Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Хэкало, Изогюйгенсовы деформации оператора Кэли общим потенциалом
Лагнеше–Штельмахера, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 4, 189–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/im446>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 11:05:10

УДК 517.944

С.П. Хэкало

Изогюйгенсовы деформации оператора Кэли общим потенциалом Лагнеше–Штельмахера

Построены и изучены изогюйгенсовы деформации гиперболических дифференциальных операторов высокого порядка на пространстве вещественных симметрических матриц. Посредством так называемых косых симметрий введены сплетающие операторы, позволяющие получить явный вид фундаментальных решений этих деформаций и достаточные условия выполнимости для них усиленного принципа Гюйгенса.

Библиография: 14 наименований.

1. Введение. По аналогии с известной задачей расширения класса гюйгенсовых операторов волнового типа [1]–[3] возникает задача расширения класса гиперболических дифференциальных операторов, удовлетворяющих усиленному принципу Гюйгенса [2], [4], [5].

Основные примеры гюйгенсовых дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами рассмотрены в [6], [7]. В [5] развивается теория лакун для гиперболических дифференциальных операторов высокого порядка с переменными коэффициентами. В работе [8] приводятся изогюйгенсовы деформации дифференциальных операторов Гиндикина [7], связанных с несамосопряженным линейно-однородным конусом ранга три вещественных обобщенных симметрических матриц. Частные случаи таких деформаций встречаются в работе [5].

Типичным представителем самосопряженных линейно-однородных конусов является конус положительно определенных симметрических матриц. С этим конусом связан гиперболический дифференциальный оператор Кэли с постоянными коэффициентами и кратной характеристикой. В работе [9] Л.Гординг выяснил, что для такого оператора имеет место принцип Гюйгенса в усиленной форме: *часть пространственноподобной поверхности, на которой существенно задание начальных данных, имеет коразмерность, большую единицы.*

Настоящая работа посвящена построению изогюйгенсовых деформаций оператора Кэли. Оператор дополняется членами более низкого порядка с рациональными коэффициентами, зависящими от трех выделенных переменных и параметров. Работа является подробным изложением краткого сообщения [10].

Построение фундаментального решения деформированного оператора основано на применении понятия симметрии операторов, рассмотренного в [11]. Косые симметрии операторов позволяют установить калибровочную эквивалентность [12],

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00721).

[2] возникающего оператора с исходным, благодаря чему можно решить поставленную задачу деформации. Сформулируем задачу более подробно и кратко опишем содержание статьи.

Пусть $SM(n)$ – пространство вещественных симметрических матриц $x = (x_{ij})$ порядка n и $\partial_{ii} = \partial/\partial x_{ii}$, $\partial_{ij} = \frac{1}{2}\partial/\partial x_{ij}$ для $i \neq j$. Оператором Кэли на $SM(n)$ называется гиперболический дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}_0 = \det(\partial_{ij}). \quad (1)$$

Итерированный оператор $\mathcal{L}_0^r$, $r = 1, 2, \dots$, при некоторых ограничениях на параметры n и r имеет фундаментальное решение, сосредоточенное на подмногообразии неотрицательно определенных симметрических матриц ранга, меньшего n . Следовательно, для $\mathcal{L}_0^r$ выполняется принцип Гюйгенса в усиленной форме [9].

Введем так называемые многочлены Бурчалла–Чаунди $P_k(y) \equiv P_k(y + \gamma_1; \gamma_2, \dots, \gamma_k)$ по переменной $y \in \mathbb{R}$ [1], [2]. Они определяются как решения рекуррентной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$P'_{k+1}P_{k-1} - P_{k+1}P'_{k-1} = (2k+1)P_k^2, \quad k = 1, 2, \dots, \quad P_0 := 1, \quad P_1 := y.$$

Здесь штрих означает дифференцирование по переменной y , а $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \mathbb{R}^k$ – векторный параметр интегрирования.

Далее рассмотрим потенциалы Лагнеше–Штельмахера, задаваемые формулой

$$u_k(y) \equiv u_k(y, \gamma) = 2\partial_y^2 \ln |P_k(y)|. \quad (2)$$

Если $\gamma = 0$, то $u_k(y, \gamma)$ являются потенциалами Штельмахера [2] и имеют вид

$$u_k(y, 0) = -\frac{k(k+1)}{y^2}. \quad (2')$$

Выделим в $SM(n)$ две диагональные переменные x_{ii} , x_{jj} и соответствующую им недиагональную переменную x_{ij} . Без ограничения общности можно считать, что $i = 1$, $j = 2$. Пусть

$$\mathcal{L}_* = \det(\partial_{ij})_*,$$

где матрица $(\partial_{ij})_*$ получена из матрицы (∂_{ij}) вычеркиванием первых двух строк и столбцов.

Для неотрицательных целых чисел m_1, m_2, m_3 определим на $SM(n)$ дифференциальный оператор Кэли–Гординга

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_0 + u_m(x) \circ \mathcal{L}_*, \quad (3)$$

где

$$u_m(x) \equiv u_{m_1, m_2, m_3}(y, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = 2\partial_{11}^2 \ln \left| \frac{P_{m_1}(x_{11} + x_{22})}{P_{m_2}(x_{11} - x_{22})} \right| - 2\partial_{12}^2 \ln |P_{m_3}(2x_{12})|,$$

а знак $\circ$ означает композицию операторов. При $n = 2$ он эквивалентен оператору волнового типа в $\mathbb{R}^{1+2}$ с потенциалом Лагнеше–Штельмахера [1]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \ln |P_{m_1}(t)| - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \ln |P_{m_2}(x_1)| - 2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \ln |P_{m_3}(x_2)|.$$

Это показывает, что операторы $\mathcal{L}_m$ и $\mathcal{L}_0$ не эквивалентны относительно элементарных преобразований для любого n .

Для итерированных операторов $\mathcal{L}_m^\lambda$ (λ – натуральное) требуется указать фундаментальные решения и найти достаточные условия выполнения усиленного принципа Гюйгенса.

Для решения этой задачи в п. 2 вводится класс сплетающих операторов, используемый при построении фундаментальных решений итерированных операторов.

В п. 3 приводятся важные примеры косых симметрий. Например, косые симметрии, связанные с выделением дифференциального квадратичного трехчлена по заданной переменной, обеспечивают выполнение усиленного принципа Гюйгенса для операторов вида

$$\mathcal{L}_m^\lambda = (\mathcal{L}_0^2 + 2\partial_{11}^2 \ln |P_m(x_{11})| \circ \det^2((\partial_{ij})_{i,j=2,\dots,n}))^\lambda, \quad (3')$$

являющихся деформациями четных степеней оператора Кэли. Эти операторы также назовем *операторами Кэли–Гординга*.

Далее, в п. 4, приводятся сведения об операторе Кэли и необходимые дополнения по его ядру Рисса [12], [13].

Основные результаты работы сформулированы в п. 5.

2. Косые симметрии. Следуя работе [11], обобщим понятие симметрии оператора при помощи так называемой косой симметрии операторов.

Пусть

$$\mathcal{H} = \text{span}_{\mathbb{R}} \langle t, \partial_t, 1 \rangle$$

– трехмерная алгебра Гейзенберга–Ли со свойствами

$$[\partial_t, 1] = 0, \quad [\partial_t, t] = 1, \quad [t, 1] = 0;$$

$\mathcal{A}$ – произвольная ассоциативная алгебра Ли; $\mathcal{K}$ – ее центр. Пусть $\mathcal{H} \oplus \mathcal{A}$ – прямая сумма алгебр Ли и $\mathcal{A}^* = \mathcal{U}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{A})$ – универсальная обертывающая алгебра для $\mathcal{H} \oplus \mathcal{A}$. Обозначим через $\mathcal{H}_t$ и $\mathcal{H}_{\partial_t}$ коммутативные подалгебры в $\mathcal{H}$, порожденные элементами t и ∂_t соответственно, и положим

$$\mathcal{A}_t^* = \mathcal{U}(\mathcal{H}_t \oplus \mathcal{A}) \simeq \mathcal{U}(\mathcal{H}_t) \otimes \mathcal{A},$$

$$\mathcal{A}_{\partial_t}^* = \mathcal{U}(\mathcal{H}_{\partial_t} \oplus \mathcal{A}) \simeq \mathcal{U}(\mathcal{H}_{\partial_t}) \otimes \mathcal{A}.$$

Ясно, что $\mathcal{A}_t^*$ и $\mathcal{A}_{\partial_t}^*$ – ассоциативные алгебры многочленов и обыкновенных дифференциальных операторов по переменной t с коэффициентами из алгебры $\mathcal{A}$ соответственно.

