Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. И. Сазонов, Об устойчивости периодических решений системы Навье–Стокса в трехмерной внешней области, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 4, 155–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/im444>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 14:34:17

УДК 517.9

Л. И. Сазонов

Об устойчивости периодических решений системы Навье–Стокса в трехмерной внешней области

Исследован вопрос об устойчивости периодических решений системы Навье–Стокса во внешней области с заданным постоянным вектором скорости на бесконечности. Для изучения спектральных свойств оператора монодромии используется его связь с некоторым оператором Винера–Хопфа с операторнозначным символом.

Библиография: 11 наименований.

1. Пусть $x_0(t)$ – T -периодическое решение дифференциального уравнения в банаховом пространстве X с T -периодической нелинейностью

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (1)$$

Вместе с (1) рассмотрим линеаризованное уравнение с T -периодическим коэффициентом

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t, x_0(t))y. \quad (2)$$

Известно (см. [1]–[3]), что при достаточно общих предположениях относительно нелинейности строгая принадлежность спектра оператора монодромии уравнения (2) единичному кругу влечет экспоненциальную устойчивость периодического решения $x_0(t)$ в подходящем банаховом пространстве; если же спектр содержит точки $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| > 1\}$, то решение $x_0(t)$ неустойчиво.

Однако в ряде случаев (например, в случае параболических уравнений или системы Навье–Стокса в неограниченных областях) на единичной окружности всегда имеются точки непрерывного спектра оператора монодромии. Тем не менее, при этих условиях также возможно обоснование линеаризации при отсутствии мультипликаторов (т.е. собственных значений оператора монодромии) на единичной окружности. Естественно, при этом меняется характер устойчивости, она перестает быть экспоненциальной и понимается в более слабом смысле.

Далее этот факт будет установлен для периодических решений системы Навье–Стокса во внешней области, имеющих конечный предел при стремлении пространственной переменной к бесконечности. При этом существенно используются результаты работы [4].

Введем используемые далее понятия устойчивости [2]. *Устойчивость периодического решения* $x_0(t)$ уравнения (1) определяется как устойчивость нулевого решения уравнения для возмущений

$$\frac{du}{dt} = f(t, u + x_0) - f(t, x_0).$$

Пусть для этого уравнения определен, по крайней мере в некоторой окрестности нуля пространства X , эволюционный оператор U^t , который дает решение $u(t) = u(t, a) = U^t a$, удовлетворяющее начальному условию $u_0 = a$.

Тривиальное решение $u(t) \equiv 0$ называется (X, U) -устойчивым, если U^t определяет отображение некоторой окрестности нуля пространства X в некоторое банахово пространство U вектор-функций на $[0, \infty)$, непрерывное в точке $a = 0$.

В частности, (X, C_X) -устойчивость называется *устойчивостью по Ляпунову*, а (X, C_X^0) -устойчивость – *асимптотической устойчивостью*. (Здесь $C_X = C([0, \infty], X)$ – пространство непрерывных на $[0, \infty)$ вектор-функций со значениями в X с конечной нормой

$$\|U\|_{C_X} = \sup_{0 < t < \infty} \|u(t)\|_X$$

и C_X^0 – его подпространство вектор-функций с условием $\|u(t)\|_X \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.)

2. Пусть $u_0(t, x) + u_\infty$ – 1-периодическое решение системы Навье–Стокса

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - (u, \nabla)u - \nabla p + f(t, x) \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad (3)$$

во внешней области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ класса C^2 , удовлетворяющее условиям

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_\infty = u_\infty = (1, 0, 0). \quad (4)$$

Применяя к системе (3) гидродинамический проектор Π , сведем уравнение для возмущений $v = u - u_0(t, x) - u_\infty$ к абстрактному параболическому уравнению

$$\frac{dv}{dt} = Av + B(t)v + Kv, \quad (5)$$

где

$$Av = \Pi\{\Delta v - (u_\infty, \nabla)v\}, \quad (6)$$

$$B(t)v = -\Pi\{(\nabla, v)u_0 + (\nabla, u_0)v\}, \quad (7)$$

$$Kv = -\Pi(\nabla, v)v. \quad (8)$$

Здесь использовано соотношение $(v, \nabla)u = (\nabla, v)u$, справедливое для соленидального поля v , для того, чтобы в дальнейшем можно было применять оценки (11).

Таким образом, устойчивость периодического решения эквивалентна устойчивости нулевого решения уравнения (5), которое будем рассматривать как возмущение уравнения

$$\frac{dv}{dt} = Av + Kv, \quad (9)$$

для которого в [4] установлен следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Нулевое решение уравнения (9) асимптотически устойчиво в пространстве $S_3(\Omega)$, более того, оно $(S_3(\Omega), Z_q^0)$ -устойчиво при любом $q \in (9/2, 6)$.

Кратко напомним обозначения и схему доказательства, приведенные в [4].

Здесь $S_p(\Omega) = \Pi L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, – подпространство соленоидальных полей из $L_p(\Omega)$ (L_p -ограниченность гидродинамического проектора установлена для ограниченных областей в [2], для внешних областей – в [5]),

$$Z_q^0 = C^0([0, \infty), S_3(\Omega)) \cap L_{r(q)}((0, \infty), S_q(\Omega)),$$

где $1/r(q) = 1/2 - 3/(2q)$, $C^0([0, \infty), S_3(\Omega))$ – подпространство пространства $C([0, \infty), S_3(\Omega))$ всех непрерывных вектор-функций со значениями в $S_3(\Omega)$, состоящее из элементов $f(t)$ таких, что $\|f(t)\|_{S_3(\Omega)} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Далее будет использовано также пространство $Z_q[t_0, T]$, являющееся ограничением Z_q^0 на отрезок $[t_0, T]$, т.е.

$$Z_q[t_0, T] = C^0([t_0, T], S_3(\Omega)) \cap L_{r(q)}((t_0, T), S_q(\Omega)).$$

Задача Коши для уравнения (9) с начальным условием $v|_{t=0} = v_0$ сводится к интегральному уравнению

$$v(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t-\tau)Kv(\tau) d\tau, \quad (10)$$

где $T(t)$ – аналитическая полугруппа Озеена с производящим оператором A вида (6).

