Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарев, Асимптотика в дальней зоне решений нелинейного уравнения с дробной производной, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 2, 37–66

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4469>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:47:33

УДК 517.9+535.5

Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, И. А. Шишмарёв

Асимптотика в дальней зоне решений нелинейного уравнения с дробной производной

Получена асимптотика решений задачи Коши для нелинейного уравнения с дробной производной. Показано, что остаточный член в асимптотической формуле является остатком и в дальней зоне, т. е. когда пространственная и временная координаты одновременно стремятся к бесконечности. Рассмотрен случай немалых данных задачи Коши.

Библиография: 39 наименований.

Ключевые слова: асимптотика в дальней зоне, нелинейное уравнение теплопроводности, критическая нелинейность.

§ 1. Введение

Рассмотрим следующую задачу Коши для нелинейного уравнения с дробной производной:

$$\begin{aligned}u_t + \mathcal{L}u + |u|^\sigma u &= f, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\u(0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R},\end{aligned}\tag{1}$$

где линейный оператор $\mathcal{L}$ задает дробную производную порядка $\alpha > 0$:

$$\mathcal{L}u = |\partial_x|^\alpha u = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} |\xi|^\alpha \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} u,$$

а функция $f(t, x)$ в правой части уравнения (1) является заданной.

Заметим, что (1) при $\alpha = 2$, $f \equiv 0$ является нелинейным уравнением теплопроводности

$$u_t - u_{xx} + |u|^\sigma u = 0,\tag{2}$$

где $\sigma > 0$ – порядок нелинейности. Уравнение (2) с суперкритическим порядком нелинейности $\sigma > 2$ изучено в работах [1], [2]. Критический случай, когда $\sigma = 2$, был рассмотрен в статье [3]. В субкритическом случае, когда $\sigma \in (0, 2)$, уравнение (2) было исследовано в работах [4]–[8].

Локальное по времени существование решений задачи Коши (1) при $\alpha \neq 2$ может быть легко установлено в рамках $\mathbb{L}^2$ -теории с помощью метода последовательных приближений (см., например, [9]). В последние годы нелинейные диссипативные уравнения с производными дробного порядка в главной части изучались весьма интенсивно (см. работы [10]–[14] и цитированную в них литературу). Например, в работах [15]–[22] были развиты асимптотические методы для различных нелинейных эволюционных уравнений. Разрушение за конечное время положительных решений задачи Коши для уравнения

$$u_t - u_{xx} - u^{1+\sigma} = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) > 0,\tag{3}$$

было доказано в работах [23]–[25] для $0 < \sigma < 2$, $\alpha = 2$, в работах [9], [26], [27] для $\sigma = 2$, $\alpha = 2$ и в статье [28] для $0 < \sigma \leq \alpha \leq 2$. В суперкритическом случае, $\sigma > 2$, глобальное по времени существование малых решений задачи Коши (3) было установлено в статье [23]. В работе [29] изучено поведение решений конвективно-диффузионного уравнения произвольной пространственной размерности

$$u_t - \Delta u - \nabla(|u|^{\sigma-1}u) = 0 \quad (4)$$

при $\sigma \geq 2$ и без условия малости начальных возмущений. Так, например, было показано, что для любых начальных данных $u_0 \in \mathbb{L}^1$ решения уравнения (4) в суперкритическом случае $\sigma > 2$ при больших значениях времени приближаются к ядру уравнения теплопроводности и в критическом случае $\sigma = 2$ – к соответствующему автомодельному решению. Поведение при больших значениях времени решений задачи Коши для уравнения (4) с линейным оператором $\mathcal{L} = -\partial_x^2 + |\partial_x|^\alpha$, $1 < \alpha < 2$, было исследовано в работах [30], [31]. Результаты, аналогичные работе [29], получены в [30] для суперкритического случая $\sigma > \alpha$ и в статье [31] для критического случая $\sigma = \alpha$. Метод доказательства в этих работах основан на свойстве $\mathbb{L}^1$ -сжатия полугруппы $\exp(-t|\partial_x|^\alpha)$, если $1 < \alpha < 2$ (см. [10]).

Задача Коши (1) с критическим порядком нелинейности $\sigma = \alpha$ была изучена в работе [32]. В частности, при условии, налагаемом на начальные возмущения, $(1 + x^2)^{\frac{\beta}{2}} u_0 \in \mathbb{L}^1$, $\beta > 0$, в работе [32] была доказана равномерно по $x \in \mathbb{R}$ следующая асимптотическая формула для решений при $t \rightarrow \infty$:

$$u(t, x) = t^{-\frac{1}{\alpha}} (\log t)^{-\frac{1}{\alpha}} (G(\chi) + O((\log t)^{-1} \log \log t)), \quad (5)$$

где $\chi = t^{-\frac{1}{\alpha}} x$ – автомодельная переменная и функция $G(\chi)$ определена по формуле

$$G(\chi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\chi\xi} e^{-|\xi|^\alpha} d\xi.$$

Заметим, что формула (5) не дает ответа на вопрос о том, какова асимптотика решений $u(t, x)$ в случае, когда t и x одновременно стремятся к бесконечности, причем $\chi \rightarrow \infty$. Действительно, главный член асимптотики (5) убывает при $|\chi| \rightarrow \infty$, в то время как зависимость от χ остатка в правой части формулы (5) не вычислена явно. Напомним, что асимптотика в дальней зоне решений задачи Коши (1) с суперкритическим порядком нелинейности $\sigma > \alpha$ была изучена в статье [33]. Однако вопрос о поведении решений в дальней зоне остается открытым в критическом случае $\sigma = \alpha$.

В настоящей работе мы определим асимптотику решения $u(t, x)$ задачи Коши для уравнения (1) в дальней зоне, т.е. при $t \rightarrow \infty$ и $\chi = xt^{-\frac{1}{\alpha}} \rightarrow \infty$. Перед тем как сформулировать основной результат настоящей работы, введем некоторые обозначения.

Определим прямое преобразование Фурье следующим образом:

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}(\varphi(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \varphi(x) dx.$$

Тогда обратное преобразование Фурье задается формулой

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(\varphi(\xi)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \varphi(\xi) d\xi.$$

Как обычно, через $\mathbb{L}^p$, где $1 \leq p \leq \infty$, обозначим пространство Лебега с нормой $\|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ для $1 \leq p < \infty$ и с нормой $\|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^\infty} = \text{ess. sup}_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$. Определим весовое пространство Лебега

$$\mathbb{L}^{p,\beta} = \{ \varphi \in \mathbb{L}^p : \langle x \rangle^\beta \varphi \in \mathbb{L}^p, \|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^{p,\beta}} = \|\langle x \rangle^\beta \varphi(x)\|_{\mathbb{L}^p} < \infty \},$$

где $\langle x \rangle^\beta = (1 + x^2)^{\frac{\beta}{2}}$, $\beta \geq 0$. В случаях, когда функция зависит от нескольких переменных, всюду далее индекс x у нормы $\mathbb{L}_x^p$ обозначает то, что норма в пространстве Лебега берется по пространственной переменной x . Через $\mathbb{C}(\mathbb{I}; \mathbb{B})$ обозначим пространство непрерывных функций, отображающих временной интервал $\mathbb{I}$ в некоторое банахово пространство $\mathbb{B}$. Различные положительные постоянные будем обозначать одной и той же буквой C , а общую массу начальных возмущений – через $\theta = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx$.

Сформулируем основные результаты настоящей работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть порядок нелинейности σ равен α и общая масса начальных возмущений $\theta = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx$ положительна. Предположим, что начальные возмущения имеют достаточно малую норму $\|u_0\|_{\mathbb{L}^\infty, \alpha+1}$ и правая часть задачи Коши $f(t, x) \in \mathbb{C}([0, \infty); \mathbb{L}^{\infty, \alpha+1}(\mathbb{R}))$ достаточно мала в следующей норме:

$$\sup_{t \geq 0} (\log(2+t))^{1+\frac{1}{\alpha}} (\|f(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^{\infty, \alpha+1}} + \langle t \rangle^{1+\frac{1}{\alpha}} \|f(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty}).$$

Тогда существует единственное решение задачи Коши (1)

$$u(t, x) \in \mathbb{C}((0, \infty); \mathbb{L}^{\infty, \alpha+1}(\mathbb{R})) \cap \mathbb{C}([0, \infty); \mathbb{L}^2(\mathbb{R})).$$

Более того, справедлива следующая асимптотика равномерно по $x \in \mathbb{R}$ при $t \rightarrow \infty$:

$$u(t, x) = t^{-\frac{1}{\alpha}} (\log t)^{-\frac{1}{\alpha}} G(\chi) + O(t^{-\frac{1}{\alpha}} (\log t)^{-1-\frac{1}{\alpha}} \langle \chi \rangle^{-\alpha-1} \log \log t), \quad (6)$$

где $\chi = t^{-\frac{1}{\alpha}} x$, $G(\chi) = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow \chi}^{-1}(e^{-|\xi|^\alpha})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Далее докажем, что асимптотика при $\chi \rightarrow \infty$ ядра $G(\chi)$ имеет следующий вид (см. ниже лемму 1):

$$G(\chi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(\alpha+1) |\chi|^{-1-\alpha} \sin \frac{\pi\alpha}{2} + O(|\chi|^{-1-2\alpha}). \quad (7)$$

Поэтому остаточный член в формуле (6) является остатком и в дальней зоне, когда одновременно $t \rightarrow \infty$ и $|\chi| \rightarrow \infty$.

В случае, когда $\alpha \in (0, 2]$ в уравнении (1), мы можем отказаться от требования малости начальных возмущений и правой части этого уравнения.

ТЕОРЕМА 2. Пусть порядок нелинейности σ равен α и $0 < \alpha \leq 2$. Предположим, что $u_0 \in \mathbb{L}^{\infty, \alpha+1}$ и $u_0 > 0$ почти всюду на $\mathbb{R}$, а правая часть $f(t, x) \in \mathbb{C}([0, \infty); \mathbb{L}^{\infty, \alpha+1})$ задачи Коши (1) такова, что $f \geq 0$ почти всюду на $[0, \infty) \times \mathbb{R}$ и имеет ограниченную норму

$$\sup_{t \geq 0} (\log(2+t))^{1+\frac{1}{\alpha}} (\|f(t, x)\|_{\mathbb{L}^{\infty, \alpha+1}} + \langle t \rangle^{1+\frac{1}{\alpha}} \|f(t, x)\|_{\mathbb{L}^{\infty}}).$$

Тогда существует единственное решение задачи Коши (1)

$$u(t, x) \in \mathbb{C}((0, \infty); \mathbb{L}^{\infty, \alpha+1}) \cap \mathbb{C}([0, \infty); \mathbb{L}^2)$$

и для него справедлива асимптотика (6).

Отметим, что если $\alpha = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, то главный член асимптотики в формуле (7) обращается в нуль. В действительности при четных значениях α функция $G(\chi)$ убывает экспоненциально, так что формула (6) при четных α описывает всего лишь оценку решения в дальней зоне, когда одновременно $t \rightarrow \infty$ и $\chi = xt^{-\frac{1}{\alpha}} \rightarrow \infty$. В этом случае, чтобы описать асимптотику, необходимо наложить несколько более жесткие ограничения на скорость убывания начального возмущения u_0 и правой части f задачи Коши (1). В случае нелинейного уравнения теплопроводности (т. е. когда $\alpha = 2$) доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\sigma = \alpha = 2$. Предположим, что начальное возмущение $u_1(x) = u(x, 1) \geq 0$ почти всюду на $\mathbb{R}$ таково, что $u_1(x)e^{\frac{x^2}{4}}, (\partial_x u_1(x))e^{\frac{x^2}{4}} \in \mathbb{L}^{\infty}$, а правая часть $f \geq 0$ задачи Коши (1) почти всюду на $[1, \infty) \times \mathbb{R}$ имеет ограниченную норму

$$\sup_{t \geq 1} ((\log(1+t))^2 \langle t \rangle \|f(t, x)e^{\frac{x^2}{4t}}\|_{\mathbb{L}^{\infty}} + (\log(1+t))^{\frac{5}{2}} \langle t \rangle^{\frac{3}{2}} \|\partial_x(f(t, x)e^{\frac{x^2}{4t}})\|_{\mathbb{L}^{\infty}}).$$

Тогда существует единственное решение $u \in \mathbb{C}([1, \infty) \times \mathbb{R})$ задачи Коши (1). Более того, существует функция $A \in \mathbb{L}^{\infty}$ такая, что выполнена асимптотика

$$\begin{aligned} u(t, x) &= t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} A\left(\frac{x}{2t}\right) (1 + O((\log t)^{-1})) \\ &\times \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(A^2\left(\frac{x}{2t}\right) + O((\log t)^{-1})\right) \int_1^t \sqrt{\frac{3t}{3t-2\tau}} e^{-\frac{\tau x^2}{2t(3t-2\tau)}} \frac{d\tau}{\tau}\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (8)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как видно из теоремы 3, имеет место асимптотика

$$\int_1^t \sqrt{\frac{3t}{3t-2\tau}} e^{-\frac{\tau}{3t-2\tau} \frac{x^2}{2t}} \frac{d\tau}{\tau} = \log\left(1 + \frac{t^2}{t+x^2}\right) + O(1)$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in \mathbb{R}$. Таким образом, по сравнению с соответствующим линейным случаем асимптотика (8) в ближней зоне $|x| \ll t$ описывает

логарифмическую поправку. В дальней зоне $|x| \geq t$ асимптотика (8) имеет квазилинейный характер, т. е. отличается от соответствующего линейного случая только коэффициентом при главном члене асимптотики.

