Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Федоров, Ослабленные решения линейного уравнения соболевского типа и полугруппы операторов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 4, 171–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/im445>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 16:57:00

УДК 517.9

В. Е. Федоров

Ослабленные решения линейного уравнения соболевского типа и полугруппы операторов

Показано, что если пара операторов (L, M) удовлетворяет введенному в рассмотрение $(p, \psi(\tau))$ -условию, то существует бесконечно дифференцируемая полугруппа уравнения $L\dot{u} = Mu$. В случае выполнения усиленного $(p, \psi(\tau))$ -условия найдено множество однозначной разрешимости ослабленной задачи Коши для данного уравнения. Полученные результаты дополняют теорию вырожденных полугрупп операторов. Кроме того, они частично обобщают теорему о генераторах полугрупп класса $(A)_\infty$ на случай вырожденных полугрупп. Исследованы ядра и образы построенных полугрупп. Рассмотрены различные примеры пар операторов, удовлетворяющих $(p, \psi(\tau))$ -условию и усиленному $(p, \psi(\tau))$ -условию.

Библиография: 13 наименований.

Введение

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ – банаховы пространства. Через $\mathcal{C}l(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ будем обозначать множество линейных замкнутых плотно определенных в $\mathcal{U}$ операторов, действующих в пространство $\mathcal{F}$, а через $\mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ – пространство линейных непрерывных операторов, действующих из пространства $\mathcal{U}$ в $\mathcal{F}$. Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \quad (0.1)$$

для уравнения соболевского типа

$$L \frac{d}{dt} u(t) = Mu(t) \quad (0.2)$$

(с вырожденным, т.е. $\ker L \neq \{0\}$, оператором $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ и оператором M из $\mathcal{C}l(\mathcal{U}; \mathcal{F})$). Будем искать ее ослабленные решения [1], т.е. решения $u(t) \in C([0, T]; \mathcal{U}) \cap C^1((0, T]; \mathcal{U})$.

Характерной особенностью полугрупп уравнений соболевского типа является наличие ядер у операторов полугруппы. Другими словами, если полугруппа обладает единицей, то ею является, вообще говоря, нетривиальный проектор. Поэтому задача Коши разрешима не при всех начальных значениях. Замыкание множества допустимых начальных значений задачи Коши будем называть *фазовым пространством*.

Работа выполнена при поддержке Государственной научной стипендии для молодых ученых, гранта для молодых ученых Правительства Челябинской области и гранта Минобрнауки России (шифр PD02-1.1-82) на проведение молодыми учеными научных исследований.

В работах [2]–[4] исследована разрешимость ослабленной задачи Коши в случае сильно (L, p) -секториального оператора M . Показано, что при этом существует аналитическая в секторе, содержащем положительную полуось, полугруппа уравнения (0.2). Фазовым пространством уравнения (0.2) является образ этой полугруппы.

Бесконечно дифференцируемые полугруппы уравнения (0.2) изучались в работах [5], [6]. В [6] введено понятие (L, p, α, β) -секториального оператора, обобщающее случай, рассмотренный в статье [5] ($p = 0$). В то же время, $(L, p, 1, 1)$ -секториальность – это в точности (L, p) -секториальность. В [6] показано, что существует единственное решение задачи Коши для начальных значений u_0 из линейала $\text{im}((\mu L - M)^{-1}L)^{p+1}$. Построенные полугруппы вырождаются не только на ядре оператора L , как показано в работе [5], но и на цепочках M -присоединенных векторов оператора L , длины которых ограничены числом p .

В настоящей работе выделены классы уравнений (0.2), более общие, чем уравнение с (L, p, α, β) -секториальным оператором M . Соответствующие условия на пару операторов (L, M) названы $(p, \psi(\tau))$ -условием и усиленным $(p, \psi(\tau))$ -условием. В рассмотренных здесь случаях уравнение также обладает бесконечно дифференцируемой полугруппой, вырождающейся на равномерно ограниченных по длине числом p цепочках M -присоединенных векторов. Большая общность результатов настоящей работы по сравнению с [6] заключается в следующем: из (L, p, α, β) -секториальности оператора M следует, что пара (L, M) удовлетворяет усиленному $(p, |\tau|^\beta)$ -условию $(\psi(\tau) = |\tau|^\beta)$.

В [7, с. 394] рассмотрены подобные условия на пару операторов (I, A) и построена полугруппа класса $(A)_\infty$ уравнения $\dot{u} = Au$, в которое преобразуется уравнение (0.2), если оператор L непрерывно обратим ($A = L^{-1}M$). Таким образом, результаты настоящей статьи частично обобщают теорему 12.7.1 из [7, с. 394]. Полностью обобщить ее, в частности показать сходимость по Абелю построенной вырожденной полугруппы к некоторому проектору при $t \rightarrow 0+$, пока не удалось. По-видимому, это предмет отдельного достаточно трудоемкого исследования.

В случае выполнения усиленного $(p, \psi(\tau))$ -условия показано, что фазовым пространством уравнения (0.2) является образ его полугруппы.

§ 1. Относительные резольвенты

Далее нам понадобятся введенные в этом параграфе понятия и связанные с ними факты. Доказательства мы опускаем, снабжая утверждения соответствующими ссылками.

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ – банаховы пространства, оператор $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$, а оператор $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}; \mathcal{F})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Множества $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})\}$ и $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ будем называть соответственно L -резольвентным множеством и L -спектром оператора M .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$, то L -спектр оператора M совпадает со спектрами операторов $L^{-1}M$ и ML^{-1} .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Ясно, что при условии $\ker L \cap \ker M \neq \{0\}$ L -резольвентное множество будет пусто.

В дальнейшем нам понадобится аналог тождества Гильберта

$$(\mu - \lambda)(\mu L - M)^{-1}L(\lambda L - M)^{-1} = (\lambda L - M)^{-1} - (\mu L - M)^{-1}. \quad (1.1)$$

ЛЕММА 1.1 [8]. Множество $\rho^L(M)$ открыто, а L -спектр $\sigma^L(M)$ замкнут.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Оператор-функции комплексной переменной $(\mu L - M)^{-1}$, $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ с областью определения $\rho^L(M)$ будем называть соответственно L -резольвентой, правой и левой L -резольвентами оператора M .

ТЕОРЕМА 1.1 [8]. L -резольвента, правая и левая L -резольвенты оператора M аналитичны в $\rho^L(M)$.