В работе [4] установлены равномерные по $t \in (0, \infty)$ оценки полугруппы

$$\|T(t)\Pi\partial^\alpha\|_{L_p(\Omega) \rightarrow S_q(\Omega)} \leq c_{p,q}^\alpha t^{-\frac{|\alpha|}{2} - \frac{3}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}, \quad (11)$$

где $|\alpha| = 0, 1$; $1 < p \leq q < \infty$ при $\alpha = 0$; $3/2 \leq p \leq q < \infty$ при $|\alpha| = 1$ (в случае ограниченных $t \in (0, R)$ при $|\alpha| = 1$ можно считать, что $1 < p \leq q < \infty$), и доказано, что при $q \in (9/2, 6)$ из них вытекают неравенства

$$\|T(t)v_0\|_{Z_q^0} \leq c \|v_0\|_{S_3(\Omega)}, \quad (12)$$

$$\left\| \int_0^t T(t-\tau)Kv(\tau) d\tau \right\|_{Z_q^0} \leq c \|v(\cdot)\|_{L_{r(q)}((0, \infty), S_q(\Omega))}^2, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{t_0}^t T(t-\tau)[Kv_1(\tau) - Kv_2(\tau)] d\tau \right\|_{Z_q[t_0, T]} \\ & \leq c \|v_1(\cdot) - v_2(\cdot)\|_{L_{r(q)}((t_0, T), S_q(\Omega))} \\ & \quad \times \sup_i \|v_i(\cdot)\|_{L_{r(q)}((t_0, T), S_q(\Omega))}, \quad 0 < t_0 < T \leq \infty, \end{aligned} \quad (14)$$

где константа c зависит только от q .

Из (12)–(14) следует, что при достаточно малой норме $\|v_0\|_{S_3(\Omega)} < \varepsilon$ существует шар $\|v\|_{Z_q^0} \leq R$, в котором уравнение (10) имеет единственное решение.

Действительно, выбрав ε и R так, чтобы $c(\varepsilon + R^2) \leq R$, $cR < 1$, получаем, что оператор, определяемый правой частью уравнения (10), является сжимающим в указанном шаре и имеет в нем единственную неподвижную точку v , для которой справедливы оценки

$$\|v(\cdot)\|_{Z_q^0} \leq c_1 \|v_0\|_{S_3(\Omega)}, \quad (15)$$

$$\|v(\cdot) - T(\cdot)v_0\|_{Z_q^0} \leq c_1 \|v_0\|_{S_3(\Omega)}^2, \quad (16)$$

где c_1 не зависит от v_0 . На самом деле, полученное решение единственно во всем пространстве Z_q^0 . Иначе, если существуют два решения $v_i(t)$, $i = 1, 2$, и t_0 – точная верхняя грань всех t , для которых $v_1(t) = v_2(t)$, то для $w(t) = v_1(t) - v_2(t)$ справедливо представление

$$w(t) = \int_{t_0}^t T(t-\tau)[Kv_1(\tau) - Kv_2(\tau)] d\tau,$$

из которого ввиду оценки (14) следует

$$\|w\|_{Z_q[t_0, T]} \leq c \|w\|_{Z_q[t_0, T]} \sup_i \|v_i\|_{L_{r(q)}([t_0, T], S_q(\Omega))}.$$

Поскольку $\|v_i\|_{L_{r(q)}([t_0, T], S_q(\Omega))} \rightarrow 0$ при $T \rightarrow t_0$, то $w(t) = 0$ при $t_0 \leq t \leq T$, если только T близко к t_0 , что противоречит определению t_0 .

Таким образом, для уравнения (9) построен эволюционный оператор, определяющий отображение некоторой окрестности нуля пространства $S_3(\Omega)$ в пространство Z_q^0 , которое вследствие (15) непрерывно в нуле. Поэтому согласно определению устойчивости нулевое решение уравнения (9) ($S_3(\Omega), Z_q^0$)-устойчиво.

Интегральное уравнение для возмущенного уравнения (5) имеет вид

$$v(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t-\tau)B(\tau)v(\tau) d\tau + \int_0^t T(t-\tau)Kv(\tau) d\tau. \quad (17)$$

Справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если оператор

$$(\mathcal{B}v)(t) = \int_0^t T(t-\tau)B(\tau)v(\tau) d\tau \quad (18)$$

удовлетворяет условиям:

- 1) оператор $\mathcal{B}$ ограничен из Z_q^0 в Z_q^0 ;
- 2) оператор $I - \mathcal{B}: Z_q^0 \rightarrow Z_q^0$ имеет ограниченный обратный, для которого выполняется соотношение

$$P_\tau(I - \mathcal{B})^{-1}P_\tau = P_\tau(I - \mathcal{B})^{-1}, \quad (19)$$

где P_τ – любой проектор вида

$$(P_\tau f)(t) = \begin{cases} f(t), & t < \tau, \\ 0, & t > \tau, \end{cases}$$

то нулевое решение уравнения (5) $(S_3(\Omega), Z_q^0)$ -устойчиво.

Доказательство аналогично доказательству предложения 1. Обращая оператор $I - \mathcal{B}$, приходим к уравнению вида (10), для которого устанавливается существование единственного решения в некотором шаре. Соотношение (19) позволяет доказать единственность этого решения во всем пространстве Z_q^0 .

Условия ограниченности оператора $\mathcal{B}$ приводятся в следующей лемме.

