Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Чанга, О числах, все простые делители которых лежат в специальных промежутках, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 4, 213–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im447>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:28:39

УДК 511

М. Е. Чанга

**О числах, все простые делители которых
лежат в специальных промежутках**

Изучается распределение чисел, все простые делители которых лежат в специальных промежутках, и по таким числам суммируются различные мультипликативные функции. Для этих сумматорных функций получены асимптотические формулы с главным членом, имеющим вид суммы с растущим числом слагаемых. Показано, что эта сумма с точностью до первого отброшенного члена приближается конечным числом своих слагаемых. Кроме того, обсуждается эффект обращения главного члена подобных асимптотических формул в конечную сумму при определенных соотношениях параметров задачи.

Библиография: 10 наименований.

Пусть заданы нецелое положительное число a и натуральное число D , не меньшее двух. При любом натуральном l с условиями $1 \leq l \leq D$ определим множество

$$E_l = \bigcup_{n=0}^{\infty} [(Dn + l - 1)^{1/a}, (Dn + l)^{1/a}).$$

Если через $\delta_l(x)$ обозначить характеристическую функцию множества E_l и положить

$$\sum_{p \leq x} \delta_l(p) = \frac{\pi(x)}{D} + r_l(x),$$

то для $r_l(x)$ имеет место оценка

$$r_l(x) \ll x^{1-\Delta} \quad (1)$$

с некоторым положительным Δ , зависящим от a . Для случая $0 < a < 1$ такая оценка была получена И. М. Виноградовым [1]; случай нецелых a , больших единицы, разобран в работах [2]–[4].

Для каждого l определим в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ функцию

$$F_l(s) = \prod_{p \in E_l} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

В настоящей статье используем принятое обозначение $s = \sigma + it$. Пусть M_l – множество натуральных чисел, в каноническое разложение которых входят только простые из E_l . Тогда при $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$F_l(s) = \sum_{n \in M_l} \frac{1}{n^s}.$$

Это равенство доказывается аналогично известному тождеству Эйлера для дзета-функции Римана.

Настоящая работа посвящена изучению некоторых свойств чисел множества M_l , в частности суммированию значений мультипликативных функций по числам из таких множеств. Нам понадобятся два вспомогательных утверждения. (В дальнейшем $c, c_1, c_2, \dots$ – положительные постоянные.)

ЛЕММА 1. *В области $\operatorname{Re} s > 1 - \Delta$, разрезанной вдоль горизонтальных отрезков, имеющих правым концом точку $s = 1$ или нетривиальный нуль дзета-функции Римана, справедливо равенство*

$$F_l(s) = \sqrt[l]{\zeta(s)} e^{G_l(s)},$$

где $\sqrt[l]{\zeta(s)}$ положителен при $s > 1$, а функция

$$G_l(s) = s \int_2^\infty \frac{r_l(u) du}{u(u^s - 1)}$$

аналитична в области $\operatorname{Re} s > 1 - \Delta$. Кроме того, при $T \geq 10$ в области $\sigma \geq 1 - c_1/\ln T$, $|t| \leq T$ нет нулей дзета-функции Римана, а на границе этой области имеет место оценка

$$(\ln T)^{-c_2} \ll |F_l(s)| \ll (\ln T)^{c_2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу оценки (1) для $r_l(x)$ несобственный интеграл, представляющий функцию $G_l(s)$, сходится равномерно внутри области $\operatorname{Re} s > 1 - \Delta$. Следовательно, функция $G_l(s)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1 - \Delta$.