В § 2 мы сначала докажем асимптотику (7), а затем в лемме 2 установим оценки для функции Грина в весовых пространствах Лебега. В § 3 мы докажем теорему 1. В § 4 докажем теорему 2. Случай нелинейного уравнения теплопроводности ($\alpha = 2$) рассмотрен в § 5.

§ 2. Предварительные оценки

Рассмотрим линейную задачу Коши

$$\begin{aligned} u_t + |\partial_x|^\alpha u &= F(t, x), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\alpha > 0$. С помощью формулы Дюамеля запишем решение задачи (9) следующим образом:

$$u(t) = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^\alpha t} \widehat{u_0}(\xi)) + \int_0^t \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^\alpha (t-\tau)} (\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} F(\tau, x))) d\tau.$$

Отметим, что оператор Грина может быть записан также в виде свертки:

$$\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^\alpha t} \widehat{\varphi}(\xi)) = \frac{t^{-\frac{1}{\alpha}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} G(t^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y)) \varphi(y) dy \quad (10)$$

с ядром Грина

$$G(\chi) = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow \chi}^{-1}(e^{-|\xi|^\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\chi\xi} e^{-|\xi|^\alpha} d\xi. \quad (11)$$

Сначала мы вычислим асимптотику ядра Грина $G(\chi)$ при больших значениях аргумента $\chi \rightarrow \pm\infty$.

ЛЕММА 1. Пусть $\alpha > 0$. Тогда верна асимптотика

$$G(\chi) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(\alpha+1) |\chi|^{-1-\alpha} \sin \frac{\pi\alpha}{2} + O(|\chi|^{-1-2\alpha}) \quad (12)$$

при $|\chi| \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что ядро Грина

$$G(\chi) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \cos(\chi\xi) e^{-\xi^\alpha} d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{i\chi\xi} e^{-\xi^\alpha} d\xi$$

является четной функцией по переменной χ , поэтому достаточно рассмотреть только случай $\chi \rightarrow +\infty$. Пользуясь аналитичностью подынтегральной функции, повернем контур интегрирования на малый угол $\mu \in (0, \min(\pi, \frac{\pi}{2\alpha}))$ так,

чтобы $\operatorname{Re} e^{i\alpha\mu} > 0$ и $\operatorname{Re} i e^{i\mu} < 0$. Сделав после этого замену переменной интегрирования $\xi = \eta e^{i\mu}$, получим

$$G(\chi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} e^{i\mu} \int_0^\infty e^{-\lambda\eta - e^{i\alpha\mu}\eta^\alpha} d\eta,$$

где $\lambda = -i e^{i\mu} \chi$. Поскольку $\operatorname{Re} e^{i\mu} \int_0^\infty e^{-\lambda\eta} d\eta = \operatorname{Re} \frac{e^{i\mu}}{\lambda} = 0$, имеет место представление

$$\begin{aligned} G(\chi) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} e^{i(\alpha+1)\mu} \int_0^\infty e^{-\lambda\eta} \eta^\alpha d\eta \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} e^{i\mu} \int_0^\infty e^{-\lambda\eta} (e^{-e^{i\alpha\mu}\eta^\alpha} - 1 + e^{i\alpha\mu}\eta^\alpha) d\eta. \end{aligned} \quad (13)$$

Первое слагаемое в правой части (13) дает главный член асимптотики (12), который может быть выражен через гамма-функцию Эйлера заменой переменной интегрирования $\eta = \frac{z}{\lambda}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} e^{i(\alpha+1)\mu} \int_0^\infty e^{-\lambda\eta} \eta^\alpha d\eta &= \operatorname{Re} e^{i(\alpha+1)\mu} \lambda^{-1-\alpha} \int_0^\infty e^{-z} z^\alpha dz \\ &= -\Gamma(\alpha+1) \chi^{-1-\alpha} \sin \frac{\pi\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Ко второму слагаемому в правой части (13) применима лемма Ватсона (см. [34, лемма 1.3]). Обозначая

$$F(\eta) = \frac{e^{-e^{i\alpha\mu}\eta^\alpha} - 1 + e^{i\alpha\mu}\eta^\alpha}{\eta^{2\alpha}},$$

получаем оценку остатка в асимптотической формуле (12)

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\eta} (e^{-e^{i\alpha\mu}\eta^\alpha} - 1 + e^{i\alpha\mu}\eta^\alpha) d\eta = \int_0^\infty e^{-\lambda\eta} \eta^{2\alpha} F(\eta) d\eta = O(\lambda^{-1-2\alpha}).$$

Лемма доказана.

В следующей лемме мы установим ряд предварительных оценок для оператора Грина в нормах весового пространства Лебега $\|\varphi\|_{\mathbb{L}^{p,\beta}}$, где $\beta \geq 0$, $1 \leq p \leq \infty$.

ЛЕММА 2. Пусть $\varphi(x) \in \mathbb{L}^{\infty,\beta}$, $\beta \in [0, 1 + \alpha]$. Тогда имеют место оценки

$$\|\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha}t} \widehat{\varphi}(\xi))\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \leq \min(t^{-\frac{1}{\alpha}} \|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^1}, \|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^\infty}), \quad (14)$$

$$\|\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha}t} \widehat{\varphi}(\xi))\|_{\mathbb{L}_x^{\infty,\beta}} \leq C \langle t \rangle^{\frac{\beta-1}{\alpha}} \|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^1} + C \|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^{\infty,\beta}} \quad (15)$$

для всех $t > 0$. Более того, если $\varphi(x) \in \mathbb{L}^{\infty,\beta} \cap \mathbb{L}^{1,\gamma}$ при $\beta \in [0, 1 + \alpha + \gamma]$, $\gamma \in [0, 1]$, то для всех $t \geq 1$

$$\begin{aligned} &\| \langle xt^{-\frac{1}{\alpha}} \rangle^\beta (\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha}t} \widehat{\varphi}(\xi)) - \theta t^{-\frac{1}{\alpha}} G(xt^{-\frac{1}{\alpha}})) \|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\ &\leq C t^{-\frac{1+\gamma}{\alpha}} \|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^{1,\gamma}} + C t^{-\frac{\beta}{\alpha}} \|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^{\infty,\beta}}, \end{aligned} \quad (16)$$

где $\theta = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) dy$. Также справедливы следующие оценки для остатка:

1) для всех $0 < \tau < \frac{t}{2}$

$$\begin{aligned} & \left\| |xt^{-\frac{1}{\alpha}}|^{\beta} (\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha}(t-\tau)}(\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} f(\tau, x))) - \vartheta(\tau)(t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}} G(x(t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}})) \right\|_{\mathbb{L}_x^{\infty}} \\ & \leq Ct^{-\frac{2}{\alpha}} \|f(\tau, x)\|_{\mathbb{L}^{1,1}} + Ct^{-\frac{\beta}{\alpha}} \|f(\tau, x)\|_{\mathbb{L}^{\infty, \beta}}, \quad (17) \end{aligned}$$

где $2 < \beta \leq 2 + \alpha$ и $\vartheta(\tau) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau, y) dy$;

2) для всех $\frac{t}{2} \leq \tau < t$

$$\begin{aligned} & \left\| |xt^{-\frac{1}{\alpha}}|^{\beta} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha}(t-\tau)}(\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} f(\tau, x))) \right\|_{\mathbb{L}_x^{\infty}} \\ & \leq C \|f(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^{\infty}} + C \tau^{-\frac{\beta}{\alpha}} \|f(\tau, x)\|_{\mathbb{L}^{\infty, \beta}}, \quad (18) \end{aligned}$$

где $0 \leq \beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция $G(x)$ ограничена при всех $x \in \mathbb{R}$, ввиду леммы 1 имеем оценку

$$\|G(x)\|_{\mathbb{L}^{\infty, 1+\alpha}} \leq C. \quad (19)$$

Аналогично может быть получена и оценка производной

$$\left\| \frac{dG(x)}{dx} \right\|_{\mathbb{L}^{\infty, 2+\alpha}} \leq C. \quad (20)$$

Отсюда, учитывая (19), получим

$$\begin{aligned} t^{-\frac{1}{\alpha}} \|G(xt^{-\frac{1}{\alpha}})\|_{\mathbb{L}_x^1} &= \|G(x)\|_{\mathbb{L}^1} \leq C \|\langle x \rangle^{-1-\alpha}\|_{\mathbb{L}^1} \leq C, \\ t^{-\frac{\beta}{\alpha}} \| |x|^{\beta} G(xt^{-\frac{1}{\alpha}}) \|_{\mathbb{L}_x^{\infty}} &= \| |x|^{\beta} G(x) \|_{\mathbb{L}^{\infty}} \leq C \|\langle x \rangle^{\beta-1-\alpha}\|_{\mathbb{L}^{\infty}} \leq C, \end{aligned}$$

где $\beta \in [0, 1 + \alpha]$. Тогда с помощью неравенства Юнга для свертки

$$\left\| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-y) \psi(y) dy \right\|_{\mathbb{L}^p} \leq \|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^q} \|\psi(x)\|_{\mathbb{L}^r}$$

при $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1$ получаем оценки (14), (15) леммы для всех $t > 0$:

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha}t} \widehat{\varphi}(\xi)) \right\|_{\mathbb{L}_x^{\infty}} \leq \|t^{-\frac{1}{\alpha}} G(t^{-\frac{1}{\alpha}}x)\|_{\mathbb{L}_x^1} \|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^{\infty}} \leq C \|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^{\infty}}, \\ & \left\| \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha}t} \widehat{\varphi}(\xi)) \right\|_{\mathbb{L}_x^{\infty}} \leq \|t^{-\frac{1}{\alpha}} G(t^{-\frac{1}{\alpha}}x)\|_{\mathbb{L}_x^{\infty}} \|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^1} \leq Ct^{-\frac{1}{\alpha}} \|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^1}; \\ & \left\| \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha}t} \widehat{\varphi}(\xi)) \right\|_{\mathbb{L}_x^{\infty, \beta}} \leq C \| |x|^{\beta} t^{-\frac{1}{\alpha}} G(t^{-\frac{1}{\alpha}}x) \|_{\mathbb{L}_x^{\infty}} \|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^1} \\ & + C \|t^{-\frac{1}{\alpha}} G(t^{-\frac{1}{\alpha}}x)\|_{\mathbb{L}_x^1} \|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^{\infty, \beta}} \leq C \langle t \rangle^{\frac{\beta-1}{\alpha}} \|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^1} + C \|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^{\infty, \beta}}, \end{aligned}$$

где $0 \leq \beta \leq 1 + \alpha$.

Для доказательства оценки (16) леммы запишем явное тождество

$$\begin{aligned} & |t^{-\frac{1}{\alpha}}x|^{\beta} (\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha}t} \widehat{\varphi}(\xi)) - \vartheta t^{-\frac{1}{\alpha}} G(t^{-\frac{1}{\alpha}}x)) \\ & = t^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} |t^{-\frac{1}{\alpha}}x|^{\beta} (G(t^{-\frac{1}{\alpha}}(x-y)) - G(t^{-\frac{1}{\alpha}}x)) \varphi(y) dy \end{aligned}$$

при $\beta \geq 0$. В то же время, воспользовавшись оценкой (20), по формуле Лагранжа для всех $\chi, \eta \in \mathbb{R}$, $|\eta| \leq \frac{|\chi|}{2}$, найдем

$$\begin{aligned} |\chi|^\beta |G(\chi - \eta) - G(\chi)| &\leq |\chi|^\beta |\eta| |G'(\chi^*)| \leq C |\chi|^\beta |\eta| \langle \chi^* \rangle^{-2-\alpha} \\ &\leq C |\eta|^\gamma |\chi|^{\beta+1-\gamma} \langle \chi \rangle^{-2-\alpha}, \end{aligned}$$

где $\gamma \in [0, 1]$. Поэтому с помощью неравенства Юнга для свертки из последних двух соотношений для всех $t \geq 1$ получаем

$$\begin{aligned} &\left\| |t^{-\frac{1}{\alpha}} x|^\beta (\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^\alpha t} \widehat{\varphi}(\xi)) - \vartheta t^{-\frac{1}{\alpha}} G(t^{-\frac{1}{\alpha}} x)) \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\ &\leq C t^{-\frac{1}{\alpha}} \left\| \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} |t^{-\frac{1}{\alpha}} x|^{\beta+1-\gamma} \langle t^{-\frac{1}{\alpha}} x \rangle^{-2-\alpha} |t^{-\frac{1}{\alpha}} y|^\gamma \varphi(y) dy \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\ &\quad + C t^{-\frac{1}{\alpha}} \left\| \int_{|y| > \frac{|x|}{2}} |t^{-\frac{1}{\alpha}} x|^{\beta-\gamma} \langle t^{-\frac{1}{\alpha}} x \rangle^{-1-\alpha} |t^{-\frac{1}{\alpha}} y|^\gamma \varphi(y) dy \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\ &\quad + C t^{-\frac{1}{\alpha}} \left\| \int_{|y| > \frac{|x|}{2}} \langle t^{-\frac{1}{\alpha}} (x - y) \rangle^{-1-\alpha} |t^{-\frac{1}{\alpha}} y|^\beta \varphi(y) dy \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\ &\leq C t^{-\frac{1}{\alpha}} \left\| |t^{-\frac{1}{\alpha}} x|^\gamma \varphi(x) \right\|_{\mathbb{L}_x^1} + C t^{-\frac{1}{\alpha}} \left\| \langle t^{-\frac{1}{\alpha}} x \rangle^{-1-\alpha} \right\|_{\mathbb{L}_x^1} \left\| |t^{-\frac{1}{\alpha}} x|^\beta \varphi(x) \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\ &\leq C t^{-\frac{1+\gamma}{\alpha}} \|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^{1,\gamma}} + C t^{-\frac{\beta}{\alpha}} \|\varphi(x)\|_{\mathbb{L}^{\infty,\beta}}, \end{aligned}$$

где $0 \leq \beta \leq 1 + \alpha + \gamma$, $\gamma \in [0, 1]$. С другой стороны, пользуясь оценками (19), (20) и неравенством $|G(\chi - \eta) - G(\chi)| \leq |\eta| |G'(\chi^*)|$, имеем

$$|G(\chi - \eta) - G(\chi)| \leq C |G(\chi - \eta) - G(\chi)|^\gamma \leq C |\eta|^\gamma$$

для всех $\eta \in \mathbb{R}$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^\alpha t} \widehat{\varphi}(\xi)) - \vartheta t^{-\frac{1}{\alpha}} G(t^{-\frac{1}{\alpha}} x) \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\ &\leq C t^{-\frac{1}{\alpha}} \left\| \int_{\mathbb{R}} (G(t^{-\frac{1}{\alpha}} (x - y)) - G(t^{-\frac{1}{\alpha}} x)) \varphi(y) dy \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\ &\leq C t^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} |t^{-\frac{1}{\alpha}} y|^\gamma \varphi(y) dy = C t^{-\frac{1+\gamma}{\alpha}} \| |x|^\gamma \varphi \|_{\mathbb{L}^1} \leq C t^{-\frac{1+\gamma}{\alpha}} \|\varphi\|_{\mathbb{L}^{1,\gamma}}. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка (16) имеет место.

