 = \frac{\psi_{20}}{w^2}, \quad \xi_2 = \frac{\psi_{30}}{w^3}, \quad \tau_1 = \frac{t_1}{w}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} y(t_1) &= \left(\frac{1}{2} \tau_1^2 - \frac{1}{6} \tau_1^3 \right) w^3, & z(t_1) &= \left(\tau_1 - \frac{1}{2} \tau_1^2 \right) w^2, & w(t_1) &= (1 - \tau_1) w, \\ \psi_1(t_1) &= (\theta + \tau_1) w, & \psi_2(t_1) &= \left(\xi_1 - \theta \tau_1 - \frac{1}{2} \tau_1^2 \right) w^2, \end{aligned}$$

$$\psi_3(t_1) = \left(\xi_1 - \xi_2 \tau_1 + \frac{1}{2} \theta \tau_1^2 + \frac{1}{6} \tau_1^3 \right) w^3 = 0.$$

Введем обозначения

$$\eta_1^{(1)} = \frac{y(t_1)}{w^3(t_1)}, \quad \eta_2^{(1)} = \frac{z(t_1)}{w^2(t_1)}, \quad \theta^{(1)} = \frac{\psi_1(t_1)}{w(t_1)}, \quad \xi^{(1)} = \frac{\psi_2(t_1)}{w^2(t_1)}.$$

Тогда

$$\eta_1^{(1)} = \frac{\tau_1 - \frac{1}{2} \tau_1^2}{(1 - \tau_1)^2}, \quad \eta_2^{(1)} = \frac{\frac{1}{2} \tau_1^2 - \frac{1}{6} \tau_1^3}{(1 - \tau_1)^3}, \quad \theta^{(1)} = \frac{\theta + \tau_1}{1 - \tau_1}, \quad \xi^{(1)} = \frac{\xi_1 - \theta \tau_1 - \frac{1}{2} \tau_1^2}{(1 - \tau_1)^2},$$

где $\tau_1 > 0$ – наименьший положительный корень уравнения

$$\xi_2 - \xi_1 \tau_1 + \frac{1}{2} \theta \tau_1^2 + \frac{1}{6} \tau_1^6 = 0.$$

Рассмотрим решение $(\bar{y}(t), \bar{z}(t), \bar{w}(t), \bar{\psi}_1(t), \bar{\psi}_2(t), \bar{\psi}_3(t))$ системы (2.8)–(2.10) с начальными условиями $y(t_1), z(t_1), w(t_1), \psi_1(t_1), \psi_2(t_1), \psi_3(t_1)$ (при этом $\psi_3(t_1) = 0, \psi_2(t_1) > 0$). Обозначим через $t_2 > 0$ момент первой смены знака функции $\bar{\psi}_3(t)$. Обозначим $\bar{w}(0) = w(t_1) = w_1, \tau_2 = \frac{t_2}{w_1}$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{y}(t_2) &= \left(\eta_1^{(1)} + \eta_2^{(1)} \tau_2 + \frac{1}{2} \tau_2^2 + \frac{1}{6} \tau_2^3 \right) w_1^3, & \bar{z}(t_2) &= \left(\eta_2^{(1)} + \tau_2 + \frac{1}{2} \tau_2^2 \right) w_1^2, \\ \bar{w}(t_2) &= (1 + \tau_2) w_1, \\ \bar{\psi}_1(t_2) &= (\theta^{(1)} + \tau_2) w_1, & \bar{\psi}_2(t_2) &= \left(\xi^{(1)} - \theta^{(1)} \tau_2 - \frac{1}{2} \tau_2^2 \right) w_1^2, \\ \bar{\psi}_3(t_2) &= \left(-\xi^{(1)} \tau_2 + \frac{1}{2} \theta^{(1)} \tau_2^2 + \frac{1}{6} \tau_2^3 \right) w_1^3 = 0. \end{aligned}$$

Переходя на факторпространстве к координатам

$$\eta_1^{(2)} = \frac{\bar{y}(t_2)}{\bar{w}^3(t_2)}, \quad \eta_2^{(2)} = \frac{\bar{z}(t_2)}{\bar{w}^2(t_2)}, \quad \theta^{(2)} = \frac{\bar{\psi}_1(t_2)}{\bar{w}(t_2)}, \quad \xi^{(2)} = \frac{\bar{\psi}_2(t_2)}{\bar{w}^2(t_2)},$$

получим

$$\begin{aligned} \eta_1^{(2)} &= \frac{\eta_2^{(1)} + \tau_2 + \frac{1}{2} \tau_2^2}{(1 + \tau_2)^2}, & \eta_2^{(2)} &= \frac{\eta_2^{(1)} + \eta_1^{(1)} \tau_2 + \frac{1}{2} \tau_2^2 + \frac{1}{6} \tau_2^3}{(1 + \tau_2)^3}, \\ \theta^{(2)} &= \frac{\theta^{(1)} + \tau_2}{1 + \tau_2}, & \xi^{(2)} &= \frac{\xi^{(1)} - \theta^{(1)} \tau_2 - \frac{1}{2} \tau_2^2}{(1 + \tau_2)^2}, \end{aligned}$$

где $\tau_2 < 0$ – наибольший отрицательный корень уравнения

$$-\xi^{(1)} \tau_2 + \frac{1}{2} \theta^{(1)} \tau_2^2 + \frac{1}{6} \tau_2^3 = 0.$$

Наконец, рассмотрим траекторию $(\bar{y}(t), \bar{z}(t), \bar{w}(t), \bar{\psi}_1(t), \bar{\psi}_2(t), \bar{\psi}_3(t))$ системы (2.8)–(2.10) с начальными условиями $\bar{y}(t_2), \bar{z}(t_2), \bar{w}(t_2), \bar{\psi}_1(t_2), \bar{\psi}_2(t_2), \bar{\psi}_3(t_2)$

(при этом $\bar{\psi}_3(t_2) = 0$, $\bar{\psi}_2(t_2) < 0$) на первом участке знакопостоянства функции $\bar{\psi}_3(t)$ вплоть до момента возвращения на границу фазового ограничения $y = 0$. Обозначим через $t_3 > 0$ момент касания: $\bar{y}_3(t_3) = \bar{z}_3(t_3) = 0$. Обозначим $\bar{w}(0) = \bar{w}(t_2) = w_2$, $\tau_3 = \frac{t_3}{w_2}$. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{y}(t_3) &= \left(\eta_1^{(2)} + \eta_2^{(2)} \tau_3 + \frac{1}{2} \tau_3^2 - \frac{1}{6} \tau_3^3 \right) w_2^3, & \bar{z}(t_3) &= \left(\eta_2^{(2)} + \tau_3 - \frac{1}{2} \tau_3^2 \right) w_2^2, \\ \bar{w}(t_3) &= (1 - \tau_3) w_2, \\ \bar{\psi}_1(t_3) &= (\theta^{(2)} + \tau_3) w_2, & \bar{\psi}_2(t_3) &= \left(\xi^{(2)} - \theta^{(2)} \tau_3 - \frac{1}{2} \tau_3^2 \right) w_2^2, \\ \bar{\psi}_3(t_3) &= \left(-\xi^{(2)} \tau_3 + \frac{1}{2} \theta^{(2)} \tau_3^2 + \frac{1}{6} \tau_3^3 \right) w_2^3.\end{aligned}$$

Переходя к следующим координатам на факторпространстве (с учетом того, что $\bar{y}(t_3) = 0$, $\bar{z}(t_3) = 0$):

$$\Xi_1 = \frac{\bar{\psi}_2(t_3)}{\bar{w}^2(t_3)}, \quad \Xi_2 = \frac{\bar{\psi}_1(t_3)}{\bar{w}^3(t_3)},$$

получим

$$\Xi_1 = \frac{\xi^{(2)} - \theta^{(2)} \tau_3 - \frac{1}{2} \tau_3^2}{(1 - \tau_3)^2}, \quad \Xi_2 = \frac{-\xi^{(2)} \tau_3 + \frac{1}{2} \theta^{(2)} \tau_3^2 + \frac{1}{6} \tau_3^3}{(1 - \tau_3)^3}.$$

При этом должны выполняться соотношения

$$\eta_1^{(2)} + \tau_3 - \frac{1}{2} \tau_3^2 = 0, \quad \eta_2^{(2)} + \eta_1^{(2)} \tau_3 + \frac{1}{2} \tau_3^2 - \frac{1}{6} \tau_3^3 = 0, \quad \tau_3 > 0.$$

Окончательно “сквозное” факторотображение $(\xi_1, \xi_2) \rightarrow (\Xi_1, \Xi_2)$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned}(\xi_1, \xi_2) &\xrightarrow{\tau_1 = \frac{t_1}{w}, u = -1, \theta = \frac{\psi_1}{w}} (\xi^{(1)}, \eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \theta^{(1)}) \\ &\xrightarrow{\tau_2 = \frac{t_2}{w_1}, u = 1} (\xi^{(2)}, \eta_1^{(2)}, \eta_2^{(2)}, \theta^{(2)}) \xrightarrow{\tau_3 = \frac{t_3}{w_2}, u = -1} (\Xi_1, \Xi_2).\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\eta_1^{(1)} &= \frac{\tau_1 - \frac{1}{2} \tau_1^2}{(1 - \tau_1)^2}, & \eta_2^{(1)} &= \frac{\frac{1}{2} \tau_1^2 - \frac{1}{6} \tau_1^3}{(1 - \tau_1)^3}, & \theta^{(1)} &= \frac{\theta + \tau_1}{1 - \tau_1}, \\ \xi^{(1)} &= \frac{\xi_1 - \theta \tau_1 - \frac{1}{2} \tau_1^2}{(1 - \tau_1)^2}, \\ \xi_2 - \xi_1 \tau_1 + \frac{1}{2} \theta \tau_1^2 + \frac{1}{6} \tau_1^3 &= 0, & \tau_1 &> 0, \\ \eta_1^{(2)} &= \frac{\eta_2^{(1)} + \tau_2 + \frac{1}{2} \tau_2^2}{(1 + \tau_2)^2}, & \eta_2^{(2)} &= \frac{\eta_2^{(1)} + \eta_1^{(1)} \tau_2 + \frac{1}{2} \tau_2^2 + \frac{1}{6} \tau_2^3}{(1 + \tau_2)^3}, \\ \theta^{(2)} &= \frac{\theta^{(1)} + \tau_2}{1 + \tau_2}, & \xi^{(2)} &= \frac{\xi^{(1)} - \theta^{(1)} \tau_2 - \frac{1}{2} \tau_2^2}{(1 + \tau_2)^2},\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned}
& -\xi^{(1)}\tau_2 + \frac{1}{2}\theta^{(1)}\tau_2^2 + \frac{1}{6}\tau_2^3 = 0, \quad \tau_2 < 0, \\
& \Xi_1 = \frac{\xi^{(2)} - \theta^{(2)}\tau_3 - \frac{1}{2}\tau_3^2}{(1 - \tau_3)^2}, \quad \Xi_2 = \frac{-\xi^{(2)}\tau_3 + \frac{1}{2}\theta^{(2)}\tau_3^2 + \frac{1}{6}\tau_3^3}{(1 - \tau_3)^3}, \\
& \eta_1^{(2)} + \tau_3 - \frac{1}{2}\tau_3^2 = 0, \quad \eta_2^{(2)} + \eta_1^{(2)}\tau_3 + \frac{1}{2}\tau_3^2 - \frac{1}{6}\tau_3^3 = 0, \quad \tau_3 > 0.
\end{aligned}$$

Кривой Γ^+ отвечает неподвижная точка $(\xi_1^0, \xi_2^0) = (-5.3809, -5.3809)$ факторотображения.

Найдем дифференциал факторотображения в неподвижной точке. Проблема с вычислением дифференциала состоит в том, что координата θ начальной точки является функцией от (ξ_1, ξ_2) , причем эта функция неявно определяется из условия касания соответствующей траектории факторсистемы поверхности $y_1 = 0$ в конечной точке. Мы знаем значение $\theta = -3.3557$ в неподвижной точке факторотображения, но не знаем ее частных производных в этой точке.