Для любых трех операторов F , H и $G \in \mathcal{A}^*$ определим, как и в [12], косое присоединенное действие правилом

$$\text{ad}_{F,H}^k G = \text{ad}_{F,H}^{k-1}(F \circ G - G \circ H), \quad k = 1, 2, \dots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Элемент $G_t^* \in \mathcal{A}_t^*$ назовем *косой t -симметрией* операторов $L_1, L_2 \in \mathcal{A}$, деформированной элементом $K \in \mathcal{K}$, если

$$\text{ad}_{\partial_t \circ K - L_1, \partial_t \circ K - L_2} G_t^* = 0. \quad (4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для заданного натурального числа k элемент $G_t^* = \sum_{s=0}^k G_s \circ t^s$ является *косой t -симметрией* операторов L_1, L_2 , деформированной элементом K , если и только если

$$\begin{aligned} \text{ad}_{L_1, L_2}^{k+1} G_0 &= 0, \\ s! K^s \circ G_s &= \text{ad}_{L_1, L_2}^s G_0, \quad s = 0, 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (4) получим

$$\begin{aligned} [\partial_t \circ K, G_t^*] &= \text{ad}_{L_1, L_2} G_t^*, \\ K \circ \sum_{s=0}^k G_s \circ [\partial_t, t^s] &= \sum_{s=0}^k (\text{ad}_{L_1, L_2} G_s) \circ t^s, \\ K \circ \sum_{s=1}^k s G_s \circ t^{s-1} &= \sum_{s=0}^k (\text{ad}_{L_1, L_2} G_s) \circ t^s, \\ K \circ \sum_{s=0}^{k-1} (s+1) G_{s+1} \circ t^s &= \sum_{s=0}^k (\text{ad}_{L_1, L_2} G_s) \circ t^s, \\ \text{ad}_{L_1, L_2} G_k &= 0, \\ (s+1) K \circ G_{s+1} &= \text{ad}_{L_1, L_2} G_s, \quad s = 0, 1, \dots, k-1, \end{aligned}$$

откуда и следует (5). Обратно, из равенств (5) получаем (4). Тем самым доказательство завершено.

Число k , фигурирующее в предложении 1, будем называть *порядком* косой симметрии G_t^* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Элемент $G_{\partial_t}^* \in \mathcal{A}_{\partial_t}^*$ назовем *косой ∂_t -симметрией* операторов $L_1, L_2 \in \mathcal{A}$, если

$$\text{ad}_{t-L_1, t-L_2} G_{\partial_t}^* = 0. \quad (6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для заданного натурального числа k элемент $G_{\partial_t}^* = \sum_{s=0}^k G_s \circ \partial_t^s$ является *косой ∂_t -симметрией* операторов L_1, L_2 , если и только если

$$\begin{aligned} \text{ad}_{L_1, L_2}^{k+1} G_0 &= 0, \\ G_s &= \frac{(-1)^s}{s!} \text{ad}_{L_1, L_2}^s G_0, \quad s = 0, 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (6) имеем

$$\begin{aligned} [t, G_{\partial_t}^*] &= \text{ad}_{L_1, L_2} G_{\partial_t}^*, \\ \sum_{s=0}^k G_s \circ [t, \partial_t^s] &= \sum_{s=0}^k (\text{ad}_{L_1, L_2} G_s) \circ \partial_t^s, \\ -\sum_{s=1}^k s G_s \circ \partial_t^{s-1} &= \sum_{s=0}^k (\text{ad}_{L_1, L_2} G_s) \circ \partial_t^s, \\ \text{ad}_{L_1, L_2} G_k &= 0, \\ -(s+1)G_{s+1} &= \text{ad}_{L_1, L_2} G_s, \quad s = 0, 1, \dots, k-1, \end{aligned}$$

откуда и следует (7). Обратно, из равенств (7) очевидным образом получаем (6), и доказательство завершено.

Согласно [2] введем определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Оператор $L_1 \in \mathcal{A}$ называется *k-калибровочно эквивалентным* оператору $L_2 \in \mathcal{A}$ посредством ненулевого оператора $G_0 \in \mathcal{A}$, если

$$\text{ad}_{L_1, L_2}^{k+1} G_0 = 0$$

для некоторого натурального k .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Калибровочная эквивалентность позволяет строить косые симметрии, и, наоборот, косые симметрии предполагают калибровочную эквивалентность.

3. Примеры косых симметрий.

1°. *Сплетающие операторы.* Пусть $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра дифференциальных операторов на $\mathbb{R}^{1+N} = \{(y, z) | y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^N\}$ с коэффициентами, зависящими от переменной y ; $\partial_y = \partial/\partial y$ – частная производная по переменной y ; A, B и C – дифференциальные операторы по переменной z с постоянными коэффициентами. Ясно, что $A, B, C \in \mathcal{K} \subset \mathcal{A}$.

Рассмотрим дифференциальный квадратичный трехчлен

$$\mathcal{R}_0 = \partial_y^2 \circ A + \partial_y \circ B + C$$

и его деформацию потенциалом Лагнеше–Штельмахера (2)

$$\mathcal{R}_k = \mathcal{R}_0 + 2\partial_y^2 \ln |P_k(y)| \circ A, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$\tilde{u}_k(y) \equiv \tilde{u}_k(y, \gamma) = -\partial_y^2 \ln \left| \frac{P_{k+1}(y)}{P_k(y)} \right| - \left(\partial_y \ln \left| \frac{P_{k+1}(y)}{P_k(y)} \right| \right)^2.$$

Для потенциалов Лагнеше–Штельмахера имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 1. На области определения $\tilde{u}_k(y)$ имеет место равенство

$$u_k(y) = \tilde{u}_k(y).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\tilde{u}_0(y) = -\partial_y^2 \ln |y| - (\partial_y \ln |y|)^2 = 0 = u_0(y).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{k+1}(y) - \tilde{u}_k(y) &= \partial_y^2 \ln \left| \frac{P_{k+1}^2}{P_{k+2}P_k} \right| + \left(\partial_y \ln \left| \frac{P_{k+1}}{P_k} \right| \right)^2 - \left(\partial_y \ln \left| \frac{P_{k+2}}{P_{k+1}} \right| \right)^2 \\ &= \partial_y^2 \ln \left| \frac{P_{k+1}^2 P_k}{P_{k+2}P_k^2} \right| + \partial_y \ln \left| \frac{P_{k+2}}{P_k} \right| \cdot \partial_y \ln \left| \frac{P_{k+1}^2}{P_{k+2}P_k} \right| \\ &= 2\partial_y^2 \ln \left| \frac{P_{k+1}}{P_k} \right| - \partial_y^2 \ln \left| \frac{P_{k+2}}{P_k} \right| + \partial_y \ln \left| \frac{P_{k+2}}{P_k} \right| \cdot \partial_y \ln \left| \frac{P_{k+1}^2}{P_{k+2}P_k} \right|. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \partial_y \ln \left| \frac{P_{k+2}}{P_k} \right| &= \frac{P_k}{P_{k+2}} \frac{P'_{k+2}P_k - P_{k+2}P'_k}{P_k^2} = \frac{(2k+3)P_{k+1}^2}{P_{k+2}P_k}, \\ \partial_y \ln \left| \frac{P_{k+1}^2}{P_{k+2}P_k} \right| &= \frac{P_{k+2}P_k}{P_{k+1}^2} \partial_y \left(\frac{P_{k+1}^2}{P_{k+2}P_k} \right), \end{aligned}$$

то

$$\partial_y \ln \left| \frac{P_{k+2}}{P_k} \right| \cdot \partial_y \ln \left| \frac{P_{k+1}^2}{P_{k+2}P_k} \right| = (2k+3) \partial_y \left(\frac{P_{k+1}^2}{P_{k+2}P_k} \right) = \partial_y^2 \ln \left| \frac{P_{k+2}}{P_k} \right|.$$

В итоге получим

$$\tilde{u}_{k+1}(y) - \tilde{u}_k(y) = u_{k+1}(y) - u_k(y), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Исходя из последнего равенства и условия $\tilde{u}_0(y) = u_0(y)$, получаем утверждение леммы.

Рассмотрим оператор

$$\mathcal{D}_k = \left(\partial_y - \partial_y \ln \left| \frac{P_{k+1}(y)}{P_k(y)} \right| \right) \circ A + \frac{1}{2}B, \quad k \in \mathbb{N}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Оператор $\mathcal{D}_k$ является оператором сдвига по отношению к оператору $\mathcal{R}_k$, т. е.

$$\mathcal{D}_k \circ \mathcal{R}_k = \mathcal{R}_{k+1} \circ \mathcal{D}_k. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится непосредственными вычислениями:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{k+1} \circ \mathcal{D}_k &= -\partial_y^3 \ln \left| \frac{P_{k+1}}{P_k} \right| \circ A^2 - 2\partial_y^2 \ln \left| \frac{P_{k+1}}{P_k} \right| \circ \partial_y \circ A^2 - \partial_y^2 \ln \left| \frac{P_{k+1}}{P_k} \right| \circ A \circ B \\
&\quad + \mathcal{D}_k \circ \mathcal{R}_0 + u_{k+1} \circ \partial_y \circ A^2 - u_{k+1} \circ \partial_y \ln \left| \frac{P_{k+1}}{P_k} \right| \circ A^2 + \frac{1}{2} u_{k+1} \circ A \circ B; \\
\mathcal{D}_k \circ \mathcal{R}_k &= \mathcal{D}_k \circ \mathcal{R}_0 + \partial_y u_k(y) \circ A^2 + u_k(y) \circ \partial_y \circ A^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} u_{k+1} \circ A \circ B - u_k(y) \circ \partial_y \ln \left| \frac{P_{k+1}}{P_k} \right| \circ A^2; \\
\mathcal{R}_{k+1} \circ \mathcal{D}_k - \mathcal{D}_k \circ \mathcal{R}_k &= \left(-\partial_y^3 \ln \left| \frac{P_{k+1}}{P_k} \right| \right. \\
&\quad \left. - u_{k+1} \circ \partial_y \ln \left| \frac{P_{k+1}}{P_k} \right| - \partial_y u_k(y) + u_k(y) \circ \partial_y \ln \left| \frac{P_{k+1}}{P_k} \right| \right) \circ A^2 \\
&\quad + \left(-2\partial_y^2 \ln \left| \frac{P_{k+1}}{P_k} \right| + u_{k+1}(y) - u_k(y) \right) \circ \partial_y \circ A^2 \\
&\quad + \left(-\partial_y^2 \ln \left| \frac{P_{k+1}}{P_k} \right| + \frac{1}{2} u_{k+1}(y) - \frac{1}{2} u_k(y) \right) \circ A \circ B \\
&= \left(-\partial_y^3 \ln \left| \frac{P_{k+1}}{P_k} \right| - 2\partial_y^2 \ln \left| \frac{P_{k+1}}{P_k} \right| \cdot \partial_y \ln \left| \frac{P_{k+1}}{P_k} \right| - \partial_y u_k(y) \right) \circ A^2 \\
&= -\partial_y \left(\partial_y^2 \ln \left| \frac{P_{k+1}}{P_k} \right| + \left(\partial_y \ln \left| \frac{P_{k+1}}{P_k} \right| \right)^2 + u_k(y) \right) \circ A^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, по лемме 1 имеем справедливость предложения.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Оператор*

$$\mathcal{D}_{0,\dots,k} = \mathcal{D}_k \circ \mathcal{D}_{k-1} \circ \dots \circ \mathcal{D}_1 \circ \mathcal{D}_0$$