Чтобы доказать оценку (17), запишем

$$\begin{aligned} &|t^{-\frac{1}{\alpha}} x|^\beta (G((t - \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} (x - y)) - G((t - \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} x)) \\ &\leq |(t - \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} x|^\beta (G((t - \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} (x - y)) - G((t - \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} x)) \\ &\leq C |(t - \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} y| \langle (t - \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} x \rangle^{\beta-2-\alpha} \\ &\quad + C |(t - \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} y|^\beta (\langle (t - \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} (x - y) \rangle^{-1-\alpha} + \langle (t - \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} y \rangle^{-1-\alpha}) \end{aligned}$$

для всех $x, y \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Используя полученное неравенство, для всех $0 < \tau < \frac{t}{2}$ имеем

$$\left\| |t^{-\frac{1}{\alpha}} x|^\beta (\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^\alpha (t-\tau)} (\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} f(\tau, x))) - \vartheta(\tau) (t - \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} G((t - \tau)^{-\frac{1}{\alpha}} x)) \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C(t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}} \left\| \int_{\mathbb{R}} \langle (t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}} x \rangle^{\beta-2-\alpha} |(t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}} y| f(\tau, y) dy \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\
&\quad + C(t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}} \left\| \int_{\mathbb{R}} (\langle (t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}} (x-y) \rangle^{-1-\alpha} \right. \\
&\quad \left. + \langle (t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}} y \rangle^{-1-\alpha}) |(t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}} y|^\beta f(\tau, y) dy \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\
&\leq C(t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}} \|\langle (t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}} x \rangle^{\beta-2-\alpha}\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \| (t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}} x | f(\tau, x) \|_{\mathbb{L}_x^1} \\
&\quad + C(t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}} \|\langle (t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}} x \rangle^{-1-\alpha}\|_{\mathbb{L}_x^1} \| (t-\tau)^{-\frac{1}{\alpha}} x |^\beta f(\tau, x) \|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\
&\leq C t^{-\frac{2}{\alpha}} \|f(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^{1,1}} + C t^{-\frac{\beta}{\alpha}} \|f(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^{\infty, \beta}}.
\end{aligned}$$

Аналогично имеем (18) для всех $\frac{t}{2} \leq \tau < t$:

$$\begin{aligned}
&\| |t^{-\frac{1}{\alpha}} x|^\beta \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} (e^{-|\xi|^\alpha(t-\tau)} (\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} f(\tau, x))) \|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\
&\leq t^{-\frac{\beta}{\alpha}} \| |x|^\beta \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} (e^{-|\xi|^\alpha(t-\tau)} (\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} f(\tau, x))) \|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\
&\leq t^{-\frac{\beta}{\alpha}} (t-\tau)^{\frac{\beta}{\alpha}} \|f(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty} + t^{-\frac{\beta}{\alpha}} \| |x|^\beta f(\tau, x) \|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\
&\leq C \|f(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty} + C \tau^{-\frac{\beta}{\alpha}} \|f(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^{\infty, \beta}},
\end{aligned}$$

где $2 < \beta \leq 2 + \alpha$ и $\vartheta(\tau) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau, y) dy$. Лемма доказана.

В следующей лемме мы получим оценки для оператора Грина в норме

$$\|\varphi(t, x)\|_{\mathbb{X}} \equiv \sup_{t>0} (\langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \|\varphi(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty} + \langle t \rangle^{-1} \|\varphi(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^{\infty, \alpha+1}}).$$

Заметим, что $\mathbb{L}_x^{1, \gamma}$ -норма может быть выражена через $\mathbb{X}$ -норму следующим образом:

$$\begin{aligned}
\langle t \rangle^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \|\varphi(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^{1, \gamma}} &= \langle t \rangle^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \int_{|x| \leq \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}}} \langle x \rangle^\gamma |\varphi(t, x)| dx \\
&\quad + \langle t \rangle^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \int_{|x| > \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}}} |\langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} x|^{1+\alpha-\gamma} \langle x \rangle^\gamma |\varphi(t, x)| |\langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} x|^{\gamma-\alpha-1} dx \\
&\leq C \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \|\varphi(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty} + C \langle t \rangle^{-1} \|\varphi(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^{\infty, \alpha+1}} \int_{|y|>1} |y|^{\gamma-\alpha-1} dy \\
&\leq C \|\varphi(t, x)\|_{\mathbb{X}},
\end{aligned} \tag{21}$$

где $\gamma \in [0, 1]$, $\gamma < \alpha$.

Зададим функцию $g(t) = 1 + \kappa \log(1+t)$ с некоторым $\kappa > 0$.

ЛЕММА 3. *Предположим, что функция $F(t, x)$ имеет нулевое среднее значение $\int_{\mathbb{R}} F(t, x) dx = 0$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left\| g(t) \int_0^t g^{-1}(\tau) \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} (e^{-|\xi|^\alpha(t-\tau)} (\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} F(\tau, x))) d\tau \right\|_{\mathbb{X}} \leq C \|\langle t \rangle F(t, x)\|_{\mathbb{X}}$$

при условии, что правая часть ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу оценки $g^{-1}(\tau) \leq C$, применяя лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t g^{-1}(\tau) \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} \left(e^{-|\xi|^\alpha(t-\tau)} (\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} F(\tau, x)) \right) d\tau \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\ & + \left\| \int_0^t g^{-1}(\tau) \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} \left(e^{-|\xi|^\alpha(t-\tau)} (\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} F(\tau, x)) \right) d\tau \right\|_{\mathbb{L}_x^{\infty, \alpha+1}} \\ & \leq C \int_0^t \|F(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty} d\tau + C \int_0^t \langle t - \tau \|F(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^1} d\tau \\ & + C \int_0^t \|F(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^{\infty, \alpha+1}} d\tau \leq C g^{-1}(t) \|\langle t \rangle F(t, x)\|_{\mathbb{X}} \end{aligned}$$

для всех $0 \leq t \leq 4$. Теперь рассмотрим $t > 4$. Из определения функции $g(t)$ следует, что

$$(1+t)^{-\frac{1}{2\alpha}} \leq C g^{-1}(t),$$

$$\sup_{\tau \in [\sqrt{t}, t]} g^{-1}(\tau) \leq C(1 + \kappa \log(1 + \sqrt{t}))^{-1} \leq C \left(1 + \frac{\kappa}{2} \log(1+t)\right)^{-1} \leq C g^{-1}(t).$$

Поэтому в силу (21) и оценки (16) при $\beta = 1 + \alpha$, $\gamma \in [0, 1]$, $\gamma < \alpha$, находим

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^t g^{-1}(\tau) \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} \left(e^{-|\xi|^\alpha(t-\tau)} (\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} F(\tau, x)) \right) d\tau \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\ & \leq C \int_0^{\sqrt{t}} (t-\tau)^{-\frac{1+\gamma}{\alpha}} \langle \tau \rangle^{\frac{\gamma}{\alpha}-1} d\tau \cdot \sup_{\tau_1 > 0} \langle \tau_1 \rangle^{1-\frac{\gamma}{\alpha}} \|F(\tau_1, x)\|_{\mathbb{L}_x^{1, \gamma}} \\ & + C \int_0^{\sqrt{t}} (t-\tau)^{-1-\frac{1}{\alpha}} d\tau \cdot \sup_{\tau_1 > 0} \|F(\tau_1, x)\|_{\mathbb{L}_x^{\infty, \alpha+1}} \\ & + C g^{-1}(t) \int_{\sqrt{t}}^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{1+\gamma}{\alpha}} \langle \tau \rangle^{\frac{\gamma}{\alpha}-1} d\tau \cdot \sup_{\tau_1 > 0} \langle \tau_1 \rangle^{1-\frac{\gamma}{\alpha}} \|F(\tau_1, x)\|_{\mathbb{L}_x^{1, \gamma}} \\ & + C g^{-1}(t) \int_{\sqrt{t}}^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-1-\frac{1}{\alpha}} d\tau \cdot \sup_{\tau_1 > 0} \|F(\tau_1, x)\|_{\mathbb{L}_x^{\infty, \alpha+1}} \\ & + C g^{-1}(t) \int_{\frac{t}{2}}^t \tau^{-1-\frac{1}{\alpha}} d\tau \cdot \sup_{\tau_1 > 0} \langle \tau_1 \rangle^{1+\frac{1}{\alpha}} \|F(\tau_1, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\ & \leq C \|\langle t \rangle F(\tau_1, x)\|_{\mathbb{X}} \left(t^{-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2\alpha}} + g^{-1}(t) t^{-\frac{1}{\alpha}} \right) \leq C \|\langle t \rangle F(\tau_1, x)\|_{\mathbb{X}} g^{-1}(t) t^{-\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} & \left\| |x|^{1+\alpha} \int_0^t g^{-1}(\tau) \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} \left(e^{-|\xi|^\alpha(t-\tau)} (\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} F(\tau, x)) \right) d\tau \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\ & \leq C \int_0^{\sqrt{t}} d\tau \cdot \sup_{\tau_1 > 0} \|F(\tau_1, x)\|_{\mathbb{L}_x^{\infty, \alpha+1}} \\ & + C \int_0^{\sqrt{t}} (t-\tau)^{1-\frac{\gamma}{\alpha}} \langle \tau \rangle^{\frac{\gamma}{\alpha}-1} d\tau \cdot \sup_{\tau_1 > 0} \langle \tau_1 \rangle^{1-\frac{\gamma}{\alpha}} \|F(\tau_1, x)\|_{\mathbb{L}_x^{1, \gamma}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + Cg^{-1}(t) \int_{\sqrt{t}}^t d\tau \cdot \sup_{\tau_1 > 0} \|F(\tau_1, x)\|_{\mathbb{L}_x^{\infty, \alpha+1}} \\
 & + Cg^{-1}(t) \int_{\sqrt{t}}^t (t - \tau)^{1 - \frac{\gamma}{\alpha}} \langle \tau \rangle^{\frac{\gamma}{\alpha} - 1} d\tau \cdot \sup_{\tau_1 > 0} \langle \tau_1 \rangle^{1 - \frac{\gamma}{\alpha}} \|F(\tau_1, x)\|_{\mathbb{L}_x^{1, \gamma}} \\
 & \leq C \|\langle t \rangle F(\tau_1, x)\|_{\mathbb{X}} (t^{\frac{1}{2}} + t^{1 - \frac{\gamma}{2\alpha}} + tg^{-1}(t)) \leq Ctg^{-1}(t) \|\langle t \rangle F(\tau_1, x)\|_{\mathbb{X}}
 \end{aligned}$$

для всех $t > 4$. Лемма доказана.

В следующей лемме мы вычислим главный член асимптотики при больших значениях времени среднего значения нелинейности в уравнении (1). Обозначим

$$\eta = \int_{\mathbb{R}} |G(x)|^{\alpha} G(x) dx.$$

Отметим, что в силу оценки леммы 1 интеграл, определяющий константу η , сходится. Пусть $g(t) = 1 + \theta^{\alpha} \eta \log(1 + t)$. Верна следующая лемма.

