Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Ильюта, Интерполяция по симметрическим функциям и альтернированные высшие порядки Брюа, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 5, 3–34

DOI: <https://doi.org/10.4213/im449>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 14:11:55

УДК 519.651

Г. Г. Ильята

Интерполяция по симметрическим функциям и альтернированные высшие порядки Брюа

Изучается интерполяция по грасмановым полиномам Шуберта – функциям Шура. Доказаны отвечающие элементарным симметрическим функциям и функциям Шура варианты формулы Зелевинского–Штурмфельса для произведения максимальных миноров прямоугольной матрицы и, как следствия, обобщения формулы для определителя Коши–Вандермонда и формулы Коши для функций Шура. Определены обобщения высших порядков Брюа, элементы которых кодируют связные компоненты конфигурационных пространств, а также обобщения дискриминантных конфигураций Манина–Шехтмана.

Библиография: 41 наименование.

Введение

Полиномы Шуберта были введены А. Ласку и М.-П. Шютценберже при изучении когомологий многообразия флагов. Интерпретация полиномов Шуберта как базисных функций интерполяции привела к обобщению классических интерполяционных формул [32]. В настоящей статье изучается интерполяция по грасмановым полиномам Шуберта, которые совпадают с симметрическими функциями Шура [12]. Известно обобщение интерполяционной формулы Лагранжа для симметрических функций [10]. Обобщаются для симметрических функций интерполяционная формула Ньютона, рекуррентные соотношения и интегральные представления для интерполяционного полинома, разделенных разностей и остаточного члена интерполяционного ряда, аналог формулы Лейбница для разделенных разностей произведения двух функций, оценки для разделенных разностей, которые могут быть использованы для оценок остаточного члена интерполяционного ряда (некоторые результаты были анонсированы в [6]). Эти формулы приводят к определению обобщенных высших порядков Брюа, которые назовем *альтернированными* в силу их тесной связи с альтернированными ориентированными матроидами [23] (обобщение этой конструкции для любого невырожденного ориентированного матроида получено в [41]) и элементы которых кодируют компоненты связности определяемых с помощью интерполяции конфигурационных пространств. Также определим обобщения для симметрических функций дискриминантных конфигураций гиперплоскостей и, тем самым, обобщения высших групп кос Манина–Шехтмана, т.е. фундаментальных групп дополнений к дискриминантным конфигурациям.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов NWO-RFBR (№ 047.008.005), INTAS (№ 00-0259), РФФИ (№ 01-01-00739).

В качестве примеров применения общих интерполяционных формул в § 1 получены некоторые тождества для функций Шура, которые аналогично [31] можно интерпретировать как утверждения из теории пересечений. Представлены как разделенные разности операторы Макдональда (их собственными функциями являются зависящие от двух параметров симметрические полиномы Макдональда [11]). В контексте симметрических функций определен обобщенный циклический многогранник (альтернированный ориентированный матроид является комбинаторным вариантом циклического многогранника [23]).

Матрица интерполяционной системы, записанной в базисе, состоящем из мономиальных симметрических функций, совпадает с некоторой специализацией матрицы Зелевинского–Штурмфельса [22]. В § 2 доказаны варианты формулы Зелевинского–Штурмфельса для произведения максимальных миноров прямоугольной матрицы, из аналогичной специализации которых получены формулы для определителей интерполяционных систем, записанных в базисах, состоящих из элементарных симметрических функций и функций Шура. Как следствия, получены обобщения формулы для определителя Коши–Вандермонда и формулы Коши для функций Шура.

Элемент симметрической группы $\pi \in S_n$ можно определить как последовательность элементов множества $\bar{n} = \{1, \dots, n\}$ или как множество инверсий, т.е. пар $i, j \in \bar{n}$, $i < j$, $\pi(i) > \pi(j)$. В [8] элементы высших порядков Брюа $B(m, n)$ определены как последовательности k -подмножеств в $\bar{n}$, факторизованные по некоторому отношению эквивалентности. В [9] дано другое определение и доказана его эквивалентность определению из [8], что является нетривиальным фактом. В § 3 приведено определение альтернированных высших порядков Брюа $B(m, n, k)$, обобщающее данное в [9] определение высших порядков Брюа $B(m, n)$, где $B(m, n) = B(m, n, 1)$. В § 3 также определены конфигурационные пространства и построено отображение из множества компонент связности пространства невырожденных вещественных конфигураций в $B(m, n, k)$. Пространство конфигураций расщепляется на дополнения к конфигурациям гиперплоскостей, которые являются обобщениями дискриминантных конфигураций Манина–Шехтмана. В [5] доказано, что невырожденным конфигурациям, возникающим как множества экстремумов M -морсификации особенности A_m , отвечают специального вида элементы $B(m, n)$ – обобщения updown-перестановок. В § 3 приводится иное доказательство этого факта.

В теории конфигураций гиперплоскостей при индуктивных доказательствах часто используется операция удаление-сокращение [16]. Например, применение этой операции позволяет найти порождающие элементы и определяющие соотношения в группе крашенных кос [18]. В работах [8], [9] с помощью этой операции доказаны основные структурные свойства высших порядков Брюа $B(m, n)$. В § 3 описана операция удаление-сокращение для альтернированных высших порядков Брюа и для обобщенных разделенных разностей. Это позволяет сделать некоторые выводы о фундаментальной группе дополнения к обобщенной дискриминантной конфигурации.

Аналогично одномерному случаю [13], теорию интерполяционных полиномов и разделенных разностей можно интерпретировать с точки зрения коалгебр. При замене $x_i \mapsto 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes x \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1$ (x расположен на i -м месте) можно

рассматривать операцию разделенной разности как коумножение на пространстве полиномов:

$$\Delta f(x) = \frac{f(x) \otimes 1 - 1 \otimes f(x)}{x \otimes 1 - 1 \otimes x}.$$

Симметрические полиномы от k переменных при такой замене переходят в элементы k -й тензорной степени пространства полиномов от одной переменной. Например,

$$m_{21}(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 \mapsto x^2 \otimes x + x \otimes x^2.$$

Как отмечается в [13], получающаяся коалгебра является аналогом универсальной обертывающей алгебры для алгебры Ли. Точнее, аналогия состоит в следующем: предельным вариантом интерполяционной формулы Ньютона является формула Тейлора, подходящая интерпретация которой приводит к понятию алгебры Ли.

При изучении интерполяции используются три базиса в интерполяционном пространстве: функции Шура, элементарные и мономиальные симметрические функции. Рассматривая в качестве базисных функций полиномы Макдональда, можно объединить эти подходы. Формулы Коши для полиномов Макдональда–Корнвиндера [40] позволяют обобщить интерполяционные формулы для базиса, состоящего из этих полиномов.

Для базиса в интерполяционном пространстве, состоящего из функций Шура от k переменных, интерполяцию по симметрическим функциям можно рассматривать как внешнюю степень классической интерполяции Ньютона (матрица интерполяционной системы получается умножением k -й ассоциированной для матрицы Вандермонда на диагональную матрицу).

Высшие порядки Брюа описывают в терминах комбинаторики рекуррентные соотношения для разделенных разностей. В настоящей статье рекуррентные соотношения получены как следствия интерполяционной формулы Лагранжа для симметрических функций [10]. Симметризаторы Лагранжа–Сильвестра и Якоби представимы в виде композиций элементарных разделенных разностей ∂_i , отвечающих транспозициям $s_i = (i \ i+1)$ в симметрической группе S_n [33], [31]. Это представление позволяет свести рекуррентные соотношения для разделенных разностей интерполяции по симметрическим функциям и по полиномам Шуберта к следующему рекуррентному соотношению для перестановок: элемент наибольшей длины (по отношению к системе образующих $s_1, \dots, s_n$) в группе S_{n+1} получается умножением элемента наибольшей длины в группе S_n на элемент Кокстера $s_1 \cdots s_n$ в группе S_{n+1} .

Изучаемая в статье алгебраическая интерполяция позволяет реализовать геометрически лишь представимые элементы альтернированных высших порядков Брюа подобно тому, как конфигурации гиперплоскостей реализуют лишь представимые ориентированные матроиды. При помощи интерполяции сплайнами [39] можно реализовать и непредставимые элементы альтернированных высших порядков Брюа.

Выделим наиболее интересный, на взгляд автора, вопрос, возникший при работе над статьей. Представление разделенных разностей для симметрических функций в виде контурного интеграла содержит одномерные дискриминант и резуль-

тант. Существуют ли обобщения этой и сопутствующих формул, в которых аналогичную роль играют многомерные дискриминанты и результаты из [28]?

§ 1. Симметризатор Лагранжа–Сильвестра и интерполяция для симметрических функций

1. Обозначения и вспомогательные результаты. Приведенные в этом пункте тождества для симметрических функций можно найти в [11]. Для произвольного разбиения $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots)$, $\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq 0$, $\sum \gamma_i < \infty$, обозначим через $\gamma' = (\gamma'_1, \gamma'_2, \dots)$ сопряженное разбиение,

$$\gamma'_i = \#\{j: \lambda_j \geq i\}.$$

Пусть $m_i(\gamma)$ – кратность числа i в разбиении γ , $l(\gamma)$ – количество ненулевых частей разбиения γ и

$$z_\gamma = \prod_{i \geq 1} i^{m_i(\gamma)} m_i(\gamma)!, \quad \varepsilon_\gamma = (-1)^{\sum \gamma_i - l(\gamma)}.$$

Через $[m]^n$ обозначим разбиение, состоящее из n частей, равных m . Для $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ определим разность разбиений:

$$\gamma - [m]^n = (\gamma_1 - m, \dots, \gamma_n - m).$$

Напомним обычные обозначения для базисов в кольце симметрических функций:

$$e_k(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k}, \quad e_\gamma = e_{\gamma_1} e_{\gamma_2} \cdots,$$

– элементарные симметрические функции;

$$h_k(x_1, x_2, \dots) = \sum_{i_1 \leq \dots \leq i_k} x_{i_1} \cdots x_{i_k}, \quad h_\gamma = h_{\gamma_1} h_{\gamma_2} \cdots,$$

– полные симметрические функции;

$$p_k(x_1, x_2, \dots) = \sum_i x_i^k, \quad p_\gamma = p_{\gamma_1} p_{\gamma_2} \cdots,$$

– степенные суммы; для $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$

$$m_\gamma(x_1, x_2, \dots) = \sum x_{i_1}^{\gamma_1} \cdots x_{i_n}^{\gamma_n}$$

– мономиальные симметрические функции (суммируются все различные мономы с показателями из γ); для $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$

$$s_\gamma(x_1, \dots, x_n) = \frac{\det(x_i^{\gamma_j + n - j})}{\det(x_i^{n - j})}, \quad (1)$$

$$V_1(x_1, \dots, x_n) = \det(x_i^{n - j}) = \prod_{i < j} (x_i - x_j) \quad (2)$$

– функции Шура.