Пользуясь преобразованием Абеля, при любом натуральном k находим

$$\sum_{p \leq x} \frac{\delta_l(p)}{p^{ks}} = \frac{1}{x^{ks}} \sum_{p \leq x} \delta_l(p) + ks \int_2^x \sum_{p \leq u} \delta_l(p) \frac{du}{u^{ks+1}}.$$

С другой стороны, имеем

$$\frac{1}{D} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p^{ks}} = \frac{1}{x^{ks}} \frac{\pi(x)}{D} + ks \int_2^x \frac{\pi(u)}{D} \frac{du}{u^{ks+1}}.$$

Вычитая второе равенство из первого, получим

$$\sum_{p \leq x} \frac{\delta_l(p)}{p^{ks}} - \frac{1}{D} \sum_{p \leq x} \frac{1}{p^{ks}} = \frac{r_l(x)}{x^{ks}} + ks \int_2^x r_l(u) \frac{du}{u^{ks+1}}.$$

Разделим это равенство на k и просуммируем по всем натуральным k . В полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ это даст

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq x} \delta_l(p) \ln \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} - \frac{1}{D} \sum_{p \leq x} \ln \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \\ = r_l(x) \ln \left(1 - \frac{1}{x^s}\right)^{-1} + s \int_2^x \frac{r_l(u) du}{u(u^s - 1)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\ln(1 - 1/x^s)^{-1}$ положителен при $s > 0$. Здесь мы пользуемся тем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_2^x r_l(u) \frac{du}{u^{ks+1}} = \int_2^x \frac{r_l(u)}{u} \sum_{k=1}^{\infty} u^{-ks} du = \int_2^x \frac{r_l(u)}{u(u^s - 1)} du.$$

Перемена порядка суммирования и интегрирования обосновывается равномерной сходимостью ряда на отрезке $[2, x]$.

В полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$, потенцируя полученное равенство и переходя к пределу при $x \rightarrow \infty$, получим искомое представление $F_l(s)$. Согласно принципу аналитического продолжения это представление распространяется на указанную в условии область.

Рассмотрим при $T \geq 10$ область $\sigma \geq 1 - \Delta/\ln T$, $|t| \leq T$. Выберем параметр $A = T^{1/\Delta}$ и разобьем интеграл, задающий $G_l(s)$, на два. Пользуясь оценкой (1) для $r_l(x)$, оценим интеграл по промежутку $[A, \infty)$ тривиально:

$$s \int_A^{\infty} \frac{r_l(u)}{u(u^s - 1)} du \ll T \int_A^{\infty} u^{-1-\Delta(1-1/\ln T)} du \ll 1.$$

Для оценки интеграла по промежутку $[2, A]$ используем соотношение (2) при $x = A$:

$$s \int_2^A \frac{r_l(u)}{u(u^s - 1)} du \ll A^{-\Delta(1-1/\ln T)} + \sum_{p \leq A} p^{-1+\Delta/\ln T} \ll \ln \ln T.$$

Таким образом, в рассматриваемой области имеем

$$G_l(s) \ll \ln \ln T. \quad (3)$$

Согласно теореме Валле-Пуссена о границе нулей $\zeta(s)$, а также теоремам об оценке $\zeta(s)$ и $1/\zeta(s)$ в окрестности единичной прямой [5, с. 54, 65] найдется положительное число $c_1 < \Delta$ такое, что в области $\sigma \geq 1 - c_1/\ln T$, $|t| \leq T$ не будет нулей $\zeta(s)$, а на ее границе будут выполняться оценки

$$\zeta(s) \ll \ln T, \quad \frac{1}{\zeta(s)} \ll \ln T.$$

Справедливость первой оценки при малых t вытекает из наличия у функции $\zeta(s)$ полюса первого порядка в точке $s = 1$. Комбинируя эти оценки с оценкой (3) для $G_l(s)$, получим требуемые неравенства для $F_l(s)$. Это и завершает доказательство.

ЛЕММА 2. Пусть функция $H(s)$ аналитична в круге $|s| < \Delta$ и A_k обозначает ее k -й коэффициент Тейлора в этом круге. Пусть контур Γ начинается в точке $-(\ln x)^{-1/2} - i0$, обходит начало координат против часовой стрелки и заканчивается в точке $-(\ln x)^{-1/2} + i0$. Пусть

$$I(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} x^s s^{-\frac{\alpha}{D}} H(s) ds,$$

где α – фиксированное целое число и $s^{-\alpha/D}$ положительно при $s > 0$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$I(x) = \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\ln x}} A_n \frac{(\ln x)^{\frac{\alpha}{D} - n - 1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{D} - n)} + O(e^{-c_3 \sqrt{\ln x}}).$$