Из тождества (1.1) вытекает также, что правые (левые) L -резольвенты коммутируют. Отметим еще одно полезное тождество

$$L(\mu L - M)^{-1}M = M(\mu L - M)^{-1}L. \quad (1.2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть $\ker L \neq \{0\}$; вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ назовем *собственным вектором* оператора L . Упорядоченное множество векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ назовем *цепочкой M -присоединенных векторов* собственного вектора φ_0 , если

$$L\varphi_{q+1} = M\varphi_q, \quad q = 0, 1, \dots, \quad \varphi_l \notin \ker L, \quad l = 1, 2, \dots$$

Порядковый номер вектора в цепочке будем называть его *высотой*. Собственный вектор будем предполагать M -присоединенным нулевой высоты.

Цепочка M -присоединенных векторов конечна в случае существования такого M -присоединенного вектора φ_q , что либо $\varphi_q \notin \operatorname{dom} M$, либо $M\varphi_q \notin \operatorname{im} L$. Высоту q последнего M -присоединенного вектора в конечной цепочке $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_q\}$ назовем *длиной* этой цепочки.

ЛЕММА 1.2 [8]. Вектор φ_q является M -присоединенным вектором оператора L высоты q , соответствующим собственному вектору φ_0 , тогда и только тогда, когда $(-R_\mu^L(M))^q \varphi_q = \varphi_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Последнее равенство в лемме можно заменить на условие

$$-R_\mu^L(M)\varphi_q = \varphi_{q-1} + \mu\varphi_{q-2} + \dots + \mu^{q-1}\varphi_0 \quad \forall \mu \in \rho^L(M). \quad (1.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Правой (левой) (L, p) -резольвентой оператора M называется оператор-функция $p+1$ комплексной переменной $\lambda_0, \dots, \lambda_p$ с областью определения $(\rho^L(M))^{p+1}$:

$$R_{(\lambda, p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p R_{\lambda_k}^L(M) \quad \left(L_{(\lambda, p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p L_{\lambda_k}^L(M) \right).$$

ЛЕММА 1.3 [4]. Пусть $\lambda_k, \mu_k \in \rho^L(M)$, $k = \overline{0, p}$. Тогда:

- (i) $\ker R_{(\lambda, p)}^L(M)$ состоит из M -присоединенных (высоты, не большей p) векторов оператора L , $\operatorname{im} R_{(\lambda, p)}^L(M) = \operatorname{im} R_{(\mu, p)}^L(M)$;
(ii) $\ker L_{(\lambda, p)}^L(M) = \{M\varphi : \varphi \in \ker R_{(\lambda, p)}^L(M) \cap \operatorname{dom} M\}$, $\operatorname{im} L_{(\lambda, p)}^L(M) = \operatorname{im} L_{(\mu, p)}^L(M)$.

§ 2. $(p, \psi(\tau))$ -условие

Следуя [7, с. 394], будем утверждать, что действительная, определенная на $\mathbb{R}$ функция $\psi(\tau)$ принадлежит классу Ψ , если:

- (i) ψ положительна, непрерывно дифференцируема и не убывает с возрастанием $|\tau|$;
(ii) $\psi(\tau) \rightarrow \infty$ при $|\tau| \rightarrow \infty$;
(iii) $\psi'(\tau)$ ограничена;
(iv) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t\psi(\tau)} d\tau < \infty$ при любом $t > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Условие $\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \frac{\psi(\tau)}{\ln |\tau|} = \infty$ является достаточным для выполнения п. (iv) предыдущего определения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Без ограничения общности можно считать функции $\psi(\tau) \in \Psi$ четными.

ЛЕММА 2.1. Для любых $\psi \in \Psi$, $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^n e^{-t\psi(\tau)} d\tau$$

сходится равномерно по t на промежутке $(\varepsilon, +\infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$h(x) = \max_{\tau \in \mathbb{R}} (|\tau| e^{-x\psi(\tau)}), \quad (2.1)$$

которая принимает конечные значения в силу неравенства

$$\int_{\beta/2}^{\beta} e^{-x\psi(\tau)} d\tau > \frac{\beta}{2} e^{-x\psi(\beta)}, \quad \beta > 0,$$

и того, что левая часть неравенства стремится к нулю при $\beta \rightarrow +\infty$ в силу п. (iv) определения класса функций Ψ . (То же самое при отрицательных β .) Заметим еще, что $h(x)$ – невозрастающая при $x > 0$.

При $t > \varepsilon$ имеем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^n e^{-t\psi(\tau)} d\tau &\leq h\left(\frac{t}{n+1}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{n-1} e^{-\frac{n}{n+1}t\psi(\tau)} d\tau \\ &\leq h^2\left(\frac{t}{n+1}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{n-2} e^{-\frac{n-1}{n+1}t\psi(\tau)} d\tau \leq \dots \\ &\dots \leq h^n\left(\frac{t}{n+1}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{n+1}t\psi(\tau)} d\tau \\ &\leq h^n\left(\frac{\varepsilon}{n+1}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{n+1}\varepsilon\psi(\tau)} d\tau < \infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Упорядоченная пара операторов (L, M) удовлетворяет $(p, \psi(\tau))$ -условию, если:

(i) $\exists a \in \mathbb{R}$, $\exists \psi(\tau) \in \Psi$, $\exists C > 0$ такие, что $\forall \mu \in \Sigma_\psi = \{\mu \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \mu \geq a - C\psi(\operatorname{Im} \mu)\}$

$$(\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F});$$

(ii) $\exists K > 0: \forall \mu_k = \sigma_k + i\tau_k \in \Sigma_\psi$, $k = \overline{0, p}$,

$$\max\{\|R_{(\mu, p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|L_{(\mu, p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\} \leq \frac{K}{\prod_{k=0}^p \psi(\tau_k)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Без ограничения общности можно считать, что в предыдущем определении $a = 0$. Действительно, можно оператор M заменить на $M - aL$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. При $p = 0$ $(p, \psi(\tau))$ -условие можно ослабить:

(i') $\exists a \in \mathbb{R}: (\operatorname{Re} \mu \geq a) \implies ((\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U}))$;

(ii') $\exists K > 0: \forall \mu = \sigma + i\tau$, $\sigma \geq a$, $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\max\{\|R_\mu^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|L_\mu^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\} \leq \frac{K}{\psi(\tau)}. \quad (2.2)$$

Покажем это. Разложив аналитическую по μ оператор-функцию $(\mu L - M)^{-1}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $a + i\tau$, получим

$$((\sigma + i\tau)L - M)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (a - \sigma)^n (R_{a+i\tau}^L(M))^n ((a + i\tau)L - M)^{-1}. \quad (2.3)$$

При этом мы используем формулу для производной

$$\frac{d^n}{d\mu^n} (\mu L - M)^{-1} = (-1)^n (R_\mu^L(M))^n (\mu L - M)^{-1}.$$