Предполагаем, что $s_{\gamma-[m]^n} \equiv 0$, если $\gamma_n - m < 0$. Через $c_{\lambda\mu}^\gamma$ обозначим коэффициенты Литтлвуда–Ричардсона, т.е.

$$s_\lambda s_\mu = \sum_{\gamma} c_{\lambda\mu}^\gamma s_\gamma. \quad (3)$$

Рассмотрим в кольце симметрических функций скалярное произведение, для которого базисы $\{h_\gamma\}$ и $\{m_\gamma\}$ двойственны:

$$(h_\gamma, m_\mu) = \delta_{\gamma\mu}$$

для всех разбиений γ, μ . Для любого $n \geq 0$ пусть $\{u_\gamma\}, \{v_\gamma\}$ – индексруемые разбиениями числа n базисы в кольце симметрических функций. Тогда следующие условия равносильны:

$$\begin{aligned} (u_\gamma, v_\mu) &= \delta_{\gamma\mu} \quad \text{для всех } \gamma, \mu, \\ \sum_{\gamma} u_\gamma(x) v_\gamma(y) &= \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j}. \end{aligned} \quad (4)$$

Частными случаями тождества (4) являются следующие формулы:

$$\prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\gamma} h_\gamma(x) m_\gamma(y) = \sum_{\gamma} m_\gamma(x) h_\gamma(y) \quad (5)$$

$$= \sum_{\gamma} s_\gamma(x) s_\gamma(y) \quad (6)$$

$$= \sum_{\gamma} z_\gamma^{-1} p_\gamma(x) p_\gamma(y). \quad (7)$$

Применение к формулам (5)–(7) инволюции, переставляющей элементарные и полные симметрические функции, позволяет получить следующие формулы:

$$\prod_{i,j} (1 + x_i y_j) = \sum_{\gamma} m_\gamma(x) e_\gamma(y) = \sum_{\gamma} e_\gamma(x) m_\gamma(y) \quad (8)$$

$$= \sum_{\gamma} s_\gamma(x) s_{\gamma'}(y) \quad (9)$$

$$= \sum_{\gamma} \varepsilon_\gamma z_\gamma^{-1} p_\gamma(x) p_\gamma(y). \quad (10)$$

Пространство интерполирующих функций определим с помощью базиса из мономиальных симметрических функций

$$P_n^k = \langle m_\lambda(Y) : \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k), \lambda_1 \leq n - k, Y = \{y_1, \dots, y_k\} \rangle.$$

Пусть для $\bar{n} = \{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} C(n, k) &= \{I : I \subset \bar{n}, |I| = k\}, \\ I &= \{i_1, \dots, i_k\} \in C(n, k). \end{aligned}$$

Множество узлов интерполяции обозначим через

$$\begin{aligned} X &= \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathbb{C}, \quad x_i \neq x_j, \quad i \neq j, \\ X_I &= \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}, \quad X_{ij} = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_j\}, \quad X_k = X_{1k} = X_{\bar{k}}, \\ f(X_I) &= f(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}). \end{aligned}$$

Аналогичные обозначения используются для $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$ и $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$.

Для произвольных числовых множеств A, B пусть

$$\omega(A, B) = \prod_{a \in A, b \in B} (a - b).$$

Через $\text{CV}_m(Y, X)$ обозначим матрицу Коши–Вандермонда. Строки этой матрицы имеют вид

$$\left(\frac{1}{x_i - y_1} \quad \dots \quad \frac{1}{x_i - y_k} \quad 1 \quad x_i \quad \dots \quad x_i^{m-1} \right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Известно и легко доказывается индукцией по n (вычитаем i -ю строку из остальных), что

$$\det \text{CV}_{n-k}(Y, X) = (-1)^{C_n^2} \frac{V_1(X)V_1(Y)}{\omega(X, Y)}. \quad (11)$$

2. Симметризатор Лагранжа–Сильвестра. Симметрическим функциям f от k переменных и g от $n - k$ переменных симметризатор Лагранжа–Сильвестра LS сопоставляет симметрическую функцию от n переменных [31], [33]:

$$\text{LS}(f, g) = \sum_{I \in C(n, k)} \frac{f(X_I)g(X_{\bar{n} \setminus I})}{\omega(X_I, X_{\bar{n} \setminus I})}.$$

Введем специальное обозначение для частного случая оператора LS – оператора разделенных разностей для симметрических функций (ниже увидим, что этот оператор вычисляет старший коэффициент интерполяционного полинома для функции f):

$$\Delta_X^Y[f(Y)] = \text{LS}(f(Y), 1).$$

Заметим, что любую симметрическую функцию $g(X_{\bar{n} \setminus I})$ можно выразить через симметрические функции от X и X_I (обозначим такое представление через $\bar{g}(X_I)$). Достаточно найти представление для любого базиса в пространстве симметрических функций от $X_{\bar{n} \setminus I}$. Для базисов $e_\lambda, h_\lambda, f_\lambda, m_\lambda, s_\lambda$ это можно сделать с помощью известных формул [11]

$$\begin{aligned} e_m(X) &= \sum_{p+q=m} e_p(X_I) e_q(X_{\bar{n} \setminus I}), \\ h_m(X) &= \sum_{p+q=m} h_p(X_I) h_q(X_{\bar{n} \setminus I}), \\ p_m(X) &= p_m(X_I) + p_m(X_{\bar{n} \setminus I}), \\ m_\lambda(X) &= \sum_{\alpha+\beta=\lambda} m_\alpha(X_I) m_\beta(X_{\bar{n} \setminus I}), \\ s_\lambda(X) &= \sum_{\gamma \subset \lambda} s_{\lambda/\gamma}(X_I) s_\gamma(X_{\bar{n} \setminus I}). \end{aligned}$$

Это замечание позволяет свести симметризатор Лагранжа–Сильвестра к разделенным разностям:

$$\text{LS}(f, g) = \Delta_X^Y[f\bar{g}]. \quad (12)$$

Далее нам понадобится формула для разделенных разностей от функции Шура (см. [10])

$$\Delta_X^Y[s_\gamma] = s_{\gamma-[n-k]k}, \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k). \quad (13)$$

Эта формула является частным случаем следующей формулы [31], [33]:

$$\text{LS}(s_{(\gamma_1, \dots, \gamma_k)}, s_{(\mu_1, \dots, \mu_{n-k})}) = s_{(\gamma_1-n+k, \dots, \gamma_k-n+k, \mu_1, \dots, \mu_k)}.$$

3. Классические интерполяционные формулы для одной переменной. Если в определении производной функции, являющейся пределом отношения приращения функции к приращению аргумента, не переходить к пределу, то получим разделенную разность функции. Кратные производные используются при разложении функции в ряд Тейлора. Соответствующее разложение функции в ряд по кратным разделенным разностям называется *интерполяционным рядом Ньютона*. Задача поиска частичных сумм ряда Ньютона известна как полиномиальная интерполяция функции. Решение этой задачи может быть представлено разными способами: частным двух определителей, рекуррентной формулой, контурным интегралом, кратным интегралом, значением кратной производной функции в промежуточной точке [1]. В настоящем пункте выпишем соответствующие формулы, а в следующем – обобщим их для симметрических функций.

Задача полиномиальной интерполяции функции $f(y)$ состоит в поиске полинома

$$P_X^y[f](y) = A_X[y^{n-1}]y^{n-1} + \dots + A_X[y]y + A_X[1],$$

значения которого в точках из X совпадают со значениями функции f в этих точках:

$$P_X^y[f](x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Задача сводится к решению линейной системы

$$\sum_{j=0}^{n-1} A_X[y^j]x_i^j = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Правило Крамера позволяет записать решение в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} P_X^y[f] & y^{n-1} & \dots & y & 1 \\ f(x_1) & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_n) & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} = 0, \\ & P_X^y[f] = -\frac{1}{V_1(X)} \begin{vmatrix} 0 & y^{n-1} & \dots & y & 1 \\ f(x_1) & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_n) & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (15)$$

Разложение по первому столбцу определителя в последней формуле приводит к интерполяционной формуле Лагранжа

$$P_X^y[f] = \sum_{i=1}^n f(x_i) \prod_{i \neq j} \frac{y - x_j}{x_i - x_j}. \quad (16)$$

Эта формула на самом деле принадлежит Е. Варингу и вновь открыта Эйлером в 1783г. Публикация Лагранжа была в 1795г. По-видимому, формула Лагранжа была известна еще Ньютону. Исторические ссылки можно найти в [4], [33].

Поскольку система (14) имеет единственное решение, то для полинома f степени меньше n справедлива формула

$$P_X^y[f] = f.$$

Формула Лагранжа в этом случае равносильна разложению на простейшие дроби:

$$\frac{f(y)}{\prod_{i=1}^n (y - x_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} \frac{1}{y - x_i}. \quad (17)$$

Из формулы Лагранжа для любых i, j легко следуют рекуррентные соотношения

$$P_X^y[f] = \frac{(y - x_i)P_{X \setminus x_i}^y[f] - (y - x_j)P_{X \setminus x_j}^y[f]}{x_j - x_i},$$

$$A_X[y^{n-1}] = \Delta_X^y[f] = \frac{\Delta_{X \setminus x_i}^y[f] - \Delta_{X \setminus x_j}^y[f]}{x_j - x_i}, \quad (18)$$

$$A_X[y^p] = \frac{A_{X \setminus x_i}[y^{p-1}] - A_{X \setminus x_j}[y^{p-1}]}{x_j - x_i} - \frac{x_i A_{X \setminus x_i}[y^p] - x_j A_{X \setminus x_j}[y^p]}{x_j - x_i}, \quad 0 < p < n - 1, \quad (19)$$

$$A_X[1] = \frac{x_i A_{X \setminus x_i}[1] - x_j A_{X \setminus x_j}[1]}{x_i - x_j}. \quad (20)$$

Интерполяционные формулы Эрмита представляют разделенные разности, интерполяционный полином и остаточный член интерполяционного ряда в виде контурных интегралов. Предположим, что функция $f(z)$ регулярна внутри простого контура $C_1 \subset \mathbb{C}$, охватывающего точки $y, x_1, \dots, x_n$. Тогда

$$P_X^y[f] = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{\omega(z, X) - \omega(y, X)}{z - y} \frac{f(z)}{\omega(z, X)} dz$$

$$= f(y) - \omega(y, X) \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{(z - y)\omega(z, X)} dz. \quad (21)$$

Эта формула доказывается прямым вычислением вычетов.

Формулы (11), (15), (16), (21) позволяют получить представления для разделенных разностей

$$\begin{aligned}\Delta_X^y[f] &= \frac{1}{V_1(X)} \begin{vmatrix} f(x_1) & x_1^{n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_n) & x_n^{n-2} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{\omega(z, X)} dz \\ &= \frac{1}{V_1(X)} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(z) \begin{vmatrix} \frac{dz}{z-x_1} & x_1^{n-2} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dz}{z-x_n} & x_n^{n-2} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}.\end{aligned}\quad (22)$$

Формулы (16), (21) позволяют представить интерполяционный полином как разделенную разность:

$$P_X^y[f] = \Delta_{X \cup y}^z[(\omega(z, X) - \omega(y, X))f(z)].$$

С помощью (18) нетрудно доказать интерполяционную формулу Ньютона [1]

$$f(y) = \sum_{p=1}^n \Delta_{X_p}^y[f] \omega(y, X_{p-1}) + \Delta_{X \cup y}^y[f] \omega(y, X). \quad (23)$$

Аналогично, с помощью (20) доказывается формула Ньютона для младшего коэффициента интерполяционного полинома

$$\begin{aligned}x_1 \cdots x_n f(y) &= y \sum_{p=1}^n (-1)^{p-1} x_{p+1} \cdots x_n A_{X_p}[1] \omega(y, X_{p-1}) \\ &\quad + (-1)^n A_{X \cup y}[1] \omega(y, X).\end{aligned}$$

Разделенная разность может быть представлена в виде кратного интеграла [1]. Для $T = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n : \sum t_i = 1, t_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ имеем формулу

$$\Delta_X^y[f] = \int_T f^{(n-1)}(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n) dt_2 \cdots dt_n. \quad (24)$$

Предельным случаем оператора разделенных разностей (при совпадающих узлах интерполяции) является оператор дифференцирования. Существует аналог для разделенных разностей формулы Лейбница производной произведения двух функций [38]:

$$\Delta_X^y[fg] = \sum_{p=1}^n \Delta_{X_p}^y[f] \Delta_{X \setminus X_{p-1}}^y[g]. \quad (25)$$

И, наконец, приведем несколько формул, используемых при оценках остаточного члена интерполяционного ряда [1]:

$$|\Delta_X^y[f]| \leq \frac{|C_1|}{2\pi} \frac{\max_{C_1} |f(z)|}{\min_{C_1} |\omega(z, X)|}, \quad (26)$$

$$\Delta_X^y[f] = \frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}, \quad \xi \in [\min x_i, \max x_i], \quad X \subset \mathbb{R}, \quad (27)$$

$$|\Delta_X^y[f]| \leq \frac{1}{(n-1)!} \max_{[\min x_i, \max x_i]} |f^{(n-1)}(x)|. \quad (28)$$

4. Интерполяция для симметрических функций. Рассмотрим пространство P_n^k симметрических полиномов от $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$, степень которых по каждой переменной не превосходит $n - k$. Комбинаторный факт, лежащий в основе интерполяции симметрических функций по полиномам из P_n^k , состоит в том, что число элементов в $C(n, k) = C_n^k$ равно числу разбиений $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $\lambda_1 \leq n - k$. Это использовалось в [10] при доказательстве интерполяционной формулы Лагранжа для симметрических функций. Базис в P_n^k образуют функции m_λ , и поэтому $\dim P_n^k = C_n^k$.