ЛЕММА 4. *Предположим, что $v_0 \in \mathbb{L}^{\infty, 1+\alpha}$, причем норма $\|v_0\|_{\mathbb{L}^{\infty, 1+\alpha}} = \varepsilon$ достаточно мала и $\int_{\mathbb{R}} v_0(x) dx = \theta$. Пусть функция $v(t, x)$ удовлетворяет оценкам*

$$\begin{aligned}
 \|v(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^{\infty}} & \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \|v(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^1} \leq C\varepsilon, \\
 \|v(t, x) - \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha} t} \widehat{v}_0(\xi))\|_{\mathbb{L}_x^1} & \leq C\varepsilon^{1+\alpha} g^{-1}(t)
 \end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Тогда справедливо неравенство

$$\left| 1 + \frac{1}{\theta} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |v(\tau, x)|^{\alpha} v(\tau, x) dx d\tau - g(t) \right| \leq C\varepsilon^{\alpha} (1 + \log g(t)) \quad (22)$$

для всех $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу оценки (16) находим

$$\|\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha} t} \widehat{v}_0(\xi)) - \theta(1 + t)^{-\frac{1}{\alpha}} G(x(1 + t)^{-\frac{1}{\alpha}})\|_{\mathbb{L}_x^1} \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{-\frac{\gamma}{\alpha}},$$

где $\gamma \in [0, 1]$, $\gamma < \alpha$. Тогда $\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha} t} \widehat{v}_0(\xi))$ имеет главный член асимптотики $\theta(1 + t)^{-\frac{1}{\alpha}} G(x(1 + t)^{-\frac{1}{\alpha}})$ и по условию леммы $v(t, x)$ асимптотически ведет себя как $\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha} t} \widehat{v}_0(\xi))$. Поэтому мы можем заменить нелинейность $|v(\tau, x)|^{\alpha} v(\tau, x)$ на $\theta^{\alpha+1}(1 + t)^{-\frac{1}{\alpha}-1} |G(x(1 + t)^{-\frac{1}{\alpha}})|^{\alpha} G(x(1 + t)^{-\frac{1}{\alpha}})$, в силу чего получаем неравенство

$$\begin{aligned}
 & \left\| |v(t, x)|^{\alpha} v(t, x) - \theta^{\alpha+1}(1 + t)^{-\frac{1}{\alpha}-1} |G(x(1 + t)^{-\frac{1}{\alpha}})|^{\alpha} G(x(1 + t)^{-\frac{1}{\alpha}}) \right\|_{\mathbb{L}_x^1} \\
 & \leq C \left(\|v(t, x) - \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha} t} \widehat{v}_0(\xi))\|_{\mathbb{L}_x^1} \right. \\
 & \quad \left. + \|\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha} t} \widehat{v}_0(\xi)) - \theta(1 + t)^{-\frac{1}{\alpha}} G(x(1 + t)^{-\frac{1}{\alpha}})\|_{\mathbb{L}_x^1} \right) \\
 & \quad \times (\|v(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^{\infty}}^{\alpha} + \|\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha} t} \widehat{v}_0(\xi))\|_{\mathbb{L}_x^{\infty}}^{\alpha} + \theta^{\alpha} \langle t \rangle^{-1} \|G(x)\|_{\mathbb{L}^{\infty}}^{\alpha}) \\
 & \leq C\varepsilon^{1+2\alpha} \langle t \rangle^{-1} g^{-1}(t) + C\varepsilon^{1+\alpha} \langle t \rangle^{-1 - \frac{\gamma}{\alpha}} \quad (23)
 \end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Замена переменной интегрирования $\chi = x(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}}$ дает

$$\begin{aligned} & (1+t)^{-\frac{1}{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} |G(x(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}})|^{\alpha} G(x(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}}) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} |G(\chi)|^{\alpha} G(\chi) d\chi = \eta. \end{aligned}$$

Учитывая последнее соотношение, перепишем (23) в виде

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}} |v(t, x)|^{\alpha} v(t, x) dx - \theta^{1+\alpha} (1+t)^{-1} \eta \right| \\ & \leq C \| |v(t, x)|^{\alpha} v(t, x) - \theta^{1+\alpha} (1+t)^{-\frac{1}{\alpha}-1} |G(x(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}})|^{\alpha} G(x(1+t)^{-\frac{1}{\alpha}}) \|_{\mathbb{L}_x^1} \\ & \leq C \varepsilon^{1+2\alpha} \langle t \rangle^{-1} g^{-1}(t) + C \varepsilon^{1+\alpha} \langle t \rangle^{-1-\frac{\gamma}{\alpha}} \end{aligned} \quad (24)$$

для всех $t > 0$. Интегрируя неравенство (24), получим

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\theta} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} |v(\tau, x)|^{\alpha} v(\tau, x) dx d\tau - \theta^{\alpha} \eta \log(1+t) \right| \\ & \leq \int_0^t \frac{C \varepsilon^{2\alpha} d\tau}{(1+\tau)(1+\theta^{\alpha} \eta \log(1+\tau))} + C \varepsilon^{\alpha} \int_0^t \langle \tau \rangle^{-1-\frac{\gamma}{\alpha}} d\tau \leq C \varepsilon^{\alpha} \log g(t) + C \varepsilon^{\alpha} \end{aligned} \quad (25)$$

для всех $t > 0$. Таким образом, из (25) следует оценка (22). Лемма доказана.

В следующей лемме мы сравним решения задачи Коши

$$\begin{aligned} w_t + |\partial_x|^{\alpha} w + w^{1+\alpha} &= \varepsilon' f, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ w(0, x) &= w_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

и задачи Коши

$$\begin{aligned} v_t + |\partial_x|^{\alpha} v + \varepsilon v^{1+\alpha} &= f, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ v(0, x) &= v_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

где $0 \leq \varepsilon, \varepsilon' \leq 1$.

ЛЕММА 5. Пусть $0 < \alpha \leq 2$ и $0 \leq \varepsilon, \varepsilon' \leq 1$. Предположим, что $w_0(x), v_0(x) \in \mathbb{L}^{\infty}$ и $0 \leq w_0(x) \leq v_0(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}$, а правая часть $f \in \mathbb{C}([0, \infty); \mathbb{L}^{\infty, \alpha+1})$ такова, что $f \geq 0$ почти всюду на $[0, \infty) \times \mathbb{R}$. Тогда имеет место неравенство

$$0 \leq w(t, x) \leq v(t, x)$$

для всех $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для разности $r = v - w$ получаем

$$r_t + |\partial_x|^{\alpha} r = (v - r)^{1+\alpha} - \varepsilon v^{1+\alpha} + (1 - \varepsilon') f, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (26)$$

с начальным условием $r(0, x) = v_0(x) - w_0(x) \geq 0$ почти всюду на $\mathbb{R}$. Нетрудно доказать, что существует единственное решение $r \in \mathbb{C}([0, \infty); \mathbb{L}^{1,a}) \cap \mathbb{L}^\infty((0, \infty); \mathbb{L}^\infty)$ задачи Коши (26) (см., например, [4]). Кроме того, благодаря сглаживающему свойству уравнения (26) имеем $r \in \mathbb{C}((0, \infty); \mathbb{C}^{\rho+\alpha}) \cap \mathbb{C}^1((0, \infty); \mathbb{C}^\rho)$ при $0 < \rho < 1 + \alpha$. Обозначим $R(t) \equiv \inf_{x \in \mathbb{R}} r(t, x)$. Требуется доказать, что $R(t) \geq 0$ для всех $t > 0$.

Предположим, что существует время $T > 0$ такое, что $R(t) < 0$. В силу непрерывности функции $R(t)$ можно найти наименьший отрезок $[T_1, T]$ такой, что $R(t) \leq 0$ для всех $t \in [T_1, T]$ и $R(T_1) = 0$. Согласно [35, теорема 2.1] существует кривая $\zeta(t) \in \mathbb{R}$ такая, что $R(t) = r(t, \zeta(t))$. Более того, почти при всех $t \in [T_1, T]$ существует производная $R'(t) = \frac{d}{dt} r(t, \zeta(t))$. Имеем

$$(v(t, \zeta(t)) - R(t))^{1+\alpha} - \varepsilon v^{1+\alpha}(t, \zeta(t)) \geq 0$$

для всех $t \in [T_1, T]$. Запишем оператор $|\partial_x|^\alpha$ с помощью потенциала Рисса $C_\alpha |x - y|^{-\alpha-1}$ (см. [36]) в точке минимума $\zeta(t)$ следующим образом:

$$|\partial_x|^\alpha r(t, \zeta(t)) = C_\alpha \int_{\mathbb{R}} |\zeta(t) - y|^{-\alpha-1} (r(t, y) - R(t)) dy \leq 0,$$

где $C_\alpha > 0$ – некоторая постоянная. В самом деле, так как (см. [37])

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{-\nu} e^{ixy} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi} \Gamma(\nu) \cos \frac{\pi\nu}{2}} |y|^{\nu-1}$$

при $\nu \in (0, 1)$, то для любой функции $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty$ выполнено равенство

$$|\partial_x|^{-\nu} \varphi = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(|\xi|^{-\nu} \widehat{\varphi}(\xi)) = \frac{1}{2\Gamma(\nu) \cos \frac{\pi\nu}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - y|^{\nu-1} \varphi(y) dy.$$

Отсюда при $\alpha \in (1, 2)$, взяв $\nu = 2 - \alpha \in (0, 1)$, получаем

$$|\partial_x|^\alpha \varphi = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(|\xi|^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)) = |\partial_x|^{-\nu} \partial_x^2 \varphi = \frac{1}{2\Gamma(\nu) \cos \frac{\pi\nu}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - y|^{\nu-1} \partial_y^2 \varphi(y) dy.$$

Интегрируя теперь дважды по частям, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Gamma(\nu) \cos \frac{\pi\nu}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - y|^{\nu-1} \partial_y^2 (\varphi(y) - \varphi(x)) dy \\ &= \frac{(1-\nu)(2-\nu)}{2\Gamma(\nu) \cos \frac{\pi\nu}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - y|^{\nu-3} (\varphi(y) - \varphi(x)) dy \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{2\Gamma(2-\alpha) \cos(\frac{\pi}{2}(2-\alpha))} \int_{-\infty}^{+\infty} |x - y|^{-\alpha-1} (\varphi(y) - \varphi(x)) dy. \end{aligned}$$

Отметим, что, поскольку выполнена оценка $\varphi(y) - \varphi(x) = O(|x - y|^2)$, последний интеграл сходится в точке минимума $x = \xi(t)$. Стандартным предельным переходом можно доказать справедливость последнего равенства для всех $\varphi \in \mathbb{C}^{\alpha+\rho}$ при $0 < \rho < 1 + \alpha$.

В случае $\alpha = 1$ для любой функции $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty$ имеем

$$\begin{aligned} |\partial_x|\varphi &= \partial_x \mathcal{H}\varphi = \frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_y \varphi(y) dy}{x-y} = \frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial_y (\varphi(y) - \varphi(x)) dy}{x-y} \\ &= \frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\varphi(y) - \varphi(x)) dy}{(x-y)^2}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{H}$ – преобразование Гильберта. Остается рассмотреть случай $\alpha \in (0, 1)$. Обозначив $\nu = 1 - \alpha$, запишем

$$|\partial_x|^\alpha \varphi = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(|\xi|^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)) = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(|\xi|^{-\nu}(-i) \operatorname{sign} \xi)(i\xi \widehat{\varphi}(\xi)).$$

Имеем (см. [37])

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\xi|^{-\nu}(-i)e^{iy\xi} \operatorname{sign} \xi d\xi = -2\Gamma(1-\nu) \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) |y|^{\nu-1} \operatorname{sign} y$$

при $\nu \in (0, 1)$. Отсюда, проводя интегрирование по частям, для любой функции $\varphi \in \mathbb{C}_0^\infty$ получаем

$$\begin{aligned} |\partial_x|^\alpha \varphi &= \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(|\xi|^{-\nu} \operatorname{sign} \xi)(\xi \widehat{\varphi}(\xi)) \\ &= -2\Gamma(1-\nu) \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} |x-y|^{\nu-1} \operatorname{sign}(x-y) \partial_y \varphi(y) dy \\ &= -2\Gamma(1-\nu) \cos\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} |x-y|^{\nu-1} \operatorname{sign}(x-y) \partial_y (\varphi(y) - \varphi(x)) dy \\ &= 2\alpha\Gamma(\alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2}(1-\alpha)\right) \int_{-\infty}^{+\infty} |x-y|^{-\alpha-1} (\varphi(y) - \varphi(x)) dy. \end{aligned}$$

Предельным переходом последнее равенство распространяется на все функции $\varphi \in \mathbb{C}^{\alpha+\rho}$ при $0 < \rho < 1 + \alpha$. Поскольку $r \in \mathbb{C}((0, \infty); \mathbb{C}^{\rho+\alpha}(\mathbb{R}))$, мы можем записать

$$|\partial_x|^\alpha r(t, \zeta(t)) = C_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} |\zeta(t) - y|^{-\alpha-1} (r(t, y) - R(t)) dy \leq 0,$$

где $C_\alpha > 0$ – некоторая постоянная. Таким образом, из уравнения (26) получаем

$$R'(t) \geq 0 \quad \forall t \in [T_1, T].$$

Отсюда, проводя интегрирование по времени, получаем $R(t) \geq 0$, что приводит нас к противоречию с предположением. Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Как и в работах [12], [38], сделаем замену $u(t, x) = v(t, x)e^{-\varphi(t)}$. Тогда для новой функции $v(t, x)$ из (1) получим уравнение

$$v_t + |\partial_x|^\alpha v + e^{-\alpha\varphi} |v|^\alpha v - \varphi' v = e^\varphi f.$$

Пусть выполнено условие

$$\int_{\mathbb{R}} \left(e^{-\alpha\varphi(t)} |v(t, x)|^\alpha v(t, x) - e^{\varphi(t)} f(t, x) - \varphi'(t) v(t, x) \right) dx = 0,$$

которое обеспечивает сохранение среднего значения новой функции $v(t, x)$, т. е.