Кроме того, при любом фиксированном целом N

$$\sum_{N \leq n \leq \sqrt{\ln x}} \left| \frac{A_n}{\Gamma(\frac{\alpha}{D} - n)} \right| (\ln x)^{\frac{\alpha}{D} - n - 1} \ll (\ln x)^{\frac{\alpha}{D} - N - 1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть δ – фиксированное положительное число, меньшее Δ . Обозначим через M максимум модуля $H(s)$ на окружности $|s| = \delta$. Согласно неравенствам Коши при любом n имеет место оценка

$$|A_n| \leq M \delta^{-n}. \quad (4)$$

При больших x можно полагать, что контур Γ целиком лежит в круге $|s| \leq \delta$. В силу равномерной сходимости ряда Тейлора $H(s)$ в этом круге получаем

$$I(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} x^s s^{n - \frac{\alpha}{D}} ds = \sum_{n=0}^{\infty} A_n I_n(x).$$

Пусть $n > \alpha/D + \sqrt{\ln x}$. В этом случае

$$|I_n(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{(\ln x)^{-1/2}} x^{-u} u^{n - \frac{\alpha}{D}} du.$$

На отрезке интегрирования подынтегральная функция монотонно возрастает, поэтому

$$|I_n(x)| \leq \frac{1}{\pi} e^{-\sqrt{\ln x}} (\ln x)^{\frac{1}{2}(\frac{\alpha}{D} - n - 1)}.$$

Отсюда, пользуясь оценкой (4), при некотором $c_3 < 1$ находим

$$\sum_{n > \alpha/D + \sqrt{\ln x}} A_n I_n(x) \ll e^{-c_3 \sqrt{\ln x}} \sum_{n > \alpha/D + \sqrt{\ln x}} (\delta \sqrt{\ln x})^{-n}. \quad (5)$$

Пусть теперь $n \leq \alpha/D + \sqrt{\ln x}$. Дополним контур Γ до контура Γ' двумя лучами, идущими от концов Γ вдоль отрицательной части вещественной оси. Из интегрального представления Ханкеля для гамма-функции [6, с. 28] имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} x^s s^{n - \frac{\alpha}{D}} ds = \frac{(\ln x)^{\frac{\alpha}{D} - n - 1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{D} - n)}.$$

Таким образом, можно записать

$$I_n(x) = \frac{(\ln x)^{\frac{\alpha}{D}-n-1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{D}-n)} + R_n(x),$$

где

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{(\ln x)^{-1/2}}^{\infty} x^{-u} u^{n-\frac{\alpha}{D}} du.$$

Теперь необходимо оценить последний интеграл. Если $n \leq \alpha/D$, то функция $u^{n-\alpha/D}$ монотонно убывает. Поэтому

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{\pi} (\ln x)^{\frac{1}{2}(\frac{\alpha}{D}-n)} \int_{(\ln x)^{-1/2}}^{\infty} x^{-u} du = \frac{1}{\pi} e^{-\sqrt{\ln x}} (\ln x)^{\frac{1}{2}(\frac{\alpha}{D}-n-2)}.$$

Если $n > \alpha/D$, то повторным интегрированием по частям можно свести этот случай к предыдущему. Имеем

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \frac{1}{\pi} e^{-\sqrt{\ln x}} (\ln x)^{\frac{1}{2}(\frac{\alpha}{D}-n-2)} \\ &\quad \times \left[1 + \frac{n-\frac{\alpha}{D}}{\sqrt{\ln x}} + \dots + \frac{(n-\frac{\alpha}{D}) \cdots (n-\frac{\alpha}{D}-[n-\frac{\alpha}{D}])}{(\sqrt{\ln x})^{[n-\alpha/D]+1}} \right] \\ &\leq \frac{1}{\pi} e^{-\sqrt{\ln x}} (\ln x)^{\frac{1}{2}(\frac{\alpha}{D}-n-2)} \\ &\quad \times \left[1 + \frac{n-\frac{\alpha}{D}}{\sqrt{\ln x}} + \left(\frac{n-\frac{\alpha}{D}}{\sqrt{\ln x}} \right)^2 + \dots + \left(\frac{n-\frac{\alpha}{D}}{\sqrt{\ln x}} \right)^{[n-\frac{\alpha}{D}]+1} \right]. \end{aligned}$$