Пусть $B_\lambda^{n,k} = \{B_\lambda^{n,k}\}$ – любой базис в P_n^k . Будем использовать, в основном, базисы $\{m_\lambda\}$, $\{e_{\lambda'}\}$, $\{s_\lambda\}$. Они связаны следующими матрицами перехода [11]:

$$\{s_\lambda\} = K\{m_\lambda\}, \quad (29)$$

$$\{e_{\lambda'}\} = JK^T J\{s_\lambda\}, \quad (30)$$

где J является инволюцией, переставляющей λ и λ' , а элементами матрицы K являются числа Костки. Если разбиения λ взять в порядке, являющемся линейным расширением доминантного частичного порядка ($\gamma \leq \lambda$, если $\gamma_1 + \dots + \gamma_i \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_i$ для всех i), то матрицы K и $JK^T J$ будут верхнетреугольными с единицами на диагонали [11].

Задача полиномиальной интерполяции обобщается для симметрических функций следующим образом [10]: найти полином

$$P_X^Y[f](Y) = \sum_{\lambda} A_X[B_\lambda^{n,k}]B_\lambda^{n,k}(Y) \in P_n^k, \quad (31)$$

значения которого в точках X_I , $I \in C(n, k)$, совпадают со значениями симметрической функции $f(Y)$:

$$P_X^Y[f](X_I) = f(X_I), \quad I \in C(n, k).$$

Задача сводится к решению линейной системы

$$\sum_{\lambda} A_X[B_\lambda^{n,k}]B_\lambda^{n,k}(X_I) = f(X_I), \quad I \in C(n, k). \quad (32)$$

Из формул (29), (30) вытекает, что для базисов $\{m_\lambda\}$, $\{e_{\lambda'}\}$, $\{s_\lambda\}$ определители матриц этих систем $(m_\lambda(X_I))$, $(e_{\lambda'}(X_I))$, $(s_\lambda(X_I))$ (обобщения для симметрических функций определителя Вандермонда) совпадают.

Введем обозначение

$$V_k(X) = \det(m_\lambda(X_I)) = \det(e_{\lambda'}(X_I)) = \det(s_\lambda(X_I)).$$

Из формулы Зелевинского–Штурмфельса (см. далее § 2) вытекает, что

$$V_k(X) = (V_1(X))^{C_{n-2}^{k-1}} = \prod_{i < j} (x_i - x_j)^{C_{n-2}^{k-1}}.$$

Отметим еще два способа доказательства этой формулы, обобщающие известные доказательства формулы для определителя Вандермонда. Во-первых, применение (34) к базисным полиномам позволяет представить матрицы $(m_\lambda(X_I))$, $(e_{\lambda'}(X_I))$, $(s_\lambda(X_I))$ в виде произведения треугольных матриц, определители которых легко вычисляются. Во-вторых, для каждой пары i, j , $i \neq j$, существует C_{n-2}^{k-1} пар $I, J \in C(n, k)$, для которых $i \in I, j \in J, I \setminus i = J \setminus j$. Вычитая из строки с индексом I строку с индексом J , получим строку, все элементы которой делятся на $x_i - x_j$, и поэтому определитель делится на $(x_i - x_j)^{C_{n-2}^{k-1}}$. Остается сравнить степени полиномов в левой и правой частях формулы.

Поскольку $C_{n-2}^{k-1} = C_{n-2}^{n-k-1}$, то

$$V_k(X) = V_{n-k}(X) = \det(m_{\lambda'}(X_{\bar{n} \setminus I})) = \det(e_\lambda(X_{\bar{n} \setminus I})) = \det(s_{\lambda'}(X_{\bar{n} \setminus I})).$$

Эти соотношения отражают двойственность альтернированных ориентированных матроидов $A_k([n])$ и $A_{n-k}([n])$ [23]. При $k = 1$ получаем тождество (оно является также частным случаем формулы (59))

$$\det(e_{n-i}(X_{\bar{n} \setminus j})) = \det(x_j^{n-i}).$$

Это тождество использовалось в [11] при доказательстве формулы Якоби–Труди.

Правило Крамера позволяет записать решение интерполяционной системы (32) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} P_X^Y[f] & \dots & B_\lambda^{n,k}(Y) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(X_I) & \dots & B_\lambda^{n,k}(X_I) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0, \\ P_X^Y[f] &= -\frac{1}{\det(B_\lambda^{n,k}(X_I))} \begin{vmatrix} 0 & \dots & B_\lambda^{n,k}(Y) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(X_I) & \dots & B_\lambda^{n,k}(X_I) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (33)$$

Мы не можем, как в случае одной переменной, сразу получить отсюда обобщение формулы Лагранжа, поскольку не имеем формул для соответствующих определителей. В [10] обобщение формулы Лагранжа получено другим способом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [10]. *Для симметрического полинома $f(Y)$, у которого степень по каждой переменной не превосходит $n - k$, справедлива формула*

$$f(Y) = \sum_{I \in C(n, k)} f(X_I) \frac{\omega(Y, X_{\bar{n} \setminus I})}{\omega(X_I, X_{\bar{n} \setminus I})}. \quad (34)$$

Эта формула равносильна обобщению разложения дроби на простейшие для симметрических функций (формула (17)):

$$\frac{f(Y)}{\omega(Y, X)} = \sum_{I \in C(n, k)} \frac{f(X_I)}{\omega(X_I, X_{\bar{n} \setminus I})} \frac{1}{\omega(Y, X_I)}.$$

Пусть разложение $\omega(Y, X_{\bar{n} \setminus I})$ по базису $B^{n,k}(Y)$ имеет вид

$$\omega(Y, X_{\bar{n} \setminus I}) = \sum_{\lambda} c_{\lambda}(X_{\bar{n} \setminus I}) B_{\lambda}^{n,k}(Y). \quad (35)$$

Тогда из формул (12), (34) вытекает, что

$$A_X[B_{\lambda}^{n,k}] = \sum_{I \in C(n,k)} \frac{f(X_I) c_{\lambda}(X_{\bar{n} \setminus I})}{\omega(X_I, X_{\bar{n} \setminus I})} = \text{LS}(f, c_{\lambda}) = \Delta_X^Y[f \bar{c}_{\lambda}].$$

Введем обозначения:

$$\bar{\lambda} = (n - k - \lambda_k, \dots, n - k - \lambda_1), \quad \varepsilon^{\lambda} = (-1)^{(n-k)k - \sum \lambda_i}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Справедливы формулы*

$$\begin{aligned} A_X[m_{\lambda}] &= \varepsilon^{\lambda} \text{LS}(f, e_{\bar{\lambda}}) = \varepsilon^{\lambda} \Delta_X^Y[f \bar{e}_{\bar{\lambda}}], \\ A_X[e_{\lambda'}] &= \varepsilon^{\lambda} \text{LS}(f, m_{\bar{\lambda}'}) = \varepsilon^{\lambda} \Delta_X^Y[f \bar{m}_{\bar{\lambda}'}], \\ A_X[s_{\lambda}] &= \varepsilon^{\lambda} \text{LS}(f, s_{\bar{\lambda}'}) = \varepsilon^{\lambda} \Delta_X^Y[f \bar{s}_{\bar{\lambda}'}]. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя в формулах (8), (9) y_i на $1/y_i$ и домножая на $y_1^{n-k} \dots y_k^{n-k}$, имеем

$$\begin{aligned} \omega(Y, X_{\bar{n} \setminus I}) &= \sum_{\lambda} \varepsilon^{\lambda} e_{\bar{\lambda}}(X_{\bar{n} \setminus I}) m_{\lambda}(Y) \\ &= \sum_{\lambda} \varepsilon^{\lambda} m_{\lambda-1}(X_{\bar{n} \setminus I}) e_{\lambda'}(Y) = \sum_{\lambda} \varepsilon^{\lambda} s_{\bar{\lambda}'}(X_{\bar{n} \setminus I}) s_{\lambda}(Y). \end{aligned}$$

Для небольшого упрощения формул до конца статьи мы используем базис $B^{n,k}$ (возможно, с другими индексами), в котором

$$B_{[n-k]k}^{n,k}(Y) = y_1^{n-k} \dots y_k^{n-k} = m_{[n-k]k}(Y) = e_{[n-k]k'}(Y) = s_{[n-k]k}(Y)$$

и полная степень любого другого полинома из базиса меньше $(n-k)k$. Для всех таких базисов коэффициент при $B_{[n-k]k}^{n,k}$ в интерполяционном полиноме $P_X^Y[f]$ (обобщение для симметрических функций разделенных разностей) один и тот же и согласно формуле (34) совпадает с $\Delta_X^Y[f]$.

В следующем предложении собраны вместе формулы для $\Delta_X^Y[f]$. В определителях (37), (38) предполагается, что столбцы, начиная со второго, отвечают разбиениям $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $\lambda_1 \leq n-k$, $\lambda_k < n-k$. В содержащих интегралы формулах предполагается, что симметрическая функция $f(z_1, \dots, z_k)$ регулярна по z_i внутри простого контура C_i , охватывающего $X \cup Y$, $i = 1, \dots, k$. Пусть

$$\int_{C_1} \dots \int_{C_k} = \int, \quad dZ = dz_1 \dots dz_k, \quad c_k = \frac{(-1)^{C_k^2}}{k!} \left(\frac{1}{2\pi i} \right)^k.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Справедливы формулы*

$$\Delta_X^Y[f] = \sum_{I \in C(n,k)} \frac{f(X_I)}{\omega(X_I, X_{\bar{n} \setminus I})} \quad (36)$$

$$= \frac{1}{\det(B_{\lambda}^{n,k}(X_I))} \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(X_I) & \dots & B_{\lambda}^{n,k}(X_I) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (37)$$

$$= \frac{(-1)^{(n-k)k}}{\det(B_{\lambda'}^{n,n-k}(X_{\bar{n} \setminus I}))} \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(X_I) & \dots & B_{\lambda'}^{n,n-k}(X_{\bar{n} \setminus I}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (38)$$

$$= c_k \int \frac{f(Z)V_1^2(Z)}{\omega(Z, X)} dZ \quad (39)$$

$$= \frac{(-1)^{C_n^2} c_k}{V_1(X)} \int f(Z)V_1(Z) \times \begin{vmatrix} \frac{dz_1}{x_1 - z_1} & \dots & \frac{dz_k}{x_1 - z_k} & 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-k-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{dz_1}{x_n - z_1} & \dots & \frac{dz_k}{x_n - z_k} & 1 & x_n & \dots & x_n^{n-k-1} \end{vmatrix} \quad (40)$$

$$= \Delta_X^{z_1} \circ \dots \circ \Delta_X^{z_k} [(-1)^{C_k^2} f(Z)V_1^2(Z)]; \quad (41)$$

в частности, при $n = k$ получаем обобщение для симметрических функций интегральной формулы Коши

$$f(X) = c_k \int \frac{f(Z)V_1^2(Z)}{\omega(Z, X)} dZ \quad (42)$$

и для $f = 1$ получаем обобщение формулы (11) для определителя Коши–Вандермонда при $k = 1$

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\omega(Y, X_I)} & \dots & B_{\lambda}^{n,k}(X_I) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \frac{\det(B_{\lambda}^{n,k}(X_I))}{\omega(Y, X)}. \quad (43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (39) доказывается прямым вычислением вычетов. Формулы (36)–(38), (40), (41) вытекают из формул (11), (22), (33), (34).