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} v(t, x) dx = 0.$$

Последнее равенство определяет эволюцию функции $\varphi(t)$ в системе (27), приведенной ниже. Отсюда имеем $\int_{\mathbb{R}} v(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}} v_0(x) dx$ для всех $t > 0$. Выберем начальное значение $\varphi(0) = 0$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}} v_0(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx = \theta.$$

Таким образом, для новых функций $(v(t, x), \varphi(t))$ мы получаем задачу Коши

$$\begin{aligned} v_t + |\partial_x|^\alpha v &= e^{-\alpha\varphi} \left(|v|^\alpha v - e^{(\alpha+1)\varphi} f - \frac{v}{\theta} \int_{\mathbb{R}} (|v|^\alpha v - e^{(\alpha+1)\varphi} f) dx \right), \\ \varphi'(t) &= \frac{1}{\theta} e^{-\alpha\varphi} \int_{\mathbb{R}} (|v|^\alpha v - e^{(\alpha+1)\varphi} f) dx, \\ v(0, x) &= v_0(x), \quad \varphi(0) = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Обозначим $h(t) = e^{\alpha\varphi(t)}$ и перепишем (27) в виде

$$\begin{aligned} v_t + |\partial_x|^\alpha v &= \mathcal{N}, \quad v(0, x) = v_0(x), \\ h'(t) &= \frac{\alpha}{\theta} \int_{\mathbb{R}} (|v|^\alpha v - h^{1+\frac{1}{\alpha}} f) dx, \quad h(0) = 1, \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(t, x) &= \frac{1}{h(t)} \left(|v(t, x)|^\alpha v(t, x) - h^{1+\frac{1}{\alpha}}(t) f(t, x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{v(t, x)}{\theta} \int_{\mathbb{R}} (|v(t, x)|^\alpha v(t, x) - h^{1+\frac{1}{\alpha}}(t) f(t, x)) dx \right). \end{aligned}$$

Отметим, что в силу своего определения среднее значение нелинейности $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{N}(t, x) dx$ равно нулю для всех $t > 0$.

Теперь докажем существование решения $(v(t, x), h(t))$ задачи Коши (28) с помощью метода последовательных приближений. Зададим

$$v_1 = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} (e^{-|\xi|^\alpha t} \widehat{v_0}(\xi)), \quad h_1 = g(t), \quad g(t) = 1 + \theta^\alpha \eta \log(1 + t)$$

и определим последовательные приближения $(v_m(t, x), h_m(t))$, $m = 2, 3, \dots$, следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_t v_m + |\partial_x|^\alpha v_m &= \mathcal{N}_{m-1}, \quad v_m(0, x) = v_0(x), \\ h'_m &= \frac{\alpha}{\theta} \int_{\mathbb{R}} (|v_{m-1}|^\alpha v_{m-1} - h_{m-1}^{1+\frac{1}{\alpha}} f) dx, \quad h_m(0) = 1, \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\mathcal{N}_m = h_m^{-1} \left(|v_m|^\alpha v_m - h_m^{1+\frac{1}{\alpha}} f - \frac{v_m}{\theta} \int_{\mathbb{R}} (|v_m|^\alpha v_m - h_m^{1+\frac{1}{\alpha}} f) dx \right).$$

Докажем по индукции следующие оценки для всех $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} \|v_m\|_{\mathbb{X}} &\leq C\varepsilon, \\ \left\| \langle t^{-\frac{1}{\alpha}} x \rangle^{\alpha+1} (v_m(t) - \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^\alpha t} \widehat{v}_0(\xi))) \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} &\leq C\varepsilon^{1+\alpha} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} g^{-1}(t), \\ |h_m(t) - g(t)| &\leq C\varepsilon^\alpha (1 + \log g(t)), \end{aligned} \quad (30)$$

где норма в пространстве $\mathbb{X}$ задана, как и выше:

$$\|\varphi(t, x)\|_{\mathbb{X}} = \sup_{t>0} (\langle t \rangle^{-1} \|\varphi(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty, \alpha+1} + \langle t \rangle^{\frac{1}{\alpha}} \|\varphi(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty}),$$

а функция $g(t)$ введена перед леммой 4. Из леммы 2, учитывая оценки (21), находим

$$\|\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^\alpha t} \widehat{v}_0(\xi))\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \leq C\varepsilon \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \|\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^\alpha t} \widehat{v}_0(\xi))\|_{\mathbb{L}_x^\infty, 1+\alpha} \leq C\varepsilon \langle t \rangle.$$

Следовательно, неравенства (30) выполнены при $m = 1$. Теперь по индукции предположим, что неравенства (30) справедливы для $m-1$. Докажем их для m . Перепишем уравнения (29) в интегральной форме:

$$\begin{aligned} v_m(t, x) &= \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^\alpha t} \widehat{v}_0(\xi)) + \int_0^t \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^\alpha (t-\tau)} (\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \mathcal{N}_{m-1}(\tau, x))) d\tau, \\ h_m(t) &= 1 + \frac{\alpha}{\theta} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (|v_{m-1}|^\alpha v_{m-1}(\tau, x) - h_{m-1}^{1+\frac{1}{\alpha}} f(\tau, x)) dx d\tau. \end{aligned}$$

По условию теоремы имеем

$$\|f(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty, \alpha+1} \leq C\varepsilon^{2+\alpha} g^{-1-\frac{1}{\alpha}}(t), \quad \|f(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \leq C\varepsilon^{2+\alpha} \langle t \rangle^{-1-\frac{1}{\alpha}} g^{-1-\frac{1}{\alpha}}(t).$$

Отсюда и из неравенства (21) получим $\|f(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^1} \leq C\varepsilon^{2+\alpha} \langle t \rangle^{-1} g^{-1-\frac{1}{\alpha}}(t)$. Следовательно, при условии, что $(v_{m-1}(t, x), h_{m-1}(t))$ удовлетворяет неравенствам (30), для всех $t > 0$ справедливы неравенства

$$\|\mathcal{N}_{m-1}(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \leq C\varepsilon^{1+\alpha} \langle t \rangle^{-1-\frac{1}{\alpha}} g^{-1}(t), \quad (31)$$

$$\|\mathcal{N}_{m-1}(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty, \alpha+1} \leq C\varepsilon^{1+\alpha} g^{-1}(t). \quad (32)$$

Отсюда вытекает оценка

$$\|\langle t \rangle g(t) \mathcal{N}_{m-1}(t, x)\|_{\mathbb{X}} \leq C \|v(t, x)\|_{\mathbb{X}}^{1+\alpha}.$$

Поскольку функция $\mathcal{N}_{m-1}(t, x)$ всегда имеет нулевое среднее значение, можно применить лемму 3 для $g(\tau) \mathcal{N}_{m-1}(\tau, x)$. Получаем неравенство

$$\left\| g(t) \int_0^t \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^\alpha (t-\tau)} (\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \mathcal{N}_{m-1}(\tau, x))) d\tau \right\|_{\mathbb{X}} \leq C \|v_{m-1}(t, x)\|_{\mathbb{X}}^{1+\alpha}.$$

Из последнего следует, что

$$\begin{aligned} \|v_m(t, x)\|_{\mathbb{X}} &\leq C\varepsilon \left\| \langle t^{-\frac{1}{\alpha}} x \rangle^{\alpha+1} (v_m(t, x) - \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha}t} \widehat{v}_0(\xi))) \right\|_{\mathbb{L}_x^{\infty}} \\ &\leq C\varepsilon^{1+\alpha} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} g^{-1}(t). \end{aligned}$$

Теперь, применив лемму 4, ввиду неравенства (21) получим

$$|h_m(t) - g(t)| \leq C\varepsilon^{\alpha} (1 + \log g(t))$$

для всех $t > 0$. Таким образом, используя метод индукции, мы видим, что оценки (30) справедливы для всех $m \geq 1$. Рассуждая аналогично, докажем, что

$$\begin{aligned} \|v_m(t, x) - v_{m-1}(t, x)\|_{\mathbb{X}} &\leq \frac{1}{4} \|v_{m-1}(t, x) - v_{m-2}(t, x)\|_{\mathbb{X}}, \\ \sup_{t>0} g^{-1}(t) |h_m(t) - h_{m-1}(t)| &\leq \frac{1}{4} \|v_{m-1}(t, x) - v_{m-2}(t, x)\|_{\mathbb{X}} \\ &\quad + \frac{1}{4} \sup_{t>0} g^{-1}(t) |h_{m-1}(t) - h_{m-2}(t)| \end{aligned}$$

для всех $m > 2$. Следовательно, переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получаем единственное решение (v, h) , $v \in \mathbb{X} = \{\psi \in \mathbb{C}([0, \infty); \mathbb{L}^{\infty, \alpha+1}) : \|\psi\|_{\mathbb{X}} < \infty\}$, $h \in \mathbb{C}(0, \infty)$, удовлетворяющее уравнениям

$$\begin{aligned} v(t) &= \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha}t} \widehat{v}_0(\xi)) + \int_0^t \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha}(t-\tau)} (\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} \mathcal{N}_{m-1}(\tau, x))) d\tau, \\ h(t) &= 1 + \frac{\alpha}{\theta} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (|v|^{\alpha} v - h^{1+\frac{1}{\alpha}} f) dx d\tau, \end{aligned} \quad (33)$$

и оценкам

$$\begin{aligned} \left\| \langle t^{-\frac{1}{\alpha}} x \rangle^{\alpha+1} (v(t, x) - \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha}t} \widehat{v}_0(\xi))) \right\|_{\mathbb{L}_x^{\infty}} &\leq C\varepsilon^{1+\alpha} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} g^{-1}(t), \\ |h(t) - g(t)| &\leq C\varepsilon^{\alpha} (1 + \log g(t)). \end{aligned} \quad (34)$$

Пользуясь формулами $u(t, x) = e^{-\varphi(t)} v(t, x) = h^{-\frac{1}{\alpha}}(t) v(t, x)$, покажем, что главный член асимптотики решения $u(t, x)$ имеет вид $\theta t^{-\frac{1}{\alpha}} G(t^{-\frac{1}{\alpha}}(x)) e^{-\varphi(t)}$. Действительно, из неравенства (34) и оценки (16) следует

$$\begin{aligned} &\left\| \langle t^{-\frac{1}{\alpha}} x \rangle^{\alpha+1} (\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha}t} \widehat{v}_0(\xi)) - \theta t^{-\frac{1}{\alpha}} G(t^{-\frac{1}{\alpha}} x)) e^{-\varphi(t)} \right\|_{\mathbb{L}_x^{\infty}} \\ &\leq C t^{-\frac{1+\gamma}{\alpha}} \|v_0(x)\|_{\mathbb{L}^{\infty, 1+\alpha}}, \end{aligned}$$

отсюда вытекает справедливость оценки остатка

$$\begin{aligned} &\left\| \langle t^{-\frac{1}{\alpha}} x \rangle^{\alpha+1} (u(t, x) - \theta t^{-\frac{1}{\alpha}} G(t^{-\frac{1}{\alpha}} x) e^{-\varphi(t)}) \right\|_{\mathbb{L}_x^{\infty}} \\ &\leq \left\| \langle t^{-\frac{1}{\alpha}} x \rangle^{\alpha+1} (u(t, x) - e^{-\varphi(t)} \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha}t} \widehat{v}_0(\xi))) \right\|_{\mathbb{L}_x^{\infty}} \\ &\quad + \left\| \langle t^{-\frac{1}{\alpha}} x \rangle^{\alpha+1} (\mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1}(e^{-|\xi|^{\alpha}t} \widehat{v}_0(\xi)) - \theta t^{-\frac{1}{\alpha}} G(t^{-\frac{1}{\alpha}} x)) e^{-\varphi(t)} \right\|_{\mathbb{L}_x^{\infty}} \\ &\leq C\varepsilon^{1+\alpha} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} g^{-1-\frac{1}{\alpha}}(t). \end{aligned} \quad (35)$$

Учитывая (34), получаем

$$\begin{aligned} & \left\| \langle t^{-\frac{1}{\alpha}} x \rangle^{\alpha+1} \left(\theta t^{-\frac{1}{\alpha}} G(t^{-\frac{1}{\alpha}} x) h^{-\frac{1}{\alpha}}(t) - \theta t^{-\frac{1}{\alpha}} G(t^{-\frac{1}{\alpha}} x) g^{-\frac{1}{\alpha}}(t) \right) \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\ & \leq C \varepsilon t^{-\frac{1}{\alpha}} g^{-1-\frac{1}{\alpha}}(t) |h(t) - g(t)|. \end{aligned}$$

Поэтому из (35) следует неравенство

$$\left\| \langle t^{-\frac{1}{\alpha}} x \rangle^{\alpha+1} \left(u(t, x) - \theta t^{-\frac{1}{\alpha}} G(t^{-\frac{1}{\alpha}} x) g^{-\frac{1}{\alpha}}(t) \right) \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \leq C \varepsilon^{1+\alpha} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} g^{-1-\frac{1}{\alpha}}(t) \log g(t), \quad (36)$$

что завершает доказательство теоремы 1.

§ 4. Большие начальные возмущения и правая часть задачи Коши

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ рассмотрим следующие две вспомогательные задачи Коши:

$$\begin{aligned} U_t + |\partial_x|^\alpha U + U^{1+\alpha} &= \varepsilon f, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ U(0, x) &= \varepsilon u_0(x), & x \in \mathbb{R}; \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} V_t + |\partial_x|^\alpha V + \varepsilon^\alpha V^{1+\alpha} &= f, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ V(0, x) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (38)$$

Отметим, что с помощью замены $V = \varepsilon^{-1} U$ задача (38) может быть сведена к задаче (37). Поскольку (37) имеет малые начальные возмущения и малую правую часть, можно применить теорему 1 и, таким образом, вычислить асимптотику функции $U(t, x)$ при больших значениях времени, а значит, и функции $V(t, x)$. Из леммы 5 получим

$$U(t, x) \leq u(t, x) \leq V(t, x)$$

для всех $t > 0$ и $x \in \mathbb{R}$. В частности, из результатов теоремы 1 следуют оценки

$$C \varepsilon \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} (\log(2+t))^{-\frac{1}{\alpha}} \leq \|u(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \leq C \varepsilon^{-1} \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} (\log(2+t))^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad (39)$$

$$C \varepsilon \langle t \rangle (\log(2+t))^{-\frac{1}{\alpha}} \leq \|u(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty, 1+\alpha} \leq C \varepsilon^{-1} \langle t \rangle (\log(2+t))^{-\frac{1}{\alpha}} \quad (40)$$

для всех $t > 0$.

