Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. С. Бичегкуев, Об условиях обратимости разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 4, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4458>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 13:00:46

УДК 517.9

М. С. Бичегкуев

Об условиях обратимости разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах

Получены необходимые и достаточные условия обратимости разностного оператора $\mathcal{D}_E: D(\mathcal{D}_E) \subset l_\alpha^p \rightarrow l_\alpha^p$, $(\mathcal{D}_E x)(n) = x(n+1) - Bx(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, с областью определения $D(\mathcal{D}_E)$, задаваемой условием $x(0) \in E$, где $l_\alpha^p = l_\alpha^p(\mathbb{Z}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$, – банахово пространство суммируемых с весом $\alpha: \mathbb{Z}_+ \rightarrow (0, \infty)$ при $p \in [1, \infty)$ и ограниченных при $p = \infty$ относительно α последовательностей векторов из банахова пространства X , $B: X \rightarrow X$ – линейный ограниченный оператор, E – замкнутое инвариантное относительно оператора B подпространство из X . Приведены приложения к исследованию обратимости дифференциального оператора с неограниченным операторным коэффициентом (генератором сильно непрерывной полугруппы операторов) в весовых функциональных пространствах.

Библиография: 9 наименований.

Ключевые слова: разностный оператор, спектр оператора, обратимый оператор, весовые пространства последовательностей и функций, линейное отношение, дифференциальный оператор.

§ 1. Введение

Пусть X – комплексное банахово пространство и $LB(X)$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в X . Рассматривается функция (вес или весовая функция) $\alpha: \mathbb{Z}_+ \rightarrow (0, \infty)$, определенная на множестве неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Через $l_\alpha^p = l_\alpha^p(\mathbb{Z}_+, X)$, где $p \in [1, \infty]$, обозначим банахово пространство последовательностей $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$ векторов из X , суммируемых с весом α :

$$\|x\| = \|x\|_{p,\alpha} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)} \right)^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty),$$

и ограниченных относительно α :

$$\|x\| = \|x\|_{\infty,\alpha} = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{\|x(n)\|}{\alpha(n)}, \quad p = \infty.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00276).

Если $\alpha = 1$, то пространство $l_\alpha^p(\mathbb{Z}_+, X)$ обозначим через $l^p(\mathbb{Z}_+, X) = l^p$. Всюду считается, что весовая функция α удовлетворяет условию

$$\varkappa(\alpha) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(n)}{\alpha(n+1)} < \infty. \quad (1.1)$$

В настоящей статье получены необходимые и достаточные условия обратимости оператора

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_E: D(\mathcal{D}_E) \subset l_\alpha^p &\rightarrow l_\alpha^p, \\ (\mathcal{D}_E x)(n) &= x(n+1) - Bx(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in l_\alpha^p, \end{aligned} \quad (1.2)$$

с областью определения

$$D(\mathcal{D}_E) = \left\{ x \in l_\alpha^p: x(0) \in E, \left(\frac{x(n+1)}{\alpha(n)} \right)_{n \in \mathbb{Z}_+} \in l^p \right\},$$

где E – замкнутое подпространство из X и $B \in LB(X)$.

Отметим, что оператор $\mathcal{D}_E$ ограничен на $D(\mathcal{D}_E)$, если выполнено условие

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k)} < \infty. \quad (1.3)$$

Основные результаты получены с использованием величин

$$\varkappa_{\text{out}}(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)} \right)^{1/n}, \quad (1.4)$$

$$\varkappa_{\text{int}}(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)} \right)^{1/n}, \quad (1.5)$$

построенных по весу α . Если $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) = \varkappa_{\text{out}}(\alpha)$, то вес α называется *сбалансированным*, а если $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) = \varkappa_{\text{out}}(\alpha) = 1$, то – *сильно сбалансированным*. Примером сбалансированного веса является последовательность $k \mapsto e^{\beta k}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\beta \in \mathbb{R}$, при $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) = \varkappa_{\text{out}}(\alpha) \neq 0$ или последовательность $k \mapsto e^{k^2}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, при $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) = \varkappa_{\text{out}}(\alpha) = 0$, а примером сильно сбалансированного веса – последовательность $k \mapsto (1+k)^\gamma$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

В следующей теореме используется условие

$$([\varkappa_{\text{int}}(\alpha), \varkappa_{\text{out}}(\alpha)]\sigma(B)) \cap \mathbb{T} = \{a\lambda: a \in [\varkappa_{\text{int}}(\alpha), \varkappa_{\text{out}}(\alpha)], \lambda \in \sigma(B)\} \cap \mathbb{T} = \emptyset,$$

где $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C}: |\lambda| = 1\}$ – единичная окружность в $\mathbb{C}$. При выполнении этого условия спектр $\sigma(B)$ оператора B представим в виде объединения:

$$\sigma(B) = \sigma_{\text{int}} \cup \sigma_{\text{out}}, \quad (1.6)$$

двух непересекающихся множеств

$$\sigma_{\text{int}} = \{\lambda \in \sigma(B): |\lambda| \varkappa_{\text{out}}(\alpha) < 1\}, \quad (1.7)$$

$$\sigma_{\text{out}} = \{\lambda \in \sigma(B): |\lambda| \varkappa_{\text{int}}(\alpha) > 1\}. \quad (1.8)$$

Пусть $P_{\text{int}}, P_{\text{out}} = I - P_{\text{int}}$ – проекторы Рисса (спектральные проекторы), построенные по спектральным множествам σ_{int} и σ_{out} соответственно. Тогда определим операторнозначную функцию $G: \mathbb{Z} \rightarrow LB(X)$, представимую в виде

$$G(k) = \begin{cases} B^k P_{\text{int}}, & \text{если } k \geq 0, \\ -B^k P_{\text{out}}, & \text{если } k \leq -1. \end{cases} \quad (1.9)$$

В формуле (1.9) оператор $B^k P_{\text{out}}, k \leq -1$, однозначно определяется из равенств

$$(B^k P_{\text{out}})B^{-k} = B^{-k}(B^k P_{\text{out}}) = P_{\text{out}}.$$

Таким образом, оператор $B^k P_{\text{out}} = (B^{-1} P_{\text{out}})^{-k}, k \leq -1$, является нулевым на подпространстве $\text{Im } P_{\text{int}}$ и совпадает с обратным к сужению $B|_{\text{Im } P_{\text{out}}}$ оператора B на подпространстве $\text{Im } P_{\text{out}}$.

Далее через B_{int} будем обозначать оператор $B P_{\text{int}}$ и через B_{out} – оператор $B^{-1} P_{\text{out}}$. Сужение $B|_{\text{Im } P_{\text{int}}}$ оператора B на $\text{Im } P_{\text{int}}$ имеет спектр σ_{int} , причем $\sigma(B_{\text{int}}) = \sigma_{\text{int}} \cup \{0\}$, если $P_{\text{out}} \neq 0$, и $\sigma(B_{\text{int}}) = \sigma_{\text{int}}$, если $P_{\text{out}} = 0$. Спектр оператора $B|_{\text{Im } P_{\text{out}}}$ совпадает с множеством σ_{out} .