В силу неравенства (2.2) ряд (2.3) сходится при $|\sigma - a| \leq \frac{q\psi(\tau)}{K}$, $q \in [0, 1)$. Отсюда следуют условие (i) и оценка

$$\|R_{\sigma+i\tau}^L(M)\| \leq \frac{K}{(1-q)\psi(\tau)}$$

в секторе Σ_ψ , для получения которой необходимо умножить (2.3) на оператор L справа.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Пара операторов (L, M) , где $M = (L, p, \alpha, \beta)$ -секториальный оператор [6], удовлетворяет $(p, \psi(\tau))$ -условию, $\psi(\tau) = |\tau|^\alpha$. Обратное неверно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Здесь и далее, когда речь идет о том, что функция вида $|\tau|^\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$, принадлежит классу Ψ , имеем в виду, что в окрестности нуля функция сглажена соответствующим образом.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.7. Пусть существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})$, а оператор $L^{-1}M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U})$ (или, что равносильно, $ML^{-1} \in \mathcal{C}l(\mathcal{F})$) удовлетворяет условиям теоремы 12.7.1 из [7, с. 394], достаточным для того, чтобы он был инфинитезимальным производящим оператором полугруппы класса $(A)_\infty$. Тогда при любом $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ пара (L, M) удовлетворяет $(p, \psi(\tau))$ -условию. Это следует из соотношений

$$R_{(\mu, p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p R_{\mu_k}(L^{-1}M), \quad L_{(\mu, p)}^L(M) = \prod_{k=0}^p R_{\mu_k}(ML^{-1}).$$

ЛЕММА 2.2. Пусть пара операторов (L, M) удовлетворяет $(p, \psi(\tau))$ -условию. Тогда

$$\exists c > 0: \forall \mu = \sigma + i\tau \in \Sigma_\psi \|(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})} \leq c(1 + |\mu|^{p+1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $\mu_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, $\mu = \sigma + i\tau \in \Sigma_\psi$. С помощью тождества (1.1) получим тождество (подробно об этом см. в [8])

$$\begin{aligned} (\mu L - M)^{-1} &= \sum_{k=0}^p (\mu_0 - \mu)^k (R_{\mu_0}^L(M))^k (\mu_0 L - M)^{-1} \\ &\quad + (\mu_0 - \mu)^{p+1} R_\mu^L(M) (R_{\mu_0}^L(M))^p (\mu_0 L - M)^{-1}. \end{aligned}$$

Из $(p, \psi(\tau))$ -условия следует

$$\begin{aligned} \|(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})} &\leq \sum_{k=0}^p (|\mu_0| + |\mu|)^k \| (R_{\mu_0}^L(M))^k (\mu_0 L - M)^{-1} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})} \\ &\quad + (|\mu_0| + |\mu|)^{p+1} \frac{K}{\psi(\tau_0)^p \psi(\tau)} \|(\mu_0 L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})} \\ &= a_0 + a_1 |\mu| + \dots + a_p |\mu|^p + \frac{b_0 + b_1 |\mu| + \dots + b_{p+1} |\mu|^{p+1}}{\psi(\tau)}, \end{aligned}$$

где коэффициенты $a_0, \dots, a_p$, $b_0, \dots, b_{p+1}$ неотрицательны и не зависят от μ . Поскольку $\psi(\tau) \in \Psi$, существует $\min_{\tau \in \mathbb{R}} \psi(\tau) > 0$, откуда получаем требуемое. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Пусть пара операторов (L, M) удовлетворяет $(p, \psi(\tau))$ -условию. Тогда длины всех цепочек M -присоединенных векторов ограничены числом p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем M -присоединенный вектор φ высоты $p+1$ оператора L . С помощью леммы 1.2 получим $\varphi_0 = (-R_\mu^L(M))^{p+1} \varphi$, где $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$, а μ можно взять из множества Σ_ψ . Отсюда

$$\|\varphi_0\|_{\mathcal{U}} \leq \| (R_\mu^L(M))^{p+1} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} \|\varphi\|_{\mathcal{U}} \leq \frac{K \|\varphi\|_{\mathcal{U}}}{(\psi(\operatorname{Im} \mu))^{p+1}}.$$

При $\operatorname{Im} \mu \rightarrow \infty$ получаем $\varphi_0 = 0$. Противоречие.

ЛЕММА 2.4. Пусть пара операторов (L, M) удовлетворяет $(p, \psi(\tau))$ -условию. Тогда $\forall \mu_k \in \rho^L(M)$, $k = \overline{0, p}$,

$$\ker R_{(\mu, p)}^L(M) \cap \operatorname{im} R_{(\mu, p)}^L(M) = \{0\}, \quad \ker L_{(\mu, p)}^L(M) \cap \operatorname{im} L_{(\mu, p)}^L(M) = \{0\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем вектор $\varphi \in \ker R_{(\mu, p)}^L(M) \cap \operatorname{im} R_{(\mu, p)}^L(M)$. Тогда $\varphi = (R_\beta^L(M))^{p+1} \chi$ при некоторых $\beta \in \rho^L(M)$ и $\chi \in \mathcal{U}$ в силу леммы 1.3. Следовательно, $(R_\beta^L(M))^{2p+2} \chi = 0$. Согласно лемме 1.2 это означает, что вектор χ является M -присоединенным вектором оператора L высоты не больше $2p+1$. Но по лемме 2.3 его высота не больше p . Поэтому $(R_\beta^L(M))^{p+1} \chi = \varphi = 0$.

Пусть $f \in \ker L_{(\mu, p)}^L(M) \cap \operatorname{im} L_{(\mu, p)}^L(M)$. Тогда $f = (L_\beta^L(M))^{p+1} g$ при некоторых $\beta \in \rho^L(M)$, $g \in \mathcal{F}$. Кроме того, $(L_\beta^L(M))^{p+1} f = 0$, откуда $(L_\beta^L(M))^{2p+2} g = 0$. Поэтому $(\beta L - M)^{-1} g \in \ker (R_\beta^L(M))^{2p+2}$, т.е. этот вектор является M -присоединенным высоты не больше $2p+1$. Однако высота его не может быть больше p . Тогда $(R_\beta^L(M))^{p+1} (\beta L - M)^{-1} g = 0$. Это означает, что $f = (\beta L - M)0 = 0$. Лемма доказана.

§ 3. Бесконечно дифференцируемые полугруппы уравнения соболевского типа

Уравнение (0.2) и эквивалентное ему уравнение

$$L_\alpha^L(M) \dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1} f, \quad \alpha \in \rho^L(M), \quad (3.1)$$

заданное на пространстве $\mathcal{F}$, будем рассматривать в рамках уравнения

$$A \dot{v} = Bv, \quad (3.2)$$

где операторы $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V}; \mathcal{W})$, $B \in \mathcal{E}l(\mathcal{V}; \mathcal{W})$; $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ – банаховы пространства.

Напомним определения, введенные в [1].