Обозначим

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi_1}(\xi_1^0, \xi_2^0) = A, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \xi_2}(\xi_1^0, \xi_2^0) = B.$$

Значения A, B будут вычислены ниже как решения некоторой линейной системы уравнений, которую мы сейчас выведем.

Из уравнения

$$\xi_2 - \xi_1\tau_1 + \frac{1}{2}\theta\tau_1^2 + \frac{1}{6}\tau_1^3 = 0$$

с учетом того, что в точке (ξ_1^0, ξ_2^0) значение τ_1 нам известно ($\tau_1^0 = 1.9959$), получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_1}{\partial \xi_1}(\xi_1^0, \xi_2^0) &= -\frac{-\tau_1 + \frac{1}{2}A\tau_1^2}{-\tau_1 + \theta\tau_1 + \frac{1}{3}\tau_1^2} = 1.4968 - 1.4937A, \\
\frac{\partial \tau_1}{\partial \xi_2}(\xi_1^0, \xi_2^0) &= -\frac{1 + \frac{1}{2}B\tau_1^2}{-\tau_1 + \theta\tau_1 + \frac{1}{3}\tau_1^2} = -0.7499 - 1.4937B.
\end{aligned}$$

Дифференцируя функции $\eta_1^{(1)}, \eta_2^{(1)}, \theta^{(1)}, \xi^{(1)}$ из (2.13) по ξ_1, ξ_2 в точке (ξ_1^0, ξ_2^0) , с учетом найденных значений частных производных функции τ_1 получаем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \eta_1^{(1)}}{\partial \xi_1}(\xi_1^0, \xi_2^0) &= -1.5153 + 1.5122A, & \frac{\partial \eta_1^{(1)}}{\partial \xi_2}(\xi_1^0, \xi_2^0) &= 0.7592 + 1.5122B, \\
\frac{\partial \eta_2^{(1)}}{\partial \xi_1}(\xi_1^0, \xi_2^0) &= 3.0368 - 3.0306A, & \frac{\partial \eta_2^{(1)}}{\partial \xi_2}(\xi_1^0, \xi_2^0) &= -1.5215 - 3.0306B, \\
\frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial \xi_1}(\xi_1^0, \xi_2^0) &= -6.5732 + 5.5556A, & \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial \xi_2}(\xi_1^0, \xi_2^0) &= 3.2933 + 5.5556B, \\
\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \xi_1}(\xi_1^0, \xi_2^0) &= 5.1058 - 6.1015A, & \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \xi_2}(\xi_1^0, \xi_2^0) &= -2.0530 - 6.1015B,
\end{aligned}$$

при этом в точке (ξ_1^0, ξ_2^0) имеем значения соответствующих функций:

$$\eta_1^{(1)} = 0.00411, \quad \eta_2^{(1)} = -0.6749, \quad \theta^{(1)} = 1.3654, \quad \xi^{(1)} = -0.6805.$$

На втором участке знакопостоянства управления $u = 1$ аналогично имеем

$$\begin{aligned}\tau_2 &= -1.7104, & \frac{\partial \tau_1}{\partial \xi_1} &= -4.7352 - 12.0356A, & \frac{\partial \tau_1}{\partial \xi_2} &= 6.90825 - 12.0356B, \\ \frac{\partial \eta_1^{(2)}}{\partial \xi_1} &= 36.5262 + 71.7539A, & \frac{\partial \eta_1^{(2)}}{\partial \xi_2} &= -47.5822 + 71.7539B, \\ \frac{\partial \eta_2^{(2)}}{\partial \xi_1} &= -21.4714 + 0.2141A, & \frac{\partial \eta_2^{(2)}}{\partial \xi_2} &= 16.4983 + 0.2141B, \\ \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial \xi_1} &= 12.6002 + 0.8458A, & \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial \xi_2} &= -9.5641 + 0.8458B, \\ \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial \xi_1} &= -20.2890 - 14.1435A, & \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial \xi_2} &= 19.0151 - 14.1435B, \\ \eta_1^{(2)} &= -1.8047, & \eta_2^{(2)} &= 0.1436, & \theta^{(2)} &= 0.4882, & \xi^{(2)} &= 0.3744.\end{aligned}$$

Теперь продифференцируем последние четыре уравнения системы (2.13). Отметим, что $\tau_3 = 0.7665$ в неподвижной точке. Из уравнений

$$\eta_1^{(2)} + \tau_3 - \frac{1}{2}\tau_3^2 = 0, \quad \eta_2^{(2)} + \eta_1^{(2)}\tau_3 + \frac{1}{2}\tau_3^2 - \frac{1}{6}\tau_3^3 = 0$$

получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_3}{\partial \xi_1} &= -\frac{\frac{\partial \eta_1^{(2)}}{\partial \xi_1}}{1 - \tau_3} = -156.3992 - 307.2377A, \\ \frac{\partial \tau_3}{\partial \xi_2} &= -\frac{\frac{\partial \eta_1^{(2)}}{\partial \xi_2}}{1 - \tau_3} = 203.7387 - 307.2377B, \\ \frac{\partial \tau_3}{\partial \xi_1} &= -\frac{\frac{\partial \eta_2^{(2)}}{\partial \xi_1} + \frac{\partial \eta_1^{(2)}}{\partial \xi_1}\tau_3}{\eta_1^{(2)} + \tau_3 - \frac{1}{2}\tau_3^2} = 4.8983 + 41.4508A, \\ \frac{\partial \tau_3}{\partial \xi_2} &= -\frac{\frac{\partial \eta_2^{(2)}}{\partial \xi_2} + \frac{\partial \eta_1^{(2)}}{\partial \xi_1}\tau_3}{\eta_1^{(2)} + \tau_3 - \frac{1}{2}\tau_3^2} = -14.9941 + 41.4507B.\end{aligned}$$

Приравнявая соответствующие частные производные, получаем систему линейных уравнений для A, B , решением которой является пара чисел

$$A = -0.4626, \quad B = 0.6273.$$

Теперь из соотношений

$$\Xi_1 = \frac{\xi^{(2)} - \theta^{(2)}\tau_3 - \frac{1}{2}\tau_3^2}{(1 - \tau_3)^2}, \quad \Xi_2 = \frac{-\xi^{(2)}\tau_3 + \frac{1}{2}\theta^{(2)}\tau_3^2 + \frac{1}{6}\tau_3^3}{(1 - \tau_3)^3}$$

можно найти частные производные Ξ_1, Ξ_2 по ξ_1 и ξ_2 соответственно:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Xi_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \Xi_1}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \Xi_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \Xi_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} (\xi_1^0, \xi_2^0) = \begin{pmatrix} -1325.8394 & 1766.4766 \\ 562.6508 & -447.5727 \end{pmatrix},$$

с собственными значениями $-1976.0856, 202.6734$.

ТЕОРЕМА 2.3. *Факторотображение отображения последования в пространстве орбит имеет две неподвижные точки, отвечающие орбитам $\Gamma^+ = \mathfrak{W}^+ \cap \{y = 0\}$ и $\Gamma^- = \mathfrak{W}^- \cap \{y = 0\}$. Дифференциал факторотображения в точке Γ^+ имеет два вещественных собственных значения, по модулю больших 1, а в точке Γ^- – два вещественных собственных значения, по модулю меньших 1.*

Возвращаясь к координатам ξ_1, ξ_2, w , заключаем, что на множестве траекторий, возвращающихся на границу фазового ограничения, в окрестности кривой Γ^+ отображение Пуанкаре является седлом с одним собственным значением, по модулю меньшим 1, и двумя собственными значениями, по модулю большими 1.

2.4. Построение оптимального синтеза. Наряду с однопараметрическим семейством решений $\mathfrak{W}^+$, каждое из которых приходит в начало координат за конечное время со счетным числом касаний границы $y = 0$, система (2.8)–(2.10) имеет еще одно семейство решений, приходящих в начало координат с постоянным управлением $u \equiv -1$. Все траектории этого семейства лежат на кривой

$$\Gamma^0 = \left\{ (y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3) \left| \begin{aligned} y &= \frac{1}{6}s^3, \quad z = -\frac{1}{2}s^2, \quad w = s, \quad \psi_3 = -\frac{1}{6}s^3, \\ \psi_2 &= -\frac{1}{2}s^2, \quad \psi_1 = -s, \quad s \in (0, \infty) \end{aligned} \right. \right\}$$

и параметризуются своими начальными точками, лежащими на Γ^0 . В пространстве орбит группы g_λ кривой Γ^0 отвечает неподвижная точка факторсистемы системы дифференциальных уравнений

$$\dot{y} = z, \quad \dot{z} = w, \quad \dot{w} = -1, \quad \dot{\psi}_1 = 1, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_3 = -\psi_2 \quad (2.14)$$

с особенностью типа неустойчивого узла. Действительно, в координатах

$$r_1 = \frac{y}{w^3}, \quad r_2 = \frac{z}{w^2}, \quad r_3 = \frac{\psi_3}{w^3}, \quad r_4 = \frac{\psi_2}{w^2}, \quad r_5 = \frac{\psi_1}{w}, \quad d\tau = w dt$$

факторсистема системы (2.14) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= r_2 + 3r_1, & \dot{r}_2 &= 1 + 2r_2, & \dot{r}_3 &= -r_4 + 3r_3, \\ \dot{r}_4 &= -r_5 + 2r_4, & \dot{r}_5 &= 1 + r_5. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Точка $(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}, -1)$ является стационарной точкой системы (2.15) с матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы вещественны и больше нуля, что означает наличие неустойчивого узла в неподвижной точке.

Подведем промежуточный итог. Как траектория системы (2.8)–(2.10) может попасть в начало координат? Если траектория не пересекает границу фазового ограничения $y = 0$, то для нее функция $\psi_3(t)$, отвечающая за знак управления $u(t)$, является многочленом третьей степени и потому имеет не более трех участков знакопостоянства управления. Чтобы проходить через начало координат, такая траектория должна лежать на кривой Γ^0 . Следовательно, для того чтобы попасть в начало координат, траектории с начальными условиями, не принадлежащими Γ^0 , должны иметь по крайней мере счетное число переключений управления $u(t)$. Для траекторий системы (2.8)–(2.10) это возможно тогда и только тогда, когда соответствующая траектория счетное число раз коснется границы фазового ограничения $y = 0$ за счет скачка переменной ψ_1 в момент касания границы. Мы нашли одно такое семейство траекторий – это траектории, принадлежащие $\mathfrak{W}^+$. Есть ли другие траектории системы (2.8)–(2.10), имеющие счетное число пересечений с границей фазового ограничения и приходящие в начало координат? В данный момент мы показали, что нет других *автомодельных* траекторий с таким свойством. Кроме того, из теоремы 2.3 следует, что все траектории, возвращающиеся на поверхность $y = 0$ и находящиеся в открытой окрестности кривой Γ^+ (окрестность рассматривается в смысле орбитальной метрики (2.7), индуцированной действием группы g_λ), не могут попасть в начало координат до тех пор, пока не выйдут из этой окрестности. В численном эксперименте можно наблюдать, что траектории со счетным числом касаний поверхности $y = 0$, не принадлежащие семейству автомодельных траекторий $\mathfrak{W}^+$, в прямом времени стремятся к множеству, заполняемому автомодельными траекториями семейства $\mathfrak{W}^-$, выходящими из начала координат со счетным числом касаний границы $y = 0$, или выходят на границу фазового ограничения и далее не продолжаемы. Таким образом, возникает вопрос: как для большинства начальных условий (не принадлежащих Γ^0 и $\mathfrak{W}^+$) оптимальные решения задачи (2.1)–(2.3) попадают в начало координат? Мы покажем, что для открытого множества начальных условий оптимальные траектории не более чем с двумя переключениями управления $u(t)$ в конечный момент времени с помощью скачка переменной ψ_1 выходят на кривую Γ^+ , а затем продолжают одной из автомодельных траекторий семейства $\mathfrak{W}^+$.