является сплетающим для $\mathcal{R}_{k+1}$ и $\mathcal{R}_0$, т. е. имеет место равенство

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_{k+1}, \mathcal{R}_0} \mathcal{D}_{0,\dots,k} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко следует из формулы (8).

2°. *Псевдодифференциальные операторы.* Пусть $T = \partial_y \circ A + B/2$. Определим формальный оператор T^{-1} такой, что $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = 1$ [14], [2], и рассмотрим кольцо псевдодифференциальных операторов вида

$$\mathcal{F} = \sum_{i=-\infty}^s H_i(y, A, B; \partial_t) \circ T^i,$$

где H_i – дифференциальные операторы по переменной t с коэффициентами, не зависящими от t .

Оператор $\mathcal{F}$ запишем в виде суммы:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_+ + \mathcal{F}_-, \quad \mathcal{F}_+ = \sum_{i=0}^s H_i(y, A, B; \partial_t) \circ T^i,$$

и обозначим $\text{Res } \mathcal{F} = H_{-1}(y, A, B; \partial_t)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если оператор $\mathcal{F}$ является косой ∂_t -симметрией операторов $\mathcal{R}_k$ и $\mathcal{R}_0$, то имеет место равенство

$$(\mathcal{R}_k - t) \circ \mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_+ \circ (\mathcal{R}_0 - t) = [\text{Res } \mathcal{F}, \partial_y].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $(\mathcal{R}_k - t) \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ (\mathcal{R}_0 - t)$ получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_k - t) \circ \mathcal{F}_+ - \mathcal{F}_+ \circ (\mathcal{R}_0 - t) &= \mathcal{F}_- \circ (\mathcal{R}_0 - t) - (\mathcal{R}_k - t) \circ \mathcal{F}_- \\ &= [\mathcal{F}_-, \mathcal{R}_0] + [t, \mathcal{F}_-] - u_k(y) \circ A \circ \mathcal{F}_-. \end{aligned} \quad (9)$$

Ясно, что последние два слагаемых содержат только отрицательные степени оператора T .

Далее, поскольку оператор $\mathcal{R}_0$ можно представить в виде

$$\mathcal{R}_0 = \partial_y \circ T + \frac{1}{2} \partial_y \circ B + C,$$

то первое слагаемое $[\mathcal{F}_-, \mathcal{R}_0]$ содержит неотрицательные степени T :

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}_-, \partial_y \circ T] &= \sum_{i=-\infty}^{-1} [H_i \circ T^i, \partial_y \circ T] \\ &= \sum_{i=-\infty}^{-1} (H_i \circ T^{i+1} \circ \partial_y - \partial_y \circ ([\partial_y, H_i] \circ A + H_i \circ T) \circ T^i) \\ &= - \sum_{i=-\infty}^{-1} \partial_y \circ [\partial_y, H_i] \circ A \circ T^i - \sum_{i=-\infty}^{-1} [\partial_y, H_i] \circ A \circ T^{i+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, правая часть равенства (9) содержит только одну неотрицательную степень T , а именно $-\partial_y, H_{-1}] \circ T^0$, что и доказывает предложение.

ЛЕММА 2. Операторы $\mathcal{R}_0 - t$ и $y - 2T \circ \partial_t$ коммутируют, т. е.

$$[\mathcal{R}_0 - t, y - 2T \circ \partial_t] = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно получаем

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}_0 - t) \circ (y - 2T \circ \partial_t) &= 2\partial_y \circ A + B + (y - 2T \circ \partial_t) \circ \mathcal{R}_0 - t \circ y + 2T \circ t \circ \partial_t \\ &= 2T + (y - 2T \circ \partial_t) \circ \mathcal{R}_0 - y \circ t - 2T + 2T \circ t \circ \partial_t \\ &= (y - 2T \circ \partial_t) \circ \mathcal{R}_0 - (y - 2T \circ \partial_t) \circ t. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. *Имеет место аналог формулы интегрирования по частям*

$$T^{-1} \circ y^s = \sum_{i=0}^s (-1)^i (\partial_y^i y^s) \circ A^i \circ T^{-i-1}, \quad s = 0, 1, \dots$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} & T \circ \left(T^{-1} \circ y^s - \sum_{i=0}^s (-1)^i (\partial_y^i y^s) \circ A^i \circ T^{-i-1} \right) \\ &= y^s - \sum_{i=0}^s (-1)^i ((\partial_y^{i+1} y^s) \circ A + (\partial_y^i y^s) \circ T) \circ A^i \circ T^{-i-1} \\ &= y^s + \sum_{i=1}^{s+1} (-1)^i (\partial_y^i y^s) \circ A^i \circ T^{-i} - \sum_{i=0}^s (-1)^i (\partial_y^i y^s) \circ A^i \circ T^{-i} \\ &= y^s + (-1)^{s+1} (\partial_y^{s+1} y^s) \circ A^{s+1} \circ T^{-s-1} - (-1)^0 (\partial_y^0 y^s) \circ A^0 \circ T^0 = 0. \end{aligned}$$

В силу того, что $T^{-1} \circ T = 1$, имеем

$$T^{-1} \circ y^s - \sum_{i=0}^s (-1)^i (\partial_y^i y^s) \circ A^i \circ T^{-i-1} = T^{-1} \circ 0,$$

откуда в силу ассоциативности

$$T^{-1} \circ (y^s - 0) = \sum_{i=0}^s (-1)^i (\partial_y^i y^s) \circ A^i \circ T^{-i-1},$$

что и доказывает лемму.

Пусть $\deg P_k(y)$ – степень многочлена $P_k(y)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Оператор $\mathcal{R}_k$ $\deg P_k$ -калибровочно эквивалентен оператору $\mathcal{R}_0$ посредством многочлена $P_k(y)$, т. е.*

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_k, \mathcal{R}_0}^{\deg P_k + 1} P_k(y) = 0. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем оператор

$$\mathcal{F}_k = \mathcal{D}_{0, \dots, k} \circ T^{-k} \circ P_{k+1}(y - 2T \circ \partial_t) \circ T^{-1}.$$

Применяя лемму 3 и определение оператора $\mathcal{D}_{0, \dots, k}$, непосредственно проверяем, что $\text{Res } \mathcal{F}_k$ не зависит от переменной y , т. е. $[\text{Res } \mathcal{F}_k, \partial_y] = 0$. Например, $\text{Res } \mathcal{F}_0 = 0$, $\text{Res } \mathcal{F}_1 = -6A^2 \circ \partial_t$. Учитывая следствие 1 и лемму 2, мы имеем сплетающее соотношение

$$(\mathcal{R}_{k+1} - t) \circ \mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k \circ (\mathcal{R}_0 - t),$$

откуда по предложению 4 получаем

$$(\mathcal{R}_{k+1} - t) \circ \mathcal{F}_{k,+} = \mathcal{F}_{k,+} \circ (\mathcal{R}_0 - t). \quad (11)$$

Далее, поскольку ∂_t входит в аргумент многочлена $P_{k+1}(y - 2T \circ \partial_t)$, то $\mathcal{F}_{k,+}$ является дифференциальным оператором по ∂_t порядка $\deg P_{k+1}$. Равенства (11) и (7) влекут равенство

$$\mathcal{F}_{k,+} = \sum_{i=0}^{\deg P_{k+1}} \frac{(-1)^i}{i!} (\text{ad}_{\mathcal{R}_{k+1}, \mathcal{R}_0}^i G_0) \circ \partial_t^i, \quad (12)$$

где, как и ранее, $\text{ad}_{F,H} G = F \circ G - G \circ H$ – оператор косо присоединенного действия.

