Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Ковалевский, О суммируемости энтропийных решений задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 5, 35–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/im450>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 13:17:06

УДК 517.9

А. А. Ковалевский

**О суммируемости энтропийных решений
задачи Дирихле для одного класса нелинейных
эллиптических уравнений четвертого порядка**

Приведены результаты о суммируемости энтропийных решений задачи Дирихле для некоторого класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка в зависимости от свойств интегрируемости правых частей уравнений. Рассмотрены случаи, когда эти правые части принадлежат пространствам Лебега с показателями, близкими к единице, а также более широким множествам, содержащимся в L^1 .

Библиография: 8 наименований.

Введение

Понятие энтропийного решения задачи Дирихле для рассматриваемого в настоящей статье класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка введено и изучено в [1], [2] на основе подхода, предложенного в [3] для уравнений второго порядка. В работе получен ряд результатов о суммируемости энтропийных решений данной задачи в зависимости от свойств интегрируемости правых частей соответствующих уравнений. Рассмотрены случаи, когда эти правые части принадлежат пространствам Лебега с показателями, близкими к единице, а также более широким множествам, содержащимся в L^1 . Отметим, что для нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с правыми частями такого типа некоторые результаты о суммируемости слабых решений получены в [4], [5]. Недавно они были уточнены и дополнены в работе [6] на основе полученных в ней результатов о суммируемости энтропийных решений тех же уравнений.

Настоящая статья состоит из двух параграфов. В §1 рассмотрено множество функций $\overset{\circ}{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, введенное в [1], [2], и для элементов этого множества, подчиненных некоторым интегральным неравенствам, установлены различные свойства интегрируемости. При этом используются приемы, аналогичные изложенным в [6] для иной ситуации. В §2 приведена формулировка рассматриваемой задачи Дирихле и установлено, что энтропийные решения этой задачи удовлетворяют интегральным неравенствам из §1. Этот факт вместе с надлежащими условиями на правые части рассматриваемых уравнений и результатами, полученными в §1, позволяет доказать теоремы об интегрируемости энтропийных решений данной задачи. Приведены также некоторые результаты для слабых решений этой задачи.

Исходные предположения работы следующие: $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$, Ω – ограниченное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $p \in (1, n/2)$, $q \in (2p, n)$.

Пусть Λ – множество всех n -мерных мультииндексов α таких, что $|\alpha| = 1$ или $|\alpha| = 2$, а $\mathbb{R}^{n,2}$ – пространство всех отображений $\xi: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$. Если $u \in W^{2,1}(\Omega)$, то $\nabla_2 u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n,2}$, причем для любых $x \in \Omega$ и $\alpha \in \Lambda$ имеем $(\nabla_2 u(x))_\alpha = D^\alpha u(x)$.

§ 1. О суммируемости функций, подчиненных некоторым интегральным неравенствам

Приведем сначала несколько общих результатов, которые будут полезны в дальнейшем.

ЛЕММА 1.1. *Пусть u – измеримая функция на Ω , $M > 0$, $\tau > 0$, и пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq M k^{-\tau}. \quad (1.1)$$

Тогда для любого $\lambda \in (0, \tau)$ имеем $u \in L^\lambda(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\lambda \in (0, \tau)$ и положим $\lambda_1 = 2/(\tau - \lambda)$. В силу (1.1) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{\{k^{\lambda_1} \leq |u| < (k+1)^{\lambda_1}\}} |u|^\lambda dx \leq 2^{\tau+\lambda_1\lambda} M k^{-2}.$$

Отсюда, производя суммирование по k в обеих частях неравенства, заключаем, что $u \in L^\lambda(\Omega)$. Лемма доказана.

Отметим, что свойство, представленное леммой 1.1, использовалось ранее, например в [3], а также в [1], [2].

ЛЕММА 1.2. *Пусть u – измеримая функция на Ω , $M > 0$, $\tau > 0$, $\tau_1 > 1$, и пусть для любого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, справедливо неравенство*

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq M k^{-\tau} (\ln k)^{-\tau_1}. \quad (1.2)$$

Тогда $u \in L^\tau(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1.2) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_{\{e^k \leq |u| < e^{k+1}\}} |u|^\tau dx \leq 2^{\tau+\tau_1} e^\tau M k^{-\tau_1}.$$

Отсюда, производя суммирование по k в обеих частях неравенства и учитывая, что $\tau_1 > 1$, получаем, что $u \in L^\tau(\Omega)$. Лемма доказана.

Для любого $\lambda \in [1, n)$ положим $\lambda^* = n\lambda/(n - \lambda)$.