В следующем предложении обобщаются интерполяционные формулы Ньютона и Эрмита. (Предполагается, что в определителях (48), (49) столбцы, начиная со второго, отвечают разбиениям $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_{k-t})$, $\delta_1 \leq k$, $\delta_{k-t} < k$.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Справедливы формулы*

$$c_k \int \frac{\omega(Z, X) - \omega(Y, X)}{\omega(Z, Y)} \frac{f(Z) V_1^2(Z)}{\omega(Z, X)} dZ = \Delta_{X \cup Y}^Z [(\omega(Z, X) - \omega(Y, X)) f(Z)] \quad (44)$$

$$= f(Y) - \omega(Y, X) \Delta_{X \cup Y}^Z [f(z)] \quad (45)$$

$$= \sum_{t=1}^k (-1)^{t+1} \sum_{\substack{M \in C(n, t) \\ N \in C(k, k-t)}} \frac{\omega(Y_N, X_M) \omega(Y_{\bar{k} \setminus N}, X_{\bar{n} \setminus M})}{\omega(X_M, X_{\bar{n} \setminus M}) \omega(Y_N, Y_{\bar{k} \setminus N})} f(X_M \cup Y_N) \quad (46)$$

$$= \sum_{t=1}^k (-1)^{t+1} \sum_{N \in C(k, k-t)} \frac{P_X^{Y_{\bar{k} \setminus N}} [\omega(Y_N, Y_{\bar{k} \setminus N}) f(Y)]}{\omega(Y_N, Y_{\bar{k} \setminus N})} \quad (47)$$

$$= \sum_{t=1}^k (-1)^{t+1} \frac{1}{\det(B_{\delta}^{k, k-t}(Y_N))} \times \begin{vmatrix} \dots\dots\dots \\ P_X^{Y_{\bar{k} \setminus N}} [\omega(Y_N, Y_{\bar{k} \setminus N}) f(Y)] & \dots & B_{\delta}^{k, k-t}(Y_N) & \dots \\ \dots\dots\dots \end{vmatrix} \quad (48)$$

$$= \sum_{t=1}^k (-1)^{t+1} \frac{(-1)^{(k-t)t}}{\det(B_{\delta'}^{k, t}(Y_{\bar{k} \setminus N}))} \times \begin{vmatrix} \dots\dots\dots \\ P_X^{Y_{\bar{k} \setminus N}} [\omega(Y_N, Y_{\bar{k} \setminus N}) f(Y)] & \dots & B_{\delta'}^{k, t}(Y_{\bar{k} \setminus N}) & \dots \\ \dots\dots\dots \end{vmatrix} \quad (49)$$

$$= \sum_{p=0}^{n-1} \omega(Y, X_p) c_k \int \frac{\omega(Z, x_p) - \omega(Y, x_p)}{\omega(Z, Y)} \frac{f(Z) V_1^2(Z)}{\omega(Z, X_{p+1})} dZ. \quad (50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Формула (46) доказывается прямым вычислением вычетов. Формулы (44), (45), (47)–(49) вытекают из формул предложения 2. Докажем формулу (50) (при $k = 1$ она сводится к интерполяционной формуле Ньютона (23)). Слагаемое с индексом p в сумме (50) равно

$$\omega(Y, X_p) \Delta_{X_p \cup Y}^Z [f(Z)] - \omega(Y, X_{p+1}) \Delta_{X_{p+1} \cup Y}^Z [f(Z)],$$

и поэтому (50) вытекает из формулы (45).

Опишем еще один способ обобщения интерполяционной формулы Ньютона (23). По индукции легко доказывается формула

$$\frac{1}{z - y} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\omega(y, X_p)}{\omega(z, X_{p+1})} + \frac{\omega(y, X)}{\omega(z, X)} \frac{1}{z - y}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\omega(Z, X)} = \prod_{i,j=1}^k \left(\sum_{p=0}^{n-1} \frac{\omega(y_i, X_p)}{\omega(z_j, X_{p+1})} + \frac{\omega(y_i, X)}{\omega(z_j, X)} \frac{1}{z_j - y_i} \right).$$

В следующем предложении обобщаются рекуррентные соотношения для интерполяционного полинома и разделенных разностей. Предполагается, что в определителях (51), (52) столбцы, начиная со второго, отвечают разбиениям $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$, $\mu_1 \leq t - r$, $\mu_r < t - r$, а строки $-r$ -подмножествам R фиксированного множества $T \in C(n, t)$. Далее $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_r)$, $\nu_1 \leq k$, $\bar{\nu} = (k - \nu_r, \dots, k - \nu_1)$.

ЛЕММА 1. *Справедливы формулы*

$$\Delta_{X_T}^{Z_r}[\omega(Z_r, Y)] = \begin{cases} \sum_{\nu} (-1)^{kr - \sum \nu_i s_{\nu'}(Y)} s_{\nu - [t-r]r}(X_T) & \text{для всех } t, r, k, \\ 1, & t = r + k, \\ 0, & t > r + k. \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Справедливы формулы*

$$\begin{aligned} & \sum_{R \subset T} P_{X_{\bar{n} \setminus R}}^Y[f] \frac{\omega(X_R, Y)}{\omega(X_R, X_{T \setminus R})} \\ &= \frac{1}{\det(B_{\mu}^{t,r}(X_R))} \left| \begin{array}{cccc} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega(X_R, Y) P_{X_{\bar{n} \setminus R}}^Y[f] & \dots & B_{\mu}^{t,r}(X_R) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right| \end{aligned} \quad (51)$$

$$= \frac{(-1)^{(t-r)r}}{\det(B_{\mu'}^{t, t-r}(X_{T \setminus R}))} \left| \begin{array}{cccc} \omega(X_R, Y)^{P_{X_{\bar{n} \setminus R}}^Y[f]} & \dots & B_{\mu'}^{t, t-r}(X_{T \setminus R}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right| \quad (52)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{R \subset T} \sum_{\nu} \sum_{\varphi} \sum_{\gamma} (-1)^{kr - \sum \nu_i} \frac{A_{X_{\bar{n} \setminus R}}[s_{\varphi}] c_{\nu'}^{\gamma} \varphi^{s_{\nu}}(X_R)}{\omega(X_R, X_{T \setminus R})} s_{\gamma}(Y) \\
&= P_X^Y[f(Y) \Delta_{X_T}^{Z_r}[\omega(Z_r, Y)]]
\end{aligned} \tag{53}$$

$$= \begin{cases} \sum_{\nu} (-1)^{kr - \sum \nu_i s_{\nu - [t-r]r}} (X_T) P_X^Y [s_{\nu'}(Y) f(Y)] & \partial \mathcal{M} \text{ } \textit{beyond } t, r, k, \\ P_X^Y[f], & t = r + k, \\ 0, & t > r + k. \end{cases}$$

В частности,

$$\begin{aligned} & (-1)^{kr} \sum_{R \subset T} \frac{\Delta_{X_{\bar{n} \setminus R}}^Y[f]}{\omega(X_R, X_{T \setminus R})} \\ &= \frac{(-1)^{kr}}{\det(B_\mu^{t,r}(X_R))} \left| \begin{array}{ccc} \Delta_{X_{\bar{n} \setminus R}}^Y[f] & \cdots & B_\mu^{t,r}(X_R) & \cdots \end{array} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{(k+t-r)r}}{\det(B_{\mu'}^{t,t-r}(X_{T \setminus R}))} \left| \begin{array}{cccc} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{X_{\bar{n} \setminus R}}^Y[f] & \dots & B_{\mu'}^{t,t-r}(X_{T \setminus R}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right| \\
&= \Delta_X^Y[f(Y) \Delta_{X_T}^{Z_r}(Z_r, Y)] \\
&= \begin{cases} \sum_{\nu} (-1)^{kr - \sum \nu_i} s_{\nu - [t-r]r}(X_T) \Delta_X^Y[f(Y) s_{\bar{\nu}'}(Y)] & \text{для всех } t, r, k, \\ \Delta_X^Y[f], & t = r + k, \\ 0, & t > r + k, \end{cases}
\end{aligned}$$

и для $t = r + k$

$$A_X[s_\gamma] = \sum_{R \subset T} \sum_{\nu} \sum_{\varphi} (-1)^{kr - \sum \nu_i} \frac{A_{X_{\bar{n} \setminus R}}[s_\varphi] c_{\bar{\nu}' \varphi}^\gamma s_\nu(X_R)}{\omega(X_R, X_{T \subset R})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать равенство выражений (51) и (53), остальные утверждения вытекают из формул предложения 2 и леммы 1. Очевидно, что (51) является симметрическим полиномом от Y и его степень по каждой переменной не превосходит $n - k$. Поэтому согласно предложению 1 достаточно доказать, что (51) и (53) совпадают в точках X_I , $I \in C(n, k)$. Из определения интерполяционного полинома следует, что

$$\omega(X_R, X_I) P_{\bar{n} \setminus R}^Y[f](X_I) = \begin{cases} 0, & I \cap R \neq \emptyset, \\ \omega(X_R, X_I) f(X_I), & I \cap R = \emptyset. \end{cases}$$

Поэтому (51) в точке X_I равно $f(X_I) \Delta_{X_T}^{Z_r}[\omega(Z_r, X_I)]$.

Формула (41) представляет разделенные разности для симметрических функций в виде композиции обычных разделенных разностей для функций от одной переменной. Это позволяет обобщить для симметрических функций многие другие формулы интерполяции. В качестве примеров таких следствий формулы (41) приведем обобщения формул (24)–(28).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть

$$\begin{aligned}
T_i &= \left\{ (t_{i1}, \dots, t_{in}) \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^n t_{ij} = 1, t_{ij} \geq 0 \right\}, \quad i = 1, \dots, k, \\
T_i X &= \sum_{j=1}^n t_{ij} x_j, \quad dT_i = dt_{i2} dt_{i3} \dots dt_{in}, \quad dT = dT_1 \dots dT_k.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\Delta_X^Y[f] = (-1)^{C_k^2} \int_{T_1} \dots \int_{T_k} \frac{\partial^{k(n-1)}(f(Y) V_1^2(Y))}{\partial y_1^{n-1} \dots \partial y_k^{n-1}} (T_1 X, \dots, T_k X) dT.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. *Справедливы формулы*

$$\begin{aligned}\Delta_X^Y[f \cdot g] &= (-1)^{C_k^2} \sum_{p_1=1}^n \cdots \sum_{p_k=1}^n \Delta_{X_{p_1}}^{y_1} \circ \cdots \circ \Delta_{X_{p_k}}^{y_k} [f] \\ &\quad \times \Delta_{X \setminus X_{p_1-1}}^{y_1} \circ \cdots \circ \Delta_{X \setminus X_{p_k-1}} [gV_1^2(Y)] \\ &= (-1)^{C_k^2} \sum_{p_1=1}^n \cdots \sum_{p_k=1}^n \Delta_{X_{p_1}}^{y_1} \circ \cdots \circ \Delta_{X_{p_k}}^{y_k} [fV_1(Y)] \\ &\quad \times \Delta_{X \setminus X_{p_1-1}}^{y_1} \circ \cdots \circ \Delta_{X \setminus X_{p_k-1}} [gV_1(Y)].\end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 4. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$; тогда существуют*

$$\xi_1, \dots, \xi_k \in [\min X, \max X],$$

для которых

$$\Delta_X^Y[f] = \frac{(-1)^{C_k^2}}{((n-1)!)^k} \frac{\partial^{k(n-1)}(f(Y)V_1^2(Y))}{\partial y_1^{n-1} \cdots \partial y_k^{n-1}} \Big|_{y_1=\xi_1, \dots, y_k=\xi_k}.$$

Из формул (39) и следствия 4 вытекают оценки для $|\Delta_X^Y[f]|$.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Справедливы оценки*

$$\begin{aligned}|\Delta_X^Y[f]| &\leq \frac{1}{((n-1)!)^k} \max_{[\min X, \max X]^k} \left| \frac{\partial^{k(n-1)}(f(Y)V_1^2(Y))}{\partial y_1^{n-1} \cdots \partial y_k^{n-1}} \right|, & X \subset \mathbb{R}, \\ |\Delta_X^Y[f]| &\leq \frac{|C_1| \cdots |C_k|}{(2\pi)^k} \frac{\max_{C_1 \times \cdots \times C_k} |f(Z)V_1^2(Z)|}{\min_{C_1 \times \cdots \times C_k} |\omega(Z, X)|}, & X \subset \mathbb{C}.\end{aligned}$$