ЛЕММА 1. Пусть $u_0 \in C([0, 1], L_\rho(\Omega))$ при всех $\rho \in (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$ может быть сколь угодно мало¹. Тогда оператор

$$\mathcal{B}: L_{r(q)}((0, \infty), S_q(\Omega)) \rightarrow Z_q^0$$

ограничен при всех $q \in (3, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду оценок (11) справедливо неравенство

$$\|\mathcal{B}v(t)\|_{L_q(\Omega)} \leq \alpha \int_0^t \gamma_{q,p}(t - \tau) \|v(\tau)\|_{L_p(\Omega)} d\tau,$$

где $\alpha = \sup_\rho \|u_0\|_{C([0,1], L_\rho(\Omega))}$, $\gamma_{q,p}(t) = c \inf_\rho t^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \frac{1}{\rho})}$ с константой c , зависящей лишь от p, q, ρ , если только $1/q \leq 1/\rho + 1/p \leq 2/3$. Ясно, что принадлежность ρ интервалу $(3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$ влечет включение $\gamma_{q,q} \in L_1(0, \infty)$. Поэтому по теореме о свертке с суммируемым ядром имеем

$$\|\mathcal{B}v\|_{L_r((0, \infty), L_q(\Omega))} \leq \alpha \|\gamma_{q,q}\|_{L_1(0, \infty)} \|v\|_{L_r((0, \infty), L_q(\Omega))}. \quad (20)$$

Аналогично устанавливается, что $\gamma_{3,q} \in L_{r'}(0, \infty)$, где $1/r' = 1 - 1/r = 1/2 + 3/(2q)$. Поэтому, разбивая интеграл на части, в которых интегрирование проводится от 0 до $t/2$ и от $t/2$ до t , и применяя неравенство Гёльдера к каждому из этих двух интегралов, получаем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}v(t)\|_{L_3(\Omega)} &\leq \alpha \|\gamma_{3,q}\|_{L_{r'}(t/2, t)} \|v\|_{L_r((0, \infty), L_q(\Omega))} \\ &\quad + \alpha \|\gamma_{3,q}\|_{L_{r'}(0, \infty)} \|v\|_{L_r((t/2, t), L_q(\Omega))}, \end{aligned} \quad (21)$$

и, следовательно, справедлива оценка

$$\|\mathcal{B}v(\cdot)\|_{L_3(\Omega)} \leq c \|v\|_{L_r((0, \infty), L_q(\Omega))}. \quad (22)$$

Кроме того, из неравенства (21) вытекают соотношения $\|\mathcal{B}v(t)\|_{L_3(\Omega)} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$ или $t \rightarrow \infty$.

Остается заметить, что правая непрерывность оператор-функции $\mathcal{B}v(t)$ в любой точке $s \in (0, \infty)$ как элемента $L_3(\Omega)$ следует из представления

$$\begin{aligned} \mathcal{B}v(t) &= T(t - s) \int_0^s T(s - \tau) B(\tau) v(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_s^t T(t - \tau) B(\tau) v(\tau) d\tau, \quad 0 < s < t < \infty, \end{aligned}$$

¹В дальнейшем это условие всегда предполагается выполненным.

ввиду сильной непрерывности полугруппы $T(t)$ в точке $t = 0$ и оценки

$$\left\| \int_s^t T(t-\tau)B(\tau)v(\tau) d\tau \right\|_{L_3(\Omega)} \leq \alpha \|\gamma_{3,q}\|_{L_{r'}(0,t-s)} \|v\|_{L_r((s,t),L_q(\Omega))}.$$

Ее левую непрерывность можно показать аналогично.

Далее устанавливаются условия обратимости оператора $I - \mathcal{B}$. Ниже излагаются необходимые для этого факты из теории операторов Винера–Хопфа с операторнозначными символами.

Введем винеровскую алгебру $W(X)$ оператор-функций $\{A(t)\}$, определенных на единичной окружности $\Gamma = \{t: |t| = 1\}$ комплексной плоскости переменной z , принимающих значения в алгебре $\text{End}(X)$ ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X и разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды Фурье:

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|A_n\| < \infty \right).$$

Норма в $W(X)$ определяется соотношением

$$\|A(\cdot)\|_{W(X)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \|A_n\|.$$

Очевидно, что

$$\|A(\cdot)B(\cdot)\| \leq \|A(\cdot)\| \|B(\cdot)\|.$$

Согласно теореме Бохнера–Филлипса [6] оператор-функция $A(\cdot) \in W(X)$ обратима в алгебре $W(X)$ тогда и только тогда, когда для любого $t \in \Gamma$ оператор $A(t)$ обратим в $\text{End}(X)$. Таким образом, при выполнении указанного условия оператор-функция $\{A^{-1}(t)\}$ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье:

$$A^{-1}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n^{(-1)} t^n.$$

Введем в $W(X)$ ее замкнутую подалгебру $W^+(X)$ аналитических оператор-функций

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n.$$

Очевидно, что $\{A(t)\} \in W^+(X)$ продолжается до аналитической оператор-функции в круге $\{z: |z| < 1\}$, определяемой рядом:

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n. \quad (23)$$

Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Оператор-функция $\{A(z)\}$ из $W^+(X)$ обратима в $W^+(X)$ тогда и только тогда, когда для любого z , $|z| \leq 1$, обратим оператор $A(z)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности заметим, что при указанных условиях оператор-функция $\{A(t)\}$ обратима в алгебре $W(X)$, причем частичные суммы $\{A_n(t)\}$ ее ряда (23), начиная с некоторого достаточно большого n , также обратимы в этой алгебре и их обратные оператор-функции $\{A_n^{-1}(t)\}$ сходятся в норме алгебры $W(X)$ к $\{A^{-1}(t)\}$. С другой стороны, при достаточно больших n операторы $A_n(z)$ обратимы для всех z , удовлетворяющих условиям $|z| < r_n$ с некоторым $r_n > 1$, и их обратные $A_n^{-1}(z)$ определяют аналитическую в круге $\{z: |z| < r_n\}$ оператор-функцию $\{A_n^{-1}(z)\}$. Но тогда $\{A_n^{-1}(z)\} \in W^+(X)$, что и влечет принадлежность оператор-функции $\{A^{-1}(t)\}$ подалгебре $W^+(X)$ ввиду ее замкнутости.