Положим

$$r_{\text{int}} = r(B_{\text{int}}) = r(B|_{\text{Im } P_{\text{int}}}) = \max\{|\lambda|: \lambda \in \sigma_{\text{int}}\}, \quad (1.10)$$

$$r_{\text{out}} = \min\{|\lambda|: \lambda \in \sigma_{\text{out}}\}, \quad (1.11)$$

при этом $r_{\text{int}} = 0$, если $\sigma_{\text{int}} = \emptyset$, и $r_{\text{out}} = \infty$, если $\sigma_{\text{out}} = \emptyset$. Ясно, что верно равенство

$$r(B^{-1} P_{\text{out}}) = r_{\text{out}}^{-1}, \quad (1.12)$$

если $P_{\text{out}} \neq 0$.

Приведем основные результаты статьи, связанные с исследованием разностного оператора $\mathcal{D}_E$.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) > 0$ и E – инвариантное подпространство относительно оператора $B \in LB(X)$. Для того чтобы оператор $\mathcal{D}_E$ был непрерывно обратим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$([\varkappa_{\text{int}}(\alpha), \varkappa_{\text{out}}(\alpha)]\sigma(B)) \cap \mathbb{T} = \emptyset, \quad (1.13)$$

$$\text{Im } P_{\text{out}} = E, \quad (1.14)$$

где P_{out} – проектор, построенный по спектральному множеству (1.8). При выполнении этих условий обратный оператор $\mathcal{D}_E^{-1} \in LB(l_\alpha^p)$ к $\mathcal{D}_E$ определяется формулой

$$(\mathcal{D}_E^{-1}y)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} G(n-m-1)y(m), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad y \in l_\alpha^p, \quad (1.15)$$

где двусторонняя последовательность $G: \mathbb{Z} \rightarrow LB(X)$ определена формулой (1.9).

СЛЕДСТВИЕ 1.1. Если $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) = \varkappa_{\text{out}}(\alpha) = \beta > 0$ (т. е. вес α сбалансирован), то оператор $\mathcal{D}_E$ непрерывно обратим тогда и только тогда, когда выполнены условия:

- 1) $\{\beta\lambda: \lambda \in \sigma(B)\} \cap \mathbb{T} = \emptyset$;
- 2) $\text{Im } P_{\text{out}} = E$.

В частности, если α – сильно сбалансированный вес, то условие 1) означает, что $\sigma(B) \cap \mathbb{T} = \emptyset$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) = 0$ и E – ненулевое инвариантное подпространство относительно оператора B . Тогда оператор $\mathcal{D}_E$ не является непрерывно обратимым.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) = 0$ и $E = \{0\}$. Тогда оператор $\mathcal{D}_{\{0\}}$ непрерывно обратим в том и только в том случае, когда $\varkappa_{\text{out}}(\alpha)r(B) < 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Если $E = \{0\}$ и $\varkappa_{\text{out}}(\alpha) = 0$, то оператор $\mathcal{D}_{\{0\}}$ непрерывно обратим.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) > 0$ и $E = X$. Тогда оператор $\mathcal{D}_X$ непрерывно обратим в том и только в том случае, когда B непрерывно обратим и $r(B^{-1}) < \varkappa_{\text{int}}(\alpha)$. В частности, если α – сильно сбалансированный вес, то последнее неравенство означает, что $\sigma(B)$ лежит вне единичной окружности $\mathbb{T}$.

В заключение параграфа опишем структуру статьи. В § 2 приводятся необходимые для дальнейшего изложения сведения из теории линейных отношений. В § 3 доказываются теоремы 1.1–1.4, а в § 4 получены приложения (теоремы 4.1–4.4) основных результатов к исследованию обратимости дифференциальных операторов с неограниченным операторным коэффициентом в весовых функциональных пространствах.

§ 2. Некоторые сведения из теории линейных отношений

Определения и результаты из теории линейных отношений (многозначных линейных операторов), используемые в настоящей статье, содержатся в [1] (см. также монографии [2], [3]).

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ – комплексные банаховы пространства. Любое линейное подпространство $\mathcal{A}$ из $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ называется *линейным отношением между $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$* . Если $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, то $\mathcal{A}$ назовем *линейным отношением на $\mathcal{X}$* . Совокупность всех замкнутых линейных отношений между $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ обозначим через $LR(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, а если $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$, то через $LR(\mathcal{X})$.

Подпространство

$$D(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{X} \mid \exists y \in \mathcal{Y}: (x, y) \in \mathcal{A}\}$$

называется *областью определения* отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Для любого элемента $x \in D(\mathcal{A})$ отношение $\mathcal{A}$ определяет множество $\mathcal{A}x = \{y \in \mathcal{Y}: (x, y) \in \mathcal{A}\}$,

которое может быть представлено в виде $Ax = y_0 + A0$ для любого $y \in Ax$, где $A0 = \{y \in \mathcal{Y} \mid (0, y) \in \mathcal{A}\}$ – линейное подпространство в $\mathcal{Y}$.

Подпространства

$$\text{Ker } \mathcal{A} = \{x \in D(\mathcal{A}) \mid (x, 0) \in \mathcal{A}\}, \quad \text{Im } \mathcal{A} = \bigcup_{x \in D(\mathcal{A})} Ax$$

называются соответственно *ядром* и *образом* линейного (слово “линейное” будет иногда не использоваться) отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Если $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, то обратное отношение $\mathcal{A}^{-1} \in LR(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ определяется равенством

$$\mathcal{A}^{-1} = \{(y, x) \in \mathcal{Y} \times \mathcal{X} \mid (x, y) \in \mathcal{A}\}.$$

Суммой двух отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in LR(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ называется линейное подпространство из $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ вида

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mid x \in D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B}), y \in Ax + Bx\},$$

где $Ax + Bx$ – алгебраическая сумма двух множеств Ax, Bx из $\mathcal{Y}$. Значит, $D(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B})$.

Произведением отношений $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ и $\mathcal{B} \in LR(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$ называется линейное подпространство из $\mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ вида

$$\mathcal{B}\mathcal{A} = \{(x, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \mid \exists y \in D(\mathcal{B}): (x, y) \in \mathcal{A}, (y, z) \in \mathcal{B}\}.$$

Отметим, что $(\mathcal{B}\mathcal{A})^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^{-1}$.

Каждое отношение $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ является графиком многозначного отображения $\tilde{\mathcal{A}}: D(\tilde{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{X} \rightarrow 2^{\mathcal{Y}}$, где $D(\tilde{\mathcal{A}}) = D(\mathcal{A})$ и $\tilde{\mathcal{A}}x = Ax$ для всех $x \in D(\mathcal{A})$. Далее они отождествляются и обозначаются одной и той же буквой $\mathcal{A}$. Таким образом, множество $LO(\mathcal{X})$ линейных замкнутых операторов, действующих в $\mathcal{X}$, содержится в $LR(\mathcal{X})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Отношение $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ называется *непрерывно обратимым*, если $\mathcal{A}^{-1} \in LB(\mathcal{X})$, т.е. $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$ (отношение $\mathcal{A}$ инъективно) и $\text{Im } \mathcal{A} = \mathcal{X}$ (отношение $\mathcal{A}$ сюръективно). *Резольвентным множеством* отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ называется множество $\rho(\mathcal{A})$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in LB(\mathcal{X})$. *Спектром* отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ называется множество $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$.

Отметим, что множество $\rho(\mathcal{A})$ открыто, а спектр $\sigma(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ замкнут.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Отображение

$$R(\cdot, \mathcal{A}): \rho(\mathcal{A}) \rightarrow LB(\mathcal{X}), \quad R(\lambda, \mathcal{A}) = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}),$$

называется *резольвентой* отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$.