Ослабленным решением уравнения (3.2) на отрезке $[0, T]$ будем называть функцию $v(t) \in C([0, T]; \mathcal{V}) \cap C^1((0, T]; \mathcal{V})$, удовлетворяющую этому уравнению на интервале $(0, T]$.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть полуплоскость $\{\mu \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \mu \geq a\}$ лежит в $\rho^L(M)$ и справедлива оценка

$$\forall \mu \in \mathbb{C} \quad (\operatorname{Re} \mu \geq a) \implies (\|(\mu L - M)^{-1}\| \leq K\eta(|\mu|)), \quad (3.3)$$

где $\eta(x)$ – такая функция, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-1} \eta(x) = 0$. Тогда всякое ослабленное решение уравнения (0.2) представимо в виде

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{\mu t} R_\mu^L(M) u(0) d\mu, \quad \gamma > a. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ослабленное решение $u(t)$ уравнения (0.2). Используя непрерывную дифференцируемость его при $t > 0$ и непрерывность оператора L , интегрированием по частям получим

$$L \int_{\varepsilon}^t e^{-\mu\tau} u(\tau) d\tau = -\frac{e^{-\mu\tau}}{\mu} Lu(\tau) \Big|_{\varepsilon}^t + \frac{1}{\mu} \int_{\varepsilon}^t e^{-\mu\tau} Mu(\tau) d\tau.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0+$, используя замкнутость оператора M , получим

$$\mu L \int_0^t e^{-\mu\tau} u(\tau) d\tau = -e^{-\mu t} Lu(t) + Lu(0) + M \int_0^t e^{-\mu\tau} u(\tau) d\tau.$$

Если $\mu \in \rho^L(M)$, то

$$\int_0^t e^{-\mu\tau} u(\tau) d\tau = R_{\mu}^L(M)(u(0) - e^{-\mu t} u(t)). \quad (3.5)$$

Это тождество нам понадобится далее, поэтому заметим, что оно справедливо для произвольного ослабленного решения уравнения (0.2). Левая часть тождества (3.5) – преобразование Лапласа от функции, равной $u(s)$ при $s \in [0, t]$ и нулю при $s > t$. Эта функция непрерывно дифференцируема на интервале $(0, t)$, поэтому, применив обратное преобразование Лапласа, на этом интервале получим

$$u(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\mu s} R_{\mu}^L(M)(u(0) - e^{-\mu t} u(t)) d\mu. \quad (3.6)$$

Для $u \in \text{dom } M$ имеем

$$R_{\mu}^L(M)u = \frac{u}{\mu} + \frac{(\mu L - M)^{-1}Mu}{\mu}.$$

Поэтому, учитывая оценку (3.3), получим

$$\|R_{\mu}^L(M)u\| \leq \frac{\|u\|}{|\mu|} + K \frac{\eta(|\mu|)}{|\mu|} \|Mu\|.$$

Значит, $\lim_{|\mu| \rightarrow \infty} R_{\mu}^L(M)u = 0$ для таких u .

В соотношении (3.6) $u(t) \in \text{dom } M$, поэтому, используя лемму Жордана, убедимся в справедливости тождества

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\mu(s-t)} R_{\mu}^L(M)u(t) d\mu = 0,$$

а следовательно, и в справедливости (3.4). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Формула (3.4) при других предположениях получена в [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Отображение $V(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{V}))$ назовем *полугруппой разрешающих операторов* (или просто *разрешающей полугруппой*) уравнения (3.2), если:

- (i) $V(s)V(t) = V(s+t) \quad \forall s, t > 0$;
- (ii) для любого $v_0 \in \mathcal{V}$ функция $v(t) = V(t)v_0 \in C^1((0, T]; \mathcal{U})$ удовлетворяет этому уравнению.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Существование единицы у полугруппы не постулируется.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть пара операторов (L, M) удовлетворяет $(p, \psi(\tau))$ -условию. Тогда существует бесконечно дифференцируемая разрешающая полугруппа $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}): t > 0\}$ ($\{F(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{F}): t > 0\}$) уравнения (0.2) ((3.1)), причем задается она интегралами типа Данфорда–Тейлора:

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu \quad \left(F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} L_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu \right), \quad (3.7)$$

где $\Gamma = \partial\Sigma_{\psi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C}: \mu = a - C\psi(\tau) + i\tau, \tau \in \mathbb{R}\}$. Рассмотрим интеграл

$$G_k^t = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \mu^k R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu, \quad t > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Покажем, что в операторах G_k^t контур Γ можно заменить контуром Γ' , полученным из Γ сдвигом вправо, параллельным оси x . Для этого покажем, что интегралы по горизонтальным линиям

$$\begin{aligned} \Gamma_R^+ &= \{\mu = x + iR: x \in [a - C\psi(R), (a+b) - C\psi(R)]\}, \\ \Gamma_R^- &= \{\mu = x - iR: x \in [a - C\psi(R), (a+b) - C\psi(R)]\}, \end{aligned}$$

соединяющим контуры Γ и Γ' , стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$. Действительно, согласно лемме 2.2

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\Gamma_R^+} \mu^k R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu \right\| &\leq \|L\| \int_{\Gamma_R^+} C_1 |\mu|^{k+p+1} |e^{\mu t}| |d\mu| \\ &= C_1 \int_{a-C\psi(R)}^{(a+b)-C\psi(R)} (x^2 + R^2)^{(k+p+1)/2} e^{xt} dx \\ &\leq C_2 R^{k+p+1} e^{at} e^{-C\psi(R)t} \int_0^b e^{yt} dy. \end{aligned}$$

Из леммы 2.1 следует равенство $\lim_{R \rightarrow \infty} R^n e^{-C\psi(R)t} = 0$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Отсюда получаем, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^+} \mu^k R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu = 0.$$

Аналогично доказывается случай с интегралом по Γ_R^- . Далее,

$$\begin{aligned}
G_k^t G_n^s &= (2\pi i)^{-2} \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) R_{\lambda}^L(M) \mu^k \lambda^n e^{\mu t + \lambda s} d\mu d\lambda \\
&= (2\pi i)^{-2} \int_{\Gamma'} \int_{\Gamma} (\lambda - \mu)^{-1} (R_{\mu}^L(M) - R_{\lambda}^L(M)) \mu^k \lambda^n e^{\mu t + \lambda s} d\mu d\lambda \\
&= (2\pi i)^{-2} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) \mu^k e^{\mu t} d\mu \int_{\Gamma'} \frac{\lambda^n e^{\lambda s}}{\lambda - \mu} d\lambda \\
&\quad - (2\pi i)^{-2} \int_{\Gamma'} R_{\lambda}^L(M) \lambda^n e^{\lambda s} d\lambda \int_{\Gamma} \frac{\mu^k e^{\mu t}}{\lambda - \mu} d\mu \\
&= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) \mu^{k+n} e^{\mu(t+s)} d\mu = G_{k+n}^{t+s}.
\end{aligned}$$

Здесь использованы аналог тождества Гильберта (1.1) и интегральная формула Коши. Из доказанного таким образом равенства $G_k^t G_n^s = G_{k+n}^{t+s}$ следует полугрупповое свойство $U(t)U(s) = G_0^t G_0^s = G_0^{t+s} = U(t+s)$.