Известно (см., например, [7]), что если $\lambda \in [1, n)$, то $\mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega) \subset L^{\lambda^*}(\Omega)$ и существует положительная постоянная $c_{n,\lambda}$, зависящая только от n и λ , такая, что для любой функции $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$

$$\left(\int_\Omega |u|^{\lambda^*} dx \right)^{1/\lambda^*} \leq c_{n,\lambda} \left(\sum_{|\alpha|=1} \int_\Omega |D^\alpha u|^\lambda dx \right)^{1/\lambda}. \quad (1.3)$$

Перейдем к рассмотрению некоторого специального множества функций и свойств его элементов.

Через $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ обозначим множество всех функций из $W^{1,q}(\Omega)$, имеющих обобщенные производные второго порядка из $L^p(\Omega)$. Множество $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ – банахово пространство с нормой

$$\|u\| = \|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} + \left(\sum_{|\alpha|=2} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u|^p dx \right)^{1/p}.$$

Через $\overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ обозначим замыкание в $W_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ множества $C_0^{\infty}(\Omega)$.

Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ ψ_k – функция на $\mathbb{R}$ такая, что

$$\psi_k(s) = s - s^{k+2} + \frac{k+1}{k+3} s^{k+3}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Определим теперь для любого $k \in \mathbb{N}$ функцию $h_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, полагая

$$h_k(s) = \begin{cases} s, & \text{если } |s| \leq k, \\ \left[\psi_k\left(\frac{|s|-k}{k}\right) + 1 \right] k \operatorname{sign} s, & \text{если } k < |s| < 2k, \\ 2k \frac{k+2}{k+3} \operatorname{sign} s, & \text{если } |s| \geq 2k. \end{cases}$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $h_k \in C^2(\mathbb{R})$ и, кроме того,

$$|h_k| \leq 2k \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

$$0 \leq h'_k \leq 1 \quad \text{на } \mathbb{R}, \quad (1.5)$$

$$|h''_k| \leq 3 \quad \text{на } \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Через $\overset{\circ}{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ обозначим множество всех функций $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующему условию: $h_k(u) \in \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Положим для произвольных $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и $x \in \Omega$

$$k(u, x) = \min\{N \in \mathbb{N}: |u(x)| < N\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть $u \in \overset{\circ}{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $\alpha \in \Lambda$. Тогда $\delta^{\alpha}u$ – функция на Ω такая, что для любого $x \in \Omega$

$$\delta^{\alpha}u(x) = D^{\alpha}h_{k(u,x)}(u)(x).$$

ЛЕММА 1.3. Пусть $u \in \overset{\circ}{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $\alpha \in \Lambda$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\delta^{\alpha}u = D^{\alpha}h_k(u) \quad \text{n.в. на } \{|u| \leq k\}. \quad (1.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $k, k_1 \in \mathbb{N}$ таких, что $2k \leq k_1$, имеем $h_k(u) = h_k(h_{k_1}(u))$. Используя этот факт, устанавливаем, что для любых $k, k_1 \in \mathbb{N}$ таких, что $k < k_1$,

$$D^\alpha h_k(u) = D^\alpha h_{k_1}(u) \quad \text{п.в. на } \{|u| \leq k\}. \quad (1.8)$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. В силу (1.8) существует множество E меры нуль такое, что для любых $N \in \mathbb{N}$, $N < k + 1$, и $x \in \{|u| \leq N\} \setminus E$

$$D^\alpha h_N(u)(x) = D^\alpha h_{k+1}(u)(x).$$

Тогда для любого фиксированного $x \in \{|u| \leq k\} \setminus E$, учитывая определение функции $\delta^\alpha u$, получаем $\delta^\alpha u(x) = D^\alpha h_{k+1}(u)(x)$. Ясно также, что $D^\alpha h_k(u)(x) = D^\alpha h_{k+1}(u)(x)$. Следовательно, $\delta^\alpha u(x) = D^\alpha h_k(u)(x)$. Отсюда заключаем, что (1.7) справедливо. Лемма доказана.

Отметим, что в силу леммы 1.3 приведенное выше определение функций $\delta^\alpha u$ эквивалентно определению этих функций, данному в [1], [2].

ЛЕММА 1.4. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда:

1) если α — n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 1$, то

$$D^\alpha h_k(u) = h'_k(u) \delta^\alpha u \quad \text{п.в. на } \Omega;$$

2) если α — n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$, то

$$|D^\alpha h_k(u)| \leq |\delta^\alpha u| + 3 \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2 \quad \text{п.в. на } \Omega.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$h_k(u) = h_k(h_{2k}(u)). \quad (1.9)$$

Пусть α — n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 1$. В силу (1.9)

$$D^\alpha h_k(u) = h'_k(h_{2k}(u)) D^\alpha h_{2k}(u) \quad \text{п.в. на } \Omega.$$

Отсюда, используя свойства функций h_k , h_{2k} и лемму 1.3, получаем, что $D^\alpha h_k(u) = h'_k(u) \delta^\alpha u$ п.в. на Ω , и тем самым утверждение 1) доказано.