Резольвента отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ является псевдорезольвентой в общепринятом смысле (см., например, [4, §4.8]), причем $\mathcal{A}0 = \text{Ker } R(\lambda_0, \mathcal{A})$, $D(\mathcal{A}) = \text{Im } R(\lambda_0, \mathcal{A})$, $\lambda_0 \in \rho(\mathcal{A})$.

Замкнутое линейное подпространство $\mathcal{X}_0$ из $\mathcal{X}$ называется *инвариантным* относительно $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$, если $\mathcal{A}x_0 \cap \mathcal{X}_0 \neq \emptyset$ для любого $x_0 \in D(\mathcal{A}) \cap \mathcal{X}_0$.

Сужением отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ на инвариантное подпространство $\mathcal{X}_0$ называется линейное отношение $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \cap (\mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_0) \subset \mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_0$ на подпространстве $\mathcal{X}_0$. Для него будет использоваться обозначение $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}|_{\mathcal{X}_0}$.

Если $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$ – прямая сумма двух замкнутых инвариантных относительно отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ подпространств и $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}|_{\mathcal{X}_0}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{\mathcal{X}_1}$, то будем говорить, что отношение $\mathcal{A}$ является *прямой суммой* отношений $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1$, и использовать запись $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Будем говорить, что линейное отношение $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ *перестановочно* с оператором $B \in LB(\mathcal{X})$, если $(Bx, By) \in \mathcal{A}$ для любой пары $(x, y) \in \mathcal{A}$, т.е. $BA \subset AB$.

Известно (см. [1]), что если $P_0 \in LB(\mathcal{X})$ – проектор, осуществляющий разложение $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$ пространства $\mathcal{X}$ (т.е. $\text{Im } P_0 = \mathcal{X}_0$, $\text{Ker } P_0 = \text{Im}(I - P_0) = \mathcal{X}_1$), то подпространства $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ инвариантны относительно $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ перестановочно с P_0 .

В следующем параграфе существенно используются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 2.1 [1, теорема 2.3]. Пусть спектр $\sigma(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$ представим в следующем виде:

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_0 \cup \sigma_1,$$

где σ_0 – компактное множество из $\mathbb{C}$, σ_1 – замкнутое множество и $\sigma_0 \cap \sigma_1 = \emptyset$. Тогда банахово пространство $\mathcal{X}$ допускает представление в виде

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1 \tag{2.1}$$

прямой суммы замкнутых инвариантных относительно $\mathcal{A}$ подпространств $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$, где $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}|_{\mathcal{X}_0}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{\mathcal{X}_1} \in LR(\mathcal{X}_1)$ обладают следующими свойствами:

- 1) $\mathcal{A}_0 \in LB(\mathcal{X}_0)$, $\sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma_0$;
- 2) $\mathcal{A}_1 0 = \mathcal{A}_0$, $D(\mathcal{A}) = \mathcal{X}_0 \oplus D(\mathcal{A}_1)$, $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma_1$;
- 3) проектор Рисса $P_0 \in LB(\mathcal{X})$, осуществляющий разложение (2.1), определяется формулой

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R(\lambda, \mathcal{A}) d\lambda,$$

где γ – жорданов замкнутый контур (или конечное число таких кривых), лежащий в $\rho(\mathcal{A})$ и такой, что σ_0 лежит внутри γ , а σ_1 – вне его.

ТЕОРЕМА 2.2 [1, теорема 6.1]. Пусть $A_1 \in LO(\mathcal{X})$ и $A_2 \in LB(\mathcal{X})$. Тогда оператор $A_1 - A_2 \in LO(\mathcal{X})$ непрерывно обратим, если и только если непрерывно обратимо линейное отношение $I - A_1^{-1}A_2$.

§ 3. Доказательства теорем 1.1–1.4

Из приводимых далее лемм 3.1–3.3 будет следовать существование пределов в соотношениях (1.4) и (1.5).

ЛЕММА 3.1. *Предел в (1.4) существует и конечен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор

$$S: l_\alpha^p \rightarrow l_\alpha^p, \quad (Sx)(k) = \begin{cases} x(k-1), & k \geq 1, \\ 0, & k = 0, \end{cases} \quad x \in l_\alpha^p.$$

В силу условия (1.1) оператор S принадлежит пространству $LB(l_\alpha^p)$ и $\|S\| \leq \varkappa(\alpha)$, где $\varkappa(\alpha)$ – величина из (1.1). Оператор

$$U_\alpha: l^p \rightarrow l_\alpha^p, \quad (U_\alpha x)(k) = \alpha(k)x(k), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in l^p, \quad (3.1)$$

является изометрическим изоморфизмом пространств l^p и l_α^p . Следовательно, оператор $S_\alpha = U_\alpha^{-1} S U_\alpha: l^p \rightarrow l^p$ ограничен. Он представим в виде

$$(S_\alpha x)(k) = \begin{cases} \frac{\alpha(k-1)}{\alpha(k)} x(k-1), & k \geq 1, \\ 0, & k = 0, \end{cases} \quad x \in l^p,$$

а его степени S_α^n , $n \geq 1$, определяются равенствами

$$(S_\alpha^n x)(k) = \begin{cases} \frac{\alpha(k-n)}{\alpha(k)} x(k-n), & k \geq n, \\ 0, & 0 \leq k \leq n-1, \end{cases} \quad x \in l^p.$$

При этом отметим, что

$$\|S_\alpha^n\| = \sup_{k \geq n} \frac{\alpha(k-n)}{\alpha(k)} = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)}.$$

Из формулы Бёрлинга–Гельфанда для спектрального радиуса ограниченного оператора [4] следует его существование и конечность:

$$r(S_\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_\alpha^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)} \right)^{1/n} = \varkappa_{\text{out}}(\alpha),$$

где $r(S_\alpha)$ – спектральный радиус оператора S_α . Лемма доказана.

ЛЕММА 3.2. *Если выполнено условие (1.3), то предел в (1.5) существует и $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) > 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ограниченный оператор

$$\tilde{S}: l_\alpha^p \rightarrow l_\alpha^p, \quad (\tilde{S}x)(k) = x(k+1), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in l_\alpha^p,$$

и подобный ему оператор $\tilde{S}_\alpha = U_\alpha^{-1} \tilde{S} U_\alpha: l^p \rightarrow l^p$, который определяется равенствами

$$(\tilde{S}_\alpha x)(k) = \frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k)} x(k+1), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in l^p,$$

а его степени имеют вид

$$(\tilde{S}_\alpha^n x)(k) = \frac{\alpha(k+n)}{\alpha(k)} x(k+n), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x \in l^p.$$

Отсюда, используя ограниченность оператора $\tilde{S}_\alpha$ и формулу Бёрлингга–Гельфанда, получаем существование предела

$$\begin{aligned} r(\tilde{S}_\alpha) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{S}_\alpha^n\|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(k+n)}{\alpha(k)} \right)^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)} \right)^{-1/n} = \varkappa_{\text{int}}^{-1}(\alpha) < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) > 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3. *Равенство $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k)} = \infty. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполнено условие (3.2). Следовательно,

$$\inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+1)} = 0.$$

Тогда, учитывая (1.1), для каждого $n \in \mathbb{N}$ получаем

$$\begin{aligned} \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)} &= \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+1)} \frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k+2)} \cdots \frac{\alpha(k+n-1)}{\alpha(k+n)} \\ &= \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{\alpha(k)}{\alpha(k+1)} \beta(k) \right) \leq \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+1)} \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \beta(k) = 0. \end{aligned}$$

Значит, $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) = 0$.