Изучим однопараметрическое семейство решений системы (2.8)–(2.10), которые могут попасть на кривую Γ^+ . С точностью до действия группы g_λ все такие траектории параметризуются координатами точки

$$(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = (0, 0, 0.5010, -1.6813 + \delta, -1.3507, -0.6767), \quad \delta \geq 0,$$

в которую они должны попасть в некоторый момент времени $\tau \geq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\tau = 0$. Изучим расположение корней многочлена

$$\psi_3(t) = -0.6767 + 1.3507t + (-1.6813 + \delta)\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \quad (2.16)$$

на полупрямой $(-\infty, 0)$ и характер пересечения компоненты $y(t)$ соответствующего решения системы (2.8)–(2.10) с границей $y = 0$.

При $\delta = 0$ корни многочлена (2.16) равны

$$1, \quad 1.8552, \quad 2.1886.$$

Следовательно, при всех достаточно малых $\delta > 0$ функция (2.16) не имеет отрицательных нулей, а соответствующие решения $(y(t), z(t), w(t))$ в попятном времени с постоянным управлением $u \equiv -1$ стремятся к кривой Γ^0 . Действительно, поскольку

$$y(t) = 0.5010 \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} > 0 \quad \text{при} \quad t < 0,$$

кривая $(y(t), z(t), w(t))$ не выходит на границу фазового ограничения.

Найдем, при каком значении параметра δ многочлен (2.16) может иметь корни, в частности кратные корни. Решая систему

$$\begin{aligned} -0.6767 + 1.3507t + (-1.6813 + \delta)\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} &= 0, \\ 1.3507 + (-1.6813 + \delta)t + \frac{t^2}{2} &= 0, \end{aligned}$$

получаем

$$\delta = 3.7239, \quad t = -3.2555.$$

Поскольку многочлен (2.16) заведомо имеет по крайней мере один положительный корень, заключаем, что при $\delta > 3.7239$ имеются ровно две смены знака функции $\psi_3(t)$ на полупрямой $t \in (-\infty, 0)$ и, соответственно, три участка знакопостоянства управления $u(t)$ на соответствующей экстремали. Обозначим отрицательные корни многочлена (2.16) через $t_1(\delta)$, $t_2(\delta)$, $t_1(\delta) < t_2(\delta)$. Так как корни многочлена $\psi_3(t)$ некратны, в окрестности точки $t = t_1(\delta)$ функция $\psi_3(t)$ растет, а в окрестности точки $t = t_2(\delta)$ — убывает. Следовательно, при любых положительных δ имеем

$$\frac{dt_1}{d\delta} = -\frac{\frac{\partial \psi_3(t)}{\partial \delta}}{\frac{\partial \psi_3(t)}{\partial t}} < 0, \quad \frac{dt_2}{d\delta} = -\frac{\frac{\partial \psi_3(t)}{\partial \delta}}{\frac{\partial \psi_3(t)}{\partial t}} > 0,$$

т.е. с ростом δ корень $t_1(\delta)$ убывает, а корень $t_2(\delta)$ растет. При $\delta \rightarrow \infty$ с точностью до членов меньшего порядка получаем

$$t_1(\delta) = -3\delta + o(\delta), \quad t_2(\delta) = -\sqrt{\frac{2 \cdot 0.6767}{\delta}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right).$$

Значения скачка δ и моментов смены знака $\psi_3(t)$ на соответствующей автомобильной траектории при попятном движении следующие:

$$\delta = 4.3729, \quad t_1 = -1.6442, \quad t_2 = -12.8158.$$

Теперь изучим поведение компоненты $y(t)$ соответствующего решения в зависимости от δ . При $t \in (t_1(\delta), 0)$ имеем

$$y(t) = 0.5010 \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} > 0.$$

Следовательно, равенство нулю и смена знака координаты $y(t)$ возможна только при $t < t_1(\delta)$. Сравним значения функции $y(t)$ со значениями функции $y_0(t)$, отвечающей автомодельной траектории. Пусть сначала $3.7239 < \delta < 4.3729$. Тогда смена знака управления $u(t)$ с 1 на -1 на траектории $y(t)$ происходит позднее (при большем по модулю значении момента времени t), чем на $y_0(t)$. Все такие траектории оказываются внутри трехмерного конуса с образующими, состоящими из орбит группы g_λ , и, тем самым, отделены от границы фазового ограничения $y = 0$.

Пусть теперь $\delta > 4.3729$. Рассмотрим значения $t > t_2(\delta)$ и покажем, что траектория $y(t)$ заведомо выходит из области $y > 0$ при движении в попятном времени. Справедливо представление

$$y(t) = 0.5010 \cdot \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^T s^2 \cdot \text{sign } \psi_3(s) ds.$$

В силу монотонности функций $t_1(\delta)$, $t_2(\delta)$ участок времени, на котором значение $u(t)$ для функции $y(t)$ равно $+1$, заведомо содержит участок, на котором значение $u(t)$ равно $+1$ для автомодельного решения $y_0(t)$. Однако тогда при $t > t_2(\delta)$ справедливо строгое неравенство $y(t) < y_0(t)$. Аналогично доказывается, что справедливо неравенство и для производных этих функций $z(t) > z_0(t)$. Пусть τ – момент возвращения автомодельной траектории $y_0(\cdot)$ на поверхность $y = 0$, при этом $y(\tau) < 0$. Тогда в момент $\tau' < \tau$, когда $y(\tau') = 0$, производная $z(\tau')$ строго положительная, т. е. траектория $y(\cdot)$ не продолжаема в попятном времени на всю числовую прямую.

Точки траекторий, которые попадают на многообразие автомодельных траекторий $\mathfrak{M}^+$ и отвечают значению скачка $\delta > 4.3729$, заполняют многообразие с границей, допускающей явное описание. Поскольку $t_1(\delta) \rightarrow -0$ при $\delta \rightarrow +\infty$, граница этого многообразия в пространстве орбит группы g_λ представляет собой траекторию, выходящую в попятном времени из орбиты Γ^+ с управлением $u = 1$. Так как $t_2(\delta) \rightarrow -\infty$ при $\delta \rightarrow +\infty$, эта траектория без переключений попадает на поверхность $y = 0$ и далее в попятном времени непродолжаема.

Мы приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 2.4. Система (2.8)–(2.10) имеет единственное допустимое решение Γ^0 , приходящее в начало координат без переключений, с постоянным значением $u \equiv -1$, а также единственное решение, выходящее из начала координат без переключений, с постоянным значением $u \equiv 1$. Все траектории системы (2.8)–(2.10), не имеющие пересечений в попятном времени с границей фазового ограничения $y = 0$, в орбитальной метрике (2.7) в пространстве орбит стремятся к траектории Γ^0 . Для всех начальных условий, не принадлежащих поверхности $\mathfrak{W}^+$, все оптимальные траектории задачи (2.1)–(2.3), отличные от Γ^0 , в некоторый конечный момент времени t за счет скачка переменной ψ_1 выходят на Γ^+ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. В силу теоремы 2.4 в точках кривой Γ^+ левосторонняя единственность семейства оптимальных решений задачи (2.1)–(2.3) нарушается. Все оптимальные траектории параметризуются значением скачка δ переменной ψ_1 в точках кривой Γ^+ , для которой мы имеем эффективное описание.

Поэтому эти траектории заполняют некоторое трехмерное многообразие $\mathfrak{M}^+$ с краем. Траектории внутри многообразия $\mathfrak{M}^+$ эффективно строятся интегрированием в попятном времени от цели, начиная с кривой Γ^+ (рис. 4).

Рис. 4. Оптимальный синтез в пространстве орбит

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.4. Мы построили синтез из экстремалей $\mathfrak{M}^+$ задачи с требуемыми свойствами. Доказать необходимо лишь то, что не существует других оптимальных траекторий с теми же граничными условиями.

Множество допустимых траекторий задачи (2.1)–(2.3) является выпуклым. Поэтому если для одинаковых граничных условий существуют две различные оптимальные траектории, скажем $(y_1(\cdot), z_1(\cdot), w_1(\cdot))$ и $(y_2(\cdot), z_2(\cdot), w_2(\cdot))$, то полусумма этих траекторий является оптимальной в задаче (2.1)–(2.3) с теми же граничными условиями. Если функции управления $u_1(\cdot)$ и $u_2(\cdot)$ для этих траекторий различаются на множестве положительной меры, то полусумма $\frac{1}{2}(u_1(t) + u_2(t))$ не равна по модулю 1 на множестве положительной меры, т. е. соответствующая полусумма является особой экстремалью. Однако мы видели, что множество особых экстремалей системы (2.8)–(2.10) совпадает с началом координат. Следовательно, $(y_i(t), z_i(t), w_i(t)) \equiv 0$, $i = 1, 2$.

2.5. Гамильтонов формализм. Инвариантный интеграл Гильберта.

Для задачи (2.1)–(2.3) любая экстремаль с подходящими граничными условиями является оптимальной. Однако для рассмотрения возмущения задачи (2.1)–(2.3) нам понадобится другой способ доказательства оптимальности траекторий. Этот способ основан на включении отдельной экстремали в некоторое гладкое семейства экстремалей и является прямым обобщением метода поля экстремалей классического вариационного исчисления. Докажем аналог теоремы об интегральном инварианте для гамильтоновой системы (2.8)–(2.10).

В шестимерном пространстве с координатами $(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ определим дифференциальную 1-форму

$$\omega = \psi_1 dy + \psi_2 dz + \psi_3 dw.$$

ТЕОРЕМА 2.5. *Имеем $d\omega|_{\mathfrak{M}^+} = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гамильтониан системы (2.8)–(2.10)

$$H(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = z\psi_1 + w\psi_2 + |\psi_3| - y.$$

Покажем, что в точках многообразия $\mathfrak{M}^+$

$$H(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = z\psi_1 + w\psi_2 + |\psi_3| - y \equiv 0.$$

Хотя канонические переменные $\psi(\cdot)$ претерпевают скачок в точках выхода на границу $y = 0$, ясно, что гамильтониан H , ограниченный на произвольную экстремаль, лежащую в $\mathfrak{M}^+$, является непрерывной функцией, поскольку скачок $\psi(\cdot)$ перпендикулярен к границе фазового ограничения, а вектор фазовой скорости должен касаться границы (в данном случае $\Delta\psi_1 \cdot z = 0$). Так как система (2.8)–(2.10) автономна, на участках гладкости экстремалей гамильтониан H постоянен. Поскольку все траектории системы (2.8)–(2.10) внутри $\mathfrak{M}^+$ за конечное время приходят в начало координат, то $H|_{\mathfrak{M}^+} \equiv 0$.

Обозначим через $\phi(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ правую часть системы (2.8)–(2.10). Тогда в точках многообразия $\mathfrak{M}^+$ вне точек пересечения с $\psi_3 = 0$ и $y = 0$ внутреннее произведение вектора ϕ и формы $d\omega$ равно нулю:

$$\phi \lrcorner d\omega = 0.$$

Отсюда по теореме Стокса следует, что для любой замкнутой кривой $\gamma \subset \mathfrak{M}^+$ интеграл $\oint_{\gamma} \omega$ сохраняется при трансляциях вдоль траекторий системы (2.8)–(2.10), по крайней мере до тех пор, пока поток системы является непрерывным отображением. Точнее, пусть точки кривой γ параметризуются параметром $\alpha \in [0, 1]$. Пусть Π – трубка траекторий системы (2.8)–(2.10), выходящих в момент времени $t = 0$ из точек кривой γ . Достаточно рассмотреть случай, когда фазовый поток системы (2.8)–(2.10) трансверсален кривой γ (по теореме трансверсальности Тома произвольную кривую можно сколь угодно точно в топологии гладких кривых приблизить такими гладкими трансверсальными кривыми). Тогда точки поверхности Π параметризуются следующим образом:

$$(y(t, \alpha), z(t, \alpha), w(t, \alpha), \psi_1(t, \alpha), \psi_2(t, \alpha), \psi_3(t, \alpha));$$

здесь t – время движения от точки на кривой γ до соответствующей точки поверхности Π вдоль траектории системы. Пусть $t = T(\alpha)$, $T(0) = T(1)$, – произвольная гладкая функция и

$$\gamma_1 = \{y(T(\alpha), \alpha), z(T(\alpha), \alpha), w(T(\alpha), \alpha), \psi_1(T(\alpha), \alpha), \psi_2(T(\alpha), \alpha), \psi_3(T(\alpha), \alpha)\}.$$

Тогда

$$\oint_{\gamma} \omega = \oint_{\gamma_1} \omega.$$

Рис. 5. Поток траекторий внутри $\mathfrak{M}^+$

При пересечении трубки траекторий Π с границей фазового ограничения $y = 0$ образ кривой γ на поверхности $y = z = 0$ за счет скачка переменной ψ_1 отображается в некоторую кривую γ^0 , принадлежащую орбите Γ^+ . Поскольку $\Delta\psi_1 \cdot dy|_{y=z=0} = 0$, равенство

$$\oint_{\gamma} \omega = \oint_{\gamma^0} \omega$$

сохраняется (рис. 5).