5. Примеры. 1. Из формулы (1) следует, что

$$y_1^{n-k} \cdots y_k^{n-k} s_\gamma(Y) = s_{[n-k]^k}(Y) s_\gamma(Y) = s_{\gamma+[n-k]^k}(Y).$$

Поэтому, применяя формулу (13), имеем из (6)

$$\Delta_X^Y \left[\frac{\prod_{i \in \bar{k}} y_i^{n-k}}{\prod_{i,j \in \bar{k}} (1 - y_i z_j)} \right] = \prod_{\substack{i \in \bar{n} \\ j \in \bar{k}}} \frac{1}{(1 - x_i z_j)} \quad (54)$$

(в [15] это тождество доказано индукцией по k). Домножая равенство (54) на $\prod (1 - x_i z_j)$ и заменяя z_j на $-z_j$, имеем

$$\Delta_X^{Y_{n-k}} \left[\frac{\prod_{i \in \overline{n-k}, j \in \bar{k}} (1 + y_i z_j)}{\prod_{i \in \overline{n-k}} y_i^{n-k}} \right] = \frac{(-1)^{(n-k)k}}{\prod_{i \in \bar{n}} x_i^{n-k}}. \quad (55)$$

Применяя тождества для разделенных разностей из п. 4, получаем следствия формул (13), (54), (55). Выпишем некоторые из этих следствий для формулы (13), для (54), (55) они получаются аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 6. *Справедливы формулы*

$$\begin{aligned}
s_{\gamma-[n-k]^k}(X) &= c_k \int \frac{s_\gamma(Y) V_1^2(Y)}{\omega(Z, X)} dZ \\
&= \frac{1}{\det(B_\lambda^{n,k}(X_I))} \left| \begin{array}{cccc} \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_\gamma(X_I) & \dots & B_\lambda^{n,k}(X_I) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right| \\
&= \frac{(-1)^{(n-k)k}}{\det(B_{\lambda'}^{n,n-k}(X_{\bar{n} \setminus I}))} \left| \begin{array}{cccc} \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_\gamma(X_I) & \dots & B_{\lambda'}^{n,n-k}(X_{\bar{n} \setminus I}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right| \\
&= (-1)^{C_k^2} \int_{T_1} \dots \int_{T_k} \frac{\partial^{k(n-1)}(s_\gamma(Y) V_1^2(Y))}{\partial y_1^{n-k} \dots \partial y_k^{n-k}}(T_1 X, \dots, T_k X) dT, \\
&= (-1)^{kr} \sum_{R \subset T} \frac{s_{\gamma-[n-r-k]^k}(X_{\bar{n} \setminus R})}{\omega(X_R, X_{T \setminus R})} \\
&= \frac{(-1)^{kr}}{\det(B_\mu^{t,r}(X_R))} \left| \begin{array}{cccc} \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{\gamma-[n-r-k]^k}(X_{\bar{n} \setminus R}) & \dots & B_\mu^{t,r}(X_R) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right| \\
&= \frac{(-1)^{(k+t-r)r}}{\det(B_{\mu'}^{t,t-r}(X_{T \setminus R}))} \left| \begin{array}{cccc} \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{\gamma-[n-r-k]^k}(X_{\bar{n} \setminus R}) & \dots & B_{\mu'}^{t,t-r}(X_{T \setminus R}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right| \\
&= \begin{cases} \sum_\nu \sum_\delta (-1)^{kr - \sum \nu_i} c_{\gamma \bar{\nu}'}^\delta s_{\nu-[t-r]^r}(X_T) s_{\delta-[n-k]^k}(X) & \text{для всех } t, r, k, \\ s_{\gamma-[n-k]^k}(X), & t = r + k, \\ 0, & t > r + k. \end{cases}
\end{aligned}$$

2. И. Макдональд определил [11] зависящие от двух параметров симметрические полиномы, которые являются общими собственными функциями коммутирующих q -разностных операторов

$$D_k = t^{C_k^2} \sum_{I \in C(n,k)} \prod_{\substack{i \in I \\ j \in \bar{n} \setminus I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i \in I} T_{q,x_i}, \quad k = 1, \dots, n,$$

где T_{q,x_i} – оператор умножения переменной x_i на q . Пусть

$$T_{q,Y} = T_{q,y_1} \dots T_{q,y_k}.$$

Формулы (8)–(10), (35) позволяют выразить D_k через симметризатор Лагранжа–Сильвестра или разделенные разности:

$$\begin{aligned}
D_k &= t^{C_k^2} \sum_{I \in C(n,k)} \sum_\lambda \frac{t^{\sum \lambda_i} B_\lambda^{n,k}(X_I) c_\lambda(X_{\bar{n} \setminus I}) \prod_{i \in I} T_{q,x_i}}{\omega(X_I, X_{\bar{n} \setminus I})} \\
&= t^{C_k^2} \sum_\lambda t^{\sum \lambda_i} \text{LS}(B_\lambda^{n,k}(Y) T_{q,Y}, c_\lambda) \\
&= t^{C_k^2} \sum_\lambda t^{\sum \lambda_i} \Delta_X^Y [B_\lambda^{n,k}(Y) T_{q,Y} \bar{c}_\lambda(Y)].
\end{aligned}$$

Представление через разделенные разности позволяет применить формулы п. 4 и получить для D_k аналог следствия 6.

Аналогично можно интерпретировать формулу для повышающих операторов полиномов Макдональда [14]:

$$B_m = \sum_{k=0}^m (-1)^k t^{C_k^2 + (m-n+1)k} \sum_{I \in C(n,k)} e_{m-k}(X_{\bar{n} \setminus I}) \prod_{\substack{i \in I \\ j \in \bar{n} \setminus I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i \in I} x_i T_{q, x_i},$$

и тождество [14, следствие 7.4]

$$\sum_{I \in C(n,k)} e_{m-k}(X_{\bar{n} \setminus I}) \prod_{\substack{i \in I \\ j \in \bar{n} \setminus I}} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \prod_{i \in I} x_i = t^{(n-m)k} \begin{bmatrix} m \\ k \end{bmatrix}_t e_m(X).$$

3. Приведем формулу из работы [34] для разделенных разностей от функции вида $f(y_1, \dots, y_n) = g(y_1) \cdots g(y_n)$ (эти разделенные разности известны как нелинейные разделенные разности функции g):

$$\Delta_X^Y[g(y_1) \cdots g(y_k)] = \begin{vmatrix} \Delta_{X_1, n-k+1}^y[g] & \Delta_{X_2, n-k+1}^y[g] & \cdots & \Delta_{X_k, n-k+1}^y[g] \\ \Delta_{X_1, n-k+2}^y[g] & \Delta_{X_2, n-k+2}^y[g] & \cdots & \Delta_{X_k, n-k+2}^y[g] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{X_1, n}^y[g] & \Delta_{X_2, n}^y[g] & \cdots & \Delta_{X_k, n}^y[g] \end{vmatrix}.$$

4. Близким к интерполяции и высшим порядкам Брюа объектом является циклический многогранник – выпуклая оболочка n точек на кривой $(x, x^2, \dots, x^d)$ [23], [24]. Для $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, $x_1 < \dots < x_n$, и любого базиса $B^{d+k, k}$ в P_{d+k}^k определим обобщенный циклический многогранник как выпуклую оболочку точек

$$M_I = (\dots, B_{\lambda}^{d+k, k}(X_I), \dots) \in \mathbb{R}^{C_{d+k}^k}, \quad I \in C(n, k), \\ \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k), \quad d \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k.$$

Если для $J \in C(n, d)$ между любыми двумя точками из $X_{\bar{n} \setminus J}$ лежит четное число точек из X_J , то аналогично [25] уравнение

$$\omega(Y, X_J) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda: d \geq \lambda_1} c_{\lambda}(X_J) B_{\lambda}^{d+k, k}(Y) = 0$$

определяет грань обобщенного циклического многогранника $(B^{d+k, k}(Y))$ рассматриваются как координатные функции в $\mathbb{R}^{C_{d+k}^k}$.

5. Для $t = k + 1$, $r = 1$, $T = \{i_1, \dots, i_{k+1}\}$ и стандартного базиса из формулы (51) вытекает, что

$$\Delta_X^Y[f] = \frac{(-1)^k}{V_1(X_T)} \begin{vmatrix} \Delta_{X \setminus x_{i_1}}^Y[f] & x_{i_1}^{k-1} & \cdots & x_{i_1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{X \setminus x_{i_{k+1}}}^Y[f] & x_{i_{k+1}}^{k-1} & \cdots & x_{i_{k+1}} & 1 \end{vmatrix}.$$

Для $X \subset \mathbb{R}$ из этой формулы следует, что при $\Delta_X^Y[f] \neq 0$ функция $\varepsilon: C(n, k+1) \rightarrow \{\pm 1\}$, определяемая по формуле

$$\varepsilon(T) = \text{sign} \begin{vmatrix} \Delta_{X \setminus x_{i_1}}^Y[f] & x_{i_1}^{k-1} & \dots & x_{i_1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{X \setminus x_{i_{k+1}}}^Y[f] & x_{i_{k+1}}^{k-1} & \dots & x_{i_{k+1}} & 1 \end{vmatrix}, \quad T \in C(n, k+1),$$

является константой, а это по определению означает, что набор векторов

$$(\Delta_{X \setminus x_i}^Y[f], x_i^{k-1}, \dots, x_i, 1) \in \mathbb{R}^{k+1}, \quad i \in \bar{n},$$

является реализацией альтернированного ориентированного матроида [23]. Согласно [21] отсюда вытекает, что точки

$$(\Delta_{X \setminus x_i}^Y[f], x_i^{k-1}, \dots, x_i) \in \mathbb{R}^k, \quad i \in \bar{n},$$

лежат на некоторой кривой порядка k в $\mathbb{R}^k$, т.е. на кривой, которая пересекает любую аффинную гиперплоскость не более чем в k точках.

6. Для $t = k+2$, $r = 1$, $T = \{i_1, \dots, i_{k+2}\}$ и стандартного базиса из формулы (51) вытекает, что

$$\begin{vmatrix} \Delta_{X \setminus x_{i_1}}^Y[f] & x_{i_1}^k & \dots & x_{i_1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{X \setminus x_{i_{k+2}}}^Y[f] & x_{i_{k+2}}^k & \dots & x_{i_{k+2}} & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (56)$$

Определение альтернированных высших порядков Брюа можно рассматривать как комбинаторное описание этой формулы (см. далее предложение 7).