Учитывая, что $n \leq \alpha/D + \sqrt{\ln x}$, находим

$$R_n(x) \ll e^{-\sqrt{\ln x}} (\ln x)^{\frac{1}{2}(\frac{\alpha}{D}-n-1)},$$

откуда, вновь прибегая к оценке (4), получаем

$$\sum_{0 \leq n \leq \alpha/D + \sqrt{\ln x}} A_n R_n(x) \ll e^{-c_3 \sqrt{\ln x}} \sum_{0 \leq n \leq \alpha/D + \sqrt{\ln x}} (\delta \sqrt{\ln x})^{-n}.$$

Объединяя эту оценку с соотношением (5), при достаточно больших x находим

$$I(x) = \sum_{0 \leq n \leq \alpha/D + \sqrt{\ln x}} A_n \frac{(\ln x)^{\frac{\alpha}{D}-n-1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{D}-n)} + O(e^{-c_3 \sqrt{\ln x}}). \quad (6)$$

Используя формулы дополнения и понижения для гамма-функции, при $n > \alpha/D + 1$ имеем

$$\frac{1}{|\Gamma(\frac{\alpha}{D}-n)|} \leq \frac{1}{\pi} \left| \Gamma\left(n+1-\frac{\alpha}{D}\right) \right| \leq \frac{1}{\pi} \left(n - \frac{\alpha}{D} \right)^{[n-\frac{\alpha}{D}]} \leq \frac{1}{\pi} \left(n - \frac{\alpha}{D} \right)^{n-\frac{\alpha}{D}}.$$

Таким образом, при $n \asymp \sqrt{\ln x}$ справедлива оценка

$$A_n \frac{(\ln x)^{\frac{\alpha}{D}-n-1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{D}-n)} \ll e^{-c_4 \sqrt{\ln x} \ln \ln x}, \quad (7)$$

так что добавление или отбрасывание в сумме (6) конечного числа слагаемых с $n \asymp \sqrt{\ln x}$ не повлияет на остаток. Далее, общий член суммы (6) при $n > \alpha/D + 1$ оценивается следующим образом:

$$\left| A_n \frac{(\ln x)^{\frac{\alpha}{D}-n-1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{D}-n)} \right| \leq \frac{M \delta^{-\frac{\alpha}{D}}}{\pi \ln x} \left(\frac{n - \frac{\alpha}{D}}{\delta \ln x} \right)^{n - \frac{\alpha}{D}},$$

причем функция в правой части монотонно убывает при n , заключенном в пределах от $\alpha/D + 1$ до $\sqrt{\ln x}$, если x достаточно велико. Пусть N – фиксированное целое неотрицательное число. Не ограничивая общности, можно считать, что $N > \alpha/D$. В этом случае справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_{N+1 \leq n \leq \sqrt{\ln x}} (\ln x)^{\frac{\alpha}{D}-n-1} \left| \frac{A_n}{\Gamma(\frac{\alpha}{D}-n)} \right| \\ \leq \frac{M \delta^{-\frac{\alpha}{D}}}{\pi \sqrt{\ln x}} \left(\frac{N+1 - \frac{\alpha}{D}}{\delta \ln x} \right)^{N+1 - \frac{\alpha}{D}} \ll (\ln x)^{\frac{\alpha}{D} - N - \frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Добавляя сюда оценку N -го слагаемого, получаем второе утверждение леммы. Этим доказательство завершается.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если α/D – целое число, то главный член асимптотики обращается в конечную сумму по $n \leq \alpha/D - 1$. Это будет точное равенство, так как в данном случае подынтегральная функция однозначна и интеграл $I(x)$ равен ее вычету в точке $s = 0$.