С этого момента кривая γ^0 счетное число раз возвращается на границу фазового ограничения при трансляциях вдоль автомодельных траекторий системы (2.8)–(2.10). Пусть γ^n – кривые на $y = z = 0$, в которые переходит γ^0 . При каждом таком отображении равенство

$$\oint_{\gamma^{n+1}} \omega = \oint_{\gamma^n} \omega$$

сохраняется. Отображение последования поверхности $y = z = 0$ в себя на множестве автомодельных траекторий является сжимающим, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \oint_{\gamma^n} \omega = 0.$$

Отсюда следует, что $\oint_{\gamma^0} \omega = 0$. Однако тогда и $d\omega|_{\mathfrak{M}^+} = 0$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Траектории системы (2.8)–(2.10) задачи (2.1)–(2.3) внутри $\mathfrak{M}^+$ оптимальны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\hat{\gamma} = (\hat{y}(\cdot), \hat{z}(\cdot), \hat{w}(\cdot), \hat{\psi}_1(\cdot), \hat{\psi}_2(\cdot), \hat{\psi}_3(\cdot))$ – некоторая экстремаль семейства $\mathfrak{M}^+$ с фиксированными начальными условиями. Для того чтобы не фиксировать время попадания траектории в начало координат, будем считать, что все траектории определены на полупрямой $[0, \infty)$, и продолжать их после попадания в начало координат тождественным нулем.

Поскольку экстремали в $\mathfrak{M}^+$ принадлежат нулевой поверхности уровня гамильтониана $H = 0$, имеем

$$\int_0^\infty \widehat{y}(t) dt = \int_0^\infty (\widehat{\psi}_1 \widehat{z} + \psi_2 \widehat{w} + |\widehat{\psi}_3|) dt = \oint_{\widehat{\gamma}} \omega.$$

Пусть $(y(\cdot), z(\cdot), w(\cdot))$ – произвольная допустимая принадлежащая проекции многообразия $\mathfrak{M}^+$ на пространство (y, z, w) траектория в задаче (2.1)–(2.3) с теми же граничными условиями, что и у траектории $\widehat{\gamma}$. Обозначим через γ поднятие этой траектории на многообразии $\mathfrak{M}^+$. Тогда в силу условия максимума имеем

$$\int_0^\infty y(t) dt \leq \oint_{\widehat{\gamma}} \omega. \quad (2.17)$$

Поскольку многообразие $\mathfrak{M}^+$ лагранжево, получаем

$$\oint_{\widehat{\gamma}} \omega = \oint_{\gamma} \omega. \quad (2.18)$$

Из соотношений (2.17), (2.18) следует неравенство

$$\int_0^\infty \widehat{y}(t) dt \leq \int_0^\infty y(t) dt.$$

§ 3. Возмущенная задача

Рассмотрим следующую разрывную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (дифференциальное включение) в полупространстве $y \geq 0$ пространства $\mathbb{R}^6$:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z + \phi_1, & \dot{z} &= w + \phi_2, & \dot{w} &= u + \phi_3, \\ \dot{\psi}_1 &= 1 + \phi_4, & \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 + \phi_5, & \dot{\psi}_3 &= -\psi_2 + \phi_6, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\max_{v \in [-1, 1]} \psi_3(t)v = \psi_3(t)u(t) \quad \text{п. в. на } [0, T], \quad (3.2)$$

$$\psi_1(t+0) - \psi_1(t) = -\delta \leq 0 \quad \text{при } t : y(t) = 0. \quad (3.3)$$

Здесь $\phi_i = \phi_i(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3, u)$, $i = 1, 2, \dots, 6$, – произвольные гладкие функции, удовлетворяющие следующим соотношениям. Чтобы задать эти соотношения, определим веса $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7)$ переменных $(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3, u)$, положив

$$h_1 = h_6 = 3, \quad h_2 = h_5 = 2, \quad h_3 = h_4 = 1, \quad h_7 = 0.$$

Введем в пространстве с координатами $(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3, u)$ действие однопараметрической масштабной группы $\mathfrak{g}_\lambda$:

$$\mathfrak{g}_\lambda(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3, u) = (\lambda^{h_1} y, \lambda^{h_2} z, \lambda^{h_3} w, \lambda^{h_4} \psi_1, \lambda^{h_5} \psi_2, \lambda^{h_6} \psi_3, \lambda^{h_7} u).$$

Тогда при $\lambda \rightarrow +0$ должны выполняться соотношения

$$\frac{1}{\lambda^{h_i}} \phi_i(\mathfrak{g}_\lambda(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3, u)) = O_i(1), \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (3.4)$$

где функции $O_i(1)$ равномерно ограничены по некоторой открытой окрестности отрезка $(0, 0, 0, 0, 0, u)$, $u \in [-1, 1]$.

Таким образом, веса возмущающих добавок ϕ_i в смысле действия масштабной группы $\mathfrak{g}$ должны быть выше, чем веса слагаемых, стоящих в правой части невозмущенной системы (3.1), (3.2) при $\phi_i = 0$.

Отметим, что локально решение системы (3.1)–(3.3) однозначно определено только в полупространстве $y > 0$, при выходе на границу фазового ограничения $y = 0$ соответствующая траектория системы либо перестает быть определенной (“протыкает” границу $y = 0$ и оказывается в точках полупространства $y < 0$), либо может быть продолжена бесконечным числом способов за счет выбора скачка $\delta < 0$ переменной ψ_1 ($\psi_1(t+0) - \psi_1(t) = \delta$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Интегральным многообразием $\mathfrak{W}$ системы (3.1)–(3.3) является такое многообразие, которое обладает следующими свойствами:*

А) внутри $\mathfrak{W}$ имеется единственная траектория Γ^0 , приходящая в начало координат с управлением $u \equiv 1$;

В) имеется однопараметрическое семейство траекторий $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{W}$, каждая из которых выходит на границу фазового ограничения $y = 0$ по счетному множеству точек, принадлежащих некоторой гладкой кривой Γ , проходящей через начало координат, точки касания границы $y = 0$ на каждой кривой внутри семейства $\mathfrak{M}$ накапливаются к точке начала координат, при этом каждая траектория приходит в начало координат за конечное время; все траектории семейства $\mathfrak{M}$ заполняют двумерную поверхность $\mathfrak{K}$, гомеоморфную двумерному конусу над окружностью с вершиной в начале координат, точки переключения управления $u = \text{sign } \psi_3(t)$ траекторий внутри $\mathfrak{K}$ заполняют две одномерные кривые, Π^1 и Π^2 , проходящие через начало координат; если τ_1, τ_2 – два последовательных касания границы $y = 0$ траектории внутри $\mathfrak{K}$, то на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ имеются два переключения управления $u = \text{sign } \psi_3(t)$: сначала с $u = -1$ на $u = 1$ в точках Π^1 , затем с $u = 1$ на $u = -1$ в точках Π^2 ;

С) траектории многообразия $\mathfrak{W}$, отличные от Γ^0 и $\mathfrak{M}$, в прямом времени не более чем с двумя переключениями управления попадают на кривую Γ , а затем продолжаютс подхождющей траекторией внутри $\mathfrak{K}$;

Д) в попятном времени траектории многообразия $\mathfrak{W}$, не лежащие в $\mathfrak{K}$, либо стремятся к траектории Γ^0 в орбитальной метрике группы $\mathfrak{g}_\lambda$, либо выходят на границу фазового ограничения $y = 0$ и далее в попятном времени не продолжаемы.

ТЕОРЕМА 3.1. *При выполнении условий (3.4) возмущенная система (3.1)–(3.3) имеет трехмерное интегральное многообразие $\mathfrak{W}$ со свойствами А)–Д).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала существование двумерного интегрального многообразия $\mathfrak{K}$, заполненного траекториями системы (3.1)–(3.3), приходящими в начало координат со счетным числом касаний границы фазового ограничения $y = 0$ за конечное время. Для этого изучим отображение последования Пуанкаре границы $y = 0$ на себя, возникающее при двух последовательных касаниях поверхности $y = 0$ траекториями системы (3.1)–(3.3).

Пусть в момент времени $t = t_0$ траектория $(y(t), z(t), w(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$ оказалась на поверхности $y = 0$. При $t > t_0$ (в достаточно малой окрестности

точки t_0 , в которой $y(t) > 0$) запишем систему (3.1)–(3.3) в виде интегральных уравнений

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \int_{t_0}^t (z(s) + \phi_1(s)) ds, \\
 z(t) &= z(t_0) + \int_{t_0}^t (w(s) + \phi_2(s)) ds, \\
 w(t) &= w(t_0) + \int_{t_0}^t (u(s) + \phi_3(s)) ds, \\
 \psi_1(t) &= \psi_1(t_0 + 0) + \int_{t_0}^t (1 + \phi_4(s)) ds, \\
 \psi_2(t) &= \psi_2(t_0) + \int_{t_0}^t (-\psi_1(s) + \phi_5(s)) ds, \\
 \psi_3(t) &= \psi_3(t_0) + \int_{t_0}^t (-\psi_2(s) + \phi_6(s)) ds,
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

где

$$\phi_i(s) = \phi_i(y(s), z(s), w(s), \psi_1(s), \psi_2(s), \psi_3(s), u(s)), \quad i = 1, 2, \dots, 6.$$

Из первого уравнения следует, что

$$y(t) = z(t_0) + \phi_1(t_0) + O(t - t_0),$$

поэтому необходимым условием того, что $y(t) \geq 0$ при $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ на некотором открытом интервале времени $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, является равенство

$$z(t_0) + \phi_1(0, z(t_0), w(t_0), \psi_1(t_0), \psi_2(t_0), \psi_3(t_0)) = 0.$$

Обозначим через Σ четырехмерную поверхность:

$$\Sigma = \{(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3) \mid y = 0, z + \phi_1(0, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = 0\}.$$

В пространстве $(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ введем действие группы g_λ :

$$g_\lambda(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3) = (\lambda^3 y, \lambda^2 z, \lambda w, \lambda^3 \psi_1, \lambda^2 \psi_2, \lambda \psi_3),$$

и определим окрестность орбит группы g_λ в орбитальной метрике соотношениями

$$\begin{aligned}
 U_g^\varepsilon(y_0, z_0, w_0, \psi_{10}, \psi_{20}, \psi_{30}) &= \bigcup_{\lambda \geq 0} \{(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3) \mid |y - y_0 \lambda^3| < \varepsilon \lambda^3, \\
 &\quad |z - z_0 \lambda^2| < \varepsilon \lambda^2, |w - w_0 \lambda| < \varepsilon \lambda, |\psi_1 - \psi_{10} \lambda^3| < \varepsilon \lambda^3, \\
 &\quad |\psi_2 - \psi_{20} \lambda^2| < \varepsilon \lambda^2, |\psi_3 - \psi_{30} \lambda| < \varepsilon \lambda\}.
 \end{aligned}$$

Известно, что невозмущенная система (3.1)–(3.3) (когда все функции ϕ_i тождественно равны нулю) имеет семейство автомодельных траекторий, касающихся границы $y = 0$ в точках некоторой кривой Γ^+ . Кривая Γ^+ является