Обратно, если $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) = 0$, то из леммы 3.2 следует, что выполнено условие (3.2). Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Из доказанных лемм 3.1–3.3 следует, что пределы в соотношениях (1.4), (1.5) существуют и, очевидно, $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) \leq \varkappa_{\text{out}}(\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Необходимость. Отметим, что оператор $\mathcal{D}_E$, определенный в l_α^p равенством (1.2), является замкнутым, т. е. $\mathcal{D}_E \in LO(l_\alpha^p)$, как ограниченный оператор на своей области определения, являющейся замкнутым подпространством. Пусть оператор $\mathcal{D}_E$ непрерывно обратим.

Тогда непрерывно обратим разностный оператор $\mathcal{D}_{E,\alpha} = U_\alpha^{-1}\mathcal{D}_E U_\alpha$, где U_α – оператор из (3.1), имеющий вид

$$(\mathcal{D}_{E,\alpha}x)(n) = \frac{\alpha(n+1)}{\alpha(n)}x(n+1) - Bx(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in l^p,$$

с областью определения $D(\mathcal{D}_{E,\alpha}) = \{x \in l^p : x(0) \in E\}$. Этот оператор представим в виде $\mathcal{D}_{E,\alpha} = A - \tilde{B}$, где $(Ax)(n) = \frac{\alpha(n+1)}{\alpha(n)}x(n+1)$ – оператор взвешенного сдвига в l^p с областью определения $D(A) = D(\mathcal{D}_{E,\alpha})$ и $\tilde{B} \in LB(l^p)$ – оператор умножения на B , $(\tilde{B}x)(k) = Bx(k)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Оператор A не инъективен, поэтому $\mathcal{A} = A^{-1}$ – линейное отношение, не являющееся для $E \neq \{0\}$ линейным оператором, причем

$$\mathcal{A}0 = \text{Ker } A = \{x \in l^p \mid x(0) \in E, \quad x(k) = 0 \text{ для } k \geq 1\}.$$

Отношение $A^{-1} \in LR(l^p)$ будет иметь вид

$$A^{-1} = \{(x, y) \in l^p \times l^p \mid y(0) \in E, \quad y(n) = \omega(n)x(n-1), \quad n \geq 1\},$$

где $\omega(n) = \frac{\alpha(n-1)}{\alpha(n)}$, $n \geq 1$, – ограниченная числовая последовательность в силу (1.1). Следовательно, отношение $\mathcal{K}_E = A^{-1}\tilde{B} \in LR(l^p)$ допускает представление

$$\mathcal{K}_E = \{(x, y) \in l^p \times l^p \mid y(0) \in E, \quad y(n) = \omega(n)Bx(n-1), \quad n \geq 1\}. \quad (3.3)$$

Отсюда, в частности, следует, что $(\mathcal{K}_E x)(0) = E$.

Из теоремы 2.2 и непрерывной обратимости оператора $\mathcal{D}_E$ следует, что отношение $I - \mathcal{K}_E$ непрерывно обратимо, т. е. $1 \in \rho(\mathcal{K}_E)$. Поскольку спектр $\sigma(\mathcal{K}_E)$ отношения $\mathcal{K}_E$ инвариантен относительно вращений вокруг нуля (см. [5, лемма 6.1]), выполняется равенство

$$\sigma(\mathcal{K}_E) \cap \mathbb{T} = \emptyset.$$

Значит, спектр $\sigma(\mathcal{K}_E)$ отношения $\mathcal{K}_E$ представим в виде

$$\sigma(\mathcal{K}_E) = \sigma_{\text{int}} \cup \sigma_{\text{out}}, \quad (3.4)$$

где $\sigma_{\text{int}} = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{K}_E) : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_{\text{out}} = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{K}_E) : |\lambda| > 1\}$. Таким образом, для отношения $\mathcal{K}_E$ выполнено условие теоремы 2.1, следовательно, проектор Рисса

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} R(\lambda, \mathcal{K}_E) d\lambda, \quad (3.5)$$

построенный по спектральному множеству σ_{int} , осуществляет разложения пространства l^p и отношения $\mathcal{K}_E$:

$$l^p = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1, \quad \mathcal{K}_E = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1,$$

где $\mathcal{X}_0 = \text{Im } \mathcal{P}_{\text{int}}$, $\mathcal{X}_1 = \text{Im}(I - \mathcal{P}_{\text{int}})$, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{K}_E|_{\mathcal{X}_0}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{K}_E|_{\mathcal{X}_1}$, причем замкнутые подпространства $\mathcal{X}_0$ и $\mathcal{X}_1$ инвариантны относительно отношения $\mathcal{K}_E$.

Согласно [5, теорема 6.1] проектор $\mathcal{P}_{\text{int}}$ представим в виде

$$(\mathcal{P}_{\text{int}}x)(n) = P_{\text{int}}(n)x(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in l^p,$$

где $P_{\text{int}}: \mathbb{Z}_+ \rightarrow LB(X)$ – ограниченная проекторнозначная функция.

Пусть $\mathcal{P}_{\text{out}} = I - \mathcal{P}_{\text{int}}$ – дополнительный к $\mathcal{P}_{\text{int}}$ проектор и, следовательно, $P_{\text{out}}(n) = I - P_{\text{int}}(n)$, $n \geq 0$. Поскольку отношение $\mathcal{A}_1$ непрерывно обратимо, оно сюръективно, т. е. $\text{Im } \mathcal{A}_1 = \text{Im } \mathcal{P}_{\text{out}}$. Так как

$$\mathcal{A}_1 = \{(x, y) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_1 \mid y(0) \in E, \ y(n) = \omega(n)Bx(n-1), \ n \geq 1\},$$

то согласно определению P_{out} имеем

$$\text{Im } P_{\text{out}}(0) = \{(\mathcal{K}_E x)(0) : x \in \mathcal{X}_1\} = (\mathcal{A}_1 x)(0) = E. \quad (3.6)$$

Непосредственно из представления (3.3) отношения $\mathcal{K}_E$, а также инвариантности E относительно B и определения 2.3 следует, что оператор $\tilde{B} \in LB(l^p)$ перестановочен с $\mathcal{K}_E$ и, значит, оператор $\tilde{B}$ перестановочен со всеми операторами $R(\lambda, \mathcal{K}_E)$, $\lambda \in \mathbb{T}$. Поэтому из формулы (3.5) вытекает перестановочность $\mathcal{P}_{\text{int}}$ с $\tilde{B}$. Это означает, что

$$P_{\text{int}}(n)B = BP_{\text{int}}(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.7)$$

Из формулы (3.5) также следует перестановочность проектора $\mathcal{P}_{\text{int}}$ с отношением $\mathcal{K}_E$, что влечет согласно определению 2.3 выполнение равенств

$$BP_{\text{int}}(n-1) = P_{\text{int}}(n)B, \quad n \geq 1. \quad (3.8)$$

Положим $X_{\text{int}}(n) = \text{Im } P_{\text{int}}(n)$ и $X_{\text{out}}(n) = \text{Im } P_{\text{out}}(n)$ для каждого $n \in \mathbb{Z}_+$. Из равенств (3.7) следует, что подпространства $X_{\text{int}}(n)$, $X_{\text{out}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, инвариантны относительно оператора B , т. е. имеют место включения

$$BX_{\text{int}}(n) \subset X_{\text{int}}(n), \quad BX_{\text{out}}(n) \subset X_{\text{out}}(n), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.9)$$