Выясним явный вид оператора G_0 , т. е. вычислим коэффициент при ∂_t^0 в неотрицательной части оператора $\mathcal{F}_k$:

$$\begin{aligned} G_0 &= (\mathcal{D}_{0,\dots,k} \circ T^{-k} \circ P_{k+1}(y) \circ T^{-1})_+ \\ &= \left(\prod_{i=0}^k \left(T - \partial_y \ln \left| \frac{P_{k-i+1}}{P_{k-i}} \right| \circ A \right) \circ T^{-k} \circ P_{k+1}(y) \circ T^{-1} \right)_+ \\ &= ((T + f(T^{-1})) \circ P_{k+1}(y) \circ T^{-1})_+, \end{aligned}$$

где $f(T^{-1})$ – некоторый многочлен по T^{-1} . Применив лемму 3, имеем

$$G_0 = (T \circ P_{k+1}(y) \circ T^{-1})_+ = P_{k+1}(y).$$

Таким образом, заменяя в (12) k на $k - 1$ и используя равенства (11) и (7), получаем утверждения предложения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Нетрудно проверить, что $\deg P_k(y) = k(k+1)/2$. Это показано, например, в [2].

3°. Случай $\gamma = 0$. Этот случай носит особый характер, поскольку при $\gamma = 0$ удается существенно понизить порядок косо симметрии операторов $\mathcal{R}_k$ и $\mathcal{R}_0$, а именно с $\deg P_k = k(k+1)/2$ до k .

Операторы $\mathcal{R}_k$ и $\mathcal{D}_k$ принимают вид (потенциалы (2) переходят в (2'))

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k &= \mathcal{R}_0 - \frac{k(k+1)}{y^2} \circ A, & k \in \mathbb{N}, \\ \mathcal{D}_k &= \left(\partial_y - \frac{k+1}{y} \right) \circ A + \frac{1}{2} B, & k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. *Имеем*

$$\left[\mathcal{D}_k, \exp \left(-\frac{y^2}{4t} \right) \right] = -\frac{y}{2t} \circ \exp \left(-\frac{y^2}{4t} \right) \circ A. \quad (13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеют место равенства

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_k \circ \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) &= \left(\partial_y \circ A + \frac{1}{2}B - \frac{k+1}{y} \circ A\right) \circ \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) \\ &= -\frac{y}{2t} \circ \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) \circ A + \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) \circ \mathcal{D}_k.\end{aligned}$$

ЛЕММА 5. Оператор $y \circ A + 2t \circ \mathcal{D}_k$ является косой t -симметрией операторов $\mathcal{R}_{k+1}$ и $\mathcal{R}_k$, деформированной оператором A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу соотношения (8) имеем

$$\begin{aligned}(\partial_t \circ A - \mathcal{R}_{k+1}) \circ (y \circ A + 2t \circ \mathcal{D}_k) &= y \circ A \circ \partial_t \circ A + 2A \circ \mathcal{D}_k + 2t \circ \mathcal{D}_k \circ \partial_t \circ A - \mathcal{R}_{k+1} \circ y \circ A - 2t \circ \mathcal{D}_k \circ \mathcal{R}_k \\ &= (y \circ A + 2t \circ \mathcal{D}_k) \circ \partial_t \circ A + 2A \circ \mathcal{D}_k - 2\partial_y \circ A^2 \\ &\quad - A \circ B - y \circ A \circ \mathcal{R}_{k+1} - 2t \circ \mathcal{D}_k \circ \mathcal{R}_k \\ &= (y \circ A + 2t \circ \mathcal{D}_k) \circ \partial_t \circ A - \frac{2(k+1)}{y} \circ A^2 - y \circ A \circ \left(\mathcal{R}_k - \frac{2(k+1)}{y^2} \circ A\right) \\ &\quad - 2t \circ \mathcal{D}_k \circ \mathcal{R}_k \\ &= (y \circ A + 2t \circ \mathcal{D}_k) \circ (\partial_t \circ A - \mathcal{R}_k).\end{aligned}$$

Далее рассмотрим оператор

$$\mathcal{D}_k(t) = (2t)^{k+1} \circ \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) \circ \mathcal{D}_{0,\dots,k} \circ \exp\left(\frac{y^2}{4t}\right).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Оператор $\mathcal{D}_k(t)$ является косой t -симметрией порядка $k+1$ операторов $\mathcal{R}_{k+1}$ и $\mathcal{R}_0$, деформированной оператором A , т. е.

$$(\partial_t \circ A - \mathcal{R}_{k+1}) \circ \mathcal{D}_k(t) = \mathcal{D}_k(t) \circ (\partial_t \circ A - \mathcal{R}_0). \quad (14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства (13) имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_k(t) &= (2t)^{k+1} \circ \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) \circ \mathcal{D}_k \circ \mathcal{D}_{0,\dots,k-1} \circ \exp\left(\frac{y^2}{4t}\right) \\ &= (2t)^{k+1} \circ \left(\frac{y}{2t} \circ \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right) \circ A + \mathcal{D}_k \circ \exp\left(-\frac{y^2}{4t}\right)\right) \\ &\quad \circ \mathcal{D}_{0,\dots,k-1} \circ \exp\left(\frac{y^2}{4t}\right) = (y \circ A + 2t \circ \mathcal{D}_k) \circ \mathcal{D}_{k-1}(t).\end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{D}_k(t) = \prod_{i=0}^k (y \circ A + 2t \circ \mathcal{D}_{k-i}),$$

т. е. оператор $\mathcal{D}_k(t)$ является многочленом по t степени $k+1$ со свободным членом $y^{k+1} \circ A^{k+1}$. Из последнего равенства и утверждения леммы 5 получаем формулу (14).

СЛЕДСТВИЕ 2. Оператор $\mathcal{D}_k(t)$ представим в виде

$$\mathcal{D}_k(t) = \sum_{s=0}^{k+1} G_s \circ t^s,$$

где

$$\begin{aligned} A^{k+1} \circ \text{ad}_{\mathcal{R}_{k+1}, \mathcal{R}_0}^{k+2} y^{k+1} &= 0, \\ G_s &= \frac{A^{k+1-s}}{s!} \text{ad}_{\mathcal{R}_{k+1}, \mathcal{R}_0}^s y^{k+1}, \quad s = 0, 1, \dots, k+1. \end{aligned} \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из предложения 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Оператор $\mathcal{R}_k$ k -калибровочно эквивалентен оператору $\mathcal{R}_0$ посредством оператора y^k , т. е. имеет место равенство

$$\text{ad}_{\mathcal{R}_k, \mathcal{R}_0}^{k+1} y^k = 0. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} \text{ad}_{\mathcal{R}_k, \mathcal{R}_0}^{k+1} y^k &= \sum_{s=0}^{k+1} (-1)^s \binom{k+1}{s} \mathcal{R}_k^{k+1-s} \circ y^k \circ \mathcal{R}_0^s \\ &= \sum_{s=0}^{k+1} a_s(y) \circ \partial_y^s \circ W_s, \end{aligned}$$

где W_s – дифференциальные операторы по переменной $z \in \mathbb{R}^N$ с постоянными коэффициентами. Если все W_s нулевые, то предложение верно. Пусть для $s \in I = \{s_0, \dots, s_p \mid s_0 < \dots < s_p, 0 \leq p \leq k+1\} \subset \{0, \dots, k+1\}$ операторы W_s ненулевые. Тогда в силу $[y, A] = 0$ имеем

$$L \equiv A^k \circ \text{ad}_{\mathcal{R}_k, \mathcal{R}_0}^{k+1} y^k = \sum_{s \in I} a_s(y) \circ \partial_y^s \circ A^k \circ W_s,$$

где $A^k \circ W_s$, $s \in I$, – ненулевые дифференциальные операторы по переменной $z \in \mathbb{R}^N$ с постоянными коэффициентами.

Пусть $\{f_s(z)\}_{s \in I}$ – семейство функций такое, что $(A^k \circ W_s)f_s(z) \neq 0$. Тогда, применяя поочередно оператор L к функциям $y^s f_s(z)$ (начиная с наименьшего s), учитывая равенство (15), получаем $a_s(y) \equiv 0$ для всех $s \in I$. Откуда и следует формула (16).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Дифференциальный оператор

$$\mathcal{D}_k(\partial_t) = \sum_{s=0}^k \frac{(-1)^s}{s!} (\text{ad}_{\mathcal{R}_k, \mathcal{R}_0}^s y^k) \circ \partial_t^s \quad (17)$$

является косой ∂_t -симметрией операторов $\mathcal{R}_k$ и $\mathcal{R}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу равенства (16) и строения (17) выполнены условия (7), а следовательно, и (6).

4. Ядро Рисса оператора Кэли. Для удобства изложения в этом пункте в терминах обобщенных функций приводятся и уточняются результаты Л. Гординга [9].

Пусть λ – комплексный параметр, ξ – фиксированная точка из пространства $SM(n)$ вещественных симметрических матриц порядка n и $f(x)$ – основная функция (например, бесконечно дифференцируемая с компактным носителем) в пространстве $SM(n)$. В области $\operatorname{Re} \lambda > -1$ интеграл

$$((x - \xi)_+^\lambda, f) = \int_{x - \xi > 0} (\det(x - \xi))^\lambda f(x) dx, \quad \xi \in SM(n),$$

по множеству положительно определенных матриц $x - \xi$ задает обобщенную функцию $(x - \xi)_+^\lambda$, аналитически зависящую от λ . В [9], [7] установлено, что $(x - \xi)_+^\lambda$ продолжается на всю плоскость параметра λ в виде мероморфной функции с полюсами в тех же точках и того же порядка, что и у функции $\Gamma_n(\lambda + (n + 1)/2)$. Здесь

$$\Gamma_n(\lambda) = \pi^{\frac{n(n-1)}{4}} \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\lambda - \frac{i-1}{2}\right),$$

а $\Gamma(\lambda)$ – обычная гамма-функция Эйлера.