Для любого натурального n однозначно определены D натуральных чисел $n_1, \dots, n_D$ таких, что $n = n_1 \dots n_D$, $n_i \in M_i$. Пусть $\tau_k(n)$ обозначает число представлений натурального n произведением k натуральных чисел, причем $\tau_0(n) = 0$ при $n > 1$ и $\tau_0(1) = 1$, так как “пустое” произведение считается равным единице. Пусть заданы D целых неотрицательных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_D$, не все равные нулю, и $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_D$. Рассмотрим функцию

$$\omega(n) = \tau_{\alpha_1}(n_1) \dots \tau_{\alpha_D}(n_D).$$

Обозначим через $\Omega(x)$ сумматорную функцию $\omega(n)$. Основным результатом настоящей работы является вывод асимптотической формулы для $\Omega(x)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$H(s) = \frac{1}{s} ((s-1)\zeta(s))^{\frac{\alpha}{D}} e^{\alpha_1 G_1(s) + \dots + \alpha_D G_D(s)},$$

причем $H(s)$ положительна при $s > 1$, A_n обозначает n -й коэффициент ее разложения Тейлора с центром в точке $s = 1$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\Omega(x) = \sum_{n \leq x} \omega(n) = x \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\ln x}} A_n \frac{(\ln x)^{\frac{\alpha}{D} - n - 1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{D} - n)} + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}).$$

Кроме того, при любом фиксированном целом N

$$\Omega(x) = x \sum_{0 \leq n \leq N} A_n \frac{(\ln x)^{\frac{\alpha}{D} - n - 1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{D} - n)} + O(x(\ln x)^{\frac{\alpha}{D} - N - 2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\omega(n)$ есть число представлений натурального n произведением α чисел, первые α_1 из которых принадлежат множеству M_1 , следующие α_2 чисел – множеству M_2 и т.д. Соответственно, производящая функция для $\omega(n)$ при $\operatorname{Re} s > 1$ имеет вид

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\omega(n)}{n^s} = F_1^{\alpha_1}(s) \dots F_D^{\alpha_D}(s).$$

Используя неравенство Марджанишвили [7, с. 60], находим

$$\Omega(x) = \sum_{n \leq x} \tau_{\alpha_1}(n_1) \dots \tau_{\alpha_D}(n_D) \leq \sum_{n \leq x} \tau_{\alpha}(n) \ll x \ln^{\alpha-1} x.$$

Отсюда, интегрируя по частям, при $b = 1 + 1/\ln x$ получаем

$$\int_1^{\infty} \frac{\Omega(x)}{x^{b+1}} dx \ll \int_1^{\infty} \frac{\ln^{\alpha-1} x}{x^b} dx \ll (b-1)^{-\alpha} = \ln^{\alpha} x.$$

Используя общую теорему о связи между суммой коэффициентов ряда Дирихле и функцией, задаваемой этим рядом [7, с. 82], имеем

$$\int_1^x \Omega(u) du = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{F(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds + O(x^2 e^{-c_5 \sqrt{\ln x}}),$$

где $T = e^{c_1 \sqrt{\ln x}}$, c_1 – постоянная из леммы 1.

Введем параметр $\beta = 1 - c_1/\ln T = 1 - (\ln x)^{-1/2}$. Согласно лемме 1 функция $F(s)$ аналитически продолжается левее единичной прямой, причем в области $\sigma \geq \beta$, $|t| \leq T$ она не имеет особенностей, за исключением точки ветвления при $s = 1$. Согласно теореме Коши можно деформировать вертикальный отрезок интегрирования в контур C , состоящий из отрезков, последовательно соединяющих точки $b - iT$, $\beta - iT$ и $\beta - i0$, петли Γ , обходящей точку $s = 1$ против часовой

стрелки, и отрезков, последовательно соединяющих точки $\beta + i0$, $\beta + iT$ и $b + iT$. Таким образом получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{F(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds + R_1(x) + R_2(x),$$