Отсюда и из (3.8) вытекают вложения

$$BX_{\text{int}}(n) \subset X_{\text{int}}(n+1), \quad BX_{\text{out}}(n) \subset X_{\text{out}}(n+1), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.10)$$

Из непрерывной обратимости отношения $\mathcal{A}_1$ следует, что оператор B осуществляет изоморфизм подпространств $\text{Im } P_{\text{out}}(n-1)$ и $\text{Im } P_{\text{out}}(n)$, $n \geq 1$. Следовательно, из (3.6), (3.9) и (3.10) вытекает, что верны равенства

$$\text{Im } P_{\text{out}}(n) = \text{Im } P_{\text{out}}(0) = E, \quad n \geq 1. \quad (3.11)$$

Таким образом, условие (1.14) получено. Кроме того, отметим, что $B_1 = B|_E \in LB(E)$ есть непрерывно обратимый оператор и $\mathcal{X}_1 = l^p(\mathbb{Z}_+, E)$. Докажем выполнимость условия (1.13). Оператор $\mathcal{A}_1^{-1} \in LB(\mathcal{X}_1)$ имеет вид

$$(\mathcal{A}_1^{-1}y)(k) = \begin{cases} \frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k)} B_1^{-1}y(k+1), & k \geq 1, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Степени $\mathcal{A}_1^{-n}y$, $n \geq 1$, представимы в виде

$$(\mathcal{A}_1^{-n}y)(k) = \begin{cases} \frac{\alpha(k+n)}{\alpha(k)} B_1^{-n}y(k+n), & k \geq 1, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Поэтому для спектрального радиуса $r(\mathcal{A}_1^{-1})$ оператора $\mathcal{A}_1^{-1}$ (с учетом определения величины $\varkappa_{\text{int}}(\alpha)$ (см. (1.5)) имеем оценку

$$\begin{aligned} r(\mathcal{A}_1^{-1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq 0} \frac{\alpha(k+n)}{\alpha(k)} \right)^{1/n} r(B_1^{-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq 0} \frac{\alpha(k)}{\alpha(k+n)} \right)^{-1/n} r(B_1^{-1}) = \frac{1}{\varkappa_{\text{int}}(\alpha)} r(B_1^{-1}) < 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varkappa_{\text{int}}(\alpha) r(B_1^{-1})^{-1} > 1. \quad (3.12)$$

Далее, из теоремы 2.1 вытекает, что $\mathcal{A}_0 \in LB(\mathcal{X}_0)$ и для спектрального радиуса $r(\mathcal{A}_0)$ оператора $\mathcal{A}_0$ выполнено неравенство $r(\mathcal{A}_0) < 1$. Поскольку $\mathcal{K}_E x = \mathcal{K}_{\{0\}}x + \mathcal{K}_E 0$, $x \in l^p$, и $\mathcal{A}_1 0 = \mathcal{K}_E 0$, то оператор $\mathcal{A}_0$ совпадает с сужением $\mathcal{K}_{\{0\}}|_{\mathcal{X}_0}$ оператора $\mathcal{K}_{\{0\}}$ на $\mathcal{X}_0$, где $\mathcal{K}_{\{0\}} = \mathcal{K}_E$ для $E = \{0\}$. Таким образом,

$$(\mathcal{A}_0 \mathcal{P}_{\text{int}} x)(k) = \begin{cases} \omega(k) B \mathcal{P}_{\text{int}}(k-1)x(k-1), & k \geq 1, \\ 0, & k = 0. \end{cases}$$

Отсюда, учитывая равенство (3.8), имеем

$$(\mathcal{A}_0^n \mathcal{P}_{\text{int}} x)(k) = \begin{cases} \frac{\alpha(k-n)}{\alpha(k)} B^n \mathcal{P}_{\text{int}}(k-n)x(k-n), & k \geq n, \\ 0, & 0 \leq k \leq n-1, \end{cases} \quad n \geq 2,$$

и, следовательно,

$$\|\mathcal{A}_0^n\|^{1/n} = \left(\left(\sup_{k \geq n} \frac{\alpha(k-n)}{\alpha(k)} \right) \|B^n \mathcal{P}_{\text{int}}(k-n)\| \right)^{1/n}, \quad n \geq 1.$$

Из соотношений (3.7) и (3.8) следует, что $B \mathcal{P}_{\text{int}}(n) = B \mathcal{P}_{\text{int}}(0)$ для всех $n \geq 0$. Поэтому, используя формулу Бёрлинга–Гельфанда для спектрального радиуса ограниченного оператора [4], получаем

$$r(\mathcal{A}_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{A}_0^n\|^{1/n} = \varkappa_{\text{out}}(\alpha) r(B_0) < 1, \quad (3.13)$$

где $B_0 = B|_{\text{Im } \mathcal{P}_{\text{int}}(0)}$. Таким образом, из приведенных рассуждений следует разложение

$$X = \text{Im } \mathcal{P}_{\text{int}}(0) \oplus E,$$

где подпространства $\text{Im } \mathcal{P}_{\text{int}}(0)$ и E являются инвариантными относительно оператора B , и для сужений B_0 , B_1 оператора B на эти подпространства верны

оценки (3.12) и (3.13). Следовательно, имеет место представление спектра $\sigma(B)$ в виде (1.6), где $\sigma_{\text{int}} = \sigma(B_0)$, а $\sigma_{\text{out}} = \sigma(B_1)$, причем ввиду оценок

$$r(B_0) < \frac{1}{\varkappa_{\text{out}}(\alpha)} \leq \frac{1}{\varkappa_{\text{int}}(\alpha)}, \quad r(B_1^{-1}) > \frac{1}{\varkappa_{\text{int}}(\alpha)}$$

справедливы равенства (1.7), (1.8), а значит, условие (1.13). Необходимость условия доказана.

Достаточность. Пусть выполнены условия (1.13) и (1.14). Покажем, что оператор $C: l_\alpha^p \rightarrow l_\alpha^p$, определенный формулой

$$(Cy)(n) = \sum_{m=0}^{\infty} G(n-m-1)y(m), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad y \in l_\alpha^p,$$

где G – операторнозначная функция из (1.9), задан на всем пространстве l_α^p и ограничен, т. е. $C \in LB(l_\alpha^p)$.