Возникает комплексно-параметрическое семейство обобщенных функций

$$\Phi_0^{(\lambda)}(x; \xi) = \frac{1}{\Gamma_n(\lambda)} (x - \xi)_+^{\lambda - \frac{n+1}{2}}, \quad (18)$$

являющихся целыми по λ .

Без ограничения общности изучим семейство (18) при $\xi = 0$. В [9] фактически установлено, что оператор $\mathcal{L}_0$ действует на $\Phi_0^{(\lambda)}(x) \equiv \Phi_0^{(\lambda)}(x; 0)$ по формуле

$$\mathcal{L}_0 \Phi_0^{(\lambda)}(x) = \Phi_0^{(\lambda-1)}(x). \quad (19)$$

Естественно возникает вопрос о значениях функции $\Phi_0^{(\lambda)}(x)$ в бывших полюсах $\lambda = ((n - 1)/2) - k$, $k = 1, 2, \dots$.

Приведем непосредственный и более прозрачный, чем в [7], [9], вывод упомянутых значений. Пусть δ – дельта-функция Дирака.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Имеем*

$$\Phi_0^{(0)}(x) = \delta(x). \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 4 из [7] в области регулярного задания функционал $(\Phi_0^{(\lambda)}, f)$ может быть представлен интегралом

$$(\Phi_0^{(\lambda)}, f) = \frac{2^n}{\Gamma_n(\lambda)} \int_{T_+(n)} \prod_{i=1}^n (t_{ii})^{2\lambda-i} f('tt) dt$$

по множеству верхних треугольных матриц порядка n с положительными диагональными элементами t_{ii} , $'t$ – матрица, транспонированная к t .

Последняя запись показывает, что $\Phi_0^{(\lambda)}$ является прямым произведением обобщенных функций

$$(t_{ii})_+^{2\lambda-i} \times 1(t_{i,i+1}) \times \cdots \times 1(t_{in}), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

на подпространствах $\mathbb{R}^{n-i+1}$ строк $t_i = (t_{ii}, t_{i,i+1}, \dots, t_{in})$ пространства $T(n)$ всех верхнетреугольных матриц порядка n . Для упрощения записи постоянные сомножители $1(t_{ij})$ будем опускать. Таким образом, мы имеем следующую формулу:

$$\begin{aligned} (\Phi_0^{(0)}, f) &= \frac{2^n}{\pi^{n(n-1)/4}} \left(\frac{(t_{nn})_+^{2\lambda-n}}{\Gamma(\lambda - \frac{n-1}{2})} \Big|_{\lambda=0}, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, \left(\frac{(t_{22})_+^{2\lambda-2}}{\Gamma(\lambda - \frac{1}{2})} \Big|_{\lambda=0}, \left(\frac{(t_{11})_+^{2\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \Big|_{\lambda=0}, f('tt) \right)_{\mathbb{R}^n} \right)_{\mathbb{R}^{n-1}} \dots \Big|_{\mathbb{R}} \right). \end{aligned}$$

Поскольку при $\operatorname{Re}(\lambda + 1) > (n + 1)/2$ в интеграле

$$\left(\frac{(t_{11})_+^{2\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \Big|_{\lambda=0}, f('tt) \right)_{\mathbb{R}^n} = \int_0^\infty \frac{t_{11}^{2\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f('tt) dt_{12} \dots dt_{1n} \right) dt_{11}$$

функция

$$f_1(t_{11}, t_2, \dots, t_n) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f('tt) dt_{12} \dots dt_{1n}$$

четная по t_{11} , то функция $g_1(t_{11}^2, t_2, \dots, t_n) = f_1(\sqrt{t_{11}^2}, t_2, \dots, t_n)$ – основная и аналитическое продолжение приводит к равенствам

$$\begin{aligned} \left(\frac{(t_{11})_+^{2\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \Big|_{\lambda=0}, f('tt) \right)_{\mathbb{R}^n} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{s_{11}^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \Big|_{\lambda=0} g_1(s_{11}, t_2, \dots, t_n) ds_{11} \\ &= \frac{1}{2} (\delta(s_{11}), g_1(s_{11}, t_2, \dots, t_n))_{\mathbb{R}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f('tt)|_{t_{11}=0} dt_{12} \dots dt_{1n}. \end{aligned}$$

Найдем значение функционала

$$I_\lambda = \left(\frac{(t_{22})_+^{2\lambda-2}}{\Gamma(\lambda - \frac{1}{2})}, \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f('tt)|_{t_{11}=0} dt_{12} \dots dt_{1n} \right)_{\mathbb{R}^{n-1}}$$

при $\lambda = 0$. Если $\operatorname{Re}(\lambda + 1) > (n + 1)/2$, то

$$I_\lambda = \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{t_{22}^{2\lambda-2}}{\Gamma(\lambda - \frac{1}{2})} dt_{12} dt_{22} \int_{\mathbb{R}^{2(n-2)}} f('tt)|_{t_{11}=0} dt_{13} dt_{23} \dots dt_{1n} dt_{2n}.$$

Поскольку функция $f('tt)|_{t_{11}=0}$ зависит от аргументов t_{12} , t_{22} только посредством скалярных произведений

$$t_{12}t_{13} + t_{22}t_{23}, t_{12}t_{14} + t_{22}t_{24}, \dots, t_{12}t_{1n} + t_{22}t_{2n},$$

то естественно в интеграле по полуплоскости $\{(t_{12}, t_{22}) \mid t_{22} > 0\}$ перейти к полярным координатам $t_{12} = \rho \cos \varphi$, $t_{22} = \rho \sin \varphi$, $0 < \varphi < \pi$. Возникающая в интеграле функция

$$f_2(\rho, t_3, \dots, t_n) = \int_{\mathbb{R}^{2(n-2)}} f('tt)|_{t_{11}=0, t_{12}=\rho \cos \varphi, t_{22}=\rho \sin \varphi} dt_{13} dt_{23} \dots dt_{1n} dt_{2n}$$

не зависит от полярного угла φ и является четной по аргументу ρ . Это справедливо в силу инвариантности мер $dt_{13} dt_{23}, \dots, dt_{1n} dt_{2n}$ относительно вращений в плоскостях $\{(t_{13}, t_{23})\}, \dots, \{(t_{1n}, t_{2n})\}$ и зависимости функции $f('tt)$ от произведений

$$t_{13}^2 + t_{23}^2 + t_{33}^2, \dots, t_{13}t_{1n} + t_{23}t_{2n} + t_{33}t_{3n}, \dots, t_{1n}^2 + t_{2n}^2 + \dots + t_{nn}^2.$$

Следовательно, она является основной функцией $g_2(\rho^2, t_3, \dots, t_n)$. Посредством интеграла

$$\int_0^\pi (\sin \varphi)^{2\lambda-2} d\varphi = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\lambda - \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda)}$$

получаем

$$I_\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2 \cdot 2} \int_0^\infty \frac{\mu^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} g_2(\mu, t_3, \dots, t_n) d\mu.$$

Из аналитического продолжения последней формулы получаем

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} (\delta(\mu), g_2(\mu, t_3, \dots, t_n))_{\mathbb{R}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} f_2(0, t_3, \dots, t_n) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_{\mathbb{R}^{2(n-2)}} f('tt)|_{t_{11}=0, t_{12}=0, t_{22}=0} dt_{13} dt_{23} \dots dt_{1n} dt_{2n}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом, переходом к сферическим координатам в полупространстве $\{(t_{13}, t_{23}, t_{33}) \mid t_{33} > 0\}$ находим аналитическое продолжение функции

$$\left(\frac{(t_{22})_+^{2\lambda-2}}{\Gamma(\lambda - 1)}, \frac{\sqrt{\pi}}{4} \int_{\mathbb{R}^{2(n-2)}} f('tt)|_{t_{11}=0, t_{12}=0, t_{22}=0} dt_{13} dt_{23} \dots dt_{1n} dt_{2n} \right).$$

Продолжая процесс, на последнем шаге получаем интеграл

$$\frac{\pi^{\frac{(n-2)(n-1)}{4}}}{2^{n-1}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{t_{nn}^{2\lambda-n}}{\Gamma(\lambda - \frac{n-1}{2})} f('tt) \Big|_{t_{ij}=0, i \leq j < n} dt_{1n} dt_{2n} \dots dt_{nn}$$

по полупространству $\{(t_{1n}, \dots, t_{nn}) | t_{nn} > 0\}$. Заметим, что у функции $f('tt)$ под знаком интеграла только один ненулевой элемент матрицы $'tt$, равный $t_{1n}^2 + \dots + t_{nn}^2$. Переходом к соответствующим сферическим координатам и вычислением интеграла по полусфере получим

$$\frac{\pi^{\frac{n(n-1)}{4}}}{2^n} \int_0^\infty \frac{(\rho^2)^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \Big|_{\lambda=0} f \left(\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \rho^2 \end{pmatrix} \right) d\rho^2 = \frac{\pi^{\frac{n(n-1)}{4}}}{2^n} f(0).$$

Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 3. Имеем $\Phi_0^{(-k)}(x) = \mathcal{L}_0^k \delta(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Чтобы выяснить значения функции $\Phi_0^{(\lambda)}(x)$ в точках $\lambda = 1/2, 1, 3/2, \dots, (n-1)/2$ и $\lambda = -1/2, -3/2, \dots$ потребуются обобщенные функции, сосредоточенные на подмногообразиях матриц ранга, меньшего n .