Пусть теперь α — n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$. Используя (1.9), получаем

$$|D^\alpha h_k(u) - h'_k(h_{2k}(u)) D^\alpha h_{2k}(u)| \leq |h''_k(h_{2k}(u))| \sum_{|\beta|=1} |D^\beta h_{2k}(u)|^2 \quad \text{п.в. на } \Omega.$$

Отсюда, учитывая (1.5), (1.6) и лемму 1.3, выводим, что $|D^\alpha h_k(u)| \leq |\delta^\alpha u| + 3 \sum_{|\beta|=1} |\delta^\beta u|^2$ п.в. на Ω , и тем самым утверждение 2) доказано.

Отметим, что

$$\mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega) \subset \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega), \quad (1.10)$$

и если $u \in \mathring{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $\alpha \in \Lambda$, то $\delta^\alpha u = D^\alpha u$ п.в. на Ω . Однако включение, обратное (1.10), вообще говоря, не верно (см. [2]).

ЛЕММА 1.5. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $\lambda \in [1, q]$. Пусть для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеет место включение $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$. Тогда $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\{h_k(u)\} \subset \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$. Тогда в силу (1.3), леммы 1.4 и неравенства (1.5) для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\left(\int_{\Omega} |h_k(u)|^{\lambda^*} dx \right)^{1/\lambda^*} \leq c_{n,\lambda} \left(\sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |\delta^\alpha u|^\lambda dx \right)^{1/\lambda}.$$

Отсюда, поскольку $h_k(u) \rightarrow u$ поточечно в Ω , заключаем, что $u \in L^\lambda(\Omega)$. Тогда, учитывая, что $|h_k(u)| \leq |u|$ для любого $k \in \mathbb{N}$, имеем $h_k(u) \rightarrow u$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$. Кроме того, в силу лемм 1.3, 1.4 и неравенства (1.5) для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеем $D^\alpha h_k(u) \rightarrow \delta^\alpha u$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$. Теперь можно заключить, что $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$ и $h_k(u) \rightarrow u$ сильно в $\mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$. Следовательно, $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 1.6. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $\lambda \in [1, p]$ и для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеет место включение $\delta^\alpha u \in L^{2\lambda}(\Omega)$. Пусть для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, имеет место включение $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$. Тогда $u \in \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\{h_k(u)\} \subset \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$. В силу изложенного в доказательстве леммы 1.5 имеем $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$ и $h_k(u) \rightarrow u$ сильно в $\mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$. Кроме того, в силу лемм 1.3 и 1.4 для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, имеем $D^\alpha h_k(u) \rightarrow \delta^\alpha u$ сильно в $L^\lambda(\Omega)$. Теперь можно заключить, что $u \in \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$ и $h_k(u) \rightarrow u$ сильно в $\mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$. Следовательно, $u \in \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$. Лемма доказана.

Положим для любых $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$

$$I(u, k) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\delta^\alpha u|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\delta^\alpha u|^p \right\} h'_k(u) dx.$$

ЛЕММА 1.7. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\text{meas}\{|u| \geq k\} \leq c_{n,q}^{q^*} k^{-q^*} [I(u, k)]^{q^*/q}. \quad (1.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $|h_k(u)| \geq k$ на $\{|u| \geq k\}$, имеем

$$k^{q^*} \text{meas}\{|u| \geq k\} \leq \int_{\Omega} |h_k(u)|^{q^*} dx. \quad (1.12)$$

Правую часть этого неравенства оценим, используя (1.3), лемму 1.4 и неравенство (1.5). Получим

$$\int_{\Omega} |h_k(u)|^{q^*} dx \leq c_{n,q}^{q^*} \left(\sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |D^\alpha h_k(u)|^q dx \right)^{q^*/q} \leq c_{n,q}^{q^*} [I(u, k)]^{q^*/q}.$$

Отсюда и из (1.12) выводим (1.11). Лемма доказана.