Любую последовательность $x: \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$ вида

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} G(n-m-1)y(m), \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad y \in l_\alpha^p,$$

представим в виде

$$x(n) = \alpha(n) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha(m)}{\alpha(n)} G(n-m-1) \frac{y(m)}{\alpha(m)} = \alpha(n) \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{G}(n, m) \tilde{y}(m), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где последовательность $\tilde{y}(m) = \frac{y(m)}{\alpha(m)}$, $m \geq 0$, принадлежит (невесовому) пространству $l^p(\mathbb{Z}_+, X)$ и функция $\tilde{G}: \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow LB(X)$ имеет вид

$$\tilde{G}(n, m) = \frac{\alpha(m)}{\alpha(n)} G(n-m-1), \quad m, n \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.14)$$

Перейдем к оценкам нормы операторов $\tilde{G}(n, m)$, где $n, m \in \mathbb{Z}_+$. Пусть сначала $m+1 \leq n$. Тогда операторы $\tilde{G}(n, m)$, $m+1 \leq n$, представимы в виде

$$\tilde{G}(n, m) = \frac{\alpha(m)}{\alpha(n)} B^{n-m-1} P_{\text{int}} = \frac{\alpha(m)}{\alpha(m+n-m)} B^{n-m-1} P_{\text{int}}.$$

Из равенства (1.7), определяющего множество σ_{int} , и определений чисел $\varkappa_{\text{out}}(\alpha)$ и r_{int} (см. (1.4), (1.10)), а также формулы Бёрлинга–Гельфанда для спектрального радиуса ограниченного оператора [4] следует, что для любого $\varepsilon > 0$ такого, что $r_{\text{int}} + \varepsilon < 1$, существуют постоянные $M_i(\varepsilon) > 0$, $i = 1, 2$, такие, что

$$\frac{\alpha(m)}{\alpha(n)} \leq M_1(\varepsilon)(\varkappa_{\text{int}}(\alpha) + \varepsilon)^{n-m-1}, \quad \|B^{n-m-1} P_{\text{int}}\| \leq M_2(\varepsilon)(r_{\text{int}} + \varepsilon)^{n-m-1}.$$

Следовательно,

$$\|\tilde{G}(n, m)\| \leq M_1(\varepsilon)M_2(\varepsilon)(q_1(\varepsilon))^{n-m-1}, \quad m+1 \leq n, \quad (3.15)$$

где $q_1(\varepsilon) = (\varkappa_{\text{int}}(\alpha) + \varepsilon)(r_{\text{int}} + \varepsilon) < 1$.

Пусть теперь $n < m + 1$. Будем считать, что $\sigma_{\text{out}} \neq \emptyset$, так как в противном случае $G(k) = 0$ для $k < 0$. Для любого $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего условиям $r_{\text{out}} - \varepsilon > 0$, $r_{\text{int}} - \varepsilon > 0$, где r_{out} – величина из (1.11) и (1.12), существуют постоянные $C_1(\varepsilon) > 0$, $C_2(\varepsilon) > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} \frac{\alpha(n)}{\alpha(m)} &\geq C_1(\varepsilon)(\varkappa_{\text{int}}(\alpha) - \varepsilon)^{m+1-n}, & m+1 > n, \\ \|B^{n-m-1}P_{\text{out}}\| &\leq C_2(\varepsilon)(r_{\text{int}} - \varepsilon)^{n-m-1}, & m+1 > n. \end{aligned}$$

Из этих оценок получаем

$$\begin{aligned} \|\tilde{G}(n, m)\| &\leq \|B^{n-m-1}P_{\text{out}}\| \frac{\alpha(m)}{\alpha(n)} \\ &\leq C_2(\varepsilon)(r_{\text{out}} - \varepsilon)^{n-m-1} C_1^{-1}(\varepsilon)(\varkappa_{\text{int}}(\alpha) - \varepsilon)^{n-m-1} = C(\varepsilon)(q_2(\varepsilon))^{m+1-n}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где $C(\varepsilon) = C_2(\varepsilon)C_1^{-1}(\varepsilon)$, $q_2(\varepsilon) = ((r_{\text{out}} - \varepsilon)(\varkappa_{\text{int}}(\alpha) - \varepsilon))^{-1}$. Из условия (1.13) и формулы (1.8) для σ_{out} вытекает, что $r_{\text{out}}\varkappa_{\text{int}}(\alpha) > 1$. Поэтому существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $q_2(\varepsilon_0) < 1$.

Из полученных оценок (3.15) и (3.16) следует, что оператор C ограничен в l_α^p , т. е. $C \in LB(l_\alpha^p)$.

Докажем, что $\text{Ker } \mathcal{D}_E = \{0\}$. Пусть $x \in \text{Ker } \mathcal{D}_E$. Тогда $x(n+1) = Bx(n)$, $n \geq 0$, и $x(0) \in E$. Поскольку $x(0) = P_{\text{out}}x(0) \in E$, имеют место равенства

$$x(n+1) = BP_{\text{out}}x(n) = P_{\text{out}}Bx(n), \quad n \geq 0.$$

Следовательно,

$$x(0) = P_{\text{out}}x(0) = B^{-n-1}P_{\text{out}}x(n+1), \quad n \geq 0,$$

и, значит,

$$\|x(0)\| = \left\| B^{-n-1}P_{\text{out}} \frac{x(n+1)}{\alpha(n+1)} \right\| \alpha(n+1), \quad n \geq 0. \quad (3.17)$$

Из определения величины $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) > 0$ (см. (1.5)) следует, что для любого $\varepsilon > 0$, удовлетворяющего условию $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) - \varepsilon > 0$, существует постоянная $K_1(\varepsilon)$ такая, что

$$\frac{\alpha(0)}{\alpha(n)} \geq K_1(\varepsilon)(\varkappa_{\text{int}}(\alpha) - \varepsilon)^n, \quad n \geq 0.$$

Таким образом, $\alpha(n) \leq K_1^{-1}(\varepsilon)(\varkappa_{\text{int}}(\alpha) - \varepsilon)^{-n}$. Кроме того, существует постоянная $K_2(\varepsilon)$, для которой $\|B^{-n-1}P_{\text{out}}\| \leq K_2(\varepsilon)(r_{\text{out}} - \varepsilon)^{-n-1}$. В итоге из равенства (3.17) следует, что

$$\begin{aligned} \|x(0)\| &\leq K_2(\varepsilon)(r_{\text{out}} - \varepsilon)^{-n-1} K_1^{-1}(\varepsilon)(\varkappa_{\text{int}}(\alpha) - \varepsilon)^{-n-1} \\ &= K(\varepsilon)(q_3(\varepsilon))^{-n-1} \frac{\|x(n+1)\|}{\alpha(n+1)}, \quad n \geq 0, \end{aligned}$$

где $q_3(\varepsilon) = (r_{\text{out}} - \varepsilon)(\varkappa_{\text{int}}(\alpha) - \varepsilon) > 1$ в силу условия (1.13) для достаточно малого ε . Далее, поскольку

$$\sup_{n \geq 0} \frac{\|x(n+1)\|}{\alpha(n+1)} < \infty,$$

из последних оценок следует, что $x(0) = 0$, т. е. $x = 0$. Итак, $\text{Ker } \mathcal{D}_E = \{0\}$.