Обозначим через $SM_+^r(n)$ подмногообразие в $SM(n)$ неотрицательно определенных матриц ранга $r = 0, 1, \dots, n-1$. Очевидно, что

$$\dim SM_+^r(n) = nr - \frac{r(r-1)}{2},$$

и для замыкания имеет место равенство $\overline{SM_+^r(n)} = \bigcup_{i=0}^r SM_+^i(n)$.

Введем на $SM_+^r(n)$ почти глобальные координаты. Кроме подмногообразия матриц меньшей размерности, матрицы $x \in SM_+^r(n)$ имеют r первых линейно независимых столбцов и представляются в виде

$$\begin{pmatrix} x^{(r)} & x^{(r)}\mu \\ \mu x^{(r)} & \mu x^{(r)}\mu \end{pmatrix},$$

где $x^{(r)}$ – подматрица порядка r , а μ – из пространства $M(r, n-r)$ прямоугольных $(r \times (n-r))$ -матриц. Обозначим это подмножество через U .

На U зададим меру

$$d_r x = \frac{1}{\pi^{\frac{r(n-r)}{2}} \Gamma_r(\frac{r}{2})} (\det x^{(r)})^{\frac{n-r-1}{2}} dx^{(r)} d\mu,$$

где $dx^{(r)} = \prod_{i \leq j \leq r} dx_{ij}$. Элементарно проверяется, что мера $d_r x$ квазиинвариантна, т. е.

$$d_r('bxb) = |\det b|^r d_r x, \quad b \in GL(n).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Обобщенной функцией $\delta_r(x)$, связанной с поверхностью $SM_+^r(n)$, назовем интеграл*

$$(\delta_r(x), f(x)) = \int_{SM_+^r(n)} f(x) d_r x \equiv \int_U f(x) d_r x.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Обобщенная функция ψ в $SM(n)$ называется однородной степени λ , если*

$$(\psi(x), f('b^{-1}xb^{-1})) = |\det b|^{2\lambda+n+1}(\psi, f).$$

ПРИМЕР 1. Следующая функция является однородной:

$$\begin{aligned} (\Phi_0^{(\lambda)}(x), f('b^{-1}xb^{-1})) &= \frac{1}{\Gamma_n(\lambda + \frac{n+1}{2})} \int_{x>0} (\det x)^{\lambda - \frac{n+1}{2}} f('b^{-1}xb^{-1}) dx \\ &= \frac{1}{\Gamma_n(\lambda + \frac{n+1}{2})} \\ &\quad \times \int_{'b^{-1}xb^{-1}>0} (\det 'b^{-1}xb^{-1})^{\lambda - \frac{n+1}{2}} f('b^{-1}xb^{-1}) |\det b|^{2\lambda} d('b^{-1}xb^{-1}) \\ &= |\det b|^{2\lambda} (\Phi_0^{(\lambda)}(x), f(x)), \end{aligned}$$

и, таким образом, $\Phi_0^{(\lambda)}$ – однородная степени $\lambda - (n+1)/2$ функция.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Обобщенная функция $\delta_r(x)$ является однородной степени $(r - n - 1)/2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} (\delta_r(x), f('b^{-1}xb^{-1})) &= \int_{SM_+^r(n)} f('b^{-1}xb^{-1}) d_r x \\ &= \int_{SM_+^r(n)} f('b^{-1}xb^{-1}) |\det b|^r d_r ('b^{-1}xb^{-1}) \\ &= |\det b|^r (\delta_r(x), f(x)). \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. *Для $r = 1, 2, \dots, n-1$ имеем $\Phi_0^{(r/2)}(x) = \delta_r(x)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На карте $U \subset SM_+^r(n)$ введем координаты правильной треугольной матрицы v :

$$U \ni x = 'vv = \begin{pmatrix} 't_1 & 0 \\ 't_{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & t_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 't_1 t_1 = x^{(r)}, \quad t_1^{-1} t_{12} = \mu,$$

где $t_1 \in T_+(r)$, $t_{12} \in M(r, n-r)$.

Для

$$SM_+(n) \ni x = {}'tt = \begin{pmatrix} {}'t_1 & 0 \\ {}'t_{12} & {}'t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & t_{12} \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}'t_1 t_1 & {}'t_1 t_{12} \\ {}'t_{12} t_1 & {}'t_{12} t_{12} + {}'t_2 t_2 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\begin{aligned} (\Phi_0^{(r/2)}(x), f(x)) &= \frac{2^n}{\pi^{n(n-1)/4}} \int_{T_+(r) \times M(r, n-r)} \prod_{i=1}^r \frac{t_{ii}^{r-i}}{\Gamma(\frac{r-i+1}{2})} dt_1 dt_{12} \\ &\quad \times \int_{T_+(n-r)} \prod_{i=r+1}^n \frac{t_{ii}^{2\lambda-i}}{\Gamma(\lambda - \frac{i-1}{2})} \Big|_{\lambda=r/2} f({}'tt) dt_2. \end{aligned}$$

Далее, функцию $f({}'tt)$ можно рассматривать как основную функцию нескольких блоков:

$$f({}'tt) = g({}'t_1 t_1, {}'t_1 t_{12}, {}'t_{12} t_{12} + {}'t_2 t_2),$$

точнее, как основную функцию по переменным блока $'t_2 t_2$, к которой применяется обобщенная функция

$$\frac{2^{n-r}}{\pi^{(n-r)(n-r-1)/4}} \prod_{i=r+1}^n \frac{t_{ii}^{2\lambda-i}}{\Gamma(\lambda - \frac{i-1}{2})} \Big|_{\lambda=r/2}$$

в пространстве $T_+(n-r)$. Как и в доказательстве предложения 9, имеем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2^{n-r}}{\pi^{(n-r)(n-r-1)/4}} \prod_{i=r+1}^n \frac{t_{ii}^{2\lambda-i}}{\Gamma(\lambda - \frac{i-1}{2})} \Big|_{\lambda=r/2}, g \right)_{T_+(n-r)} \\ &= \left(\frac{2^{n-r}}{\pi^{(n-r)(n-r-1)/4}} \prod_{i=1}^{n-r} \frac{t_{ii}^{2\lambda-i-r}}{\Gamma(\lambda - \frac{i+r-1}{2})} \Big|_{\lambda=r/2}, g \right)_{T_+(n-r)} \\ &= (\delta(t_2), g)_{T_+(n-r)} = f({}'vv). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} (\Phi_0^{(r/2)}(x), f(x)) &= \frac{2^r}{\pi^{r(2n-r-1)/4}} \int_{SM_+^r(n)} \prod_{i=1}^r \frac{t_{ii}^{r-i}}{\Gamma(\frac{r-i+1}{2})} f({}'vv) dt_1 dt_{12} \\ &= \int_{SM_+^r(n)} f(x) d_r x. \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Имеем*

$$\Phi_0^{(\frac{1}{2}-k)}(x) = \mathcal{L}_0^k \delta_1(x), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

СЛЕДСТВИЕ 5. *Выполнено:*

- 1) $\mathcal{L}_0 \delta_r(x) = \delta_{r-2}(x), \quad r = 2, 3, \dots, n-1;$
 - 2) $\mathcal{L}_0^r \delta_{2r}(x) = \delta(x), \quad r = 1, 2, \dots, [(n-1)/2].$
- (21)

Обозначим через $\text{supp } \Phi$ носитель обобщенной функции Φ .

СЛЕДСТВИЕ 6. *Имеем*

$$\text{supp } \Phi_0^{(\lambda)}(x) = \begin{cases} \{0\}, & \lambda = 0, -1, -2, \dots, \\ \overline{SM_+^1(n)}, & \lambda = -1/2, -3/2, \dots, \\ \overline{SM_+^{2\lambda}(n)}, & \lambda = 1/2, 2/2, \dots, (n-1)/2, \\ \overline{SM_+(n)} & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (22)$$

Из формул (21), (22) следует, что при $n > 2$ для оператора Кэли (1) и его степеней $\mathcal{L}_0^r$, $r = 1, 2, \dots, [(n-1)/2]$, имеет место усиленный принцип Гюйгеса, а из формул (19), (20) и (22) следует существование ядра Рисса для оператора $\mathcal{L}_0$ в смысле работы [2].

5. Фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}_m^\lambda$. Оператор Кэли (1) можно представить в виде многочлена от ∂_{11} , ∂_{22} и ∂_{12} следующим образом:

$$\mathcal{L}_0 = (\partial_{11} \circ \partial_{22} - \partial_{12}^2) \circ A + \partial_{11} \circ B_{11} + \partial_{22} \circ B_{22} + \partial_{12} \circ B_{12} + C,$$

где A, B_{ij}, C – некоторые дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, не зависящие от ∂_{11} , ∂_{22} , ∂_{12} и определяемые оператором $\mathcal{L}_0$.