Пусть $l_r(X)$, $1 \leq r < \infty$, – банахово пространство последовательностей $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ элементов банахова пространства X с нормой

$$\|\{x_n\}\|_{l_r(X)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^r \right)^{1/r} < \infty.$$

Оператор-функции $\{A(t)\} \in W(X)$ сопоставим оператор Винера–Хопфа $\mathbf{A}$, определенный в пространстве $l_r(X)$ следующим соотношением:

$$(\mathbf{A}\{x_n\})_k = \sum_{n=0}^{\infty} A_{k-n}x_n, \quad (24)$$

где A_n – коэффициенты Фурье оператор-функции $\{A(t)\}$. Оператор-функция $\{A(t)\}$ называется *операторнозначным символом* оператора $\mathbf{A}$.

В дальнейшем будет использовано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Оператор Винера–Хопфа $\mathbf{A}$ с аналитическим символом $\{A(z)\} \in W^+(X)$ обратим в пространстве $l_r(X)$, если для любого z , $|z| \leq 1$, обратим оператор $A(z)$, причем обратный оператор $\mathbf{A}^{-1}$ является оператором Винера–Хопфа с аналитическим символом $\{A^{-1}(z)\}$.*

Чтобы доказать это предложение, достаточно заметить, что произведение операторов Винера–Хопфа с аналитическими символами есть оператор Винера–Хопфа с аналитическим символом, равным произведению символов исходных операторов.

Для выяснения условий обратимости оператора $I - \mathcal{B}$ введем оператор J , сопоставляющий вектор-функции $f(t) \in L_r((0, \infty), S_q(\Omega))$ последовательность элементов

$$(Jf)_k(t) = f(t+k) \in L_r((0, 1), S_q(\Omega)), \quad k = 0, 1, \dots$$

Ясно, что оператор J осуществляет изометрический изоморфизм пространств $L_r((0, \infty), S_q(\Omega))$ и $l_r(L_r((0, 1), S_q(\Omega)))$.

Для вектор-функции $\mathcal{B}v(t)$, определяемой интегралом (18), имеем

$$(J\mathcal{B}v)_l(t) = \int_0^{t+l} T(t+l-\tau)B(\tau)v(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 1].$$

Разбивая интеграл на части по отрезкам $[0, 1], \dots, [j, j+1], \dots, [l, l+t]$ и осуществляя на каждом отрезке замену переменной $\tau \rightarrow j + \tau$, с учетом периодичности $B(\tau)$ окончательно получим

$$\begin{aligned} (J\mathcal{B}v)_l(t) &= \int_0^t T(t-\tau)B(\tau)(Jv)_l(\tau) d\tau \\ &\quad + \sum_{j=0}^{l-1} T(l-1-j+t) \int_0^1 T(1-\tau)B(\tau)(Jv)_j(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор $J(I - \mathcal{B})J^{-1}$ является оператором Винера–Хопфа с операторнозначным символом

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(z)u)(t) &= u(t) - \int_0^t T(t-\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau \\ &\quad - zT(t) \sum_{l=0}^{\infty} T(l)z^l \int_0^1 T(1-\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (25)$$

ЛЕММА 2. Оператор-функция $\mathcal{A}(z)$, определяемая формулой (25), при всех $q \in (3, \infty)$ принадлежит винеровской алгебре $W^+(L_{r(q)}(0, 1), S_q(\Omega))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коэффициенты Фурье оператор-функции (25) имеют вид

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_0 u)(t) &= u(t) - \int_0^t T(t-\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau, \\ (\mathcal{A}_l u)(t) &= -T(t) \int_0^t T(l-\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau, \quad l = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тот факт, что данные операторы принадлежат алгебре $\text{End}(L_{r(q)}(0, 1), S_q(\Omega))$, следует из леммы 1. Их абсолютная суммируемость есть следствие вытекающей из (11) оценки

$$\left\| \int_0^1 T(l+1-\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau \right\|_{L_q(\Omega)} \leq c l^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2\rho}} \|u\|_{L_{r((0,1), L_q(\Omega))}}, \quad l > 0, \quad (26)$$

в которой положим $\rho < 3$. Таким образом, ряд $\mathcal{A}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathcal{A}_l z^l$ абсолютно сходится при $|z| \leq 1$, т.е. $\sum_{l=0}^{\infty} \|\mathcal{A}_l\| < \infty$.