§ 2. Вариации и следствия формулы Зелевинского–Штурмфельса

1. Вариации. Формула Зелевинского–Штурмфельса [22] представляет произведение максимальных миноров $((n-k+1) \times n)$ -матрицы $B(b_{ij})$, b_{ij} – независимые переменные, $i = 0, 1, \dots, n-k$, $j = 1, \dots, n$, в виде определителя $(C_n^k \times C_n^k)$ -матрицы. Сформулируем этот результат. Пусть

$$D(n, k) = \left\{ \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-k}): \sum \alpha_i = k, \alpha_i \in \mathbb{Z}, \alpha_i \geq 0 \right\}.$$

Каждому $\alpha \in D(n, k)$ сопоставим разбиение $\lambda(\alpha)$, имеющее α_i частей, равных $n-k-i$, $i = 0, 1, \dots, n-k$, в частности $\lambda_1(\alpha) \leq n-k$. Скажем, что подмножество $W \subset \{0, 1, \dots, n-k\} \times \{1, \dots, n\}$ имеет *тип* (α, β) , $\alpha \in D(n, k)$, $\beta \in C(n, k)$, если $|W| = k$, элементы матрицы B , имеющие индексы из множества W , расположены в столбцах с номерами из множества β и в i -й строке матрицы B имеется α_i элементов с индексами из W , $i = 0, \dots, n-k$ (обозначим $W \rightarrow (\alpha, \beta)$). Пусть

$$m_{\alpha\beta}(B) = \sum_{W \rightarrow (\alpha, \beta)} \prod_{(i,j) \in W} b_{ij}.$$

Для $\sigma \in C(n, n-k+1)$ обозначим через $\det B_\sigma$ максимальный минор матрицы B , отвечающий столбцам с номерами из множества σ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5 [22]. *Справедлива формула*

$$\prod_{\sigma \in C(n, n-k+1)} \det B_\sigma = \det(m_{\alpha\beta}(B)). \quad (57)$$

Обозначим через H гомоморфизм из кольца полиномов от элементов матрицы B в кольцо полиномов от $x_1, \dots, x_n$:

$$H(b_{ij}) = x_j^{n-k-i}.$$

Формула (57) отвечает мономиальным симметрическим функциям в следующем смысле:

$$H(m_{\alpha\beta}(B)) = m_{\lambda(\alpha)}(X_\beta).$$

Ниже мы докажем аналоги формулы (57), которые в том же смысле отвечают элементарным симметрическим функциям и функциям Шура. Определим $e_{\alpha\beta}(B)$, $s_{\alpha\beta}(B)$ – аналоги элементов $m_{\alpha\beta}(B)$ матрицы Зелевинского–Штурмфельса.

Обозначим через $[n-k]_{\lambda(\alpha)}^k(\beta)$ диаграмму Юнга разбиения $[n-k]^k$, в каждую клетку которой вписан либо 0, либо элемент β , причем в j -й строке может появляться либо 0, либо i_j , $j = 1, \dots, k$, а в p -м столбце имеется λ'_p элементов β и они попарно различны. Пусть

$$e_{\alpha\beta}(B) = \sum_{[n-k]_{\lambda(\alpha)}^k(\beta)} \prod_{j=1}^k b_{n-k-|i_j| i_j},$$

где $|i_j|$ – количество элементов i_j в диаграмме $[n-k]_{\lambda(\alpha)}^k(\beta)$. Из определения элементарных симметрических функций вытекает, что

$$H(e_{\alpha\beta}(B)) = e_{\lambda'(\alpha)}(X_\beta).$$

Таблицей $t_\lambda(A)$ называется диаграмма Юнга разбиения λ , в клетки которой вписаны элементы линейно упорядоченного множества A , причем по столбцам эти элементы возрастают, а по строкам – не убывают. Для $\beta = \{i_1, \dots, i_k\} \in C(n, k)$, $i_1 < \dots < i_k$, пусть

$$s_{\alpha\beta}(B) = \sum_{t_{\lambda(\alpha)}(\beta)} \prod_{j=1}^k b_{n-k-\|i_j\| i_j},$$

где $\|i_j\|$ – количество элементов i_j в таблице $t_{\lambda(\alpha)}(\beta)$. Из комбинаторного определения функций Шура [11] вытекает, что

$$H(s_{\alpha\beta}(B)) = s_{\lambda(\alpha)}(X_\beta).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Справедливы формулы*

$$\prod_{\sigma \in C(n, n-k+1)} \det B_\sigma = \det(e_{\alpha\beta}(B)) = \det(s_{\alpha\beta}(B)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гомоморфизм H переводит функции $m_{\alpha\beta}(B)$, $e_{\alpha\beta}(B)$ и $s_{\alpha\beta}(B)$ в функции $m_{\lambda(\alpha)}(X_\beta)$, $e_{\lambda'(\alpha)}(X_\beta)$ и $s_{\lambda(\alpha)}(X_\beta)$ соответственно, поэтому последние функции связаны матрицами K , JK^TJ по формулам, аналогичным (29), (30).

Возможно, наиболее естественным контекстом для формулы Зелевинского–Штурмфельса является теория мультисимметрических функций. Из определения очевидно, что $m_{\alpha\beta}(B)$ можно интерпретировать как коэффициент при $t_1^{\alpha_1} \dots t_{n-k}^{\alpha_{n-k}}$ в разложении произведения

$$\prod_{p=1}^k (b_{0\beta_p} + b_{1\beta_p} t_1 + \dots + b_{n-k\beta_p} t_{n-k}).$$

Если $b_{0j} = 1$, $j = 1, \dots, n$, то по определению получаем элементарные мультисимметрические функции, которые порождают алгебру мультисимметрических функций [28]. Поэтому $s_{\alpha\beta}(B)$ и $e_{\alpha\beta}(B)$ также порождают алгебру мультисимметрических функций.

2. Следствия. Формулы этого пункта справедливы для $m_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\beta}$, $s_{\alpha\beta}$, и для краткости будем выписывать одну из этих трех формул, обозначая $m_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\beta}$, $s_{\alpha\beta}$ через $q_{\alpha\beta}$.

СЛЕДСТВИЕ 7. *Справедливы формулы*

$$V_k(X) = \det(q_{\alpha\beta}(B(x_j^{n-k-i}))) = (V_1(X))^{C_{n-2}^{k-1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $b_{ij} = x_j^{n-k-i}$ и любого $\sigma \in C(n, n-k+1)$ имеем

$$\det B_\sigma = V_1(X_\sigma).$$

Для каждой пары i, j , $i < j$, существует C_{n-2}^{k-1} элементов множества $C(n, n-k+1)$, содержащих эту пару, и поэтому множитель $x_i - x_j$ входит в произведение максимальных миноров матрицы $B(x_j^{n-k-i})$ в степени C_{n-2}^{k-1} .

СЛЕДСТВИЕ 8. *Справедлива формула*

$$\frac{\det(q_{\alpha\beta}(B(x_j^{\gamma_i+n-k-i})))}{V_k(X)} = \prod_{\sigma \in C(n, n-k+1)} s_\gamma(X_\sigma), \quad \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-k+1}).$$

Отметим еще один факт о частном случае матрицы $B(b_{ij})$, полученной подстановкой $b_{ij} = x_j^{\gamma_i+n-k-i}$. Идеал многообразия

$$\{(x_1, \dots, x_n) : \text{rk } B(x_j^{\gamma_i+n-k-i}) \leq n-k, \gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n-k+1})\}$$

порождается максимальными минорами матрицы $B(x_j^{\gamma_i+n-k-i})$, если и только если $\gamma_{n-k+1} \leq 1$, причем максимальные миноры образуют универсальный базис Грёбнера этого идеала [26]. Для общей матрицы $B(b_{ij})$ максимальные миноры всегда образуют универсальный базис Грёбнера порожденного ими идеала [27].

СЛЕДСТВИЕ 9. *Справедлива формула*

$$\det(q_{\alpha\beta}(\text{CV}_{n-2k+1}(Y, X))) = (-1)^{C_n^2 C_{n-2}^{k-1}} \frac{V_1(X)^{C_{n-2}^{k-1}} V_1(Y)^{C_n^{k-1}}}{\omega(X, Y)^{C_{n-1}^{k-1}}}. \quad (58)$$

Следствия 8, 9 вытекают из формул, приведенных в п. 1, и соотношений (1), (11).

СЛЕДСТВИЕ 10. *Справедливы формулы*

$$\begin{aligned} \det(q_{\alpha\beta}(B(e_{n-k-i}(X_{\bar{n}\setminus j})))) &= (-1)^{C_n^{k-1} C_{n-k+1}^2} V_k(X), \\ \det(q_{\alpha\beta}(B(h_{n-k-i}(X_{\bar{n}\setminus j})))) &= 0, \quad n-k-1 > 0, \\ \det(q_{\alpha\beta}(B(p_{n-k-i}(X_{\bar{n}\setminus j})))) &= (-1)^{(n-k)C_n^{k-1}} (n-1)^{C_n^{k-1}} V_k(X). \end{aligned} \quad (59)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из очевидных рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} e_q(X) &= e_q(X_{\bar{n}\setminus i}) + x_i e_{q-1}(X_{\bar{n}\setminus i}), \\ h_q(X) &= h_q(X_{\bar{n}\setminus i}) + x_i h_{q-1}(X), \\ p_q(X) &= p_q(X_{\bar{n}\setminus i}) + x_i^q \end{aligned}$$

вытекает, что строки матрицы $B(h_{n-k-i}(X_{\bar{n}\setminus j}))$ линейно зависимы при условии $n-k-1 > 0$, матрица $B(x_j^{n-k-i})$ получается умножением $B(e_{n-k-i}(X_{\bar{n}\setminus j}))$ на матрицу

$$E = \prod_{p=1}^{n-k} \begin{pmatrix} -1 & & e_p(X) & & \\ & \ddots & 0 & \vdots & 0 \\ & 0 & -1 & e_1(X) & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

матрица $B(x_j^{n-k-i})$ получается умножением $B(p_{n-k-i}(X_{\bar{n}\setminus j}))$ на матрицу

$$P = \begin{pmatrix} -1 & & \frac{p_{n-k}(X)}{n-1} & \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & 0 & -1 & \frac{p_1(X)}{n-1} \\ & & & \frac{1}{n-1} \end{pmatrix}.$$

Остается заметить, что

$$\det E = (-1)^{C_{n-k+1}^2}, \quad \det P = \frac{(-1)^{n-k}}{n-1}.$$

СЛЕДСТВИЕ 11. *Справедливы формулы*

$$\begin{aligned}\det(q_{\alpha\beta}(B(\cos ix_j))) &= 2^{C_{n-k}^2 C_n^{k-1}} \prod_{t < s} (\cos x_s - \cos x_t)^{C_{n-2}^{k-1}}, \\ \det(q_{\alpha\beta}(B(\sin ix_j))) &= 2^{C_{n-k+1}^2 C_n^{k-1}} \left(\prod_{r=1}^n \sin x_r \right)^{C_{n-1}^{k-1}} \prod_{t < s} (\cos x_s - \cos x_t)^{C_{n-2}^{k-1}}, \\ \det(q_{\alpha\beta}(M_{n,k})) &= 2^{\frac{(n-k)^2}{2} C_n^{k-1}} \left(\prod_{t < s} \sin \frac{x_s - x_t}{2} \right)^{C_{n-2}^{k-1}}.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из формул п. 1 и следующих формул [2]:

$$\begin{aligned}\det(\cos ix_j)_{i,j=0,\dots,n} &= 2^{C_n^2} \prod_{t < s} (\cos x_s - \cos x_t), \\ \det(\sin ix_j)_{i,j=1,\dots,n} &= 2^{C_n^2} \prod_{r=1}^n \sin x_r \prod_{t < s} (\cos x_s - \cos x_t), \\ \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \cos x_0 & \dots & \cos x_{2n} \\ \sin x_0 & \dots & \sin x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \cos nx_0 & \dots & \cos nx_{2n} \\ \sin nx_0 & \dots & \sin nx_{2n} \end{vmatrix} &= 2^{2n^2} \prod_{t < s} \sin \frac{x_s - x_t}{2}.\end{aligned}$$

Для четной разности $n - k$ через $M_{n,k}$ обозначена $((n - k + 1) \times n)$ -матрица того же вида, что и матрица в последнем равенстве.

Рассмотрим $(C_n^k \times C_n^k)$ -матрицу (обобщение матрицы Коши [11])

$$\left(\frac{1}{\prod_{i \in I, j \in J} (1 - x_i y_j)} \right), \quad I, J \in C(n, k).$$

СЛЕДСТВИЕ 12. *Справедлива формула*

$$\det \left(\frac{1}{\prod_{i \in I, j \in J} (1 - x_i y_j)} \right) = \pm \frac{V_1(X_n)^{C_{n-2}^{k-1}} V_1(Y_n)^{C_{n-2}^{k-1}}}{\omega(X_n, Y_n)^{C_{n-1}^{k-1}}}. \quad (60)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого $I \in C(n, k)$ домножим строку с индексом I определителя, стоящего в левой части формулы (60). Тем самым весь определитель умножится на $\omega(X_n, Y_n)^{C_{n-1}^{k-1}}$. Элементы полученного определителя имеют вид $\omega(X_I, Y_{\bar{n} \setminus I})$. Применяя к ним формулы (8), (9), видим, что с точностью до знака полученный определитель равен произведению определителей $V_k(X_n)$ и $V_k(Y_n)$.