Напомним, что многочлены $P_k(y)$, входящие в определение потенциалов Лагнеше–Штельмахера (2), зависят еще и от вектор-параметра $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$. Таким образом, оператор $\mathcal{L}_m$ (3) зависит не только от неотрицательных целых чисел m_1, m_2, m_3 , но и от трех вектор-параметров. Для $\gamma^{(i)} = (\gamma_1^{(i)}, \dots, \gamma_{m_i}^{(i)})$, $i = 1, 2, 3$, положим

$$G_{m_i}(y) = \begin{cases} P_{m_i}(y), & \gamma^{(i)} \neq 0, \\ y^{m_i}, & \gamma^{(i)} = 0; \end{cases} \quad M_i = \begin{cases} m_i(m_i + 1)/2, & \gamma^{(i)} \neq 0, \\ m_i, & \gamma^{(i)} = 0. \end{cases}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{m_1} &= \frac{1}{4}((\partial_{11} + \partial_{22})^2 \circ A + 2(\partial_{11} + \partial_{22}) \circ (B_{11} + B_{22}) \\ &\quad + 2(\partial_{11} + \partial_{22})^2 \ln |P_{m_1}(x_{11} + x_{22})| \circ A); \\ \mathcal{Q}_{m_2} &= -\frac{1}{4}((\partial_{11} - \partial_{22})^2 \circ A + 2(\partial_{11} - \partial_{22}) \circ (B_{22} - B_{11}) \\ &\quad + 2(\partial_{11} - \partial_{22})^2 \ln |P_{m_2}(x_{11} - x_{22})| \circ A); \\ \mathcal{R}_{m_3} &= -\partial_{12}^2 \circ A + \partial_{12} \circ B_{12} + C - 2\partial_{12}^2 \ln |P_{m_3}(2x_{12})| \circ A; \\ \mathcal{G}^s(\mathcal{P}_{m_1}) &\equiv \mathcal{G}^s(\partial_{11} + \partial_{22}; x_{11} + x_{22}) = \text{ad}_{\mathcal{P}_{m_1}, \mathcal{P}_0}^s G_{m_1}(x_{11} + x_{22}); \\ \mathcal{G}^s(\mathcal{Q}_{m_2}) &\equiv \mathcal{G}^s\left(\frac{\partial}{\partial x_{11}} - \frac{\partial}{\partial x_{22}}; x_{11} - x_{22}\right) = \text{ad}_{\mathcal{Q}_{m_2}, \mathcal{Q}_0}^s G_{m_2}(x_{11} - x_{22}); \\ \mathcal{G}^s(\mathcal{R}_{m_3}) &\equiv \mathcal{G}^s\left(\frac{\partial}{\partial x_{12}}; x_{12}\right) = \text{ad}_{\mathcal{R}_{m_3}, \mathcal{R}_0}^s G_{m_3}(2x_{12}). \end{aligned}$$

В результате справедливо разложение

$$\mathcal{L}_m = \mathcal{P}_{m_1} + \mathcal{Q}_{m_2} + \mathcal{R}_{m_3} \quad (23)$$

и имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}_m^\lambda$, $\lambda = 1, 2, \dots$, имеет вид*

$$\begin{aligned} \Phi_m^{(\lambda)}(x; \xi) &= \frac{1}{G_{m_1}(\xi_{11} + \xi_{22})G_{m_2}(\xi_{11} - \xi_{22})G_{m_3}(2\xi_{12})} \\ &\quad \times \sum_{i=0}^{M_1} \sum_{j=0}^{M_2} \sum_{k=0}^{M_3} (-1)^{i+j+k} \frac{(i+j+k)!}{i!j!k!} \binom{\lambda+i+j+k-1}{i+j+k} \\ &\quad \times (\mathcal{G}^s(\mathcal{P}_{m_1})\mathcal{G}^s(\mathcal{Q}_{m_2})\mathcal{G}^s(\mathcal{R}_{m_3}))\Phi_0^{(\lambda+i+j+k)}(x; \xi). \end{aligned}$$

Перед тем как доказать теорему, сформулируем две леммы. Пусть t_1, t_2, t_3 – вещественные спектральные параметры и

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) &\equiv \mathcal{D}_{m_1}(\partial_{11} + \partial_{22}; x_{11} + x_{22}; \partial_{t_1}) \\ &= \frac{1}{G_{m_1}(\xi_{11} + \xi_{22})} \sum_{i=0}^{M_1} \frac{(-1)^i}{i!} \mathcal{G}^s(\mathcal{P}_{m_1}) \circ \frac{\partial^i}{\partial t_1^i}, \\ \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) &\equiv \mathcal{D}_{m_2}(\partial_{11} - \partial_{22}; x_{11} - x_{22}; \partial_{t_2}) \\ &= \frac{1}{G_{m_2}(\xi_{11} - \xi_{22})} \sum_{j=0}^{M_2} \frac{(-1)^j}{j!} \mathcal{G}^s(\mathcal{Q}_{m_2}) \circ \frac{\partial^j}{\partial t_2^j}, \\ \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) &\equiv \mathcal{D}_{m_3}(\partial_{12}; x_{12}; \partial_{t_3}) = \frac{1}{G_{m_3}(2\xi_{12})} \sum_{k=0}^{M_3} \frac{(-1)^k}{k!} \mathcal{G}^s(\mathcal{R}_{m_3}) \circ \frac{\partial^k}{\partial t_3^k}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 6. *Для операторов Кэли–Гординга $\mathcal{L}_m$ (3) и Кэли $\mathcal{L}_0$ (1) имеет место сплетающее соотношение со спектральными параметрами:*

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_m - t_1 - t_2 - t_3)^\lambda \circ \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) \\ = \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) \circ (\mathcal{L}_0 - t_1 - t_2 - t_3)^\lambda, \end{aligned}$$

где $\lambda \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последнее равенство достаточно доказать при $\lambda = 1$. Заметим, что в силу своего строения

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}), \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2})] &= 0, & [\mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}), \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3})] &= 0, & [\mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}), \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3})] &= 0, \\ [\mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}), \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2})] &= 0, & [\mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}), \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3})] &= 0, & [\mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}), \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1})] &= 0, \\ [\mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}), \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3})] &= 0, & [\mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}), \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1})] &= 0, & [\mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}), \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2})] &= 0. \end{aligned}$$

Далее, в соответствии с формулой (23) имеем

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{L}_m - t_1 - t_2 - t_3) \circ \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) \\
&= \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) \circ (\mathcal{P}_{m_1} - t_1) \circ \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \\
&+ \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \circ (\mathcal{R}_{m_3} - t_3) \circ \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) \\
&+ \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) \circ (\mathcal{Q}_{m_2} - t_2) \circ \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}).
\end{aligned}$$

На основании формул (12) и (17) получаем

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{L}_m - t_1 - t_2 - t_3) \circ \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) \\
&= \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) \circ (\mathcal{Q}_{m_2} - t_2) \\
&+ \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) \circ (\mathcal{P}_{m_1} - t_1) \\
&+ \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) \circ (\mathcal{R}_{m_3} - t_3) \\
&= \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \circ \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) \circ (\mathcal{L}_0 - t_1 - t_2 - t_3),
\end{aligned}$$

и, таким образом, доказательство завершено.

Для натурального λ рассмотрим многочлен достаточно высокой степени N

$$\Phi_0^{(\lambda)}(x, \xi; t_1, t_2, t_3) = \sum_{i=0}^N \binom{\lambda+i-1}{i} \Phi_0^{(\lambda+i)}(x; \xi) (t_1 + t_2 + t_3)^i$$

по переменной $t_1 + t_2 + t_3 \in \mathbb{R}$ с коэффициентами из ядра Рисса оператора $\mathcal{L}_0$ (1), порожденного семейством (18).

ЛЕММА 7. *Имеем*

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) (\mathcal{L}_0 - t_1 - t_2 - t_3) \Phi_0^{(\lambda)}(x, \xi; t_1, t_2, t_3) |_{t_1=t_2=t_3=0} \\
&= \begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) \Phi_0^{(\lambda-1)}(x, \xi; t_1, t_2, t_3) |_{t_1=t_2=t_3=0}, & \lambda > 1, \\ \delta(x - \xi), & \lambda = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 \leq i \leq m_1$, $0 \leq j \leq m_2$, $0 \leq k \leq m_3$. Обозначим $N(\xi) = (G_{m_1}(\xi_{11} + \xi_{22})G_{m_2}(\xi_{11} - \xi_{22})G_{m_3}(2\xi_{12}))^{-1}$, $a_{i,j,k} = (-1)^q(q)!/(i!j!k!)$ и $q = i + j + k$. Тогда