ЛЕММА 3. Пусть $q \in (3, \infty)$. Если оператор

$$\mathcal{A}(z): L_{r(q)}((0, 1), S_q(\Omega)) \rightarrow L_{r(q)}((0, 1), S_q(\Omega))$$

имеет ограниченный обратный при каждом $z \in \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$, то оператор $I - \mathcal{B}: Z_q^0 \rightarrow Z_q^0$ также имеет ограниченный обратный, удовлетворяющий условию (19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2 и предложению 4 оператор Винера–Хопфа $(J(I - \mathcal{B})J^{-1})$ имеет ограниченный обратный оператор в пространстве $l_{r(q)}(L_{r(q)}(0, 1), S_q(\Omega))$, который является оператором Винера–Хопфа и отвечает аналитическому символу

$$\mathcal{A}^{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n^{(-1)} z^n.$$

Следовательно, существует ограниченный обратный $(I - \mathcal{B})^{-1}$ в пространстве $L_{r(q)}((0, \infty), S_q(\Omega))$. Тот факт, что этот оператор является обратным и в пространстве Z_q^0 , вытекает из представления $(I - \mathcal{B})^{-1} - I = \mathcal{B}(I - \mathcal{B})^{-1}$ ввиду леммы 1. Для проверки условия (19) заметим, что при $n \leq \tau < n + 1$

$$JP_\tau J^{-1} = \text{diag}\{I, I, \dots, P_{\tau-n}, 0, \dots\}.$$

Поскольку $J(I - \mathcal{B})^{-1}J^{-1}$ является матричным оператором с нижнетреугольной матрицей, то достаточно установить, что $P_\tau \mathcal{A}_0^{(-1)} P_\tau = P_\tau \mathcal{A}_0^{(-1)}$ при всех $\tau \in (0, 1)$. Для этого заметим, что оператор $\mathcal{A}_0^{(-1)}$ является обратным к оператору $\mathcal{A}_0 = I - \mathcal{B}_1$, где оператор $\mathcal{B}_1 = P_1 \mathcal{B}$ действует в пространстве $L_{r(q)}((0, 1), S_q(\Omega))$, и из оценки

$$\|\mathcal{B}_1 u(t)\|_{S_q(\Omega)} \leq c \int_0^t |t - \tau|^{-\frac{1}{2} - \frac{3}{2\rho}} \|u(\tau)\|_{S_q(\Omega)} d\tau,$$

в которой положено $\rho > 3$, следует, что $\mathcal{A}_0^{(-1)}$ представляется абсолютно сходящимся рядом

$$\mathcal{A}_0^{(-1)} = (I - \mathcal{B}_1)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_1^n \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|\mathcal{B}_1^n\| < \infty \right).$$

Однако очевидно, что для степеней оператора $\mathcal{B}_1$ нужное соотношение выполняется: $P_\tau \mathcal{B}_1^n P_\tau = P_\tau \mathcal{B}_1$.

3. Далее сформулируем условия устойчивости периодического решения в терминах оператора монодромии уравнения

$$\frac{dv}{dt} = Av + B(t)v, \quad (27)$$

который определяется соотношением

$$Uv_0 = v(1), \quad (28)$$

где $v(t)$ – решение уравнения

$$v(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t-\tau)B(\tau)v(\tau) d\tau. \quad (29)$$

Заметим, что это уравнение можно записать в операторной форме:

$$v(t) = T(t)v_0 + \mathcal{B}_1 v(t), \quad (30)$$

где $\mathcal{B}_1 = P_1 \mathcal{B}$.

ЛЕММА 4. Пусть $u_0 \in C([0, 1], L_\rho(\Omega))$. Тогда оператор $\mathcal{B}_1$ вполне непрерывен из $L_r((0, 1), S_p(\Omega))$ в $L_\theta((0, 1), S_q(\Omega))$ (в $C([0, 1], S_q(\Omega))$ при $\theta = \infty$), если выполняются условия

$$1 < p, q < \infty, \quad 1 < r < \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{\rho} < 1, \\ 0 \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{q} < \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{\theta} > \frac{1}{r} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{q} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из оценки

$$\left\| \int_s^t T(t-\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau \right\|_{S_q(\Omega)} \leq c \|u_0\|_{C([0,1], L_\rho(\Omega))} \int_s^t |t-\tau|^{-\sigma} \|u(\tau)\|_{S_p(\Omega)} d\tau,$$

справедливой при выполнении условий

$$1 < p, q < \infty, \quad \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{\rho} < 1, \quad \sigma = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{q} \right) < 1,$$

вытекает согласно теореме о свертке (см., например, [7, с. 163]) ограниченность оператора

$$\mathcal{B}_1: L_r((0, 1), S_p(\Omega)) \rightarrow L_\theta((0, 1), S_q(\Omega)),$$

если $1/\theta > 1/r - 1 + \sigma$, и следует соотношение

$$\|\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_{1,\varepsilon}\|_{L_r(S_p(\Omega)) \rightarrow L_\theta(S_q(\Omega))} \rightarrow 0$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, где

$$\mathcal{B}_{1,\varepsilon} u(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < \varepsilon, \\ \int_0^{t-\varepsilon} T(t-\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau, & \varepsilon < t < 1. \end{cases}$$

Далее, аппроксимируя $u_0(t)$ функциями вида $\sum a_i(t)b_i$, где $b_i \in L_\rho(\Omega)$, $a_i(t) \in C[0, 1]$, убеждаемся, что достаточно установить полную непрерывность операторов вида

$$Q_\varepsilon u(t) = \int_0^{t-\varepsilon} T(t-\tau) \Pi \partial_j (bu(\tau)) d\tau,$$

где, как и выше, считаем, что $Q_\varepsilon u(t) = 0$ при $0 < t < \varepsilon$ и $b \in L_\rho(\Omega)$. В свою очередь, при любом $s > 0$ оператор

$$T(s) \Pi \partial_j b: L_p(\Omega) \rightarrow S_q(\Omega)$$

при $1/p + 1/\rho < 1$, $0 \leq 1/p + 1/\rho - 1/q < 1/3$ вполне непрерывен.