Далее,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{\Gamma} \mu^k R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu \right\| &\leq C_1 \int_{\Gamma} |\mu|^{k+p+1} e^{t \operatorname{Re} \mu} |d\mu| \\
&\leq C_1 e^{at} \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + (a - C\psi(x))^2)^{\frac{k+p+1}{2}} \sqrt{1 + (C\psi'(x))^2} e^{-Ct\psi(x)} dx \\
&\leq C_2 e^{at} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{k+p+1} e^{-Ct\psi(x)} dx.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь мы использовали принадлежность функции $\psi(x)$ классу Ψ . Из (3.8) и леммы 2.1 следует, что интеграл G_k^t сходится равномерно по t на любом промежутке вида (t_0, T) , $0 < t_0 < T$. Отсюда следует, что отображение $U(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U})$ бесконечно дифференцируемо и

$$\frac{d^k}{dt^k} U(t) = G_k^t, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Включение $\operatorname{im} U(t) \subset \operatorname{dom} M$ при $t > 0$ справедливо в силу интегрального представления полугруппы, замкнутости оператора M и тождества

$$\int_{\Gamma} M R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu = \int_{\Gamma} \mu L R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} d\mu - \int_{\Gamma} L e^{\mu t} d\mu = L G_1^t.$$

Мы показали, что $MU(t) = L G_1^t$. Это означает, что полугруппа $\{U(t) : t > 0\}$ является разрешающей для уравнения (0.2).

Для полугруппы $\{F(t) : t > 0\}$ теорема доказывается аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Из (3.8) и леммы 2.1 следует, что

$$\|U(t)\| \leq C_2 e^{at} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{p+1} e^{-Ct\psi(x)} dx \leq C_3 e^{at} h^{p+1} \left(\frac{Ct}{p+2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{Ct\psi(x)}{p+2}} dx.$$

Функция h определена тождеством (2.1). Понятно, что аналогичные оценки выполняются и для операторов $F(t)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. В условиях теоремы 3.2 очевидны соотношения

$$LU(t) = F(t)L, \quad MU(t)u = F(t)Mu \quad \forall u \in \text{dom } M, \quad \forall t > 0,$$

которые следуют из тождеств (1.2) и (3.7).

В отличие от случая (L, p) -секториального оператора [4], [8] аналитических продолжений построенных в теореме 3.2 полугрупп может не быть (см. далее § 6, пример 6.2).

§ 4. Фазовые пространства

Ослабленной задачей Коши для уравнения (3.2) назовем задачу о нахождении ослабленного решения, удовлетворяющего условию

$$v(0) = v_0. \quad (4.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Замкнутое множество $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$ называется *фазовым пространством* уравнения (3.2), если:

(i) любое ослабленное решение $v(t)$ уравнения (3.2) лежит в $\mathcal{P}$, т.е. $v(t) \in \mathcal{P} \quad \forall t \geq 0$;

(ii) для любого v_0 из множества $\overset{\circ}{\mathcal{P}}$, плотного в $\mathcal{P}$, существует единственное решение задачи (4.1), (3.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Если для пары операторов (L, M) , удовлетворяющей $(p, \psi(\tau))$ -условию, выполнена более сильная оценка на (L, p) -резольвенты: существует $K > 0$ такое, что для любого $\mu_k \in \Sigma_\psi$, $k = \overline{0, p}$,

$$\max\{\|R_{(\mu, p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|L_{(\mu, p)}^L(M)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\} \leq \frac{K}{\prod_{k=0}^p \psi(|\mu_k|)},$$

а также при некотором $A > 0$ сходится интеграл

$$\int_A^{+\infty} \frac{dy}{y\psi(y)} < \infty, \quad (4.2)$$

то будем говорить, что пара удовлетворяет *усиленному $(p, \psi(\tau))$ -условию*. (При этом мы учитываем замечание 2.2.)

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. (L, p, α, α) -секториальность [6] оператора M означает выполнение для пары (L, M) усиленного $(p, \psi(\tau))$ -условия с функцией $\psi(\tau) = |\tau|^\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$ (см. замечание 2.6).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть пара операторов (L, M) удовлетворяет усиленному $(p, \psi(\tau))$ -условию. Тогда для любого $u_0 \in \text{im } R_{(\mu, p)}^L(M)$ ($f_0 \in \text{im } L_{(\mu, p)}^L(M)$) существует единственное решение ослабленной задачи Коши $\overline{u(0)} = u_0$ ($f(0) = f_0$) для уравнения (0.2) ((3.1)), а $\overline{\text{im } R_{(\mu, p)}^L(M)} (\text{im } L_{(\mu, p)}^L(M))$ является фазовым пространством этого уравнения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем существование решения ослабленной задачи Коши для уравнения (0.2) при всех $u_0 \in \text{im } R_{(\mu, p)}^L(M)$. В силу теоремы 3.2 вектор-функция $U(t)u_0: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{U}$ является ослабленным решением уравнения (0.2), если имеет предел в нуле справа. Покажем, что $\lim_{t \rightarrow 0+} U(t)u_0 = u_0$ для всех $u_0 \in \text{im } R_{(\mu, p)}^L(M)$. Рассмотрим вектор $u_0 = R_{(\mu, p)}^L(M)v$. В силу леммы 1.3, (i) можно взять произвольные точки $\mu_0, \dots, \mu_p$ из L -резольвентного множества $\rho^L(M)$. Выберем их лежащими справа от контура $\Gamma = \partial\Sigma_\psi$. Тогда, благодаря непрерывности правых L -резольвент и тождеству (1.1), получим

$$\begin{aligned} U(t)u_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\lambda}^L(M) e^{\lambda t} d\lambda R_{(\mu, p)}^L(M)v \\ &= \prod_{k=0}^{p-1} R_{\mu_k}^L(M) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R_{\lambda}^L(M)v}{\mu_p - \lambda} e^{\lambda t} d\lambda + R_{\mu_p}^L(M) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t} v}{\lambda - \mu_p} d\lambda \right). \end{aligned}$$

Понятно, что последний интеграл равен нулю. При $t \rightarrow 0+$ имеем

$$\lim_{t \rightarrow 0+} U(t)u_0 = \prod_{k=0}^{p-1} R_{\mu_k}^L(M) \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R_{\lambda}^L(M)v}{\mu_p - \lambda} d\lambda.$$

В этом случае можно перейти к пределу под знаком интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \prod_{k=0}^{p-1} R_{\mu_k}^L(M) \frac{R_{\lambda}^L(M) e^{\lambda t} v}{\mu_p - \lambda} d\lambda,$$

так как он сходится равномерно по параметру $t \in [0, 1]$ в силу признака Вейерштрасса и условия (4.2).