Теперь, как и выше, сделаем замену $u(t, x) = v(t, x) e^{-\varphi(t)}$. Тогда для новой функции $v(t, x)$ получаем

$$v_t + |\partial_x|^\alpha v + u^\alpha v - \varphi' v = e^\varphi f.$$

Пусть $\varphi(0) = 0$ и

$$\int_{\mathbb{R}} (u^\alpha v - e^\varphi f - \varphi' v) dx = 0.$$

Тогда среднее значение новой функции $v(t, x)$ удовлетворяет закону сохранения

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} v(t, x) dx = 0,$$

и поэтому $\int_{\mathbb{R}} v(t, x) dx = \theta = \int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx$ для всех $t > 0$. На основании изложенного выше для новых функций $(v(t, x), \varphi(t))$ получаем задачу Коши

$$\begin{aligned} v_t + |\partial_x|^\alpha v &= - \left(u^\alpha v(t, x) - e^\varphi f(t, x) - \frac{v}{\theta} \int_{\mathbb{R}} (u^\alpha v(t, x) - e^\varphi f(t, x)) dx \right), \\ \varphi'(t) &= \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}} (u^\alpha v(t, x) - e^\varphi f(t, x)) dx, \\ v(0, x) &= u_0(x), \quad \varphi(0) = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Докажем оценку

$$\|v(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^{\infty, 1+\alpha}} \leq C \langle t \rangle \quad \forall t > 0.$$

Поскольку $e^\varphi = \frac{v}{u}$, ввиду (39) найдем оценку

$$e^\varphi \leq C \langle t \rangle^{-1} (\log(2+t))^\frac{1}{\alpha} \|v(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^{\infty, \alpha+1}}.$$

Кроме того, учитывая (39), имеем

$$\|u(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty}^\alpha \leq C \varepsilon^{-\alpha} \langle t \rangle^{-1} (\log(2+t))^{-1}.$$

По условию теоремы правая часть f имеет ограниченную норму

$$\sup_{t \geq 0} (\log(2+t))^{1+\frac{1}{\alpha}} (\|f(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^{\infty, \alpha+1}} + \langle t \rangle^{1+\frac{1}{\alpha}} \|f(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty}),$$

откуда из неравенства (21) следует

$$\|f(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^1} \leq C \langle t \rangle^{-1} (\log(2+t))^{-1-\frac{1}{\alpha}}.$$

Запишем (41) в виде интегрального уравнения

$$v(t, x) = \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} (e^{-|\xi|^\alpha t} \widehat{v}_0(\xi)) - \int_0^t \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} (e^{-|\xi|^\alpha (t-\tau)} (\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} F(\tau, x))) \frac{d\tau}{\log(2+\tau)}, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} F(\tau, x) &= (\log(2+\tau)) \left(u^\alpha(\tau, x) v(\tau, x) - e^{\varphi(\tau)} f(\tau, x) \right. \\ &\quad \left. - \frac{v(\tau, x)}{\theta} \int_{\mathbb{R}} (u^\alpha(\tau, x) v(\tau, x) - e^{\varphi(\tau)} f(\tau, x)) dx \right). \end{aligned}$$

Тогда ввиду оценок (39) и (40), применяя лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} &\left\| |x|^{1+\alpha} \int_0^t \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} (e^{-|\xi|^\alpha (t-\tau)} (\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} F(\tau, x))) \frac{d\tau}{\log(2+\tau)} \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\ &\leq C \int_0^t (\log(2+\tau))^{-1} \|F(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^{\infty, \alpha+1}} d\tau \\ &\quad + C \int_0^t (\log(2+\tau))^{-1} (t-\tau)^{1-\frac{\gamma}{\alpha}} \|F(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^{1, \gamma}} d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C \int_0^t (\log(2 + \tau))^{-1} \langle \tau \rangle^{-1} \|v(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty, 1+\alpha} d\tau \\ &\quad + C \int_0^t (\log(2 + \tau))^{-1} (t - \tau)^{1-\frac{\gamma}{\alpha}} \langle \tau \rangle^{-1} \|v(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^{1, \gamma}} d\tau \end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Поскольку

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle^{-\frac{\gamma}{\alpha}} \|v(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^{1, \gamma}} &\leq C \|v(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^1} + \varepsilon \langle \tau \rangle^{-1} \|v(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty, 1+\alpha} \\ &\leq C + \varepsilon \langle \tau \rangle^{-1} \|v(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty, 1+\alpha}, \end{aligned}$$

воспользовавшись (42), находим

$$\begin{aligned} \|v(\tau_1, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty, 1+\alpha} &\leq C \langle t \rangle + C \int_0^t (\log(2 + \tau))^{-1} \langle \tau \rangle^{-1} \|v(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty, 1+\alpha} d\tau \\ &\quad + \varepsilon \int_0^t (\log(2 + \tau))^{-1} (t - \tau)^{1-\frac{\gamma}{\alpha}} \langle \tau \rangle^{\frac{\gamma}{\alpha}-2} \|v(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty, 1+\alpha} d\tau \end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Применяя неравенство Гронуола, получаем неравенство

$$\|v(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty, 1+\alpha} \leq C \langle t \rangle \quad \forall t > 0.$$

Аналогично, пользуясь оценками леммы 2 и неравенством (39), получаем

$$\begin{aligned} \|v(\tau_1, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty} &\leq \left\| \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} (e^{-|\xi|^\alpha t} \widehat{v_0}(\xi)) \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\ &\quad + \left\| \int_0^t \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} (e^{-|\xi|^\alpha (t-\tau)} (\mathcal{F}_{x \rightarrow \xi} F(\tau, x))) \frac{d\tau}{\log(2 + \tau)} \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \\ &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} + C \int_0^{\frac{t}{2}} (t - \tau)^{-\frac{1+\gamma}{\alpha}} \langle \tau \rangle^{-1} \|v(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^{1, \gamma}} d\tau \\ &\quad + C \int_0^{\frac{t}{2}} (t - \tau)^{-1-\frac{1}{\alpha}} \langle \tau \rangle^{-1} \|v(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty, \alpha+1} d\tau \\ &\quad + C \int_{\frac{t}{2}}^t \langle \tau \rangle^{-1} (\log(2 + \tau))^{-1} \|v(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty} d\tau \\ &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} + \varepsilon \int_{\frac{t}{2}}^t \langle \tau \rangle^{-1} \|v(\tau, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty} d\tau \end{aligned}$$

для всех $t > 0$. Применяя неравенство Гронуола, получим

$$\|v(t, x)\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} \quad \forall t > 0.$$

Теперь применяя леммы 3, 4 к интегральному уравнению (42), находим

$$\begin{aligned} \left\| \langle t^{-\frac{1}{\alpha}} x \rangle^{\alpha+1} (v(t, x) - \mathcal{F}_{\xi \rightarrow x}^{-1} (e^{-|\xi|^\alpha t} \widehat{v_0}(\xi))) \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} &\leq C \langle t \rangle^{-\frac{1}{\alpha}} g^{-1}(t), \\ |h(t) - g(t)| &\leq C(1 + \log g(t)). \end{aligned}$$

Поэтому, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1, получаем оценку

$$\left\| \langle t^{-\frac{1}{\alpha}} x \rangle^{\alpha+1} (u(t, x) - \theta t^{-\frac{1}{\alpha}} G(t^{-\frac{1}{\alpha}} x) g^{-\frac{1}{\alpha}}(t)) \right\|_{\mathbb{L}_x^\infty} \leq C t^{-\frac{1}{\alpha}} (\log t)^{-1-\frac{1}{\alpha}} \log \log t,$$

что и завершает доказательство теоремы.

§ 5. Нелинейное уравнение теплопроводности

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Как и в работе [39], сделаем замену переменных $u(t, x) = t^{-\frac{1}{2}} e^{-t\xi^2} v(t, \xi)$ и $\xi = \frac{x}{2t}$. Тогда из (1) получим

$$\begin{aligned} v_t - \frac{1}{4t^2} v_{\xi\xi} + \frac{1}{t} e^{-2t\xi^2} v^3 &= Y, \quad t > 1, \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ v(1, \xi) &= \tilde{v}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (43)$$

где $\tilde{v}(\xi) = e^{\xi^2} u_0(2\xi)$, $Y(t, \xi) = e^{t\xi^2} t^{\frac{1}{2}} f(t, 2t\xi)$. После этого, сделав замену переменной $v(t, \xi) = w(t, \xi) e^{-\omega(t, \xi)}$, получим

$$w_t - \frac{1}{4t^2} w_{\xi\xi} + \frac{1}{t} e^{-2t\xi^2} e^{-2\omega} w^3 - w\omega_t + \frac{1}{2t^2} \omega_{\xi} w_{\xi} - \frac{1}{4t^2} (\omega_{\xi})^2 w + \frac{1}{4t^2} \omega_{\xi\xi} w = e^{\omega} Y.$$

Пусть функция ω удовлетворяет задаче Коши

$$\begin{aligned} \omega_t &= \frac{1}{t} e^{-2t\xi^2} e^{-2\omega} w^2 + \frac{1}{2t^2} (\omega_{\xi})^2 + \frac{1}{4t^2} \omega_{\xi\xi}, \quad t > 1, \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ \omega(1, \xi) &= 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (44)$$

откуда находим для w следующие уравнения:

$$\begin{aligned} w_t &= \frac{3}{4t^2} (\omega_{\xi})^2 w - \frac{1}{2t^2} \omega_{\xi} w_{\xi} + \frac{1}{4t^2} w_{\xi\xi} + e^{\omega} Y, \quad t > 1, \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ w(1, \xi) &= \tilde{v}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (45)$$

Обозначим $h = e^{2\omega}$; тогда из (44) следует, что

$$\begin{aligned} h_t &= \frac{2}{t} e^{-2t\xi^2} w^2 + \frac{1}{4t^2} h_{\xi\xi}, \quad t > 1, \quad \xi \in \mathbb{R}, \\ h(1, \xi) &= 1, \quad \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (46)$$

Теперь мы установим существование решений задач Коши (45) и (46).

ЛЕММА 6. Пусть начальное возмущение такое, что $\tilde{v}, \partial_x \tilde{v} \in \mathbb{L}^\infty$, является достаточно малым, т. е.

$$\|\tilde{v}(\xi)\|_{\mathbb{L}^\infty} + \left\| \frac{d}{d\xi} \tilde{v}(\xi) \right\|_{\mathbb{L}^\infty} \leq \varepsilon.$$

Предположим, что

$$\theta = \inf_{|\xi| \leq 1} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\xi-\eta)^2} \tilde{v}(\eta) d\eta \geq C\varepsilon > 0.$$

Пусть правая часть $Y(t, \xi) \in \mathbb{C}([0, \infty); \mathbb{L}^{\infty, \alpha+1})$ задачи (43) имеет достаточно малую норму

$$\sup_{t \geq 0} ((\log(2+t))^2 \langle t \rangle \|Y(t, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} + (\log(2+t))^{\frac{5}{2}} \langle t \rangle^{\frac{1}{2}} \|\partial_\xi Y(t, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty}) \leq C\varepsilon^2.$$

Тогда существует единственное решение $v \in \mathbb{C}([1, \infty) \times \mathbb{R})$ задачи Коши (43). Более того, существует функция $A \in \mathbb{L}^\infty$ такая, что имеют место асимптотики этого решения при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $\xi \in \mathbb{R}$,

$$w(t, \xi) = A(\xi) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\tilde{g}(t)}\right), \quad (47)$$

$$h(t, \xi) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(A^2(\xi) + O\left(\frac{\varepsilon^3}{\tilde{g}(t)}\right) \right) \int_1^t \sqrt{\frac{3\tau}{3t-2\tau}} e^{-\frac{2t\tau}{3t-2\tau}\xi^2} \frac{d\tau}{\tau}, \quad (48)$$

где $\tilde{g}(t) = 1 + \varepsilon^2 \log(1+t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функцию Грина

$$\tilde{G}(t, \tau, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{t\tau}{t-\tau}} e^{-\frac{t\tau}{t-\tau}\xi^2}$$

и функцию

$$V(t, \xi) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}(t, 1, \xi - \eta) \tilde{v}(\eta) d\eta.$$

Тогда задачи Коши (44) и (45) могут быть переписаны в виде интегральных уравнений

$$\omega(t, \xi) = \int_1^t \frac{d\tau}{\tau} \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}(t, \tau, \xi - \eta) (e^{-2\tau\eta^2} h^{-1}(\tau, \eta) w^2(\tau, \eta)) d\eta, \quad (49)$$

$$w(t, \xi) = V(t, \xi) + \int_1^t \frac{d\tau}{4\tau^2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}(t, \tau, \xi - \eta) F(\tau, \eta) d\eta, \quad (50)$$

где

$$F(\tau, \eta) = 3(\omega_\eta(\tau, \eta))^2 w(\tau, \eta) - 2\omega_\eta(\tau, \eta) w_\eta(\tau, \eta) + 4\tau^2 \sqrt{h(\tau)} Y(\tau, \eta).$$

Докажем следующие оценки:

$$\|w_\xi(t, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} + \|\omega_\xi v\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} < \varepsilon + \frac{\varepsilon^2 \sqrt{t}}{\tilde{g}(t)}, \quad (51)$$

$$\|w(t, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} < C\varepsilon, \quad \|e^{-2t\xi^2} h^{-1}(t, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} < \frac{1}{\tilde{g}(t)}, \quad (52)$$