Действительно [8], пусть R_λ – резольвента оператора A вида (6), являющаяся ограниченным оператором из $S_p(\Omega)$ в соболевское пространство $W_p^2(\Omega)$ при любом $p \in (1, \infty)$. Тогда при $b \in L_\rho(\Omega)$ ввиду компактности вложения $W_p^1(\mathcal{D}) \subset L_\mu(\mathcal{D})$ при $0 \leq 1/p - 1/\mu < 1/3$ для ограниченной области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ оператор $b \partial_j R_\lambda: S_p(\Omega) \rightarrow L_q(\Omega)$ вполне непрерывен при выполнении соотношений $1/q > 1/\rho$, $0 \leq 1/p - 1/q + 1/\rho < 1/3$. Переход к сопряженному оператору приводит к тому, что оператор $R_\lambda \Pi \partial_j b: L_p(\Omega) \rightarrow S_q(\Omega)$ вполне непрерывен при выполнении условий $1/p + 1/\rho < 1$, $0 \leq 1/p - 1/q + 1/\rho < 1/3$. Теперь полная непрерывность оператора $T(s) \Pi \partial_j b$ вытекает из интегрального представления полугруппы через резольвенту:

$$T(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma R_\mu e^{\mu t} d\mu,$$

где γ – контур, состоящий из двух лучей вида $\{\mu \in \mathbb{C}: \arg(\mu - a) = \pm\varphi\}$, $a > 0$, $\pi/2 < \varphi < \pi$, расположенных вне спектра оператора A вида (6).

Остается заметить, что ввиду аналитичности полугруппы $T(t)$ (точнее, используется лишь ее равномерная непрерывность по $t \in [\varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$, в любой $L_p(\Omega)$ -норме при $1 < p < \infty$) оператор Q_ε равномерно аппроксимируется операторами вида

$$Q_\varepsilon^n u(t) = \int_0^{t-\varepsilon} \sum_{k=1}^n \chi_k(\tau) T\left(t - \tau_{k-1} - \frac{\varepsilon}{2}\right) T\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Pi \partial_j (bu(\tau)) d\tau,$$

где $\tau_k = k/n$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$; $\chi_k(\tau)$ – характеристическая функция отрезка $[(k-1)/n, k/n]$, полная непрерывность которого очевидна.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $u_0 \in C([0, 1], L_\rho(\Omega))$, $\rho > 3$. Тогда оператор монодромии $U: S_p(\Omega) \rightarrow S_p(\Omega)$ ограничен при любом $p \in (\rho', \infty)$ и имеет вид $U = T(1) + K$, где K – вполне непрерывный оператор.

Действительно, если $v_0 \in S_p(\Omega)$ при некотором $p \in (\rho', \infty)$, то уравнение (29) имеет единственное решение $v(t) \in C([0, 1], S_p(\Omega))$, определяемое рядом

$$v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_1^n [T(t)v_0]$$

и удовлетворяющее неравенству

$$\|v\|_{C([0,1], S_p(\Omega))} \leq c \|v_0\|_{S_p(\Omega)}.$$

Полная непрерывность оператора $K = U - T(1)$ вытекает из леммы 4.

В следующей теореме собраны некоторые результаты о спектре оператора монодромии.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $u_0 \in C([0, 1], L_\rho(\Omega))$, $\rho > 3$. Тогда:

1) спектр $\sigma_q(U)$ оператора монодромии в пространстве $S_q(\Omega)$ не зависит от $q \in (\rho', \infty)$ и имеет вид

$$\sigma_q(U) = \sigma(U) = \text{clos}\{\exp \Lambda\} \cup \{\lambda_k\},$$

где $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C}; \text{Re } \lambda \leq -(\text{Im } \lambda)^2\}$, $\{\lambda_k\}$ – дискретное множество конечнократных собственных значений оператора U вне $\text{clos}\{\exp \Lambda\}$, возможно, имеющее предельные точки на границе $\exp \Lambda$;

2) если $\lambda \in \text{clos}\{\exp \Lambda\}$, то существует ограниченная некомпактная последовательность элементов $u_n \in S_q(\Omega)$, $q \in (\rho', \infty)$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(U - \lambda I)u_n\|_{S_q(\Omega)} = 0,$$

т.е. все $\lambda \in \text{clos}\{\exp \Lambda\}$ – точки предельного спектра;

3) если $\lambda \in \exp \Lambda$ – собственное значение оператора U в $S_p(\Omega)$, $p > \rho'$, с собственным вектором v , то $v \in S_q(\Omega)$ при всех $q > p$;

4) если $\lambda = 1$ – собственное значение оператора U в $S_p(\Omega)$, $p > \rho'$, с собственным вектором v , то при $u_0 \in L_\rho(\Omega)$ для всех $\rho \in (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$ вектор $v \in S_q(\Omega)$ при всех $q \in (3, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Аналогично [9], в [8] установлено, что для производящего оператора A полугруппы $T(t)$ его спектр $\sigma_p(A)$ в любом пространстве $S_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, совпадает с множеством Λ , причем для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует некомпактная последовательность элементов $u_n \in S_p(\Omega)$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(A - \lambda I)u_n\| = 0. \quad (31)$$

Тогда по теореме об отображении спектра для аналитических полугрупп имеем

$$\sigma_p(T(1)) = \text{clos}\{\exp \Lambda\}.$$

Далее, из (31) и интегрального представления полугруппы $T(t)$, в котором используется тождество

$$R_\mu u_n = \frac{u_n}{\lambda - \mu} + \frac{1}{\lambda - \mu} R_\mu (A - \lambda I)u_n,$$

получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(T(1) - e^\lambda I)u_n\|_{S_p(\Omega)} = 0.$$

Соответствующий результат для оператора U вытекает из теоремы Вейля о сохранении непрерывного спектра при вполне непрерывном возмущении [10, с. 40].

Пусть $v_0 \in S_p(\Omega)$, $p \in (\rho', \infty)$, – собственный вектор оператора монодромии: $Uv_0 = \lambda v_0$, $\lambda \neq 0$. Тогда существует решение $v(t) \in C([0, 1], S_p(\Omega))$ уравнения (29) такое, что $v(1) = \lambda v_0$, т.е. для v_0 имеет место представление

$$\lambda v_0 = T(1)v_0 + \int_0^1 T(1-\tau)B(\tau)v(\tau) d\tau. \quad (32)$$

Однако $T(1)v_0 \in S_q(\Omega)$ при любом $q \geq p$ и

$$\int_0^1 T(1-\tau)B(\tau)v(\tau) d\tau \in S_q(\Omega),$$

если $0 \leq 1/p + 1/\rho - 1/q < 1/3$.