Построим окружность S_R радиуса $R > 2|\mu_p|$ с центром в точке 0. В качестве Γ_R^1 возьмем часть контура Γ , лежащую внутри круга S_R , и правую часть окружности ∂S_R , отсекаемую контуром Γ . Получили замкнутый контур, обходимый в отрицательном направлении. Через Γ_R^2 обозначим часть контура Γ , лежащую вне круга S_R , а через Γ_R^3 – правую часть окружности ∂S_R , обходимую против часовой стрелки. Интеграл по объединению всех трех контуров Γ_R^k , $k = 1, 2, 3$, даст в точности интеграл по контуру Γ .

Используя усиленное $(p, \psi(\tau))$ -условие для пары (L, M) , получим

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{\Gamma_R^2 \cup \Gamma_R^3} \frac{\prod_{k=0}^{p-1} R_{\mu_k}^L(M) R_{\lambda}^L(M) v}{\mu_p - \lambda} d\lambda \right\|_{\mathcal{U}} \\
& \leq \int_{\Gamma_R^2 \cup \Gamma_R^3} \frac{K \|v\|_{\mathcal{U}}}{(|\lambda| - |\mu_p|) \psi(|\lambda|) \prod_{k=0}^{p-1} \psi(|\mu_k|)} |d\lambda| \\
& \leq C_1 \left(2 \int_{A(R)}^{\infty} \frac{\sqrt{(C\psi'(y))^2 + 1} dy}{(\sqrt{y^2 + (a - C\psi(y))^2} - |\mu_p|) \psi(y) \prod_{k=0}^{p-1} \psi(|\mu_k|)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{2\pi R}{\psi(R)(R - |\mu_p|) \prod_{k=0}^{p-1} \psi(|\mu_k|)} \right) \\
& \leq C_2 \left(\int_{A(R)}^{\infty} \frac{dy}{y\psi(y)} + \frac{1}{\psi(R)} \right) \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Здесь $A(R)$ – мнимая часть верхней точки пересечения контуров S_R и Γ . По интегральной формуле Коши

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0+} U(t)u_0 &= \prod_{k=0}^{p-1} R_{\mu_k}^L(M) \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R^1} \frac{R_{\lambda}^L(M) v}{\mu_p - \lambda} d\lambda \\
&= \prod_{k=0}^{p-1} R_{\mu_k}^L(M) R_{\mu_p}^L(M) v = R_{(\mu, p)}^L(M) v = u_0.
\end{aligned}$$

Установим единственность решения задачи Коши. Для этого нам понадобится

ЛЕММА 4.1 [10]. Пусть $\varphi(s)$ – суммируемая функция, удовлетворяющая условию

$$\overline{\lim}_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left\| \int_0^T e^{\mu s} \varphi(s) ds \right\|}{\mu} \leq h < T.$$

Тогда $\varphi(s) = 0$ почти всюду на $[h, T]$.

Из (3.5) для ослабленного решения, удовлетворяющего условию $u(0) = 0$, при $t = T$ получим

$$R_{\mu}^L(M) u(T) = \int_0^T e^{\mu(T-\tau)} u(\tau) d\tau = \int_0^T e^{\mu s} u(T-s) ds.$$

Согласно лемме 2.2 имеем

$$\overline{\lim}_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left\| \int_0^T e^{\mu s} u(T-s) ds \right\|}{\mu} = \lim_{\mu \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|(\mu L - M)^{-1}\| + \ln \|Lu(T)\|}{\mu} = 0.$$

Поэтому $u(t) = 0$ при $t \in [0, T]$. Отсюда следует единственность решения ослабленной задачи Коши.

В [11] показано, что для $p + 1$ раз дифференцируемого решения уравнения (0.2) при $t > 0$ справедливо тождество

$$u(t) = (R_{\alpha}^L(M))^{p+1} \left(\alpha - \frac{d}{dt} \right)^{p+1} u(t).$$

Поэтому при $t \geq 0$ такие решения будут лежать в замыкании образа правой (L, p) -резольвенты. Там же доказано, что свертки ослабленных решений с гладкими скалярными функциями из семейства, являющегося аппроксимативной единицей, поточечно сходятся к самим решениям и при этом являются гладкими вектор-функциями. Таким образом, все ослабленные решения лежат в $\overline{\text{im } R_{(\mu, p)}^L(M)}$. Теорема доказана.

§ 5. Ядра и образы бесконечно дифференцируемых полугрупп

Так же, как и в работах [2]–[4], [6], [8], введем в рассмотрение важные в теории вырожденных полугрупп операторы понятия ядра и образа полугруппы, определив их сообразно данной ситуации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. *Ядром* полугруппы операторов $\{V(t) : t > 0\}$ будем называть множество $\ker V(\cdot) = \bigcap_{t > 0} \ker V(t)$.

Понятно, что ядро полугруппы является подпространством.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть пара операторов (L, M) удовлетворяет усиленному $(p, \psi(\tau))$ -условию. Тогда $\ker U(\cdot) = \ker R_{(\mu, p)}^L(M)$, $\ker F(\cdot) = \ker L_{(\mu, p)}^L(M)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть φ – собственный или M -присоединенный вектор высоты $q \leq p$ оператора L . Понятно, что собственный вектор принадлежит $\ker U(\cdot)$. Для M -присоединенного вектора φ согласно замечанию 1.3 имеем

$$\begin{aligned} U(t)\varphi &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\mu}^L(M) e^{\mu t} \varphi d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (-\varphi_{q-1} - \mu\varphi_{q-2} - \dots - \mu^{q-1}\varphi_0) e^{\mu t} d\mu = 0, \end{aligned}$$

где $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{q-1}\}$ – цепочка вектора φ .

Итак, $\ker R_{(\mu, p)}^L(M) \subset \ker U(\cdot)$. Рассмотрим вектор $\chi = R_{(\mu, p)}^L(M)\varphi$, где $\varphi \in \ker U(\cdot)$. Из вида полугруппы следует, что при любом $t > 0$

$$U(t)\chi = U(t)R_{(\mu, p)}^L(M)\varphi = R_{(\mu, p)}^L(M)U(t)\varphi = 0,$$

поэтому по теореме 4.1

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0+} U(t)\chi = \chi = R_{(\mu, p)}^L(M)\varphi.$$

Следовательно, $\ker U(\cdot) = \ker R_{(\mu, p)}^L(M)$.