3. Нерешенные задачи. 1. В координатах дискриминантная конфигурация Манина–Шехтмана задается произведением максимальных миноров прямоугольной матрицы [8]. В частности, в случае одной переменной ($k = 1$) дискриминант в пространстве интерполяционных конфигураций [5] определяется равенством нулю произведения максимальных миноров:

$$\prod_{\{i_1, \dots, i_{n+1}\} \in C(m, n+1)} \begin{vmatrix} y_{i_1} & x_{i_1}^{n-1} & \dots & x_{i_1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{i_{n+1}} & x_{i_{n+1}}^{n-1} & \dots & x_{i_{n+1}} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Формулы предложений 5 и 6 представляют левую часть этого равенства в виде одного определителя. Можно ли найти обобщение этих представлений (возможно, как частные случаи некоторого обобщения формулы Зелевинского–Штурмфельса) для дискриминанта в пространстве интерполяционных конфигураций при $k > 1$ (см. §3)

$$\prod_{\substack{J \in C(m, n+1) \\ I \subset J, |I|=k}} \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_I & \dots & B^{n+1, k}(X_I) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0? \quad (61)$$

2. С конфигурацией гиперплоскостей $\{\text{Ker } h_1, \dots, \text{Ker } h_n\} \subset \mathbb{R}^d$, $h_i \in (\mathbb{R}^d)^*$, связан многогранник – зонотоп – сумма Минковского отрезков $[-h_i, h_i]$, $i = 1, \dots, n$. В [30] зонотоп дискриминантной конфигурации Манина–Шехтмана представлен как слойный многогранник проекции куба на зонотоп конфигурации, по которой дискриминантная конфигурация строится. Можно ли аналогичным образом представить зонотоп конфигурации (61) или зонотоп более общей конфигурации, задаваемой определителями Зелевинского–Штурмфельса?

3. Рассмотрим $(C_n^k \times \infty)$ -матрицы (для $k = 1$ см. [37])

$$(u_\gamma(X_I)), \quad (v_\gamma(X_J)), \quad I, J \in C(n, k),$$

где, как и в формуле (4), u_γ, v_γ – пара двойственных базисов в кольце симметрических функций, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ принадлежит множеству всех разбиений длины не более k . Из формулы (4) вытекает, что

$$(u_\gamma(X_I))(v_\gamma(X_J))^T = \left(\frac{1}{\prod_{i \in I, j \in J} (1 - x_i y_j)} \right). \quad (62)$$

Применяя к определителю произведения матриц в левой части (62) формулу Бине–Коши, а к определителю матрицы в правой части – формулу (60), получаем обобщение формулы (4) и, в частности, формул (5)–(10). Было бы интересно найти для этого обобщения комбинаторную интерпретацию и интерпретацию в терминах теории представлений, обобщающие такие интерпретации для формулы Коши (6) [35], [36].

§ 3. Альтернированные высшие порядки Брюа и конфигурационные пространства

1. Альтернированные высшие порядки Брюа. Отображение

$$\varepsilon: C(m, n+1) \rightarrow \{\pm 1\}$$

назовем *k-допустимым*, если для любых

$$\begin{aligned} N &= \{i_1, \dots, i_{n+2}\} \in C(m, n+2), & i_1 < \dots < i_{n+2}, \\ N \supset K &= \{j_1, \dots, j_{k+2}\} \in C(m, k+2), & j_1 < \dots < j_{k+2}, \end{aligned}$$

выполняется условие

$$\{N \setminus j_1, N \setminus j_3, \dots\} \neq \{N \setminus j_1, N \setminus j_2, \dots\} \cap \varepsilon^{-1}(-1) \neq \{N \setminus j_2, N \setminus j_4, \dots\},$$

или, эквивалентно, последовательность

$$\varepsilon(N \setminus i_1), \varepsilon(N \setminus i_2), \dots, \varepsilon(N \setminus i_{n+1}), \varepsilon(N \setminus i_{n+2})$$

имеет не более чем k перемен знака.

Для $n = k = 1$ отображение ε определяет множество инверсий $\varepsilon^{-1}(-1)$ перестановки на $\overline{m}$ и тем самым определяет саму перестановку. Для $k = 1$ отображение ε определяет множество инверсий $\varepsilon^{-1}(-1)$ элемента высшего порядка Брюа $B(m, n)$ и тем самым определяет этот элемент [8].

Аналогично [8], [9] определим на множестве k -допустимых отображений два частичных порядка. Наиболее простой способ определения частичного порядка на k -допустимых отображениях состоит в следующем:

$$\varepsilon_1 < \varepsilon_2 \iff \varepsilon_1^{-1}(-1) \subset \varepsilon_2^{-1}(-1).$$

Обозначим через $B_C(m, n, k)$ множество k -допустимых отображений с таким частичным порядком. Геометрически наиболее естественным является другой частичный порядок (для $k = 1, n \leq 2$ и для $k = 1, m - n \leq 4$ они совпадают [9], [29], для $k = 1, n = 3, m = 8$ они различны [9]), определение которого мы дадим с помощью диаграммы Хассе. Напомним, что *диаграммой Хассе частично упорядоченного множества* называется ориентированный граф, вершины которого отвечают элементам этого частично упорядоченного множества, и от вершины a к вершине b идет ребро, если и только если $a > b$ и не существует c , для которого $a > c > b$. Определим диаграмму Хассе частичного порядка на множестве k -допустимых отображений следующим образом: от ε_2 к ε_1 идет ребро, если и только если

$$\varepsilon_1^{-1}(-1) \subset \varepsilon_2^{-1}(-1), \quad |\varepsilon_1^{-1}(-1)| + 1 = |\varepsilon_2^{-1}(-1)|$$

(это условие отвечает переходу через общую точку дискриминанта в определенном ниже пространстве конфигураций). Обозначим этот частичный порядок через $B(m, n, k)$ и назовем его *альтернированным высшим порядком Брюа*.

Для $k = 1$ получим данное в [8], [9] определение:

$$B_{\mathbb{C}}(m, n, 1) = B_{\mathbb{C}}(m, n), \quad B(m, n, 1) = B(m, n),$$

а для $k = n = 1$ оба частичных порядка $B_{\mathbb{C}}(m, 1, 1)$, $B(m, 1, 1)$ совпадают со слабым порядком Брюа на симметрической группе S_n , диаграмма Хассе которого совпадает с графом Кэли симметрической группы S_n по отношению к системе образующих $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$, а также с граничным графом пермutoэдра – выпуклой оболочкой общей орбиты симметрической группы в ее стандартном представлении как группы, порожденной отражениями.

2. Конфигурационные пространства. Для $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{C}, x_i \neq x_j, i \neq j$, и набора чисел $y_I \in \mathbb{C}, I = \{i_1, \dots, i_k\} \in C(m, k), i_1 < \dots < i_k$, назовем множество точек из $\mathbb{C}^{k+1}$

$$E = \{E_I = (y_I, x_{i_1}, \dots, x_{i_k}), I \in C(m, k)\}$$

n-общим, если для любого $M \in C(m, n+1)$ точки $E_I, I \subset M$, не лежат на графике полинома из P_{n+1}^k , степень которого меньше, чем $(n-k+1)k$, т.е. коэффициент Δ_M при мономе $y_1^{n-k+1} \dots y_k^{n-k+1}$ в интерполяционном полиноме точек $E_I, I \in M$, не равен нулю. Пространство *n-общих* наборов расслоено над дополнением к конфигурации группы кос $\{x_i = x_j\}$. Слоем является дополнение к конфигурации гиперплоскостей $\{\Delta_M = 0, M \in C(m, n+1)\}$ в пространстве с координатами $y_I, I \in C(m, n+1)$. Эти конфигурации являются обобщением дискриминантных конфигураций Манина–Шехтмана [8]. Из формул предложения 2 следует явный вид уравнений $\Delta_M = 0$.

3. Вещественные *n*-общие наборы и альтернированные высшие порядки Брюа. Сопоставим вещественному *n*-общему набору E отображение

$$\varepsilon_E: C(m, n+1) \rightarrow \{\pm 1\}$$

по формуле

$$\varepsilon_E(M) = \text{sign } \Delta_M.$$

В следующем предложении доказано, что для $x_1 < \dots < x_m$ отображение ε_E *k*-допустимо, т.е. связной компоненте пространства вещественных *n*-общих наборов сопоставляется элемент $B(m, n, k)$. Переход через общую точку дискриминанта (множества не *n*-общих наборов) отвечает при этом отображении ребру диаграммы Хассе частичного порядка $B(m, n, k)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Для $x_1 < \dots < x_m$ и любого вещественного *n*-общего набора E отображение ε_E *k*-допустимо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку алгебраические дополнения элементов первого столбца определителя из формулы (56) имеют чередующиеся знаки, то из равенства определителя нулю вытекает, что элементы первого столбца не могут иметь чередующиеся знаки.

4. M -морсификации и высшие updown-перестановки. Для $k = 1$ вещественный n -общий набор состоит из m точек $(y_1, x_1), \dots, (y_m, x_m) \in \mathbb{R}^2$. Рассмотрим полином $F(x) \in \mathbb{R}[x]$ степени $m + 1$ со старшим коэффициентом 1, все критические точки которого вещественны и различны (M -морсификация особенности A_m [17]). Возьмем в качестве $x_1, \dots, x_m$ упорядоченные по возрастанию критические точки полинома $F(x)$ и положим $y_i = F(x_i), i = 1, \dots, m$. Поскольку максимумы и минимумы полинома чередуются, то

$$\text{sign}(y_i - y_{i+1}) = -\text{sign}(y_{i+1} - y_{i+2}), \quad i = 1, \dots, m-2.$$

По определению набор $\{(y_i, x_i), i = 1, \dots, m\}$ является 1-общим, если $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$. В этом случае $F(x)$ является очень хорошей M -морсификацией особенности A_m и в [17] доказано, что связанные компоненты пространства очень хороших M -морсификаций особенности A_m взаимно однозначно соответствуют updown-перестановкам на $\bar{m}$:

$$\{(i_1, \dots, i_m) \in S_m : \text{sign}(i_j - i_{j+1}) = -\text{sign}(i_{j+1} - i_{j+2}), j = 1, \dots, m-2\}.$$

Назовем элемент $\varepsilon \in B(m, n, k)$ updown-элементом, если

$$\varepsilon(\{i, i+1, \dots, i+n\}) = -\varepsilon(\{i+1, i+2, \dots, i+n+1\}), \quad i = 1, \dots, m-n-1.$$

В работе [5] доказано, что n -общему набору $\{(F(x_i), x_i), i = 1, \dots, m\}$ при отображении, введенном в п. 3, отвечает updown-элемент в $B(m, n, 1) = B(m, n)$. Приведем другое доказательство этого факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Для вещественного n -общего набора

$$\{(y_i, x_i), i = 1, \dots, m, x_1 < \dots < x_m\}$$

из условия $\text{sign}(y_i - y_{i+1}) = -\text{sign}(y_{i+1} - y_{i+2}), i = 1, \dots, m-2$, вытекает, что

$$\text{sign } \Delta_{X_{i,i+n}} = -\text{sign } \Delta_{X_{i+1,i+n+1}}, \quad i = 1, \dots, m-n-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство индукцией по n . Из формулы (18) следует, что

$$\begin{aligned} \Delta_{X_{i,i+n}} &= \frac{\Delta_{X_{i+1,i+n}} - \Delta_{X_{i,i+n-1}}}{x_{i+n} - x_i}, \\ \Delta_{X_{i+1,i+n+1}} &= \frac{\Delta_{X_{i+2,i+n+1}} - \Delta_{X_{i+1,i+n}}}{x_{i+n+1} - x_{i+1}}. \end{aligned}$$

Знаменатели дробей положительны, а числители имеют разные знаки по предположению индукции. Поэтому и сами дроби имеют разные знаки.