где через $R_1(x)$ и $R_2(x)$ обозначены интегралы по горизонтальным и вертикальным отрезкам контура C соответственно. Согласно лемме 1 на этих отрезках $F(s) \ll \ln^{c_6} T$, поэтому

$$R_1(x) \ll \frac{x^2}{T^2} \ln^{c_6} T \ll x^2 e^{-c_7 \sqrt{\ln x}},$$

$$R_2(x) \ll x^{1+\beta} \ln^{c_6} T \ll x^2 e^{-c_8 \sqrt{\ln x}}.$$

Собирая вместе полученные оценки и пользуясь явным представлением $F(s)$ из леммы 1, получаем

$$\int_1^x \Omega(u) du = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (s-1)^{-\frac{\alpha}{D}} \frac{x^{s+1}}{s+1} H(s) ds + O(x^2 e^{-c_9 \sqrt{\ln x}}),$$

где $(s-1)^{-\alpha/D}$ положительно при $s > 1$, а $H(s)$ — функция из условия теоремы.

Для вычисления интеграла по Γ сделаем сдвиг начала координат в точку $s = 1$ и воспользуемся леммой 2. Получим

$$\int_1^x \Omega(u) du = x^2 \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\ln x}} B_n \frac{(\ln x)^{\frac{\alpha}{D} - n - 1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{D} - n)} + O(x^2 e^{-c_{10} \sqrt{\ln x}}),$$

где B_n обозначает n -й коэффициент Тейлора $H(s)/(s+1)$ в точке $s = 1$. Применяя формулу Лейбница, находим

$$A_n = B_{n-1} + 2B_n \quad (8)$$

при любом n , если положить $B_{-1} = 0$.

Функция $\Omega(x)$ монотонно возрастает, поэтому ее асимптотику можно получить, применяя метод асимптотического дифференцирования. При $0 < h < x/2$ имеем

$$\frac{1}{h} \int_{x-h}^x \Omega(u) du \leq \Omega(x) \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \Omega(u) du.$$

Рассмотрим следующее выражение:

$$\begin{aligned} & \pm \frac{1}{h} (x \pm h)^2 \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\ln(x \pm h)}} B_n \frac{(\ln(x \pm h))^{\frac{\alpha}{D} - n - 1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{D} - n)} \\ & \mp \frac{1}{h} x^2 \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\ln x}} B_n \frac{(\ln x)^{\frac{\alpha}{D} - n - 1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{D} - n)} \\ & = \pm \frac{1}{h} \int_1^{x \pm h} \Omega(u) du \mp \frac{1}{h} \int_1^x \Omega(u) du + O(x^2 h^{-1} e^{-c_{10} \sqrt{\ln x}}). \end{aligned}$$

Согласно оценке (7) можно заменить верхний предел изменения n в первой сумме на $\sqrt{\ln x}$. В дальнейшем, используя подобные соображения, мы не будем оговаривать это особо. Применим к первой сумме формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Получим

$$\begin{aligned} & \pm \frac{1}{h} \int_1^{x \pm h} \Omega(u) du \mp \frac{1}{h} \int_1^x \Omega(u) du + O(x^2 h^{-1} e^{-c_{10} \sqrt{\ln x}}) \\ &= x \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\ln x}} B_n \left(\frac{2(\ln x)^{\frac{\alpha}{D} - n - 1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{D} - n)} + \frac{(\frac{\alpha}{D} - n - 1)(\ln x)^{\frac{\alpha}{D} - n - 2}}{\Gamma(\frac{\alpha}{D} - n)} \right) + R, \end{aligned}$$

где

$$R \ll h \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\ln x}} \left| \frac{B_n}{\Gamma(\frac{\alpha}{D} - n)} \right| (\ln(x + \theta h))^{\frac{\alpha}{D} - n - 1} \ll h (\ln x)^{\frac{\alpha}{D} - 1}.$$