Пусть $f \in \ker L_{(\mu,p)}^L(M)$. Тогда $f = M\varphi$, где $\varphi \in \ker R_{(\mu,p)}^L(M) \cap \operatorname{dom} M$. Поэтому при любом $t > 0$

$$F(t)f = F(t)M\varphi = MU(t)\varphi = M0 = 0$$

по доказанному. Таким образом, $\ker L_{(\mu,p)}^L(M) \subset \ker F(\cdot)$.

Пусть $f \in \ker F(\cdot)$. Рассмотрим вектор $g = L_{(\mu,p)}^L(M)f$. Тогда $F(t)g = L_{(\mu,p)}^L(M)F(t)f = 0$ при любом $t > 0$, поэтому по теореме 4.1

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0+} F(t)g = g = L_{(\mu,p)}^L(M)f.$$

Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. *Образом* полугруппы $\{V(t) : t > 0\}$ назовем множество $\operatorname{im} V(\cdot) = \overline{\bigcup_{t>0} \operatorname{im} V(t)}$.

Поскольку рассматриваемые нами полугруппы бесконечно дифференцируемы, в силу теоремы 4.1 очевидна

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть пара операторов (L, M) удовлетворяет усиленному $(p, \psi(\tau))$ -условию. Тогда*

$$\operatorname{im} U(\cdot) = \overline{\operatorname{im} R_{(\mu,p)}^L(M)}, \quad \operatorname{im} F(\cdot) = \overline{\operatorname{im} L_{(\mu,p)}^L(M)}.$$

§ 6. Примеры

ПРИМЕР 6.1. Приведем пример пары операторов (L, M) , для которой $(p, \psi(\tau))$ -условие не выполняется ни при каких $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $\psi(\tau) \in \Psi$. Пусть $\mathcal{U} = \mathcal{F} = l_\infty$, а операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ имеют вид

$$Lu = \left(u_2, \frac{u_3}{2}, \frac{u_4}{3}, \dots \right), \quad u = (u_1, u_2, \dots) \in l_2, \quad M = I.$$

Поскольку

$$L^k u = \left(\frac{u_{k+1}}{k!}, \frac{u_{k+2}}{(k+1)!}, \frac{2u_{k+3}}{(k+2)!}, \frac{2 \cdot 3u_{k+4}}{(k+3)!}, \dots \right),$$

то $\|L^k\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})} = \frac{1}{k!}$. Поэтому ряд $(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k L^k$ сходится равномерно и абсолютно на любом компакте в $\mathbb{C}$. Это значит, что $\rho^L(M) = \mathbb{C}$.

Построим бесконечную цепочку M -присоединенных векторов. Пусть $\varphi_0 = (u_1, 0, 0, \dots) \in \ker L$. Тогда $M\varphi_0 = \varphi_0 = L\varphi_1$, $\varphi_1 = (u_2, u_1, 0, 0, \dots)$; $M\varphi_{q-1} = \varphi_{q-1} = L\varphi_q$, $\varphi_q = (0!u_{q+1}, 1!u_q, \dots, (q-1)!u_2, q!u_1, 0, 0, \dots)$, $q \in \mathbb{N}$. Выполнение $(p, \psi(\tau))$ -условия противоречило бы лемме 2.3.

ПРИМЕР 6.2. Возьмем $\mathcal{U} = \mathcal{F} = l_2$, $L = I$, $M(\{\alpha_n\}) = \{-(\sqrt{n} + (-1)^n i n)\alpha_n\}$. Тогда пара операторов (L, M) удовлетворяет $(0, \sqrt{|\tau|})$ -условию с константами $a = 0$, $C = 1$. Действительно, спектр и резольвенты оператора L находятся непосредственно. Выполнение оценок для резольвенты на мнимой оси и, тем более, в правой полуплоскости очевидно, а во всем секторе Σ_ψ следует из замечания 2.4. Полугруппы при этом имеют вид

$$U(t)(\{\alpha_n\}) = F(t)(\{\alpha_n\}) = \{e^{-(\sqrt{n} + (-1)^n i n)t} \alpha_n\}.$$

Эта полугруппа бесконечно дифференцируема согласно теореме 3.2, но не имеет аналитического продолжения с $\mathbb{R}_+$, поскольку $\sup_{n \in \mathbb{N}} e^{(-1)^n n \operatorname{Im} t} = +\infty$ при $\operatorname{Im} t \neq 0$.

ПРИМЕР 6.3 (вырожденная система обыкновенных дифференциальных уравнений). Рассмотрим случай конечномерных пространств $\mathcal{U} = \mathcal{F} = \mathbb{R}^n$. Тогда операторы L и M задаются квадратными матрицами порядка n . Будем предполагать, что $\det L = 0$. Покажем, что в этом случае используемые нами условия на операторы выполняются.

ЛЕММА 6.1. Пусть существует $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\det(\alpha L - M) \neq 0$. Тогда пара (L, M) удовлетворяет усиленному $(p, |\tau|)$ -условию, где $p \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\det(\mu L - M)$ – полином степени не выше n , то L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M – конечное множество. Это означает, что оператор M (L, σ) -ограничен, причем ∞ – несущественная особая точка порядка $p \leq n$ L -резольвенты оператора M [2]. Отсюда следует, что оператор M $(L, p, 1, 1)$ -секториален [8, теорема 5.5.1]. Осталось учесть замечание 4.1.

Заметим, что в условиях леммы 6.1 существующая по теореме 3.2 полугруппа уравнения (0.2) продолжима до аналитической в плоскости группы, поэтому в конечномерном случае задача (0.1), (0.2) разрешима даже в классическом смысле при любом u_0 из фазового пространства $\operatorname{im} R_{(\mu, p)}^L(M) = \operatorname{im} R_{(\mu, p)}^L(M)$.

ПРИМЕР 6.4. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим пространства $\mathcal{U} = \mathcal{F} = L_2(\Omega)$. Оператор L обозначает умножение на неотрицательную функцию $m \in C^1(\bar{\Omega})$, $m(x) \geq 0$, такую, что $|\nabla m(x)| \leq C m(x)^\rho$, $x \in \bar{\Omega}$, при некотором $\rho \in [0, 1)$. Пусть $M = \Delta$, $\operatorname{dom} M = \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$m(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad (6.1)$$

$$u = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega, \quad (6.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (6.3)$$

в рамках задачи (0.1), (0.2). Согласно [5] получим, что пара операторов (L, M) удовлетворяет усиленному $(0, |\tau|^{\frac{1}{2-\rho}})$ -условию. Множеством допустимых начальных значений ослабленной задачи Коши при этом является $\overset{\circ}{\mathcal{U}} = \{u \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega) \mid$

$\exists f \in L_2(\Omega): \Delta u = mf$, а фазовым пространством задачи (6.1), (6.2) – замыкание этого множества, которое в то же время является алгебраическим дополнением в $L_2(\Omega)$ к ядру полугруппы $\mathcal{U}^0 = \{u \in L_2(\Omega): m(x)u(x) = 0 \text{ почти всюду}\}$.