Учитывая, что можно взять $\rho > 3$, применяя метод “шнуровки”, из (32) получаем, что $v_0 \in S_q(\Omega)$ при всех $q \geq p$.

Если собственное значение λ расположено вне $\text{clos}\{\exp \Lambda\}$, то, обращая оператор $\lambda I - T(1)$, после применения метода “шнуровки” убеждаемся, что $v_0 \in S_q(\Omega)$ для всех $q \in (\rho', \infty)$.

Пусть теперь $\lambda = 1$. Если собственный вектор $v_0 \in S_p(\Omega)$ при $p \leq 3$, то нужное соотношение следует из уже установленного свойства 2). Поэтому будем считать, что $p > 3$. В результате повторных итераций, проведенных в (32), получаем

$$v_0 = T(n)v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} T(k) \int_0^1 T(1-\tau)B(\tau)v(\tau) d\tau. \quad (33)$$

Ввиду соотношения $\|T(n)v_0\|_{S_p(\Omega)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и оценки

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^1 T(1+k-\tau)B(\tau)v(\tau) d\tau \right\|_{S_q(\Omega)} &\leq \\ &\leq c k^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{\rho}-\frac{1}{q}\right)} \|v\|_{C([0,1], S_p(\Omega))}, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (34)$$

справедливой при $1/q \leq 1/p + 1/\rho < 2/3$, предельным переходом при $\rho < 3$ получим

$$v_0 = \sum_{k=0}^{\infty} T(k) \int_0^1 T(1-\tau)B(\tau)v(\tau) d\tau, \quad (35)$$

причем ввиду оценки (34) ряд (35) абсолютно сходится не только в пространстве $S_p(\Omega)$, но и в $S_q(\Omega)$ для всех q из некоторой окрестности точки $p \in (3, \infty)$. Повторение этого рассуждения приводит к включению $v_0 \in S_q(\Omega)$ при всех $q \in (3, \infty)$.

Наконец, заключение о дискретной части спектра вне $\text{clos}\{\exp \Lambda\}$ следует из представления

$$U - \lambda I = (T(1) - \lambda I)(I + (T(1) - \lambda I)^{-1}K),$$

так как в силу аналитической теоремы Фредгольма (см. [11, с. 224]) оператор-функция $I + (T(1) - \lambda I)^{-1}K$ обратима в области $\mathbb{C} \setminus \text{clos}\{\exp \Lambda\}$ вне дискретного множества, все точки которого являются конечнократными собственными значениями оператора монодромии U .

Связь между оператором монодромии U и символом $\mathcal{A}(z)$ устанавливается в следующей лемме.

ЛЕММА 5. Пусть $u_0 \in C([0, 1], L_\rho(\Omega))$ для всех $\rho \in (\rho_1, \rho_2)$, где $\rho_1 < 3 < \rho_2$ и $q \in (3, \infty)$. Оператор $\mathcal{A}(z)$ ограниченно обратим в пространстве $L_{r(q)}((0, 1), S_q(\Omega))$ при всех $|z| \leq 1$ тогда и только тогда, когда оператор монодромии $U: S_q(\Omega) \rightarrow S_q(\Omega)$ не имеет собственных значений $\lambda \in \{\lambda: |\lambda| \geq 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 4 и оценок

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^1 T(l+1-\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau \right\|_{S_q(\Omega)} \leq \\ & \leq cl^{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2\rho}} \|u\|_{L_{r(q)}((0,1), S_q(\Omega))}, \quad \rho < 3, \quad l = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (36)$$

следует, что для всех $|z| \leq 1$ оператор $\mathcal{A}(z) - I$ является вполне непрерывным оператором в пространстве $L_{r(q)}((0, 1), S_q(\Omega))$, более того, его часть

$$\mathcal{A}_2(z)u(t) = \sum_{l=1}^{\infty} z^{l+1} T(l+t) \int_0^1 T(1-\tau)B(\tau)u(\tau) d\tau$$

вполне непрерывна из $L_{r(q)}((0, 1), S_q(\Omega))$ в $C([0, 1], S_q(\Omega))$. Поэтому для обратимости оператора $\mathcal{A}(z)$ достаточно установить тривиальность его ядра $\ker \mathcal{A}(z)$ для всех $|z| \leq 1$. Предположим противное. Пусть $\mathcal{A}(\zeta)W(t) = 0$, $W(t) \neq 0$, для некоторого ζ ($|\zeta| \leq 1$; ясно, что $\zeta \neq 0$). Тогда последовательное применение леммы 4 позволяет заключить, что $W(t) \in C([0, 1], S_q(\Omega))$. Полагая $t = 0$ и $t = 1$ в уравнении $\mathcal{A}(\zeta)W(t) = 0$, имеем

$$\begin{aligned} W(0) &= \sum_{l=0}^{\infty} \zeta^{l+1} \int_0^1 T(l+1-\tau)B(\tau)W(\tau) d\tau, \\ W(1) &= \sum_{l=0}^{\infty} \zeta^l \int_0^1 T(l+1-\tau)B(\tau)W(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Следовательно, $W(0) = \zeta W(1)$ и $W(t)$ являются решением уравнения

$$W(t) = T(t)W(0) + \int_0^t T(t-\tau)B(\tau)W(\tau) d\tau. \quad (37)$$

Поэтому $W(1) = UW(0)$ и $W(0)$ – собственный вектор оператора монодромии в пространстве $S_q(\Omega)$ с собственным значением $\lambda = 1/\zeta$.