В [5] доказано, что для $0 \leq x_1 < \dots < x_m$ утверждение предложения 8 справедливо не только для разделенных разностей (старшего коэффициента интерполяционного полинома), но и для любого другого коэффициента. Этот факт доказывается аналогично предложению 8 с помощью рекуррентных соотношений (19), (20).

Updown-перестановку можно рассматривать как линейное расширение частично упорядоченного множества

$$\cdots < a_{i-1} > a_i < a_{i+1} > \cdots .$$

В [7] определены высшие частично упорядоченные множества и updown-элементы в $B(m, n, 1)$ интерпретированы как их линейные расширения.

5. Операция удаление-сокращение для альтернированных высших порядков Брюа и дискриминантных конфигураций. Ограничение k -допустимого отображения

$$\varepsilon: C(m, n+1) \rightarrow \{\pm 1\}$$

на $C(m-1, n+1) \subset C(m, n+1)$ также является k -допустимым. С другой стороны, отображению ε можно сопоставить отображение

$$\varepsilon_c: C(m-1, n) \rightarrow \{\pm 1\}$$

по правилу

$$\varepsilon_c(\{i_1, \dots, i_n\}) = \varepsilon(\{i_1, \dots, i_n, m\}).$$

Отображение ε_c также k -допустимо, поскольку для

$$I = \{i_1, \dots, i_{n+1}, m\}, \quad i_1 < \cdots < i_{n+1} < m,$$

удаление элемента $\varepsilon(I \setminus m)$ из последовательности

$$\varepsilon(I \setminus i_1), \dots, \varepsilon(I \setminus i_{n+1}), \varepsilon(I \setminus m)$$

не увеличивает количество перемен знака в этой последовательности.

Опишем действие этих операций на дискриминантные конфигурации гиперплоскостей, т.е. на разделенные разности. Первая операция соответствует уменьшению количества узлов интерполяции, а вторая – уменьшению степени интерполяционного полинома.

Для фиксированных $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{C}$ уравнения $\Delta_M = 0$, $M \in C(m, n+1)$, определяют в пространстве $\mathbb{C}^{C_m^k}$ с системой координат y_I , $I \in C(m, k)$, конфигурацию гиперплоскостей. Обозначим через $E(m, n, k)$ дополнение к этой конфигурации:

$$E(m, n, k) = \mathbb{C}^{C_m^k} \setminus \{\Delta_M = 0, M \in C(m, n+1)\}.$$

Удаление x_m из множества X приводит к проекции $p: E(m, n, k) \rightarrow \mathbb{C}^{C_{m-1}^k}$ вдоль подпространства, порожденного координатами $y_{i_1, \dots, i_{k-1}, m}$, где $\{i_1, \dots, i_{k-1}\} \in C(m-1, k-1)$. Слой над точкой из $E(m-1, n, k) \subset \mathbb{C}^{C_{m-1}^k}$ будет дополнением к конфигурации гиперплоскостей в $\mathbb{C}^{C_m^{k-1}}$, причем слой может вырождаться над подмногообразием вещественной коразмерности 2. В работах [16, п. 5.3], [19], [20] развита техника для вычисления фундаментальной группы в такой ситуации, и, в частности, для общего слоя F проекции p имеем точную последовательность [19, лемма 1.7]

$$\pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E(m, n, k)) \xrightarrow{p_*} \pi_1(E(m-1, n, k)) \longrightarrow 1.$$

Конфигурация гиперплоскостей

$$\{\Delta_M = 0, M \in C(m, n+1) \setminus C(m-1, n+1)\}$$

сводится к дискриминантной конфигурации

$$\{\Delta_M = 0, M \in C(m-1, n)\}$$

с помощью следующего предложения. Введем обозначение

$$f_a(z_1, \dots, z_k) = \frac{(-1)^k}{V_1(a, z_1, \dots, z_k)} \begin{vmatrix} f(z_1, z_2, \dots, z_k) & a^{k-1} & \dots & a & 1 \\ f(a, z_2, \dots, z_k) & z_1^{k-1} & \dots & z_1 & 1 \\ f(z_1, a, \dots, z_k) & z_2^{k-1} & \dots & z_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(z_1, z_2, \dots, a) & z_k^{k-1} & \dots & z_k & 1 \end{vmatrix}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Для любого $a \in \mathbb{C}$ и $n > k$ справедлива формула

$$\Delta_X^Y[f] = c_k \int \frac{f(Z)V_1^2(Z)}{\omega(Z, X)} dZ = c_k \int \frac{\omega(Z, a)f_a(Z)V_1^2(Z)}{\omega(Z, X)} dZ, \quad (63)$$

в частности для $a \in X$

$$\Delta_X^Y[f] = c_k \int \frac{f_a(Z)V_1^2(Z)}{\omega(Z, X \setminus a)} dZ = \Delta_{X \setminus a}^Y[f_a].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим интеграл в правой части формулы (63) в виде суммы интегралов, разлагая определитель f_a по первому столбцу. Первое слагаемое в этой сумме совпадает с $\Delta_X^Y[f]$. Слагаемое с номером i , $i > 1$, имеет вид

$$c_k \int \frac{f(z_1, \dots, z_{i-2}, a, z_i, \dots, z_k) \frac{\omega(Z \setminus z_i, a)}{\omega(Z \setminus z_i, z_i)} V_1^2(Z)}{\omega(Z, X)} dZ.$$

Числитель стоящей под знаком интеграла дроби является полиномом степени меньше k по z_i , и поэтому из условия $k < n$ следует, что интеграл по z_i равен нулю.

Операция удаление-сокращение уменьшает соответственно m и n . Интегрируя в формуле (39) по одной из переменных, можно уменьшить оставшийся параметр k – число переменных рассматриваемых симметрических функций

$$\begin{aligned} \Delta_X^Y[f] &= c_k \int \frac{f(Z)V_1^2(Z)}{\omega(Z, X)} dZ \\ &= \frac{c_{k-1}}{k} \sum_{p=1}^n \frac{1}{\omega(X_p, X \setminus x_p)} \\ &\quad \times \int_{C_1} \dots \int_{C_{k-1}} \frac{f(x_p \cup Z \setminus z_k) \omega(x_p, Z \setminus z_k) V_1^2(Z \setminus z_k)}{\omega(Z \setminus z_k, X \setminus x_p)} d(Z \setminus z_k) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{p=1}^n \frac{1}{\omega(x_p, X \setminus x_p)} \Delta_{X \setminus x_p}^{Z \setminus z_k} [f(x_p \cup Z \setminus z_k) \omega(x_p, Z \setminus z_k)]. \end{aligned}$$

Список литературы

1. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1971.
2. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М.: ГИТТЛ, 1954.
3. Гриффитс Ф., Харрис Д. Принципы алгебраической геометрии. М.: Мир, 1982.
4. Джеффрис Г., Свирлс Б. Методы математической физики. Т. 2. М.: Мир, 1970.
5. Ильюта Г. Г. Геометрические реализации высших порядков Брюа и M -морсификации // Изв. РАН. Сер. матем. 1996. Т. 60. № 6. С. 91–100.
6. Ильюта Г. Г. Разделенные разности для симметрических функций и альтернированные высшие порядки Брюа // УМН. 2001. Т. 56. № 2. С. 217–218.
7. Ильюта Г. Г. Диаграммы А'Кампо–Гусейн–Заде как частично упорядоченные множества // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 4. С. 49–66.
8. Marin Y. I., Schechtman V. V. Arrangements of hyperplanes, higher braid groups and higher Bruhat orders // Adv. Stud. Pure Math. 1989. V. 17. P. 289–308.
9. Ziegler G. Higher Bruhat orders and cyclic hyperplane arrangements // Topology. 1993. V. 32. P. 259–279.
10. Chen W., Louck J. Interpolation for symmetric functions // Adv. Math. 1996. V. 117. P. 147–156.
11. Macdonald I. Symmetric functions and Hall polynomials. Oxford: Oxford Univ. Press, 1995.
12. Macdonald I. Schubert polynomials // Surveys in combinatorics / Ed. A. D. Kendwell. London Math. Soc. Lect. Notes Ser. V. 166. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991. P. 73–99.
13. Hirschhorn P., Raphael L. Coalgebraic foundations of the methods of divided differences // Adv. Math. 1992. V. 91. P. 75–135.
14. Kirillov A. N., Noumi M. Affine Hecke algebras and raising operators for Macdonald polynomials // Duke Math. J. 1998. V. 93. P. 1–39.
15. Chu W. Divided differences and symmetric functions // Boll. U.M.I. 2B. 1999. V. 8. P. 609–618.
16. Orlik P., Terao H. Arrangements of hyperplanes. Berlin: Springer-Verlag, 1992.
17. Arnold V. I. Springer number and morsification spaces // J. Alg. Geom. 1992. V. 1. P. 197–214.
18. Fadell E., Newirth L. Configuration spaces // Math. Scand. 1962. V. 10. P. 111–118.
19. Leibman A. Fiber bundles with degenerations and their applications to computing fundamental groups // Geom. Dedicata. 1993. V. 48. P. 93–126.
20. Moulton V. Vector braids // J. Pure Appl. Alg. 1998. V. 131. P. 245–296.
21. Sturmfels B. Cyclic polytopes and d -order curves // Geom. Dedicata. 1987. V. 24. P. 103–107.
22. Sturmfels B., Zelevinsky A. Maximal minors and their leading terms // Adv. Math. 1993. V. 98. P. 65–112.
23. Cordovil R., Duchet P. Cyclic polytopes and oriented matroids // Eur. J. Comb. 2000. V. 21. P. 49–64.
24. Rambau J. Triangulations of cyclic polytopes and higher Bruhat orders // Mathematika. 1997. V. 44. P. 162–194.
25. Gale D. Neighborly and cyclic polytopes // Proc. Symp. Pure Math. 1963. V. 7. P. 225–232.
26. Domokos D. Gröbner bases of certain determinantal ideals // Beitrage Alg. Geom. 1999. V. 40. P. 479–493.
27. Bernstein D., Zelevinsky A. Combinatorics of maximal minors // J. Alg. Comb. 1993. V. 2. P. 111–121.
28. Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V. Discriminants, resultants, and multidimensional determinants. Boston: Birkhäuser, 1994.
29. Felsner S., Weil H. A theorem on higher Bruhat orders // Discrete Comput. Geom. 2000. V. 23. P. 121–127.
30. Billera L., Sturmfels B. Fiber polytopes // Ann. Math. 1992. V. 135. P. 527–549.

31. *Pragacz P.* Symmetric polynomials and divided differences in formulas of intersection theory // Parameter spaces. V. 36. Warsaw: Banach Center Publ., 1996. P. 125–177.
32. *Lascoux A., Schutzenberger M.-P.* Interpolation de Newton a plusieurs variables // Lect. Notes Math. 1985. V. 1146. P. 161–175.
33. *Lascoux A.* Interpolation de Lagrange // On orthogonal polynomials and their applications. V. 1. Zaragoza: Acad. Nat. Zaragoza, 1988. P. 95–101.
34. *Salzer H.* A determinant form for non-linear divided differences with applications // Z. Angew. Math. Mech. 1986. V. 66. P. 183–185.
35. *Fulton W.* Young tableaux with application to representation theory and geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
36. *Louck J.* MacMahon's master theorem double tableau polynomials and representations of groups // Adv. Appl. Math. 1996. V. 17. P. 143–168.
37. *Stanley R.* Enumerative combinatorics. V. 2. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
38. *Verde-Star L.* Divided differences and combinatorial identities // Stud. Appl. Math. 1991. V. 85. P. 215–242.
39. *Neamtu M.* Homogeneous simplex splines // J. Comput. Appl. Math. 1996. V. 73. P. 173–189.
40. *Mimachi K.* A duality of Macdonald–Koornwinder polynomials and its application to integral representations // Duke Math. J. 2001. V. 107. № 2. P. 265–281.
41. *Ильютa Г. Г.* Высшие порядки Брюа, формула Эйлера–Якоби и тождества Турнбулла // УМН. 2003. Т. 58. № 4. С. 203–204.

E-mail: ilyuta@mccme.ru

Поступило в редакцию
26.XII.2001