ПРИМЕР 6.5. В работах [12], [13] в рамках ослабленной задачи Коши для неоднородного уравнения (0.2) исследуется начально-краевая задача (6.2), (6.3) для системы уравнений Навье–Стокса

$$u_t = \nu \nabla^2 u - q, \quad \nabla(\nabla \cdot u) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad (6.4)$$

моделирующей в линейном приближении динамику вязкой несжимаемой жидкости. Здесь $\nu > 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ , $q = q(x, t) = \nabla p$ – градиент давления. Кроме того, вторым уравнением заменено эквивалентное ему уравнение несжимаемости $\nabla \cdot u = 0$. Искомыми функциями являются $u(x, t)$ и $q(x, t)$. Введем обозначения: $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^n$, $\mathring{\mathbb{H}}^1 = (\mathring{W}_2^1(\Omega))^n$, $\mathbb{L}^2 = (L^2(\Omega))^n$, $\mathcal{L} = \{u \in (C_0^\infty(\Omega))^n: \nabla \cdot u = 0\}$. Замыкание линейала $\mathcal{L}$ по норме пространства $\mathbb{L}^2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$. Это гильбертово пространство со скалярным произведением пространства $\mathbb{L}^2$. Существует расщепление $\mathbb{L}^2 = \mathbb{H}_\sigma \oplus \mathbb{H}_\pi$, где $\mathbb{H}_\pi$ – ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$. Обозначим через $\Pi: \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{H}_\pi$ ассоциированный с этим расщеплением ортопроектор. Сужение проектора Π на пространство $\mathbb{H}^2 \cap \mathring{\mathbb{H}}^1 \subset \mathbb{L}^2$ является непрерывным оператором $\Pi: \mathbb{H}^2 \cap \mathring{\mathbb{H}}^1 \rightarrow \mathbb{H}^2 \cap \mathring{\mathbb{H}}^1$. Представим поэтому пространство $\mathbb{H}^2 \cap \mathring{\mathbb{H}}^1$ в виде прямой суммы $\mathbb{H}_\sigma^2 \oplus \mathbb{H}_\pi^2$, где $\mathbb{H}_\sigma^2 = \ker \Pi$, а $\mathbb{H}_\pi^2 = \text{im } \Pi$. Имеют место плотное вложение $\mathcal{L} \subset \mathbb{H}_\sigma^2$ и непрерывные плотные вложения $\mathbb{H}_\sigma^2 \hookrightarrow \mathbb{H}_\sigma$, $\mathbb{H}_\pi^2 \hookrightarrow \mathbb{H}_\pi$. Пространство $\mathbb{H}_\pi^2$ состоит из вектор-функций, равных нулю на $\partial\Omega$ и являющихся градиентами функций из $W_2^3(\Omega)$.

Формулой $A = \text{diag}\{-\nabla^2, \dots, -\nabla^2\}$ задается линейный непрерывный оператор $A: \mathbb{H}_\sigma^2 \oplus \mathbb{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbb{L}^2$ с дискретным конечнократным спектром $\sigma(A)$, сгущающимся лишь на $+\infty$. Формулой $B: u \rightarrow \nabla(\nabla \cdot u)$ задается линейный непрерывный сюръективный оператор $B: \mathbb{H}_\sigma^2 \oplus \mathbb{H}_\pi^2 \rightarrow \mathbb{H}_\pi$ с ядром $\ker B = \mathbb{H}_\sigma^2$.

Положим $\mathcal{U} = \mathcal{F} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \mathbb{H}_q$, $\mathbb{H}_q = \mathbb{H}_\pi$. Тогда векторы $u \in \mathcal{U}$, $f \in \mathcal{F}$ имеют вид $u = (u_\sigma, u_\pi, u_q)$, $f = (f_\sigma, f_\pi, f_q)$. Через $\mathbb{O}$ будем обозначать нулевой оператор, область определения которого ясна из контекста. Положим $\Sigma = I - \Pi$,

$$L = \begin{pmatrix} \Sigma & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \Pi & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$L: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$, $\ker L = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{H}_q$, $\text{im } L = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi \times \{0\}$,

$$M = \begin{pmatrix} -\nu \Sigma A & -\nu \Sigma A & \mathbb{O} \\ -\nu \Pi A & -\nu \Pi A & -\Pi \\ \mathbb{O} & -B & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$M: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{F}$, $\text{dom } M = \mathbb{H}_\sigma^2 \times \mathbb{H}_\pi^2 \times \mathbb{H}_q$. Имеет место теорема, которая в наших терминах формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 6.1 [12]. *Пара операторов (L, M) удовлетворяет усиленному $(1, |\tau|)$ -условию.*

По теореме 4.1 фазовым пространством задачи (6.2), (6.4) является подпространство $\mathcal{U}^1 = \{u \in \mathcal{U}: u_\pi = 0, \Pi B u_\sigma = u_p\}$.

Список литературы

1. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967.
2. Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 47–74.
3. Свиридюк Г. А., Федоров В. Е. Аналитические полугруппы с ядрами и линейные уравнения типа Соболева // Сиб. матем. журн. 1995. Т. 36. № 5. С. 1130–1145.
4. Свиридюк Г. А., Федоров В. Е. О единицах аналитических полугрупп операторов с ядрами // Сиб. матем. журн. 1998. Т. 39. № 3. С. 604–616.
5. Favini A., Yagi A. Multivalued linear operators and degenerate evolution equations // Ann. Mat. pur. ed appl. 1993. V. CLXIII. P. 353–384.
6. Федоров В. Е. Бесконечно дифференцируемые полугруппы операторов с ядрами // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40. № 6. С. 1409–1421.
7. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.
8. Федоров В. Е. Полугруппы и группы операторов с ядрами. Челябинск: Челяб. гос. ун-т, 1998.
9. Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. 1975. Т. 11. № 11. С. 1996–2010.
10. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.: Гостехиздат, 1948.
11. Федоров В. Е. О гладкости решений линейных уравнений соболевского типа // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 12. С. 1646–1649.
12. Свиридюк Г. А., Кузнецов Г. А. Об относительно сильной p -секториальности линейных операторов // Докл. РАН. 1999. Т. 365. № 6. С. 736–738.
13. Свиридюк Г. А., Кузнецов Г. А. Об относительной p -секториальности дифференциальных операторов // Неклассические уравнения математической физики. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1998. С. 49–52.

Челябинский государственный университет
E-mail: kar@csu.ru

Поступило в редакцию
6.III.2000