орбитой группы g_λ и имеет вид

$$\Gamma^+ = \bigcup_{\lambda \geq 0} \{(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3) \mid y = 0, z = 0, w = w_0 \lambda, \\ \psi_1 = \psi_{10} \lambda, \psi_2 = \psi_{20} \lambda^2, \psi_3 = \psi_{30} \lambda^3\},$$

где

$$w_0 \approx 0.50102, \quad \psi_{10} \approx -1.68130, \quad \psi_{20} \approx -1.35073, \quad \psi_{30} \approx -0.67675.$$

Будем рассматривать точки поверхности Σ , принадлежащие области

$$V_\varepsilon = U_g^\varepsilon(0, 0, w_0, \psi_{10}, \psi_{20}, \psi_{30}) \cap B_\varepsilon,$$

где $B_\varepsilon = \{(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3) \mid y^2 + z^2 + w^2 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 \leq \varepsilon^2\}$ – замкнутый шар из $\mathbb{R}^6$ с радиусом ε и центром в начале координат. Покажем, что существует $\varepsilon > 0$, для которого отображение последования Пуанкаре $\{y = 0\} \mapsto \{y = 0\}$ вдоль траекторий системы (3.1)–(3.3) корректно определено в точках поверхности V_ε , непрерывно дифференцируемо и имеет одномерную инвариантную кривую $\Gamma^* \subset \Sigma$ вида

$$\Gamma^* = \bigcup_{\lambda \geq 0} \{(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3) \mid y = 0, z = A(\lambda) \lambda^2, w = B(\lambda) \lambda, \\ \psi_1 = C(\lambda) \lambda, \psi_2 = D(\lambda) \lambda^2, \psi_3 = E(\lambda) \lambda^3\},$$

где

$$A(\lambda) \lambda^2 + \phi(0, A(\lambda) \lambda^2, B(\lambda) \lambda, C(\lambda) \lambda, D(\lambda) \lambda^2, E(\lambda) \lambda^3) \equiv 0, \\ A(0) = 0, \quad B(0) = w_0, \quad C(0) = \psi_{10}, \quad D(0) = \psi_{20}, \quad E(0) = \psi_{30}.$$

Для доказательства существования такого ε разрешим особенность отображения последования, перейдя в области V_ε от координат $(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ к координатам $(\eta_2, \eta_1, w > 0, \theta, \xi_1, \xi_2)$:

$$\eta_2 = \frac{y}{w^3}, \quad \eta_1 = \frac{z}{w^2}, \quad w, \quad \theta = \frac{\psi_1}{w}, \quad \xi_1 = \frac{\psi_2}{w^2}, \quad \xi_2 = \frac{\psi_3}{w^3}.$$

Рассмотрим начальные условия на поверхности Σ :

$$\eta_1 w^2 + \phi_1(0, \eta_1 w, w, \theta w, \xi_1 w^2, \xi_2 w^3) = 0.$$

В силу (3.4) существует предел (равномерный по $\eta_1, \theta, \xi_1, \xi_2$)

$$\lim_{w \rightarrow 0} \frac{1}{w^3} \phi_1(0, \eta_1 w, w, \theta w, \xi_1 w^2, \xi_2 w^3).$$

В силу подготовительной теоремы Вейерштрасса отсюда следует, что в малой окрестности начала координат имеет место представление

$$\phi_1(0, \eta_1 w, w, \theta w, \xi_1 w^2, \xi_2 w^3) = w^3 F(\eta_1, w, \theta, \xi_1, \xi_2),$$

где $F(\eta_1, w, \theta, \xi_1, \xi_2)$ – некоторая гладкая функция. В частности, отсюда следует, что поверхность Σ задается в новых координатах уравнением

$$\eta_1 + wF(\eta_1, w, \theta, \xi_1, \xi_2) = 0 \quad (3.6)$$

и является гладким регулярным четырехмерным подмногообразием в окрестности точки $M^*(\eta_2^*, \eta_1^*, w^*, \xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*)$, где

$$\eta_2^* = 0, \quad \eta_1^* = 0, \quad w^* = 0, \quad \xi_1^* = \frac{\xi_{10}}{w_0}, \quad \xi_2^* = \frac{\xi_{20}}{w_0^2}, \quad \xi_3^* = \frac{\xi_{30}}{w_0^2}.$$

Отметим, что в малой окрестности точки из уравнения (3.6) следует, что

$$\eta_1 = O(w). \quad (3.7)$$

Обозначим через Σ^+ ту часть поверхности Σ , которая принадлежит полупространству $w \geq 0$.

Траектории системы (3.1)–(3.3) с начальными условиями на Σ^+ в малой окрестности точки M^* сходят с границы фазового ограничения $y = 0$ с управлением $u = -1$. Будем искать время первой смены знака управления $u(t) = \text{sign } \psi_3(t)$ в виде $t_1 = \tau_1 w(0)$. Тогда в произвольный момент переключения $t = \tau w$, $\tau \in (0, \tau_1)$, интегральное соотношение (3.5) для координаты $w(t)$ может быть записано в виде

$$w(t) = w \left(1 + \int_0^\tau (-1 + \phi_3(ws)) ds \right)$$

и имеет первый порядок по начальному значению w . Полагая

$$\begin{aligned} y(t) &= \eta_1(t)w^3(t), & z(t) &= \eta_2(t)w^2(t), \\ \psi_1(t) &= \theta(t)w(t), & \psi_2(t) &= \xi_1(t)w^2(t), & \psi_3(t) &= \xi_2(t)w^3(t), \end{aligned}$$

с учетом соотношений (3.4) получим

$$\begin{aligned} \int_0^\tau (-1 + \phi_3(\eta_1(ws)w^3(ws), \eta_2(ws)w^2(ws), w(ws), \theta(ws)w(ws), \\ \xi_1(ws)w^2(ws), \xi_2(ws)w^3(ws))) ds = -\tau + O(w), \end{aligned}$$

откуда имеем

$$w(t) = w(1 - \tau) + O(w^2).$$

Для координаты $z(t)$ получаем

$$\begin{aligned} \eta_2(t)w^2(t) &= \eta w^2 + w \int_0^\tau (w(ws) + \phi_2(ws)) ds \\ &= \eta w^2 + w \int_0^\tau (w(ws) + \phi_2(\eta_1(ws)w^3(ws), \eta_2(ws)w^2(ws), w(ws), \\ &\quad \theta(ws)w(ws), \xi_1(ws)w^2(ws), \xi_2(ws)w^3(ws))) ds \\ &= w^2 \left(\eta + \tau - \frac{1}{2}\tau^2 \right) + O(w^3), \end{aligned}$$

откуда имеем

$$\eta_2(t) = \frac{\eta_2 + \tau - \frac{1}{2}\tau^2}{(1 - \tau)^2} + O(w).$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= \frac{\eta_2\tau + \frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{6}\tau^3}{(1 - \tau)^3} + O(w), & \theta(t) &= \frac{\theta + \tau}{1 - \tau} + O(w), \\ \xi_1(t) &= \frac{\xi_1 - \theta\tau - \frac{1}{2}\tau^2}{(1 - \tau)^2} + O(w), & \xi_2(t) &= \frac{\xi_2 - \xi_1\tau + \frac{1}{2}\theta\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^3}{(1 - \tau)^3} + O(w). \end{aligned}$$

Далее, с учетом соотношения (3.7) получаем

$$\begin{aligned} \eta_1(t) &= \frac{\frac{1}{2}\tau^2 - \frac{1}{6}\tau^3}{(1 - \tau)^3} + O(w), & \eta_2(t) &= \frac{\tau - \frac{1}{2}\tau^2}{(1 - \tau)^2} + O(w), \\ \theta(t) &= \frac{\theta + \tau}{1 - \tau} + O(w), \\ \xi_1(t) &= \frac{\xi_1 - \theta\tau - \frac{1}{2}\tau^2}{(1 - \tau)^2} + O(w), & \xi_2(t) &= \frac{\xi_2 - \xi_1\tau + \frac{1}{2}\theta\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^3}{(1 - \tau)^3} + O(w). \end{aligned}$$

Момент переключения управления $u = \text{sign } \psi_3(t)$ определяется соотношением

$$\psi_3(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_2 - \xi_1\tau + \frac{1}{2}\theta\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^3 + O(w) = 0. \quad (3.8)$$

Обозначим через $\tau_0 = \tau_0(\eta_1, \eta_2, w, \theta, \xi_1, \xi_2)$ корень уравнения

$$\xi_2 - \xi_1\tau + \frac{1}{2}\theta\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^3 = 0.$$

Поскольку при $(\theta, \xi_1, \xi_2) = (\theta_0, \xi_{10}, \xi_{20})$ первый положительный корень τ_0 не кратный, в окрестности V_ε для решения уравнения (3.8) выполнено соотношение

$$\tau = \tau_0 + O(w).$$

Отсюда, в частности, следует, что при $w = 0$ отображение, сопоставляющее начальной точке $(\theta, w, \xi_1, \xi_2)$ точку первого переключения траектории системы (3.1)–(3.2) (в координатах $(\eta_1, \eta_2, w, \theta, \xi_1, \xi_2)$), совпадает с соответствующим отображением для невозмущенной системы ($\phi_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, 6$).

Аналогично получаем, что отображение множества точек первого переключения на множество точек второго переключения управления вдоль траекторий системы (3.1)–(3.2) и отображение множества точек второго переключения на точки касания границы фазового ограничения также при $w = 0$ в координатах $(\eta_1, \eta_2, w, \theta, \xi_1, \xi_2)$ для системы (3.1)–(3.2) совпадают с соответствующими отображениями для невозмущенной системы.

В п. 2.3 было построено отображение последования $\Phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ вдоль траекторий невозмущенной системы в координатах (ξ_1, ξ_2) . При этом начальное значение переменной θ определялось как функция от (ξ_1, ξ_2) условием касания поверхности $y = 0$ в момент возвращения на границу фазового ограничения. Уравнение для θ было невырожденным, а дифференциал отображения Φ

в неподвижной точке (ξ_{10}, ξ_{20}) имел седловую структуру. Из вышеизложенного следует, что при $w = 0$ отображение $\Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ для возмущенной системы совпадает с Φ . В частности, это отображение имеет ту же самую неподвижную точку, что и для невозмущенной системы.

Для отображения $\Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ при произвольном w неподвижной точкой является точка $(w = 0, \xi_{10}, \xi_{20})$, а дифференциал этого отображения имеет вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} (1 - \tau_{10})(1 + \tau_{20})(1 - \tau_{30}) & 0 & 0 \\ * & \frac{\partial \Xi_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \Xi_1}{\partial \xi_2} \\ * & \frac{\partial \Xi_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \Xi_2}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$\tau_{10} \approx 0.501, \quad \tau_{20} \approx 0.427, \quad \tau_{30} \approx 0.137.$

Здесь звездочками обозначены величины, от которых спектр дифференциала Ω не зависит. Собственные числа матрицы суть

$$\lambda_1 \approx 0.614, \quad \lambda \approx -1976.08, \quad \lambda_3 \approx 202.67.$$

Следовательно, по теореме об инвариантном многообразии диффеоморфизма имеется одномерная кривая Γ , инвариантная относительно отображения последования $\Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$, касающаяся собственного вектора дифференциала Ω с собственным значением λ_1 . По теореме об инвариантном многообразии ограничение отображения $\Sigma^+ \rightarrow \Sigma^+$ на инвариантную кривую Γ топологически эквивалентно ограничению Ω на собственное подпространство с собственным значением λ_1 и потому является сжимающим. В частности, точки последовательных касаний поверхности траекториями системы (3.1)–(3.3) на кривой Γ оцениваются сверху убывающей геометрической прогрессией, а потому соответствующие траектории приходят в начало координат за конечное время. Существование семейства решений $\mathfrak{K}$ доказано.