При выделении главной части второй производной мы пользовались тем, что $n \leq \sqrt{\ln x}$. Последняя оценка вытекает из второго утверждения леммы 2. Теперь воспользуемся формулой понижения для гамма-функции и соотношением (8), связывающим коэффициенты A_n и B_n . Получим следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \pm \frac{1}{h} \int_1^{x \pm h} \Omega(u) du \mp \frac{1}{h} \int_1^x \Omega(u) du \\ &= x \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\ln x}} A_n \frac{(\ln x)^{\frac{\alpha}{D} - n - 1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{D} - n)} + O(x^2 h^{-1} e^{-c_{10} \sqrt{\ln x}} + h (\ln x)^{\frac{\alpha}{D} - 1}). \end{aligned}$$

Выбирая параметр $h = x e^{-c_{10} \sqrt{\ln x}/2}$, мы видим, что верхняя и нижняя оценки для $\Omega(x)$ асимптотически совпадают. Отсюда получим искомую асимптотическую формулу для $\Omega(x)$. Доказательство завершается применением второго утверждения леммы 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Подобным образом можно получить аналогичные асимптотические формулы в случае других функций, отличающихся от $\omega(n)$ заменой одного или нескольких τ -множителей на мультипликативные функции, производящие функции которых выражаются произведением дзета-функций.

Получим некоторые следствия доказанной теоремы. Пусть заданы k различных натуральных чисел $l_1, \dots, l_k$ таких, что выполнены условия $1 \leq l_i \leq D$. Пусть $E = E_{l_1} \cup \dots \cup E_{l_k}$ и M – множество натуральных чисел, все простые делители которых принадлежат множеству E .

СЛЕДСТВИЕ 1. *Имеет место асимптотическая формула*

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} 1 = x \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\ln x}} A_n \frac{(\ln x)^{\frac{k}{D} - n - 1}}{\Gamma(\frac{k}{D} - n)} + O(x e^{-c \sqrt{\ln x}}).$$

Кроме того, при любом фиксированном целом N

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} 1 = x \sum_{0 \leq n \leq N} A_n \frac{(\ln x)^{\frac{k}{D} - n - 1}}{\Gamma(\frac{k}{D} - n)} + O(x (\ln x)^{\frac{k}{D} - N - 2}).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Имеет место асимптотическая формула*

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} \tau(n) = x \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\ln x}} B_n \frac{(\ln x)^{\frac{2k}{D}-n-1}}{\Gamma(\frac{2k}{D}-n)} + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}).$$

Кроме того, при любом фиксированном целом N

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} \tau(n) = x \sum_{0 \leq n \leq N} B_n \frac{(\ln x)^{\frac{2k}{D}-n-1}}{\Gamma(\frac{2k}{D}-n)} + O(x(\ln x)^{\frac{2k}{D}-N-2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следствий 1 и 2 состоит в непосредственном применении теоремы 1 для случая $\alpha_{l_1} = \dots = \alpha_{l_k} = 1$ или для случая $\alpha_{l_1} = \dots = \alpha_{l_k} = 2$, причем все прочие α_i равны нулю. Коэффициенты A_n и B_n суть коэффициенты Тейлора соответствующих функций $H(s)$.

Заметим, что константы A_0 и B_0 в следствиях 1 и 2 можно представить в виде бесконечных произведений по простым числам. Действительно, потенцируя соотношение (2) при $s = 1$ и переходя к пределу при $x \rightarrow \infty$, в силу оценки (1) получаем

$$e^{G_l(1)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{D} - \delta_l(p)}.$$

Отсюда, ограничиваясь первым членом, находим

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} 1 = Cx \frac{(\ln x)^{\frac{k}{D}-1}}{\Gamma(\frac{k}{D})} + O(x(\ln x)^{\frac{k}{D}-2})$$

и

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} \tau(n) = C^2 x \frac{(\ln x)^{\frac{2k}{D}-1}}{\Gamma(\frac{2k}{D})} + O(x(\ln x)^{\frac{2k}{D}-2}),$$

где

$$C = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{k}{D} - \delta_{l_1}(p) - \dots - \delta_{l_k}(p)} = e^{G_{l_1}(1) + \dots + G_{l_k}(1)} > 0. \quad (9)$$

Если в асимптотической формуле теоремы 1 α кратно D , то сумма с растущим числом слагаемых в главном члене обращается в конечную сумму. Например, при $D = 2$ имеем

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M_1}} \tau(n) = C^2 x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}),$$

где $C > 0$ выражается формулой (9) при $k = 1$ и $l_1 = 1$. Аналитическая природа этого эффекта, уже обсуждавшаяся в замечании 1, заключается в однозначном

характере особой точки соответствующей производящей функции. Тот же эффект возникает и при рассмотрении чисел, все простые делители которых лежат в заданных арифметических прогрессиях. Такая задача была впервые рассмотрена Э. Ландау [8], а в более общей постановке – в работах [9], [10].