Для доказательства сюръективности оператора $\mathcal{D}_E$ достаточно установить, что оператор C является правым обратным для $\mathcal{D}_E$. Сначала отметим, что

$$(Cx)(0) = \sum_{m=0}^{\infty} G(-m-1)x(m) = - \sum_{m=0}^{\infty} (B^{-1}P_{\text{out}})^{m+1}x(m) = P_{\text{out}}(Cx)(0) \in E.$$

Таким образом, $Cx \in D(\mathcal{D}_E)$ для любого $x \in l_{\alpha}^p$, и имеют место равенства

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_E Cx)(n) &= \sum_{m=0}^{\infty} G(n-m)x(m) - B \sum_{m=0}^{\infty} G(n-m-1)x(m) \\ &= \sum_{m=0}^n B^{n-m} P_{\text{out}} x(m) - \sum_{m=n+1}^{\infty} B^{n-m} P_{\text{out}} x(m) \\ &\quad - B \sum_{m=0}^{n-1} B^{n-m-1} P_{\text{int}} x(m) + B \sum_{m=n}^{\infty} B^{n-m+1} P_{\text{out}} x(m) \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} B^{n-m} P_{\text{int}} x(m) + P_{\text{int}} x(n) - \sum_{m=n+1}^{\infty} B^{n-m} P_{\text{out}} x(m) \\ &\quad - \sum_{m=0}^{n-1} B^{n-m} P_{\text{int}} x(m) + P_{\text{out}} x(n) + \sum_{m=n+1}^{\infty} B^{n-m} P_{\text{out}} x(m) \\ &= P_{\text{int}} x(n) + P_{\text{out}} x(n) = x(n), \quad n \geq 0, \quad x \in l_{\alpha}^p. \end{aligned}$$

Достаточность условия доказана. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Если $E \neq \{0\}$ и оператор $\mathcal{D}_E$ непрерывно обратим, то непрерывно обратимо отношение $I - \mathcal{K}_E$. Используя обозначения из доказательства необходимости теоремы 1.1, получим, что $\text{Im } P_{\text{out}}(0) = E$ и, следовательно, $P_{\text{out}} \neq 0$. Тогда ввиду неограниченности последовательности $\frac{\alpha(k+1)}{\alpha(k)}$, $k \geq 0$ (см. лемму 3.3), будет неограниченным оператор $\mathcal{A}_1^{-1}$ из доказательства необходимости теоремы 1.1. Получено противоречие. Таким образом, оператор $\mathcal{D}_E$ не является непрерывно обратимым, если $E \neq \{0\}$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Утверждение теоремы следует из [6, теорема 1], где разностные операторы изучались в весовых пространствах в предположении, что $E = \{0\}$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Поскольку $E = X$ и $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) > 0$, из теоремы 1.1 вытекает, что $\text{Im } P_{\text{out}} = X$. Следовательно, $P_{\text{int}} = 0$. Поэтому $\sigma_{\text{int}} = \emptyset$, что эквивалентно непрерывной обратимости оператора B , причем $r(B^{-1}) < 1$. Теорема доказана.

В заключение этого параграфа отметим, что необходимые и достаточные условия разрешимости разностных включений (условия непрерывной обратимости линейных отношений) в пространстве $l^p(\mathbb{Z}, X)$ двусторонних последовательностей получены в работе [7]. В статье [8] были анонсированы результаты о спектре оператора взвешенного сдвига в весовых пространствах двусторонних последовательностей.

§ 4. Приложения к дифференциальным операторам в весовых функциональных пространствах

В этом параграфе приведены приложения теоремы 1.1 к исследованию условий обратимости дифференциальных операторов, действующих в весовых функциональных пространствах. Дифференциальные операторы будут определяться с помощью семейства эволюционных операторов.

Под семейством эволюционных операторов на банаховом пространстве X понимается сильно непрерывная операторнозначная функция $\mathcal{U}: \Delta_+ = \{(t, s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : s \leq t\} \rightarrow LB(X)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, со свойствами:

- 1) $\mathcal{U}(t, t) = I$, $t \in \mathbb{R}_+$;
- 2) $\mathcal{U}(t, s)\mathcal{U}(s, \tau) = \mathcal{U}(t, \tau)$ для всех $\tau \leq s \leq t$ из $\mathbb{R}_+$;
- 3) существуют постоянные $M \geq 1$, $\gamma \in \mathbb{R}_+$ такие, что выполнено неравенство $\|\mathcal{U}(t, s)\| \leq M \exp(\gamma(t - s))$ для всех $(t, s) \in \Delta_+$.

Отметим, что условие 3) эквивалентно соотношению

$$\sup_{(t,s) \in \Delta_+, 0 \leq t-s \leq 1} \|\mathcal{U}(t, s)\| < \infty.$$

Функцию $\tilde{\alpha}: \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \infty)$ назовем *допустимым весом*, если скалярное семейство

$$\mathcal{U}_{\tilde{\alpha}}: \Delta_+ \rightarrow LB(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}, \quad \mathcal{U}_{\tilde{\alpha}}(t, s) = \frac{\tilde{\alpha}(s)}{\tilde{\alpha}(t)}, \quad (t, s) \in \Delta_+,$$

является семейством эволюционных операторов. Ясно, что функция $\tilde{\alpha}$ непрерывна.

Для допустимого веса $\tilde{\alpha}: \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \infty)$ через $L_{\tilde{\alpha}}^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty]$, обозначим банахово пространство измеримых (по Бохнеру) функций $x: \mathbb{R}_+ \rightarrow X$, для которых конечна величина

$$\|x\| = \begin{cases} \|x\|_{\tilde{\alpha}, p} = \left(\int_0^\infty \left(\frac{\|x(t)\|}{\tilde{\alpha}(t)} \right)^p dt \right)^{1/p}, & p \in [1, \infty), \\ \|x\|_{\tilde{\alpha}, \infty} = \operatorname{vrai\,sup}_{t \geq 0} \frac{\|x(t)\|}{\tilde{\alpha}(t)}, & p = \infty. \end{cases}$$

Через $C_{b, \tilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим подпространство непрерывных функций из банахова пространства $L_{\tilde{\alpha}}^\infty(\mathbb{R}_+, X)$.

Далее через $\mathcal{F}_{\tilde{\alpha}} = \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим одно из перечисленных функциональных пространств. Если $\tilde{\alpha} = 1$, то соответствующие “невесовые” пространства обозначим через $L^p(\mathbb{R}_+, X)$, $C_b(\mathbb{R}_+, X)$, и вместо $\mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X)$ будем использовать обозначение $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$.

Пусть $\mathcal{U}: \Delta_+ \rightarrow LB(X)$ – семейство эволюционных операторов и E – замкнутое линейное подпространство в X . Определим оператор $\mathcal{L}_E: D(\mathcal{L}_E) \subset \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}} \rightarrow \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}} = \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X)$ следующим образом. Пара функций $(x, f) \in \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}} \times \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}$, где x – непрерывная функция, принадлежит графику оператора $\mathcal{L}_E$, если $x(0) \in E$ и

$$x(t) = \mathcal{U}(t, s)x(s) - \int_s^t \mathcal{U}(t, \tau)f(\tau) d\tau, \quad 0 \leq s \leq t < \infty. \quad (4.1)$$

Таким образом, $x \in D(\mathcal{L}_E)$ и $\mathcal{L}_E x = f$. Это определение корректно, т. е. функция f единственная для данной функции $x \in \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}$. Для невесовых пространств такое определение имеется в работах [5], [9]. Результаты статьи [5] существенно используются для исследования рассматриваемого оператора $\mathcal{L}_E$ в весовых пространствах.