Докажем оставшиеся утверждения теоремы. Для невозмущенной системы те траектории, которые попадали на кривую переключения Γ автомодельных решений за счет скачка переменной ψ_1 , находясь внутри конуса автомодельных решений $\mathfrak{K}$, в попятном времени стремились в орбитальной метрике к кривой Γ^0 . При этом кривая Γ^0 была неподвижной точкой для факторсистемы с особенностью типа невырожденного узла. Для возмущенной системы (3.1)–(3.3) также существует траектория, приходящая в начало координат с постоянным значением $u \equiv -1$ (обозначим ее также Γ^0). Траектории системы (3.1)–(3.3), попадающие на Γ в момент касания границы $y = 0$ за счет скачка переменной ψ_1 , в силу непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров при попятном движении также оказываются в орбитальной окрестности кривой Γ^0 . Поскольку особенность типа узла сохраняется при малых возмущениях системы дифференциальных уравнений, отсюда следует, что α -предельным множеством всех таких траекторий является кривая Γ^0 . Аналогично доказывается, что траектории системы (3.1)–(3.3), попадающие на Γ , но оказывающиеся вне конуса $\mathfrak{K}$ (момент первого переключения в попятном времени для таких траекторий строго меньше момента первого

переключения на соответствующей кривой семейства $\mathcal{K}$), с одним переключением управления выходят на границу $y = 0$ без касания и не продолжаемы при движении в попятном времени. Теорема доказана.

§ 4. Лагранжевы многообразия в возмущенной задаче

Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \int_0^T f(x, u) dt &\rightarrow \min, \\ \dot{x} &= \varphi(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in [-1, 1], \\ x(0) &= x_0, \quad x(T) = x_1, \end{aligned} \quad (4.1)$$

с фазовым ограничением вида

$$\Phi(x(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

для некоторой функции $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Выпишем формально для данной задачи необходимые условия минимума в форме принципа максимума Понтрягина (с $\lambda_0 = 1$):

$$\begin{aligned} H(\psi, x, u) &= \psi \varphi(x, u) - f(x, u), \\ d\psi &= -\frac{\partial H}{\partial x} dt + \nabla \Phi(x(t)) d\xi(t), \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\max_{v \in [-1, 1]} H(\psi(t), x(t), v) = H(\psi(t), x(t), u(t)) \quad \text{п. в. на } [0, T]. \quad (4.3)$$

При этом в изолированных точках выхода траектории $(\psi(t), x(t))$ на границу фазового ограничения $\Phi(x) = 0$ функция $\psi(t)$ может иметь скачок (разрыв первого рода)

$$\psi(t+0) - \psi(t) = \delta \nabla \Phi(x(t)), \quad \delta \geq 0.$$

Здесь $\nabla \Phi(x(t))$ – градиент функции $\Phi(x)$ в точке $x = x(t)$ выхода на границу фазового ограничения $\Phi(x) = 0$.

Предположим, что систему (4.1)–(4.3) вместе с фазовым ограничением $\Phi(x) \leq 0$ можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z + \phi_1, \quad \dot{z} = w + \phi_2, \quad \dot{w} = u + \phi_3, \\ \dot{\psi}_1 &= 1 + \phi_4, \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1 + \phi_5, \quad \dot{\psi}_3 = -\psi_2 + \phi_6, \\ \dot{r} &= \phi_7, \quad y \geq 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\max_{v \in [-1, 1]} \psi_3(t)v = \psi_3(t)u(t) \quad \text{п. в. на } [0, T], \quad (4.5)$$

$$\psi_1(t+0) - \psi_1(t) = -\delta \leq 0 \quad \text{при } t: y(t) = 0. \quad (4.6)$$

Здесь $(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3) \in \mathbb{R}^6$, а $r \in \mathbb{R}^{2n-6}$ – вектор, дополняющий переменные $(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ до базиса $(2n)$ -мерного расширенного пространства. Функции $\phi_i = \phi_i(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3, r, u)$, $i = 1, 2, \dots, 7$, являются произвольными

гладкими функциями, удовлетворяющими следующим соотношениям. Существуют такие гладкие функции $\chi_i(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3, r, u)$, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \lambda^{-h_i} \phi_i(\lambda^3 y, \lambda^2 z, \lambda w, \lambda \psi_1, \lambda^2 \psi_2, \lambda^3 \psi_3, r, u) = \chi_i(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3, r, u), \quad (4.7)$$

где веса h_i переменных $(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3, r, u)$ определяются числами

$$h_1 = h_6 = 3, \quad h_2 = h_5 = 2, \quad h_3 = h_4 = 1, \quad h_7 = 0.$$

Если “заморозить” $(2n - 6)$ -мерный вектор r (положив $r = r_0$ и исключив уравнение с $\dot{r}$), то для системы (4.1)–(4.3) будут выполнены предположения теоремы 3.1 и, следовательно, у нее будет существовать трехмерное интегральное подмногообразие, содержащее траектории, счетное число раз касающиеся границы фазового ограничения $y = 0$. Утверждается, что для системы (4.1)–(4.3) с произвольным поведением координаты r это свойство сохраняется: через произвольную точку $(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3, r) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, r_0)$ проходит трехмерное интегральное подмногообразие, поведение траекторий внутри которого описывается теоремой 3.1.

ТЕОРЕМА 4.1. *При выполнении условий (4.4)–(4.6) через каждую точку*

$$(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3, r) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, r_0)$$

проходит трехмерное интегральное подмногообразие $\mathfrak{W}_{r_0}$ системы (4.1)–(4.3), поведение траекторий внутри которого орбитально эквивалентно поведению траекторий внутри интегрального многообразия $\mathfrak{W}$ системы (3.1)–(3.3) в теореме 3.1. Совокупность $\mathfrak{W}_{r_0}$ при всех r_0 имеет структуру стратифицированного гладкого многообразия W . В частности, внутри W точки переключений управления $u = \text{sign } \psi_3$ и точки касания траекторий границы фазового ограничения $y = 0$ заполняют гладкие стратифицированные многообразия с границей (клетки максимальной размерности этих многообразий имеют размерность $2n - 5$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем точку $r_0 \in \mathbb{R}^{2n-6}$. Докажем, что на границе $y = 0$ имеется кривая Γ_{r_0} , являющаяся аналогом кривой Γ^+ касания границы $y = 0$ автомодельных решений системы (2.8)–(2.10). В частности, каждая траектория системы (4.1)–(4.3) с начальными условиями на Γ_{r_0} с касанием уходит в полупространство $y > 0$ и после двух переключений управления, сначала с $u = -1$ на $u = 1$, а затем с $u = 1$ на $u = -1$, возвращается на границу $y = 0$ в некоторую точку кривой Γ_{r_0} (в момент касания границы $y = 0$ переменная ψ_1 имеет скачок, стремящийся к нулю при стремлении точки касания к точке $(0, 0, 0, 0, 0, 0, r_0)$). При этом совокупность точек касания границы $y = 0$ на Γ_{r_0} образует гладкое $(2n - 5)$ -мерное многообразие с $(2n - 6)$ -мерным краем так же, как и точки переключения управления соответствующих траекторий внутри $y > 0$.

В основе доказательства лежит разрешение особенности отображения Пуанкаре границы $y = 0$ вдоль траекторий системы (4.1)–(4.3). Для разрешения особенности используется замена переменных $(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3, r) \mapsto$

$(\eta_2, \eta_1, w, \theta, \xi_1, \xi_2, \zeta)$:

$$\eta_2 = \frac{y}{w^3}, \quad \eta_1 = \frac{z}{w^2}, \quad w, \quad \theta = \frac{\psi_1}{w}, \quad \xi_1 = \frac{\psi_2}{w^2}, \quad \xi_2 = \frac{\psi_3}{w^3}, \quad \zeta = \frac{r - r_0}{w}.$$

Рассмотрим, как меняется координата ζ после замены времени $t \mapsto \tau = \frac{t}{w(t)}$. Нетрудно видеть, что с точностью до членов высшего порядка малости по w в моменты $t_1 = \tau_1 w(t_1)$, $t_2 = \tau_2 w(t_2)$ двух последовательных переключений управления $u = \text{sign } \psi_3(t)$ и в момент $t_3 = \tau_3 w(t_3)$ повторного касания траекторией границы фазового ограничения $y = 0$ имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \zeta(\tau_1) &= \frac{\zeta(0) + \phi_7(0, r_0, -1)\tau_{10}}{1 - \tau_{10}} + O(w), \\ \zeta(\tau_2) &= \frac{\zeta(\tau_1) + \phi_7(0, r_0, 1)\tau_{20}}{1 + \tau_{20}} + O(w), \\ \zeta(\tau_3) &= \frac{\zeta(\tau_2) + \phi_7(0, r_0, -1)\tau_{30}}{1 - \tau_{30}} + O(w). \end{aligned}$$

Здесь τ_{10} , τ_{20} , τ_{30} – моменты соответственно первого и второго переключений, а также момент возвращения на границу фазового ограничения $y = 0$ траектории факторсистемы системы (4.1)–(4.3), отвечающей начальному значению переменной w , равной нулю. В силу предположений (4.7) функции, которые обозначены как $O(w)$, равномерно ограничены со своими частными производными по переменным $(\eta_2, \eta_1, \theta, \xi_1, \xi_2, \zeta)$. Отсюда следует, что после перехода к координатам $(\eta_2, \eta_1, w, \theta, \xi_1, \xi_2, \zeta)$ подпространство $w = 0$ оказывается инвариантным для отображения Пуанкаре границы $y = 0$ на себя и на этой поверхности существует неподвижная точка отображения Пуанкаре. Эта точка отвечает “замороженному” значению координаты $r \equiv r_0$ в системе (4.1)–(4.3).

Координату ζ^* неподвижной точки полного отображения Пуанкаре теперь легко вычислить из уравнения $\zeta(0) = \zeta(\tau_3)$:

$$\begin{aligned} \zeta^*(1 - \tau_{30})(1 + \tau_{20})(1 - \tau_{10}) &= \zeta^* + \phi_7(0, r_0, -1)\tau_{10} + \phi_7(0, r_0, 1)\tau_{20}(1 - \tau_{10}) \\ &\quad + \phi_7(0, r_0, -1)\tau_{30}(1 + \tau_{20})(1 - \tau_{10}). \end{aligned}$$

Дифференциал отображения Пуанкаре в неподвижной точке имеет блочную структуру и может быть представлен в виде

$$\begin{pmatrix} & 0 \\ \Omega & 0 \\ & 0 \\ & E_{2n-6} \\ * & \frac{1}{(1 - \tau_{30})(1 + \tau_{20})(1 - \tau_{10})} \end{pmatrix},$$

где Ω – матрица вида (3.9). По теореме об инвариантном многообразии диффеоморфизма в неподвижной точке имеется инвариантная кривая отображения Пуанкаре Γ_{r_0} , проходящая через точку $(0, 0, 0, 0, 0, 0, r_0)$. Объединение кривых Γ_{r_0} для различных точек r_0 имеет структуру гладкого многообразия с краем по теореме о непрерывной зависимости от параметра инвариантной кривой диффеоморфизма.

Оставшаяся часть доказательства теоремы ничем не отличается от доказательства теоремы 3.1. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь конструкцию, позволяющую включать отдельно взятую экстремаль в лагранжево многообразие, заполненное экстремальными задачи, и, тем самым, доказывать оптимальность исходной экстремали.

Пусть $\mathfrak{N}$ – произвольное $(n-3)$ -мерное подмногообразие в подпространстве $y = z = w = \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$. Координаты $(y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3, r)$ были введены нами в расширенном $(2n)$ -мерном пространстве задачи (4.1), в котором определена лагранжева структура $\omega = \psi dx$, согласованная с системой уравнений Гамильтона (4.1)–(4.3) (системой уравнений принципа максимума Понтрягина). Пусть $\mathfrak{N}$ является лежандровым, т.е. ограничение формы ω на $\mathfrak{N}$ тождественно равно нулю. Частный случай такого многообразия – поднятие произвольного $(n-3)$ -мерного многообразия цели $x(T) \in N$ в задаче (4.1) на базу $y = z = w = \psi_1 = \psi_2 = \psi_3 = 0$ расслоения W с помощью условия трансверсальности $\psi(T) \perp T_{x(T)}N$. Рассмотрим прообраз многообразия $\mathfrak{N}$ в расслоении W , т.е. объединение всех трехмерных слоев $\mathfrak{W}_{r_0}$ по $r_0 \in \mathfrak{N}$. Обозначим этот прообраз через $\mathfrak{W}$. Из теоремы 4.1 следует, что $\mathfrak{W}$ – стратифицированное многообразие с краем. Предположим, что проекция M многообразия $\mathfrak{W}$ на пространство x регулярна. Граница M состоит из интегральных кривых системы (4.1), выходящих с постоянным управлением $u \equiv 1$ в попятном времени из точек границы фазового ограничения $\Phi(x) = 0$, которые принадлежат M .