Таким образом, отсутствие мультипликаторов во множестве $\{|\lambda| \geq 1\}$ влечет обратимость символа $\mathcal{A}(z)$ при всех $|z| \leq 1$.

Обратно, пусть $\lambda = 1/\zeta$, $|\lambda| \geq 1$, – собственное значение оператора U в пространстве $S_q(\Omega)$. Тогда существует решение $W(t) \in C([0, 1], S_q(\Omega))$ уравнения (37) такое, что $W(1) = \frac{1}{\zeta} W(0)$. Следовательно, для $W(t)$ справедливо соотношение

$$\frac{1}{\zeta} W(0) = T(1)W(0) + \int_0^1 T(1-\tau)B(\tau)W(\tau) d\tau.$$

Повторяя рассуждение из доказательства теоремы 1, 4), находим

$$W(0) = \sum_{l=0}^{\infty} T(l) \zeta^{l+1} \int_0^1 T(1-\tau) B(\tau) W(\tau) d\tau.$$

Поэтому из уравнения (37) следует, что $\mathcal{A}(\zeta)W(t) = 0$. Это означает, что обратимость оператора $\mathcal{A}(z)$ при всех $|z| \leq 1$ влечет отсутствие мультипликаторов λ , $|\lambda| \geq 1$.

Вследствие лемм 3, 5 и предложения 2 справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $u_0 \in C([0, 1], L_\rho(\Omega))$ для всех $\rho \in (3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon)$. Если оператор монодромии $U: S_q(\Omega) \rightarrow S_q(\Omega)$ не имеет мультипликаторов λ с условием $|\lambda| \geq 1$, то периодическое решение $(S_3(\Omega), Z_q^0)$ -устойчиво при $q \in (9/2, 6)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Ввиду теоремы 1 достаточно проверять отсутствие мультипликаторов $\lambda \neq 1$, $|\lambda| \geq 1$, оператора монодромии в любом одном из пространств $S_q(\Omega)$ при $q \in (\rho', \infty)$, например в $S_2(\Omega)$, а отсутствие мультипликатора $\lambda = 1$ – в любом одном из пространств $S_q(\Omega)$ при $q \in (3, \infty)$.

4. В заключение приведем результат о неустойчивости периодического решения.

ТЕОРЕМА 3. Пусть оператор монодромии U имеет собственный вектор, принадлежащий $S_2(\Omega)$ (см. замечание 1) и отвечающий мультипликатору λ , причем $|\lambda| > 1$. Тогда периодическое решение неустойчиво в любом пространстве $S_q(\Omega)$ при $q \in [3, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $\tilde{U}: S_q(\Omega) \rightarrow S_q(\Omega)$, определяемое соотношением $\tilde{U}v_0 = v(1)$, где $v(t) \in C([0, 1], S_q(\Omega))$ – решение уравнения (17). Для невозмущенного уравнения (10) при $q = 3$ аналогично доказательству предложения 1 устанавливаем, что существуют малые положительные числа ε и R такие, что при $\|v_0\|_{S_3(\Omega)} < \varepsilon$ уравнение (10) имеет единственное решение $v(t)$ в пространстве $Z_s[0, 1] = P_1 Z_s^0$ при $s \in (9/2, 6)$, причем $\|v\|_{Z_s[0, 1]} < R$. Напомним, что из определения пространства $Z_s[0, 1]$ следует, что $v(t) \in C([0, 1], S_3(\Omega))$. Далее, оператор $I - \mathcal{B}_1$ обратим в пространстве $Z_s[0, 1]$. Поэтому для интегрального уравнения (17), осуществляя обращение оператора $I - \mathcal{B}_1$, фактически сводим ситуацию к уже рассмотренному случаю уравнения (10).

Таким образом, отображение $\tilde{U}$ определено и непрерывно в некоторой окрестности нуля пространства $S_3(\Omega)$, причем в этой окрестности справедлива оценка

$$\|\tilde{U}v_0 - Uv_0\|_{S_3(\Omega)} = O(\|v_0\|_{S_3(\Omega)}^2).$$

Аналогичное утверждение справедливо для отображения $\tilde{U}$ и в пространстве $S_q(\Omega)$ при $q > 3$. Его доказательство даже проще, так как в этом случае соответствующие интегральные уравнения можно рассматривать в пространстве $C([0, 1], S_q(\Omega))$. Согласно результату из [3, с. 120] для отображения $\tilde{U}$ точка нуль неустойчива, точнее, существуют такие $c > 0$ и элемент $v_0 \in S_q(\Omega)$ со сколь угодно малой нормой $\|v_0\|$, что последовательность $v_n = \tilde{U}v_{n-1}$ определена при $n \leq N$ и $\|v_N\| \geq c$. Это и означает неустойчивость периодического решения.

Список литературы

1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.
2. Юдович В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости. Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1984.
3. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
4. Сазонов Л. И. Обоснование метода линеаризации в задаче обтекания // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 5. С. 85–109.
5. Сазонов Л. И. Гидродинамический проектор во внешней области. Деп. в ВИНТИ 15.12.2000, № 3148-B00.
6. Bochner S., Phillips R. S. Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings // Ann. of Math. 1942. V. 43. № 2. P. 409–418.
7. Трибелъ Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
8. Сазонов Л. И. Оценки резольвенты оператора Озеена во внешней трехмерной области. Деп. в ВИНТИ 25.11.98, № 3453-B98.
9. Бабенко К. И. О спектре линеаризованной задачи обтекания тела вязкой несжимаемой жидкостью // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 1. С. 64–68.
10. Глазман И. М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: Физматгиз, 1963.
11. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. М.: Мир, 1977.

Ростовский государственный университет,
г. Ростов-на-Дону

Поступило в редакцию
9.I.2001