Пусть $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow LB(X)$ – сильно непрерывная полугруппа операторов класса C_0 и A – ее инфинитезимальный генератор (см. [4]). Тогда семейство $\mathcal{U}(t, s) = T(t - s)$, $(t, s) \in \Delta_+$, является семейством эволюционных операторов. Определяемый этим семейством оператор $\mathcal{L}_E: D(\mathcal{L}_E) \subset \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X)$ обозначим $\mathcal{L}_E = -\frac{d}{dt} + A$. Далее через α обозначим сужение веса $\tilde{\alpha}: \mathbb{R}_+ \rightarrow (0, \infty)$ на $\mathbb{Z}_+$, через $\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}_+, X)$ обозначим пространство $l_{\alpha}^p(\mathbb{Z}_+, X)$, если $\mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X) = L_{\alpha}^p(\mathbb{R}_+, X)$, $p \in [1, \infty)$, и пространство $\mathcal{F}_{\alpha}(\mathbb{Z}_+, X) = l_{\alpha}^{\infty}(\mathbb{Z}_+, X)$, если $\mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X) = L_{\alpha}^{\infty}(\mathbb{R}_+, X)$ или $\mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X) = C_{b, \tilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X)$.

В следующей теореме используются условие (1.13) для оператора $B = T(1)$ и условие (1.14) для проектора P_{out} , построенного по спектральному множеству σ_{out} (см. (1.8)).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) > 0$. Тогда оператор $\mathcal{L}_E$ непрерывно обратим, если и только если выполнены условия

$$([\varkappa_{\text{int}}(\alpha), \varkappa_{\text{out}}(\alpha)]\sigma(T(1))) \cap \mathbb{T} = \emptyset, \quad (4.2)$$

$$\text{Im } P_{\text{out}} = E, \quad (4.3)$$

где P_{out} – проектор, построенный по спектральному множеству $\sigma_{\text{out}} = \{\lambda \in \sigma(B): |\lambda| \varkappa_{\text{int}}(\alpha) > 1\}$. При выполнении этих условий обратный оператор $\mathcal{L}_E^{-1}$ к $\mathcal{L}_E$ определяется формулой

$$(\mathcal{L}_E^{-1}f)(t) = \int_0^{\infty} G(t-s)f(s) ds, \quad f \in \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X),$$

где функция $G: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow LB(X)$ задана равенствами

$$G(t-s) = \begin{cases} -T(t-s)P_{\text{int}}, & 0 \leq s \leq t, \\ T(t-s)P_{\text{out}}, & s > t, \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}_+.$$

Операторы $T(\tau)P_{\text{out}}$, $\tau < 0$, однозначно определяются из равенств

$$T(-\tau)(T(\tau)P_{\text{out}}) = (T(\tau)P_{\text{out}})T(-\tau) = P_{\text{out}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оператор $U_{\tilde{\alpha}}: \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X)$, определяемый формулой

$$(U_{\tilde{\alpha}}x)(t) = \tilde{\alpha}(t)x(t), \quad t \geq 0, \quad x \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X),$$

является изометрическим изоморфизмом пространств $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$ и $\mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X)$. Тогда оператор $\mathcal{L}_E = -\frac{d}{dt} + A$ подобен оператору $\mathcal{L}_{E, \tilde{\alpha}}: D(\mathcal{L}_{E, \tilde{\alpha}}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+, X)$, определяемому семейством эволюционных операторов $\tilde{U}(t, s) = \frac{\tilde{\alpha}(s)}{\tilde{\alpha}(t)}T(t-s)$, $0 \leq s \leq t < \infty$. Это непосредственно вытекает из равенств (4.1). Следовательно, обратимость оператора $\mathcal{L}_E$ эквивалентна обратимости оператора $\mathcal{L}_{E, \tilde{\alpha}}$. Теперь согласно [5, теорема 5.1] обратимость оператора $\mathcal{L}_{E, \tilde{\alpha}}$, а значит, и $\mathcal{L}_E$ эквивалентна обратимости разностного отношения $I - \mathcal{K}_E$ из $LR(\mathcal{F}(\mathbb{Z}_+, X))$, где $\mathcal{K}_E$ – отношение из (3.3). Осталось воспользоваться теоремой 1.1, из которой следует, что обратимость отношения $I - \mathcal{K}_E$ эквивалентна выполнению условий (1.13), (1.14). Таким образом, условия (1.13), (1.14) теоремы 1.1 необходимы и достаточны для обратимости оператора $\mathcal{L}_E = -\frac{d}{dt} + A: D(\mathcal{L}_E) \subset \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow \mathcal{F}_{\tilde{\alpha}}(\mathbb{R}_+, X)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) = 0$ и E – ненулевое инвариантное подпространство относительно оператора B . Тогда оператор $\mathcal{L}_E$ не является непрерывно обратимым.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) = 0$ и $E = \{0\}$. Для того чтобы оператор $\mathcal{L}_{\{0\}}$ был непрерывно обратим, необходимо и достаточно, чтобы $\varkappa_{\text{out}}(\alpha)r(T(1)) < 1$.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $\varkappa_{\text{out}}(\alpha) = 0$ и $E = \{0\}$. Тогда оператор $\mathcal{L}_E$ непрерывно обратим.

ТЕОРЕМА 4.4. Пусть $\varkappa_{\text{int}}(\alpha) > 0$ и $E = X$. Для того чтобы оператор $\mathcal{L}_X$ был непрерывно обратим, необходимо и достаточно, чтобы $T(1)$ был непрерывно обратим и $r(T^{-1}(1)) < \varkappa_{\text{int}}(\alpha)$. В частности, если α – сильно сбалансированный вес, то $\sigma(T(1))$ лежит вне единичной окружности.

Доказательства теорем 4.2–4.4 следуют соответственно из теорем 1.2–1.4 и [5, теорема 5.1].

Список литературы

1. А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, “Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов”, *Матем. сб.*, **193**:11 (2002), 3–42; англ. пер.: A. G. Baskakov, K. I. Chernyshov, “Spectral analysis of linear relations and degenerate operator semigroups”, *Sb. Math.*, **193**:11 (2002), 1573–1610.
2. R. Cross, *Multivalued linear operators*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **213**, Dekker, New York, 1998.
3. A. Favini, A. Yagi, *Degenerate differential equations in Banach spaces*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **215**, Dekker, New York, 1999.
4. Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962; пер. с англ.: E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1957.

5. А. Г. Баскаков, “Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 3–68; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations”, *Izv. Math.*, **73**:2 (2009), 215–278.
6. М. С. Бичегкуев, “Линейные разностные и дифференциальные операторы с неограниченными операторными коэффициентами в весовых пространствах”, *Матем. заметки*, **86**:5 (2009), 673–680; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, “Linear difference and differential operators with unbounded operator coefficients in weight spaces”, *Math. Notes*, **86**:5–6 (2009), 637–644.
7. М. С. Бичегкуев, “Условия разрешимости разностных включений”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:4 (2008), 25–36; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, “Conditions for solubility of difference inclusions”, *Izv. Math.*, **72**:4 (2008), 647–658.
8. М. С. Бичегкуев, “О спектре разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:1 (2010), 80–83; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, “On the spectrum of difference and differential operators in weighted spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **44**:1 (2010), 65–68.
9. В. В. Жиков, “Некоторые вопросы допустимости и дихотомии. Принцип усреднения”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:6 (1976), 1380–1408; англ. пер.: V. V. Žikov, “Some admissibility and dichotomy questions. The averaging principle”, *Math. USSR-Izv.*, **10**:6 (1976), 1307–1332.

М. С. Бичегкуев (M. S. BICHEGKUEV)
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова, г. Владикавказ
E-mail: bichegkuev@yandex.ru

Поступило в редакцию
11.02.2010
18.11.2010