$$\begin{aligned}
& \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) (\mathcal{L}_0 - t_1 - t_2 - t_3) \Phi_0^{(\lambda)}(x, \xi; t_1, t_2, t_3) |_{t_1=t_2=t_3=0} \\
&= \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) \\
&\times \sum_{i=0}^N \binom{\lambda+i-1}{i} \Phi_0^{(\lambda+i-1)}(x; \xi) (t_1 + t_2 + t_3)^i |_{t_1=t_2=t_3=0} \\
&- \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) \\
&\times \sum_{i=0}^N \binom{\lambda+i-1}{i} \Phi_0^{(\lambda+i)}(x; \xi) (t_1 + t_2 + t_3)^{i+1} |_{t_1=t_2=t_3=0} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= N(\xi) \sum_{i,j,k=0}^{m_1, m_2, m_3} a_{i,j,k} \binom{\lambda+q-1}{q} \mathcal{G}^i(\mathcal{P}_{m_1}) \mathcal{G}^j(\mathcal{Q}_{m_2}) \mathcal{G}^k(\mathcal{R}_{m_3}) \Phi_0^{(\lambda+q-1)}(x; \xi) \\
&\quad - N(\xi) \sum_{i,j,k=0}^{m_1, m_2, m_3} a_{i,j,k} \binom{\lambda+q-2}{q-1} \mathcal{G}^i(\mathcal{P}_{m_1}) \mathcal{G}^j(\mathcal{Q}_{m_2}) \mathcal{G}^k(\mathcal{R}_{m_3}) \Phi_0^{(\lambda+q-1)}(x; \xi) \\
&= N(\xi) G_{m_1}(x_{11} + x_{22}) G_{m_2}(x_{11} - x_{22}) G_{m_3}(2x_{12}) \Phi_0^{(\lambda-1)}(x; \xi) \\
&\quad + N(\xi) \sum_{i,j,k=0}^{m_1, m_2, m_3} a_{i,j,k} \binom{\lambda+q-2}{q} \mathcal{G}^i(\mathcal{P}_{m_1}) \mathcal{G}^j(\mathcal{Q}_{m_2}) \mathcal{G}^k(\mathcal{R}_{m_3}) \Phi_0^{(\lambda+q-1)}(x; \xi) \\
&= N(\xi) \begin{cases} \sum_{i,j,k=0}^{m_1, m_2, m_3} a_{i,j,k} \binom{\lambda+q-2}{q} \mathcal{G}^i(\mathcal{P}_{m_1}) \mathcal{G}^j(\mathcal{Q}_{m_2}) \\ \quad \times \mathcal{G}^k(\mathcal{R}_{m_3}) \Phi_0^{(\lambda+q-1)}(x; \xi), & \lambda > 1, \\ G_{m_1}(x_{11} + x_{22}) G_{m_2}(x_{11} - x_{22}) G_{m_3}(2x_{12}) \delta(x - \xi), & \lambda = 1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) \Phi_0^{(\lambda-1)}(x, \xi; t_1, t_2, t_3)|_{t_1=t_2=t_3=0}, & \lambda > 1, \\ \delta(x - \xi), & \lambda = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Нетрудно проверить, что

$$\Phi_m^{(\lambda)}(x; \xi) = \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) \Phi_0^{(\lambda)}(x, \xi; t_1, t_2, t_3)|_{t_1=t_2=t_3=0}.$$

Покажем, что $\mathcal{L}_m^\lambda \Phi_m^{(\lambda)}(x; \xi) = \delta(x - \xi)$. На основании лемм 6 и 7 имеем

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_m^\lambda \Phi_m^{(\lambda)}(x; \xi) \\
&= (\mathcal{L}_m - t_1 - t_2 - t_3)^\lambda \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) \Phi_0^{(\lambda)}(x, \xi; t_1, t_2, t_3)|_{t_1=t_2=t_3=0} \\
&= (\mathcal{L}_m - t_1 - t_2 - t_3)^{\lambda-1} \\
&\quad \times \mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) (\mathcal{L}_0 - t_1 - t_2 - t_3) \Phi_0^{(\lambda)}(x, \xi; t_1, t_2, t_3)|_{t_1=t_2=t_3=0} \\
&= \mathcal{L}_m^{\lambda-1} (\mathcal{D}(\mathcal{P}_{m_1}) \mathcal{D}(\mathcal{Q}_{m_2}) \mathcal{D}(\mathcal{R}_{m_3}) (\mathcal{L}_0 - t_1 - t_2 - t_3) \\
&\quad \times \Phi_0^{(\lambda)}(x, \xi; t_1, t_2, t_3)|_{t_1=t_2=t_3=0}) = \begin{cases} \mathcal{L}_m^{\lambda-1} \Phi_m^{(\lambda-1)}(x; \xi), & \lambda > 1, \\ \delta(x - \xi), & \lambda = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Используя последний результат, получаем

$$\mathcal{L}_m^\lambda \Phi_m^{(\lambda)}(x; \xi) = \dots = \mathcal{L}_m \Phi_m^{(1)}(x; \xi) = \delta(x - \xi),$$

и доказательство завершено.

СЛЕДСТВИЕ 7. Для оператора $\mathcal{L}_m^\lambda$, $\lambda = 1, 2, \dots$, выполняется усиленный принцип Гюйгенса, если

$$n - 1 \geq 2(\lambda + M_1 + M_2 + M_3).$$

Теперь сформулируем теорему о фундаментальном решении оператора $\mathcal{L}_m$, определенного равенством (3').

ТЕОРЕМА 2. *Фундаментальное решение оператора $\mathcal{L}_m^\lambda$, $\lambda = 1, 2, \dots$, имеет вид*

$$\Psi_m^{(\lambda)}(x; \xi) = \frac{1}{G_m(\xi_{11})} \sum_{i=0}^M (-1)^i \binom{\lambda + i - 1}{i} \text{ad}_{\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_0^2}^i G_m(x_{11}) \Phi_0^{(2\lambda+2i)}(x; \xi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формул (11) и (6) имеем следующее сплетающее соотношение:

$$(\mathcal{L}_m - t) \circ \mathcal{D}_m(\partial_t) = \mathcal{D}_m(\partial_t) \circ (\mathcal{L}_0^2 - t),$$

где

$$\mathcal{D}_m(\partial_t) = \frac{1}{G_m(\xi_{11})} \sum_{i=0}^M \frac{(-1)^i}{i!} \text{ad}_{\mathcal{L}_m, \mathcal{L}_0^2}^i G_m(x_{11}) \circ \frac{\partial^i}{\partial t^i}.$$

Аналогично доказательству теоремы 1 проверяется, что

$$\Psi_m^{(\lambda)}(x; \xi) = \mathcal{D}_m(\partial_t) \Psi_0^{(\lambda)}(x, \xi; t)|_{t=0},$$

где

$$\Psi_0^{(\lambda)}(x, \xi; t) = \sum_{i=0}^N \binom{\lambda + i - 1}{i} \Phi_0^{(2\lambda+2i)}(x; \xi) t^i.$$

СЛЕДСТВИЕ 8. *Для оператора $\mathcal{L}_m^\lambda$, $\lambda = 1, 2, \dots$, выполняется усиленный принцип Гюйгенса, если*

$$n - 1 \geq 4(\lambda + M).$$

Первые новые примеры операторов с усиленным принципом Гюйгенса получаются в случае $n = 5$, $\gamma^{(2)} = \gamma^{(3)} = 0$ ($m_1 = m_2 = 0$, $m_3 = 1$ или $m_1 = m_3 = 0$, $m_2 = 1$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{(0,0,1)} &= \det((\partial_{ij})_{i,j=1,\dots,5}) + \frac{1}{2x_{12}^2} \det((\partial_{ij})_{i,j=3,4,5}), \\ \mathcal{L}_{(0,1,0)} &= \det((\partial_{ij})_{i,j=1,\dots,5}) + \frac{2}{(x_{11} - x_{22})^2} \det((\partial_{ij})_{i,j=3,4,5}), \end{aligned}$$

и также в случае $n = 9$, $\gamma = 0$, $m = 1$:

$$\mathcal{L}_1 = \det^2((\partial_{ij})_{i,j=1,\dots,9}) - \frac{2}{x_{11}^2} \det^2((\partial_{ij})_{i,j=2,\dots,9}).$$

Список литературы

1. Берест Ю. Ю., Веселов А. П. Принцип Гюйгенса и интегрируемость // УМН. 1994. Т. 49. №6. С. 8–78.
2. Berest Y. Hierarchies of Huygens' Operators and Hadamard's Conjecture // Acta Appl. Math. 1998. V. 53. P. 125–185.
3. Chalykh O. A., Feigin M. V., Veselov A. P. Multidimensional Baker–Akhiezer Function and Huygens' Principle // Commun. Math. Phys. 1999. V. 206. P. 533–566.
4. Габриелов А. М., Паламодов В. П. Принцип Гюйгенса и его обобщения // И. Г. Петровский. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. Избранные труды. М.: Наука, 1968. С. 449–456.
5. Berest Y. The problem of lacunas and analysis on root systems // Trans. of the Amer. Math. Soc. 2000. V. 352. № 8. P. 3743–3776.
6. Гиндикин С. Г. Анализ в однородных областях // УМН. 1964. Т. 19. №4(118). С. 3–92.
7. Вайнберг Б. Р., Гиндикин С. Г. Об усиленном принципе Гюйгенса для одного класса дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 151–180.
8. Хэкало С. П. Изогюйгеновы деформации однородных дифференциальных операторов, связанных со специальным конусом ранга три // Матем. заметки. 2001. Т. 70. №6. С. 927–940.
9. Garding L. The solution of Cauchy's problem for two totally hyperbolic differential equations by means of Riesz integrals // Ann. Math. 1947. V. 48. № 4. P. 785–826.
10. Хэкало С. П. Фундаментальное решение итерированного оператора типа Кэли–Гординга // УМН. 2000. Т. 55. №3. С. 191–192.
11. Berest Y., Molchanov Y. Fundamental solution for partial differential equations with reflection group invariance // J. Math. Phys. 1995. V. 36. № 8. P. 4324–4339.
12. Berest Y. Y., Loutsenko I. M. Huygens' Principle in Minkowski Spaces and Soliton Solutions of the Korteweg–de Vries Equation // Commun. Math. Phys. 1997. V. 190. P. 113–132.
13. Riesz M. L'integrale de Riemann–Liouville et le probleme de Cauchy // Acta Math. 1949. V. 81. P. 1–223.
14. Демидов Е. Е. Иерархия Кадомцева–Петвиашвили и проблема Шоттки. Специальный курс. М.: МК НМУ, 1995.

Коломенский государственный педагогический институт
E-mail: fmf@kolomna.ru

Поступило в редакцию
20.II.2002