Остановимся еще на одном проявлении того же эффекта. Известно, что

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) = O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}).$$

Из следующей теоремы становится понятно, что если вести суммирование только по n , принадлежащим множеству M , то возникает главный член, имеющий вид суммы с растущим числом слагаемых.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$H(s) = \frac{1}{s}((s-1)\zeta(s))^{-\frac{k}{D}} e^{-G_{l_1}(s) - \dots - G_{l_k}(s)},$$

причем функция $H(s)$ положительна при $s > 1$, A_n обозначает n -й коэффициент ее разложения Тейлора с центром в точке $s = 1$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} \mu(n) = x \sum_{0 \leq n \leq \sqrt{\ln x}} A_n \frac{(\ln x)^{-\frac{k}{D}-n-1}}{\Gamma(-\frac{k}{D}-n)} + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}).$$

Кроме того, при любом фиксированном целом N

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} \mu(n) = x \sum_{0 \leq n \leq N} A_n \frac{(\ln x)^{-\frac{k}{D}-n-1}}{\Gamma(-\frac{k}{D}-n)} + O(x(\ln x)^{-\frac{k}{D}-N-2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В области $\operatorname{Re} s > 1$ производящая функция задается равенством

$$F(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \in M}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = F_{l_1}^{-1}(s) \dots F_{l_k}^{-1}(s).$$

Возьмем параметр $b = 1 + 1/\ln x$. Используя общую теорему о связи между суммой коэффициентов ряда Дирихле и функцией, задаваемой этим рядом [7, с. 75], имеем

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} \mu(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O(xe^{-c_{11}\sqrt{\ln x}}),$$

где $T = e^{c_1\sqrt{\ln x}}$, c_1 – постоянная из леммы 1. Дальнейшие преобразования комплексного интеграла в правой части полностью аналогичны таковым при доказательстве теоремы 1.

Константу A_0 в теореме 2 также удобно представить в виде бесконечного произведения. Ограничиваясь первым членом, находим

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ n \in M}} \mu(n) = C^{-1} x \frac{(\ln x)^{-\frac{k}{D}-1}}{\Gamma(-\frac{k}{D})} + O(x(\ln x)^{-\frac{k}{D}-2}),$$

где $C > 0$ выражается формулой (9).

Список литературы

1. Виноградов И. М. Некоторое общее свойство распределения простых чисел // Матем. сб. 1940. Т. 7(49). № 2. С. 365–372.
2. *Leitmann D.* On the uniform distribution of some sequences // J. London Math. Soc. 1976. V. 14. P. 430–432.
3. *Baker R. C., Kolesnik G.* On the distribution of p^α modulo one // J. Reine Angew. Math. 1985. V. 356. P. 174–193.
4. Чанга М. Е. Простые числа в специальных промежутках и аддитивные задачи с такими числами // Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 3. С. 423–436.
5. Титчмарш Е. К. Теория дзета-функции Римана. М.: ИЛ, 1953.
6. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматгиз, 1963.
7. Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
8. *Landau E.* Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. V. 2. Leipzig: Teubner, 1909.
9. Бредихин Б. М. Остаточный член в асимптотической формуле для $\nu_G(x)$ // Изв. вузов СССР. Математика. 1960. Т. 6(19). С. 40–49.
10. Левин Б. В., Файнлейб А. С. Применение некоторых интегральных уравнений к вопросам теории чисел // УМН. 1967. Т. 22. № 3(135). С. 119–198.

Поступило в редакцию
18.II.2003