ТЕОРЕМА 4.2. *Многообразие $\mathfrak{W}$ лагранжево, т.е. $d\psi \wedge dx|_{\mathfrak{W}} = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО практически ничем не отличается от доказательства теоремы 2.5.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *В условиях теоремы 4.2 произвольная экстремаль, которая может быть включена в семейство $\mathfrak{W}$, доставляет минимум в задаче (4.1) в классе всех допустимых траекторий, принадлежащих проекции M многообразия $\mathfrak{W}$ на пространство x .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству следствия 2.1.

ПРИМЕР 4.1. Докажем существование экстремалей со счетным числом касаний границы фазового ограничения в следующей задаче:

$$\int_0^T (x_1 + x_2) dt \rightarrow \min, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, & \dot{y}_1 &= -y_2 + \frac{1}{2}u, & \dot{x}_2 &= y_2, & \dot{y}_2 &= y_1 - \frac{1}{2}u, \\ u &\in [0, 1], & x_1 + x_2 &\geq 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad y_i(0) = y_{i0}, \quad x_i(T) = y_i(T) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.10)$$

Выпишем систему принципа максимума Понтрягина для данной задачи. Функция Понтрягина имеет вид

$$H = \psi_1 y_1 + \phi_1 \left(-y_2 + \frac{1}{2}u \right) + \psi_2 y_2 + \phi_2 \left(y_1 - \frac{1}{2}u \right) - (x_1 + x_2).$$

Сопряженная система может быть записана в виде

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= 1, & \dot{\phi}_1 &= -\psi_1 - \phi_2, \\ \dot{\psi}_2 &= 1, & \dot{\phi}_2 &= -\psi_2 + \phi_1.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Будем искать экстремали, выходящие на границу фазового ограничения $x_1 + x_2 = 0$ только по дискретному множеству точек. Поэтому сопряженная система выписана без возможного скачка скорости сопряженных переменных в направлении при движении экстремали вдоль границы. В изолированных точках $t = \tau$ касания границы $x_1 + x_2 = 0$ вектор $(\psi_1, \phi_1, \psi_2, \phi_2)$ может иметь разрывы первого рода в направлении, перпендикулярном к границе, т. е.

$$\psi_1(\tau + 0) - \psi_1(\tau) = -\delta, \quad \psi_2(\tau + 0) - \psi_2(\tau) = -\delta, \quad \delta \leq 0.$$

Условие максимума может быть записано в виде

$$u(t) = \text{sign}(\phi_1(t) - \phi_2(t)).$$

Приведем систему принципа максимума (4.8)–(4.11) к виду (4.6)–(4.7). Введем переменные

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= y, & y_1 + y_2 &= z, & y_1 - y_2 &= w, \\ \phi_1 - \phi_2 &= \Psi_3, & \psi_1 + \phi_2 - \psi_2 + \phi_1 &= \Psi_2, & \psi_1 + \psi_2 &= \Psi_1, \\ x_1 - x_2 &= r_1, & \psi_1 - \psi_2 &= r_2.\end{aligned}$$

Дифференцируя новые переменные и подставляя результат в систему (4.8)–(4.11), получаем

$$\begin{aligned}\dot{y} &= z, & \dot{z} &= w, & \dot{w} &= u - z, \\ \dot{\Psi}_3 &= -\Psi_2, & \dot{\Psi}_2 &= -\Psi_1 + \Psi_3, & \dot{\Psi}_1 &= 2.\end{aligned}$$

Скачок набора сопряженных переменных в направлении перпендикуляра к границе фазового ограничения в момент выхода экстремали на границу в новых переменных соответствует скачку переменной Ψ_1 . Все предположения теоремы 4.1 выполнены, следовательно, над прямой $x_1 = s$, $x_2 = -s$, $y_1 = y_2 = 0$ существует расслоение с трехмерными слоями, заполненное экстремалими задачи, счетное число раз касающимися границы фазового ограничения $y = 0$.

§ 5. Интегральные ограничения, налагаемые на управление

Рассмотрим теперь еще одну задачу с фазовым ограничением, которая имеет семейство автомодельных решений со счетным числом касаний фазового ограничения. Задача похожа на задачу (2.1)–(2.3) во всем, кроме ограничения, налагаемого на управление. Эти управления теперь могут быть неограниченными, но принадлежать пространству $L_2[0, T]$:

$$\int_0^T y \, dt \rightarrow \min, \tag{5.1}$$

$$\dot{y} = z, \quad \dot{z} = w, \quad \dot{w} = u, \quad \int_0^T u^2(t) \, dt = C < \infty, \quad y \geq 0, \tag{5.2}$$

$$y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0, \quad w(0) = w_0, \quad y(T) = z(T) = w(T) = 0. \tag{5.3}$$

Здесь C – произвольная фиксированная положительная постоянная. Отметим, что в данной постановке множество задач (5.1)–(5.3), параметризованных константой C , является однородной относительно действия обычной группы гомотетий пространства (y, z, w) : если $(y(t), z(t), w(t), u(t))$ – произвольная оптимальная траектория задачи (5.1)–(5.3) с начальными условиями y_0, z_0, w_0 , то для произвольного $\lambda > 0$ траектория $(\lambda y(t), \lambda z(t), \lambda w(t), \lambda u(t))$ является оптимальной в задаче (5.1)–(5.3) с начальными условиями $\lambda y_0, \lambda z_0, \lambda w_0$ (и другим значением константы C).

5.1. Принцип максимума Понтрягина. Прежде чем выписывать необходимые условия оптимальности, изучим, каким образом допустимая траектория системы (5.1)–(5.3) может пересекаться с границей фазового ограничения $y = 0$. Пусть $u(\cdot) \in L_2[0, T]$ – произвольное допустимое управление, $(y(\cdot), z(\cdot), w(\cdot))$ – соответствующая ему траектория с некоторыми начальными условиями y_0, z_0, w_0 . Без ограничения общности можно считать, что $y_0 = 0$.

Из соотношения

$$y(t) = y_0 + z_0 t + \frac{1}{2} w_0 t^2 + \frac{1}{2} \int_0^T (t-s)^2 u(s) ds$$

следует, что для продолжимости траектории $(y(\cdot), z(\cdot), w(\cdot))$ в области $y \geq 0$ (как при $t > 0$, так и при $t < 0$) необходимо, чтобы $z_0 = 0, w_0 \geq 0$. Если $w_0 > 0$, то $t = 0$ – изолированный нуль функции $y(t)$ (т. е. касание траектории $(y(\cdot), z(\cdot), w(\cdot))$ и границы $y = 0$ происходит в изолированной точке). Отсюда следует, что единственной точкой, в которой касания траектории с границей фазового ограничения $y = 0$ могут накапливаться, является начало координат. При нашем выборе краевых условий соответствующая оптимальная траектория совпадает с началом координат. Таким образом, в задаче (5.1)–(5.3) все допустимые траектории могут касаться границы фазового ограничения не более чем по счетному множеству точек.

Выпишем необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина для задачи (5.1)–(5.3) (в регулярной форме с $\lambda_0 = 1$). Поскольку задача (5.1)–(5.3) является задачей выпуклого программирования и для нее выполнено условие Слейтера, любое решение системы уравнения принципа максимума Понтрягина является оптимальной траекторией задачи (5.1)–(5.3) (доказательство ничем не отличается от доказательства оптимальности экстремали в теореме 2.1).

Обозначим

$$H = -y + \lambda_1 u^2 + \psi_1 z + \psi_2 w + \psi_3 u$$

функцию Понтрягина задачи (5.1)–(5.3). Сопряженная система имеет вид

$$\dot{\psi}_1 = 1 - \dot{\xi}(t), \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \quad \dot{\psi}_3 = -\psi_2, \quad (5.4)$$

где $d\xi(t)$ – неотрицательная мера с носителем в точках выхода траектории $(y(t), z(t), w(t))$ на границу фазового ограничения $y = 0$. В силу изложенного выше можно считать, что $\xi(t) \equiv 0$. При этом в изолированных точках τ выхода

функции $y(t)$ на границу $y = 0$ функция $\psi_1(t)$ может иметь разрывы первого рода:

$$\psi_1(\tau + 0) - \psi_1(\tau) = -\delta \leq 0.$$

Условие максимума записывается в виде

$$\max_v (\lambda_1 v^2 + \psi_3 v) = \lambda_1 u^2(t) + \psi_3 u(t). \quad (5.5)$$

При $\lambda_1 \geq 0$, $\psi_3(t) \neq 0$ максимум достигается на бесконечности. В этом случае оптимальная траектория в таком классе управлений не существует. При $\lambda_1 < 0$ из (5.5) следует, что $u(t) = -\frac{\psi_3}{2\lambda_1}$. Обозначим $-\frac{1}{2\lambda_1} = \mu$.

Окончательно система уравнений принципа максимума Понтрягина может быть записана в виде следующей гамильтоновой системы со скачками:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= z, & \dot{z} &= w, & \dot{w} &= \mu\psi_3, & \mu &> 0, \\ \dot{\psi}_1 &= 1, & \dot{\psi}_2 &= -\psi_1, & \dot{\psi}_3 &= -\psi_2, \\ \psi_1(\tau + 0) - \psi_1(\tau) &= -\delta \leq 0 & \text{при } y(\tau) &= 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Напомним, что множество оптимальных траекторий задачи (5.1)–(5.3) допускает гомотетию по переменным y, z, w . Если $(y(t), z(t), w(t))$ – оптимальная траектория задачи (5.1)–(5.3), то и $(\lambda y(t), \lambda z(t), \lambda w(t))$ является оптимальной траекторией задачи (5.1)–(5.3) (с соответствующими начальными условиями). Если $(\mu, \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$ – набор множителей, с которым траектория $(y(t), z(t), w(t))$ удовлетворяет гамильтоновой системе (5.6), то траектория $(\lambda y(t), \lambda z(t), \lambda w(t))$ удовлетворяет той же системе с набором множителей $(\lambda\mu, \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$. Поэтому достаточно проанализировать поведение траекторий гамильтоновой системы (5.6) со значением $\mu = 1$ (достаточно положить $\lambda = \frac{1}{\mu}$). Далее везде полагаем $\mu = 1$.

5.2. Группа симметрий и автомодельные траектории. Система (5.6) является однородной относительно группы симметрий

$$g_\lambda: (t, y, z, w, \psi_1, \psi_2, \psi_3) \mapsto \left(\frac{t}{\lambda}, \lambda^6 y, \lambda^5 z, \lambda^4 w, \lambda \psi_1, \lambda^2 \psi_2, \lambda^3 \psi_3 \right), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Иными словами, если $(y(t), z(t), w(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$ – решение системы (5.6), то при произвольном $\lambda > 0$

$$\left(\lambda^6 y \left(\frac{t}{\lambda} \right), \lambda^5 z \left(\frac{t}{\lambda} \right), \lambda^4 w \left(\frac{t}{\lambda} \right), \lambda \psi_1 \left(\frac{t}{\lambda} \right), \lambda^2 \psi_2 \left(\frac{t}{\lambda} \right), \lambda^3 \psi_3 \left(\frac{t}{\lambda} \right) \right)$$

также является решением (5.6).