для всех $t \geq 1$. Отметим, что (51) и (52) выполнены при $t = 1$. Будем рассуждать от противного. Допустим, что оценки (51) и (52) нарушаются в некоторый момент времени $t = T$. Тогда по непрерывности имеют место неравенства

$$\|w_\xi(t, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} + \|\omega_\xi(t, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} \leq \varepsilon + \frac{C\varepsilon^2 \sqrt{t}}{\tilde{g}(t)}, \quad (53)$$

$$\|w(t, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} \leq C\varepsilon, \quad \|e^{-2t\xi^2} h^{-1}(t, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} \leq \frac{C}{\tilde{g}(t)} \quad (54)$$

для всех $t \in [1, T]$. Рассмотрим сначала производную $\partial_\xi V(t, \xi)$:

$$\|\partial_\xi V(t, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi(t-1)}} \left\| \partial_\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t}{t-1}\eta^2} \tilde{v}(\xi - \eta) d\eta \right\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} \leq \left\| \frac{d}{d\xi} \tilde{v}(\xi) \right\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} < \varepsilon.$$

Чтобы установить оценку (51), продифференцируем уравнения (49) и (50) по ξ . Получим

$$\begin{aligned} |\omega_\xi(t, \xi)| + |w_\xi(t, \xi)| &\leq |V_\xi(t, \xi)| + \int_1^t \int_{\mathbb{R}} |\partial_\xi \tilde{G}(t, \tau, \xi - \eta)| \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\tau} e^{-2\tau\eta^2} h^{-1}(\tau, \eta) w^2(\tau, \eta) + \frac{1}{2\tau^2} \omega_\eta(\tau, \eta) |w_\eta(\tau, \eta)| \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4\tau^2} |w(\tau, \eta)| (\omega_\eta(\tau, \eta))^2 + \sqrt{h(\tau)} Y(\tau, \eta) \right) d\eta d\tau. \end{aligned} \quad (55)$$

Отсюда ввиду (53) и (54) находим

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{\tau} e^{-2\tau\eta^2} h^{-1}(\tau, \eta) w^2(\tau, \eta) + \frac{1}{2\tau^2} \omega_\eta(\tau, \eta) |w_\eta(\tau, \eta)| \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4\tau^2} |w(\tau, \eta)| (\omega_\eta(\tau, \eta))^2 + \sqrt{h(\tau)} Y(\tau, \eta) \right\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} \\ &\leq \frac{C\varepsilon^2}{\tau\tilde{g}(\tau)} + \frac{1}{\tau^2} \left(\varepsilon + \frac{C\varepsilon^2\sqrt{t}}{\tilde{g}(t)} \right)^2 \leq \frac{C\varepsilon^2}{\tau\tilde{g}(\tau)} + C\varepsilon^2\tau^{-2} \leq \frac{C\varepsilon^2}{\tau\tilde{g}(\tau)}, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} &\left\| \int_{\mathbb{R}} |\partial_\xi \tilde{G}(t, \tau, \xi - \eta)| \left(\frac{1}{\tau} e^{-2\tau\eta^2} h^{-1}(\tau, \eta) w^2(\tau, \eta) + \frac{1}{2\tau^2} \omega_\eta(\tau, \eta) |w_\eta(\tau, \eta)| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{4\tau^2} |w(\tau, \eta)| (\omega_\eta(\tau, \eta))^2 + \sqrt{h(\tau)} Y(\tau, \eta) \right) d\eta \right\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} \leq \frac{C\varepsilon^2}{\sqrt{\tau}\tilde{g}(\tau)}. \end{aligned}$$

Тогда из (55) следует, что

$$\begin{aligned} \|w_\xi(t, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} + \|\omega_\xi(t, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} &< \varepsilon + C\varepsilon^2 \int_1^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}\tilde{g}(\tau)} \\ &= \varepsilon + C \frac{\varepsilon^2\sqrt{t}}{\tilde{g}(t)} + \varepsilon^2 \int_1^t \frac{d\tilde{g}(\tau)}{d\tau} \frac{\sqrt{\tau}}{\tilde{g}(\tau)^2} d\tau < \varepsilon + \frac{\varepsilon^2\sqrt{t}}{\tilde{g}(t)} \end{aligned}$$

для всех $t \in [1, T]$.

Теперь рассмотрим функцию $V(t, \xi)$. Имеем

$$\begin{aligned} V(t, \xi) &= \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi(t-1)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t}{t-1}(\xi-\eta)^2} \tilde{v}(\eta) d\eta \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\xi-\eta)^2} \tilde{v}(\eta) d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\frac{t}{t-1}} - 1 \right) \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t}{t-1}(\xi-\eta)^2} \tilde{v}(\eta) d\eta \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\xi-\eta)^2} (e^{-\frac{1}{t-1}(\xi-\eta)^2} - 1) \tilde{v}(\eta) d\eta \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\xi-\eta)^2} \tilde{v}(\eta) d\eta + O(t^{-1} \|\tilde{v}(\eta)\|_{\mathbb{L}^\infty}) \end{aligned}$$

при $t > 2$ и

$$V(t, \xi) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi(t-1)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t}{t-1}(\xi-\eta)^2} \tilde{v}(\eta) d\eta = O(\|\tilde{v}(\eta)\|_{\mathbb{L}^\infty})$$

при $t \in [1, 2]$. Используя (53), получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{d\tau}{\tau^2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}(t, \tau, \xi - \eta) F(\tau, \eta) d\eta \right| \\ \leq C\varepsilon^2 \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{d\tau}{\tau^2} + C\varepsilon^4 \int_{\frac{t}{2}}^t \frac{d\tau}{\tau(1 + \varepsilon^2 \log(1 + \tau))^2} \leq \frac{C\varepsilon^2}{\tilde{g}(t)}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\tilde{G}_1(\tau, \xi) = \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} e^{-\tau\xi^2}, \quad B(\xi) = \int_1^\infty \frac{d\tau}{4\tau^2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}_1(\tau, \xi - \eta) F(\tau, \eta) d\eta.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_{\frac{t}{2}}^\infty \frac{d\tau}{\tau^2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}_1(\tau, \xi - \eta) F(\tau, \eta) d\eta \\ \leq C\varepsilon^2 \int_{\frac{t}{2}}^\infty \frac{d\tau}{\tau^2} + C\varepsilon^4 \int_{\frac{t}{2}}^\infty \frac{d\tau}{\tau(1 + \varepsilon^2 \log(1 + \tau))^2} \leq \frac{C\varepsilon^2}{\tilde{g}(t)}, \\ \int_1^{\frac{t}{2}} \frac{d\tau}{\tau^2} \int_{\mathbb{R}} (\tilde{G}(t, \tau, \xi - \eta) - \tilde{G}_1(\tau, \xi - \eta)) F(\tau, \eta) d\eta \\ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\frac{t}{2}} \tau^{-\frac{3}{2}} d\tau \int_{\mathbb{R}} \left(\sqrt{\frac{t}{t-\tau}} - 1 \right) e^{-\frac{t\tau}{t-\tau}(\xi-\eta)^2} F(\tau, \eta) d\eta \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^{\frac{t}{2}} \tau^{-\frac{3}{2}} d\tau \int_{\mathbb{R}} (e^{-\frac{\tau^2}{t-\tau}(\xi-\eta)^2} - 1) e^{-\tau(\xi-\eta)^2} F(\tau, \eta) d\eta \\ \leq \frac{C\varepsilon^2}{t} \int_1^{\frac{t}{2}} \frac{d\tau}{\tau} + \frac{C\varepsilon^4}{t} \int_1^{\frac{t}{2}} \frac{d\tau}{(1 + \varepsilon^2 \log(1 + \tau))^2} \leq \frac{C\varepsilon^2}{\tilde{g}(t)}, \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_1^{\frac{t}{2}} \frac{d\tau}{4\tau^2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}(t, \tau, \xi - \eta) F(\tau, \eta) d\eta &= B(\xi) - \int_{\frac{t}{2}}^\infty \frac{d\tau}{4\tau^2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}_1(\tau, \xi - \eta) F(\tau, \eta) d\eta \\ &+ \int_1^{\frac{t}{2}} \frac{d\tau}{4\tau^2} \int_{\mathbb{R}} (\tilde{G}(t, \tau, \xi - \eta) - \tilde{G}_1(\tau, \xi - \eta)) F(\tau, \eta) d\eta \\ &= B(\xi) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\tilde{g}(t)}\right). \end{aligned}$$

Отметим, что $B(\xi) \leq C\varepsilon^2$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$. Введем функцию

$$A(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(\xi-\eta)^2} \tilde{v}(\eta) d\eta + B(\xi).$$

Нетрудно видеть, что $A(\xi) \geq C\varepsilon > 0$ при $|\xi| < 1$ и

$$w(t, \xi) = V(t, \xi) + \int_1^t \frac{d\tau}{4\tau^2} \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}(t, \tau, \xi - \eta) F(\tau, \eta) d\eta = A(\xi) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\tilde{g}(t)}\right). \quad (56)$$

Теперь перепишем задачу Коши (46) для функции $h(t, \xi)$ в виде интегрального уравнения

$$h(t, \xi) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} A^2(\xi) \int_1^t \sqrt{\frac{3t}{3t-2\tau}} e^{-\frac{2t\tau}{3t-2\tau} \xi^2} \frac{d\tau}{\tau} + 2R_1,$$

где

$$R_1 = \int_1^t \frac{d\tau}{\tau} \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}(t, \tau, \xi - \eta) e^{-2\tau\eta^2} w^2(\tau, \eta) d\eta - \frac{1}{\sqrt{3}} A^2(\xi) \int_1^t \sqrt{\frac{3t}{3t-2\tau}} e^{-\frac{2t\tau}{3t-2\tau} \xi^2} \frac{d\tau}{\tau}.$$

В силу тождества

$$\frac{t\tau}{t-\tau} (\xi - \eta)^2 + 2\tau\eta^2 = \frac{\tau(3t-2\tau)}{t-\tau} \left(\eta - \frac{\xi}{3-2\frac{\tau}{t}} \right)^2 + \frac{2\tau t}{3t-2\tau} \xi^2$$

представим интеграл R_1 в виде

$$\begin{aligned} R_1 = & \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^t \sqrt{\frac{t}{3t-2\tau}} e^{-\frac{2\tau t}{3t-2\tau} \xi^2} (w^2(\tau, \xi) - A^2(\xi)) \frac{d\tau}{\tau} \\ & + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^t \sqrt{\frac{t}{3t-2\tau}} e^{-\frac{2\tau t}{3t-2\tau} \xi^2} \left(w^2\left(\tau, \frac{\xi t}{3t-2\tau}\right) - w^2(\tau, \xi) \right) \frac{d\tau}{\tau} \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_1^t \sqrt{\frac{t}{t-\tau}} e^{-\frac{2\tau t}{3t-2\tau} \xi^2} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \\ & \times \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\tau(3t-2\tau)}{t-\tau} \left(\eta - \frac{\xi t}{3t-2\tau} \right)^2} \left(w^2(\tau, \eta) - w^2\left(\tau, \frac{\xi t}{3t-2\tau}\right) \right) d\eta. \end{aligned}$$

Согласно (53), (54) и (56) имеем оценку

$$\begin{aligned} |R_1| & \leq C\varepsilon^3 \int_1^t e^{-\frac{2}{3}\tau\xi^2} \frac{d\tau}{\tau\tilde{g}(\tau)} = C\varepsilon^3 \left(e^{-\frac{2}{3}t\xi^2} \log t \frac{1}{\tilde{g}(t)} - \int_1^t \log \tau d\left(e^{-\frac{2}{3}\tau\xi^2} \frac{1}{\tilde{g}(\tau)} \right) \right) \\ & = C\varepsilon^3 \left(e^{-\frac{2}{3}t\xi^2} \log t \frac{1}{\tilde{g}(t)} - \int_1^t \log \tau \left(-\frac{2}{3}\xi^2 e^{-\frac{2}{3}\tau\xi^2} \frac{1}{\tilde{g}(\tau)} - e^{-\frac{2}{3}\tau\xi^2} \frac{\tilde{g}'(\tau)}{\tilde{g}^2(\tau)} \right) d\tau \right) \\ & \leq \frac{C\varepsilon^3}{\tilde{g}(t)} \int_1^t e^{-\frac{2}{3}\tau\xi^2} \frac{d\tau}{\tau} \end{aligned}$$

при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $\xi \in \mathbb{R}$. В силу полученного соотношения находим

$$h(t, \xi) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(A^2(\xi) + O\left(\frac{\varepsilon^3}{\tilde{g}(t)}\right) \right) \int_1^t \sqrt{\frac{3t}{3t-2\tau}} e^{-\frac{2t\tau}{3t-2\tau} \xi^2} \frac{d\tau}{\tau}. \quad (57)$$

Из асимптотики (57) приходим к оценке (52). Действительно, из последней формулы вытекает

$$\begin{aligned} |e^{-2t\xi^2} h^{-1}(t, \xi)| &\leq C e^{-2t\xi^2} \left(1 + A^2(\xi) \int_1^t e^{-\frac{2}{3}\tau\xi^2} \frac{d\tau}{\tau}\right)^{-1} \\ &\leq C e^{-2t\xi^2} \left(1 + \varepsilon^2 \log\left(1 + \frac{t}{\langle t\xi^2 \rangle}\right)\right)^{-1} < \frac{C}{\tilde{g}(t)} \end{aligned}$$

для всех $t \in [1, T]$. Полученное противоречие доказывает оценки (51), (52) для всех $t \geq 1$. Формулы (56) и (57) дают асимптотики (47), (48). Лемма доказана.

Рассмотрим опять случай немалых начальных возмущений и правую часть задачи Коши (43). При достаточно малом положительном ε рассмотрим также следующие две вспомогательные задачи Коши:

$$\begin{aligned} U_t - \frac{1}{4t^2} U_{\xi\xi} + \frac{1}{t} e^{-2t\xi^2} U^3(t, \xi) &= \varepsilon Y, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t > 1, \\ U(1, \xi) &= \varepsilon e^{\xi^2} u_1(2\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}; \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} V_t - \frac{1}{4t^2} V_{\xi\xi} + \frac{1}{t} \varepsilon^2 e^{-2t\xi^2} V^3(t, \xi) &= Y, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t > 1, \\ V(1, \xi) &= e^{\xi^2} u_1(2\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (59)$$

Отметим, что с помощью замены переменной $V = \varepsilon^{-1}U$ задача (59) может быть сведена к задаче (58). При этом задача (58) имеет достаточно малые начальные возмущения, поэтому асимптотика при больших значениях времени для функций U и V известна благодаря лемме 6. Кроме того, по лемме 5 получаем двусторонние оценки

$$U(t, \xi) \leq v(t, \xi) \leq V(t, \xi)$$

для всех $t > 0$ и $\xi \in \mathbb{R}$. В частности, ввиду оценок (51) и (52) из леммы 6 для функции $v = wh^{-\frac{1}{2}}$ имеем

$$\frac{\varepsilon C}{\sqrt{\tilde{g}(t)}} \leq \|e^{-\frac{1}{2}t\xi^2} v(t, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} \leq \frac{C\varepsilon^{-1}}{\sqrt{\tilde{g}(t)}} \quad (60)$$

при всех $t > 1$, $\xi \in \mathbb{R}$, где $\tilde{g}(t) = 1 + \varepsilon^2 \log(1 + t)$. С помощью функции Грина $\tilde{G}(t, \tau, \xi)$ запишем задачу Коши (43) в виде интегрального уравнения

$$v(t, \xi) = V(t, \xi) - \int_1^t \frac{d\tau}{\tau} \int_{\mathbb{R}} \tilde{G}(t, \tau, \xi - \eta) (e^{-2\tau\eta^2} v^3(\tau, \eta) - Y(\tau, \eta)) d\eta.$$

Отсюда имеем оценку для производной:

$$\begin{aligned} \|v_\xi(t, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} &\leq C + \int_1^t \|\partial_\xi \tilde{G}(t, \tau, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^1} (\|e^{-\tau\xi^2} v(\tau, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty}^3 + \|Y(\tau, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty}) \frac{d\tau}{\tau} \\ &\leq C + \int_1^t \sqrt{\frac{t}{t-\tau}} \tilde{g}^{-\frac{3}{2}}(\tau) \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} \leq C \sqrt{t} \tilde{g}^{-\frac{3}{2}}(t) \end{aligned}$$

при всех $t \geq 1$. Пусть $m(t) = \max_{\xi \in \mathbb{R}} |\omega_\xi(t, \xi)|$. Теперь из уравнения (44), пользуясь [35, теорема 2.1] (см. также доказательство леммы 5), получаем

$$\frac{d}{dt}m(t) \leq \frac{C}{\sqrt{t}}\tilde{g}^{-1}(t),$$

откуда, применяя интегрирование по времени, получаем

$$\|\omega_\xi(t, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} \leq \frac{C\sqrt{t}}{\tilde{g}(t)} \quad \forall t \geq 1.$$

Чтобы оценить $n(t) = \max_{\xi \in \mathbb{R}} |w(t, \xi)|$, снова воспользуемся [35, теорема 2.1]. Поскольку в силу (60) справедливы неравенства

$$|e^\omega Y| \leq \left| \frac{w}{v} Y \right| \leq Cn\sqrt{\tilde{g}(t)}e^{-\frac{1}{2}t\xi^2}|Y| \leq \frac{C}{t}\tilde{g}^{-\frac{3}{2}}(t)n,$$

из уравнения (45) следует неравенство

$$\frac{d}{dt}n(t) \leq \frac{C}{t}\tilde{g}^{-\frac{3}{2}}(t)n(t),$$

интегрируя которое по времени, находим

$$\|w(t, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} \leq C \quad \forall t \geq 1.$$

Применяя [35, теорема 2.1] к уравнению (46), для $k(t) = \max_{\xi \in \mathbb{R}} h(t, \xi)$ получим

$$\frac{d}{dt}k(t) \leq \frac{C}{t}e^{-t\xi^2}.$$

Интегрируя последнее неравенство по времени, имеем

$$\|h(t, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} \leq C \int_1^t e^{-\tau\xi^2} \frac{d\tau}{\tau} \leq C\tilde{g}(t) \quad \forall t \geq 1.$$

В силу тождества $w_\xi = v_\xi\sqrt{h} - w\omega_\xi$ теперь получаем оценку

$$\|w_\xi(t, \xi)\|_{\mathbb{L}_\xi^\infty} \leq \frac{C\sqrt{t}}{\tilde{g}(t)} \quad \forall t \geq 1.$$

Рассмотрим следующие два уравнения:

$$h_t = \frac{2}{t}e^{-2t\xi^2}v^2h + \frac{1}{4t^2}h_{\xi\xi}, \quad H_t = \frac{2}{t}e^{-2t\xi^2}U^2H + \frac{1}{4t^2}H_{\xi\xi},$$

где $v(t, \xi) \geq U(t, \xi)$ для всех $\xi \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Обозначим

$$W(t, \xi) = U(t, \xi)\sqrt{H(t, \xi)},$$

т.е. имеем представление $U(t, \xi) = \frac{W(t, \xi)}{\sqrt{H(t, \xi)}}$, аналогичное используемому ранее $v(t, \xi) = \frac{w(t, \xi)}{\sqrt{h(t, \xi)}}$. Тогда с помощью принципа сравнения для уравнения теплопроводности (см. лемму 5) получаем

$$h(t, \xi) \geq H(t, \xi) \geq \frac{1}{2} \left(1 + A^2(\xi) \log \left(1 + \frac{t}{\langle t\xi^2 \rangle} \right) \right)$$

при всех $\xi \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Таким образом, приходим к оценке

$$w(t, \xi) \geq v(t, \xi) \sqrt{h(t, \xi)} \geq U(t, \xi) \sqrt{H(t, \xi)} = W(t, \xi) \geq \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} W(t, \xi) > 0.$$

Как и в (56), находим функцию $A(\xi) \in \mathbb{L}^\infty$ такую, что

$$w(t, \xi) = A(\xi) + O(\tilde{g}^{-1}(t)), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w(t, \xi) = A(\xi) > 0.$$

В силу последних оценок, рассуждая так же, как в лемме 6, получаем асимптотику решения. Теорема доказана.

Авторы глубоко признательны рецензенту за весьма ценные замечания и предложения.

Список литературы

1. P. C. Fife, "Asymptotic states for equations of reaction and diffusion", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **84**:1 (1978), 693–726.
2. S. Kamin, L. A. Peletier, "Large time behaviour of solutions of the heat equation with absorption", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **12**:3 (1985), 393–408.
3. N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, "Landau–Ginzburg type equations in the subcritical case", *Commun. Contemp. Math.*, **5**:1 (2003), 127–145.
4. А. М. Ильин, "О поведении решения задачи Коши для параболического уравнения при неограниченном возрастании времени", *УМН*, **16**:2 (1961), 115–121.
5. M. Escobedo, O. Kavian, H. Matano, "Large time behavior of solutions of a dissipative semilinear heat equation", *Comm. Partial Differential Equations*, **20**:7–8 (1995), 1427–1452.
6. A. Gmira, L. Véron, "Large time behaviour of the solutions of a semilinear parabolic equation in $\mathbb{R}^N$ ", *J. Differential Equations*, **53** (1984), 258–276.
7. O. Kavian, "Remarks on the large time behaviour of a nonlinear diffusion equation", *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **4**:5 (1987), 423–452.
8. N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, "Global existence and time decay of small solutions to the Landau–Ginzburg type equations", *J. Anal. Math.*, **90**:1 (2003), 141–173.
9. А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.
10. C. Bardos, P. Penel, U. Frisch, P. L. Sulem, "Modified dissipativity for a non-linear evolution equation arising in turbulence", *Arch. Rational Mech. Anal.*, **71**:3 (1979), 237–256.
11. P. Biler, T. Funaki, W. A. Woźniński, "Fractal Burgers Equations", *J. Differential Equations*, **148**:1 (1998), 9–46.
12. N. Hayashi, N. Ito, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, "On some nonlinear dissipative equations with sub-critical nonlinearities", *Taiwanese J. Math.*, **8**:1 (2004), 135–154.
13. N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, "Large time behavior of solutions to the Landau–Ginzburg type equations", *Funkcial. Ekvac.*, **44**:1 (2001), 171–200.
14. T. Komatsu, "On the martingale problem for generators of stable processes with perturbations", *Osaka J. Math.*, **21**:1 (1984), 113–132.
15. C. J. Amick, J. L. Bona, M. E. Schonbek, "Decay of solutions of some nonlinear wave equations", *J. Differential Equations*, **81**:4 (1989), 1–49.
16. J. L. Bona, L. Luo, "Decay of solutions to nonlinear, dispersive wave equations", *Differential Integral Equations*, **6**:5 (1993), 961–980.

17. J. L. Bona, L. Luo, “More results on the decay of solutions to nonlinear, dispersive wave equations”, *Discrete Contin. Dynam. Systems*, **1**:2 (1995), 151–193.
18. D. B. Dix, “The dissipation of nonlinear dispersive waves: the case of asymptotically weak nonlinearity”, *Comm. Partial Differential Equations*, **17**:9–10 (1992), 1665–1693.
19. N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, I. A. Shishmarev, *Asymptotics for dissipative nonlinear equations*, Lecture Notes in Math., **1884**, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
20. R. Prado, E. Zuazua, “Asymptotic expansion for the generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burger equation”, *Differential Integral Equations*, **15**:12 (2002), 1409–1434.
21. M. E. Schonbek, “The Fourier splitting method”, *Advances in geometric analysis and continuum mechanics* (Stanford, CA, 1993), Internat. Press., Cambridge, MA, 1995, 269–274.
22. L. Zhang, “Decay of solutions of generalized Benjamin–Bona–Mahony equations”, *Acta Math. Sinica (N.S.)*, **10**:4 (1994), 428–438.
23. H. Fujita, “On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ ”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I*, **13** (1966), 109–124.
24. F. B. Weissler, “Existence and nonexistence of global solutions for a semilinear heat equation”, *Israel J. Math.*, **38**:1–2 (1981), 29–40.
25. H. A. Levine, “Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$ ”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **51** (1973), 371–386.
26. K. Hayakawa, “On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations”, *Proc. Japan Acad.*, **49** (1973), 503–505.
27. K. Kobayashi, T. Sirao, H. Tanaka, “On the growing up problem for semilinear heat equations”, *J. Math. Soc. Japan*, **29**:3 (1977), 407–424.
28. S. Sugitani, “On nonexistence of global solutions for some nonlinear integral equations”, *Osaka J. Math.*, **12** (1975), 45–51.
29. M. Escobedo, E. Zuazua, “Large time behavior for convection-diffusion equations in $\mathbb{R}^n$ ”, *J. Funct. Anal.*, **100**:1 (1991), 119–161.
30. P. Biler, G. Karch, W. A. Woyczyński, “Asymptotics for conservation laws involving Lévy diffusion generators”, *Studia Math.*, **148**:2 (2001), 171–192.
31. P. Biler, G. Karch, W. A. Woyczyński, “Critical nonlinearity exponent and self-similar asymptotics for Lévy conservation laws”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **18**:5 (2001), 613–637.
32. N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, “Asymptotics for fractional nonlinear heat equations”, *J. London Math. Soc.* (2), **72**:3 (2005), 663–688.
33. Е. И. Кайкина, П. И. Наумкин, Н. Хаяши, “О нелинейном уравнении с дробной производной”, *Дифференц. уравн.*, **46**:1 (2010), 80–97; англ. пер.: E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, N. Hayashi, “On a nonlinear equation with fractional derivative”, *Differ. Equ.*, **46**:1 (2010), 83–100.
34. М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М., 1987.
35. A. Constantin, J. Escher, “Well-posedness, global existence, and blowup phenomena for a periodic quasi-linear hyperbolic equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **51**:5 (1998), 475–504.
36. E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press., Princeton, NJ, 1970.
37. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Таблицы интегральных преобразований*, т. I, Наука, М., 1969; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Tables of integral transforms*, v. I, McGraw-Hill, New York–Toronto–London, 1954.

38. N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, “Large-time behaviour of solutions to the dissipative nonlinear Schrödinger equation”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **130**:5 (2000), 1029–1043.
39. N. Hayashi, T. Ozawa, “Scattering theory in the weighted $L^2(\mathbb{R}^n)$ spaces for some Schrödinger equations”, *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.*, **48**:1 (1988), 17–37.

Е. И. КАЙКИНА (E. I. KAIKINA)
National Autonomous University of Mexico,
Institute of Mathematics
E-mail: ekaikina@matmor.unam.mx

Поступило в редакцию
18.02.2010
28.02.2011

П. И. НАУМКИН (P. I. NAUMKIN)
National Autonomous University of Mexico,
Institute of Mathematics
E-mail: pavelni@matmor.unam.mx

И. А. ШИШМАРЁВ (I. A. SHISHMAREV)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
факультет вычислительной математики и кибернетики
E-mail: shish@voxnet.ru