Траекторию $(y(t), z(t), w(t), \psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t))$ назовем *автомодельной*, если для некоторых $\lambda_0 > 0$ и $\tau > 0$ при всех $t \geq 0$ выполнено соотношение

$$\begin{aligned} &(y(t + \tau), z(t + \tau), w(t + \tau), \psi_1(t + \tau), \psi_2(t + \tau), \psi_3(t + \tau)) \\ &= \left(\lambda_0^6 y \left(\frac{t}{\lambda_0} \right), \lambda_0^5 z \left(\frac{t}{\lambda_0} \right), \lambda_0^4 w \left(\frac{t}{\lambda_0} \right), \lambda_0 \psi_1 \left(\frac{t}{\lambda_0} \right), \lambda_0^2 \psi_2 \left(\frac{t}{\lambda_0} \right), \lambda_0^3 \psi_3 \left(\frac{t}{\lambda_0} \right) \right). \end{aligned}$$

Найдем автомодельные решения системы (5.6), касающиеся границы фазового ограничения $y = 0$ в точках некоторой орбиты группы g_λ . Если имеют место два последовательных касания границы на такой траектории, то имеется счетное число точек касаний, координаты которых образуют сходящиеся геометрические прогрессии. При этом траектория приходит в начало координат – точку накопления касаний – в конечный момент времени.

Определим отображение Пуанкаре Φ поверхности $y = z = 0$, $w > 0$ на себя вдоль траекторий (5.6). Фиксируем начальные условия $y_0, z_0, w_0, \psi_{10}, \psi_{20}, \psi_{30}, y_0 = z_0 = 0$. Пусть $t > 0$ – время движения траектории (5.6) с данными начальными условиями до первого касания поверхности $y_0 = 0$. Интегрируя систему (5.6), получим

$$\begin{aligned}\psi_1(t) &= \psi_{10} + t, \\ \psi_2(t) &= \psi_{20} - \psi_{10}t - \frac{1}{2}t^2, \\ \psi_3(t) &= \psi_{30} - \psi_{20}t + \frac{1}{2}\psi_{10}t^2 + \frac{1}{6}t^3, \\ w(t) &= w_0 + \psi_{30}t - \frac{1}{2}\psi_{20}t^2 + \frac{1}{6}\psi_{10}t^3 + \frac{1}{24}t^4, \\ 0 &= w_0t + \frac{1}{2}\psi_{30}t^2 - \frac{1}{6}\psi_{20}t^3 + \frac{1}{24}\psi_{10}t^4 + \frac{1}{120}t^5, \\ 0 &= \frac{1}{2}w_0t^2 + \frac{1}{6}\psi_{30}t^3 - \frac{1}{24}\psi_{20}t^4 + \frac{1}{120}\psi_{10}t^5 + \frac{1}{720}t^6.\end{aligned}$$

Переходя к координатам факторпространства по действию группы симметрий

$$\psi_1 = \xi_0, \quad \frac{\psi_2}{\psi_1^2} = \xi_1, \quad \frac{\psi_3}{\psi_1^3} = \xi_2, \quad \frac{w}{\psi_1^4} = \xi_3, \quad \frac{t}{\psi_1} = \tau,$$

получим

$$\begin{aligned}\xi_0^{(1)} &= \xi_0(1 + \tau), \\ \xi_1^{(1)}(\xi_0^{(1)})^2 &= \xi_0^2\left(\xi_1 - \tau - \frac{1}{2}\tau^2\right), \\ \xi_2^{(1)}(\xi_0^{(1)})^3 &= \xi_0^3\left(\xi_2 - \xi_1\tau + \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^3\right), \\ \xi_3^{(1)}(\xi_0^{(1)})^4 &= \xi_0^4\left(\xi_3 + \xi_2\tau - \frac{1}{2}\xi_1\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^3 + \frac{1}{24}\tau^4\right), \\ 0 &= \xi_0^5\left(\xi_3 + \frac{1}{2}\xi_2\tau - \frac{1}{6}\xi_1\tau^2 + \frac{1}{24}\tau^3 + \frac{1}{120}\tau^4\right), \\ 0 &= \xi_0^6\left(\frac{1}{2}\xi_3 + \frac{1}{6}\xi_2\tau - \frac{1}{24}\xi_1\tau^2 + \frac{1}{120}\tau^3 + \frac{1}{720}\tau^4\right).\end{aligned}$$

Выпишем условия возвращения на исходную орбиту группы симметрий для соответствующей траектории с учетом скачка переменной ψ_1 в момент касания

поверхности $y = 0$. Скачок также будем искать в виде $\delta\psi_1$. Получаем

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \frac{\xi_1 - \tau - \frac{1}{2}\tau^2}{(1 + \tau - \delta)^2}, \\ \xi_2 &= \frac{\xi_2 - \xi_1\tau + \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^3}{(1 + \tau - \delta)^3}, \\ \xi_3 &= \frac{\xi_3 + \xi_2\tau - \frac{1}{2}\xi_1\tau^2 + \frac{1}{6}\tau^3 + \frac{1}{24}\tau^4}{(1 + \tau - \delta)^4}, \\ 0 &= \xi_3 + \frac{1}{2}\xi_2\tau - \frac{1}{6}\xi_1\tau^2 + \frac{1}{24}\tau^3 + \frac{1}{120}\tau^4, \\ 0 &= \frac{1}{2}\xi_3 + \frac{1}{6}\xi_2\tau - \frac{1}{24}\xi_1\tau^2 + \frac{1}{120}\tau^3 + \frac{1}{720}\tau^4.\end{aligned}$$

Разрешая первые три уравнения относительно переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3 , получим систему

$$\begin{aligned}\tau^9\delta^8 + \delta^8\tau^8 + 7\tau^8\delta^7 + 35\delta^7\tau^7 + 31\tau^7\delta^6 + 125\delta^6\tau^6 + 94\delta^5\tau^6 \\ + 300\delta^5\tau^5 + 185\tau^5\delta^4 + 510\delta^4\tau^4 + 237\delta^3\tau^4 + 600\delta^3\tau^3 + 205\tau^3\delta^2 \\ + 480\delta^2\tau^2 + 110\tau^2\delta + 240\delta\tau + 30\tau + 60 = 0, \\ \tau^9\delta^8 + 6\delta^8\tau^8 + 7\tau^8\delta^7 + 42\delta^7\tau^7 + 36\tau^7\delta^6 + 156\delta^6\tau^6 + 129\delta^5\tau^6 \\ + 414\delta^5\tau^5 + 290\tau^5\delta^4 + 810\delta^4\tau^4 + 417\delta^3\tau^4 + 1092\delta^3\tau^3 + 425\tau^3\delta^2 \\ + 1020\delta^2\tau^2 + 270\tau^2\delta + 600\delta\tau + 90\tau + 180 = 0.\end{aligned}$$

Разрешая эту систему относительно τ, δ , получим

$$\tau = -1.4378, \quad \delta = 0.4732.$$

Значения координат неподвижной точки факторотображения следующие:

$$\xi_1^* = -0.4501, \quad \xi_2^* = 0.1125, \quad \xi_3^* = 0.0141.$$

Факторотображение отображения последования границы фазового ограничения $y = 0$ на себя определено только в точках подмногообразия $y = z = 0$. При этом координата w в момент времени $t = 0$ и значение скачка δ переменной ψ_1 однозначно определяются условием касания поверхности $y = z = 0$ соответствующей траекторией системы в некоторый момент $t > 0$. Поэтому факторотображение фактически определено на двумерном подпространстве с координатами (ξ_1, ξ_2) пространства (ξ_1, ξ_2, ξ_3) . Вычисляя дифференциал факторотображения в неподвижной точке (ξ_1^*, ξ_2^*) , получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} -19561 & 33325 \\ -13845 & 23445 \end{pmatrix}.$$

Собственными числами этой матрицы являются $\lambda_1 = 2943.1$, $\lambda_2 = 940.3$.

Отметим, что система (5.6) имеет единственную траекторию, проходящую через начало координат без пересечений с границей $y = 0$. Эта траектория

представляет собой орбиту группы симметрий g_λ и является неподвижной точкой факторсистемы системы (5.6) по действию группы g_λ . В этой неподвижной точке факторсистема имеет особенность типа неустойчивого невырожденного узла.

Мы видим, что система (5.6) является точным аналогом системы (2.8)–(2.10), поэтому все утверждения, которые были доказаны выше для системы (2.8)–(2.10), практически буквально переформулируются для системы (5.6). В частности, справедлива

ТЕОРЕМА 5.1. Система (5.6) имеет единственное допустимое решение Γ^0 , приходящее в начало координат без пересечений с границей фазового ограничения $y = 0$. Все траектории системы (5.6), не имеющие пересечений в попятном времени с границей фазового ограничения $y = 0$, в орбитальной метрике в пространстве орбит стремятся к траектории Γ^0 (при $t \rightarrow -\infty$). Система (5.6) имеет также двумерное интегральное подмногообразие $\mathfrak{W}$, заполненное однопараметрическим семейством решений, каждое из которых имеет счетное число касаний границы $y = 0$ и приходит в начало координат за конечное время. Для всех начальных условий, не принадлежащих поверхности $\mathfrak{W}^+$, все оптимальные траектории задачи (5.1)–(5.3), отличные от Γ^0 , в некоторый конечный момент времени t за счет скачка переменной ψ_1 входят на $\Gamma^+ = \mathfrak{W}^+ \cap \{y = 0\}$.

Для возмущения системы (5.6) за счет добавления в правую часть слагаемых, имеющих меньший порядок в смысле действия группы g_λ , остаются справедливыми аналог теоремы 3.1 о существовании трехмерного интегрального подмногообразия со свойствами, описанными в теореме 5.1, а также аналог теоремы 4.1 о существовании инвариантного расслоения с соответствующими трехмерными интегральными слоями.

Список литературы

1. А. А. Милютин, “Об одном семействе задач оптимального управления с фазовым ограничением”, *Труды международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина*, т. 1: *Оптимальное управление*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **60**, ВИНТИ, М., 1998, 176–186; англ. пер.: A. A. Milyutin, “On a certain family of optimal control problems with phase constraint”, *J. Math. Sci. (New York)*, **100**:5 (2000), 2564–2571.
2. В. В. Дикусар, А. А. Милютин, *Качественные и численные методы в принципе максимума*, Наука, М., 1989.
3. M. I. Zelikin, V. F. Borisov, *Theory of chattering control with applications to astronautics, robotics, economics, and engineering*, Systems Control Found. Appl., Birkhäuser, Boston, MA, 1994.
4. М. И. Зеликин, В. Ф. Борисов, “Режимы учащающихся переключений в задачах оптимального управления”, *Некоторые вопросы теории колебаний и теории оптимального управления*, Тр. МИАН СССР, **197**, Наука, М., 1991, 85–166; англ. пер.: M. I. Zelikin, V. F. Borisov, “Regimes with increasingly more frequent switchings in optimal control problems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **197** (1993), 95–186.
5. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, М., 1976; англ. пер.:

- L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishchenko, *Selected works*, v. 4: *The mathematical theory of optimal processes*, Classics Soviet Math., Gordon & Breach, New York, 1986.
6. А. П. Афанасьев, В. В. Дикусар, А. А. Милютин, С. В. Чуканов, *Необходимое условие экстремума*, Наука, М., 1988.
 7. А. А. Милютин, *Принцип максимума в общей задаче оптимального управления*, Наука, М., 2001.
 8. А. В. Арутюнов, С. М. Асеев, В. И. Благодатских, “Необходимые условия первого порядка в задаче оптимального управления дифференциальным включением с фазовыми ограничениями”, *Матем. сб.*, **184**:6 (1993), 3–32; англ. пер.: A. V. Arutyunov, S. M. Aseev, V. I. Blagodatskikh, “First-order necessary conditions in the problem of optimal control of a differential inclusion with phase constraints”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **79**:1 (1994), 117–139.
 9. А. В. Арутюнов, *Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи*, Факториал, М., 1997; англ. пер.: A. V. Arutyunov, *Optimality conditions. Abnormal and degenerate problems*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000.

В. В. ГАЕЛЬ (V. V. GAEL)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: gaelv@mail.ru

Поступило в редакцию
08.02.2010

М. И. ЗЕЛИКИН (M. I. ZELIKIN)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: mzelikin@mtu-net.ru