ЛЕММА 1.8. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, α – n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 1$, u пусть $k, k_1 \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\text{meas}\{|\delta^\alpha u| \geq k\} \leq c_{n,q}^{q*} k_1^{-q*} [I(u, k_1)]^{q*/q} + k^{-q} I(u, k_1). \quad (1.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $G = \{|u| < k_1, |\delta^\alpha u| \geq k\}$. Имеем

$$\text{meas}\{|\delta^\alpha u| \geq k\} \leq \text{meas}\{|u| \geq k_1\} + \text{meas } G, \quad (1.14)$$

причем в силу леммы 1.7

$$\text{meas}\{|u| \geq k_1\} \leq c_{n,q}^{q*} k_1^{-q*} [I(u, k_1)]^{q*/q}. \quad (1.15)$$

Оценим $\text{meas } G$. Поскольку $k \leq |\delta^\alpha u| h'_{k_1}(u)$ на G , имеем

$$k^q \text{meas } G \leq \int_{\Omega} |\delta^\alpha u|^q h'_{k_1}(u) dx \leq I(u, k_1)$$

и, следовательно, $\text{meas } G \leq k^{-q} I(u, k_1)$. Отсюда и из (1.14), (1.15) выводим (1.13). Лемма доказана.

ЛЕММА 1.9. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, α – n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$, u пусть $k, k_1 \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\text{meas}\{|\delta^\alpha u| \geq k\} \leq c_{n,q}^{q*} k_1^{-q*} [I(u, k_1)]^{q*/q} + k^{-p} I(u, k_1).$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.8.

Положим

$$r = \frac{n(q-1)}{n-1}.$$

Поскольку $q \in (2, n)$, имеем $r \in (1, q)$.

ЛЕММА 1.10. Пусть $b_1, b_2 > 0$, $(n-1)/n < \sigma < 1$, Φ – неотрицательная измеримая функция на Ω такая, что $\Phi[\ln(1+\Phi)]^\sigma \in L^1(\Omega)$. Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$I(u, k) \leq b_1 \int_{\Omega} \Phi |h_k(u)| dx + b_2. \quad (1.16)$$

Тогда:

- 1) $u \in \mathring{W}^{1,r}(\Omega)$;
- 2) для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, имеем $\delta^\alpha u \in L^{rp/q}(\Omega)$;
- 3) если $rp/q \geq 1$, то $u \in \mathring{W}^{2,rp/q}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через b_i , $i = 3, 4, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от $n, q, b_1, b_2, \sigma, \text{meas } \Omega$ и нормы в $L^1(\Omega)$ функции $\Phi[\ln(1 + \Phi)]^\sigma$.

Положим $q_1 = \frac{q-1}{2q}$ и зафиксируем $k \in \mathbb{N}$, $k > e$. В силу (1.16) имеем

$$I(u, k) \leq b_1 \int_{\{\Phi \leq k^{q_1}\}} \Phi |h_k(u)| dx + b_1 \int_{\{\Phi > k^{q_1}\}} \Phi |h_k(u)| dx + b_2. \quad (1.17)$$

Используя неравенство Гёльдера, неравенство (1.3), лемму 1.4 и (1.5), получаем

$$\begin{aligned} \int_{\{\Phi \leq k^{q_1}\}} \Phi |h_k(u)| dx &\leq k^{q_1} \int_{\Omega} |h_k(u)| dx \\ &\leq k^{q_1} (\text{meas } \Omega)^{(q^*-1)/q^*} \left(\int_{\Omega} |h_k(u)|^{q^*} dx \right)^{1/q^*} \\ &\leq k^{q_1} (\text{meas } \Omega)^{(q^*-1)/q^*} c_{n,q} \left(\sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |D^\alpha h_k(u)|^q dx \right)^{1/q} \\ &\leq b_3 k^{q_1} [I(u, k)]^{1/q}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Учитывая (1.4) и тот факт, что

$$\Phi < q_1^{-\sigma} (\ln k)^{-\sigma} \Phi [\ln(1 + \Phi)]^\sigma \quad \text{на } \{\Phi > k^{q_1}\},$$

второй интеграл в правой части (1.17) оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_{\{\Phi > k^{q_1}\}} \Phi |h_k(u)| dx &\leq 2k \int_{\{\Phi > k^{q_1}\}} \Phi dx \\ &\leq 2k q_1^{-\sigma} (\ln k)^{-\sigma} \int_{\Omega} \Phi [\ln(1 + \Phi)]^\sigma dx = b_4 k (\ln k)^{-\sigma}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Из соотношений (1.17)–(1.19), используя неравенство Юнга, получаем

$$\begin{aligned} I(u, k) &\leq b_1 b_3 k^{q_1} [I(u, k)]^{1/q} + b_1 b_4 k (\ln k)^{-\sigma} + b_2 \\ &\leq \frac{1}{q} I(u, k) + \frac{q-1}{q} b_5 [k^{1/2} + k (\ln k)^{-\sigma}]. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$, $k > e$, справедливо неравенство

$$I(u, k) \leq b_6 k (\ln k)^{-\sigma}. \quad (1.20)$$

Далее, пусть α – произвольный n -мерный мультииндекс такой, что $|\alpha| = 1$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$, $k > e^{(n-1)/(n-q)}$. Ясно, что существует $\eta > e$ такое, что

$$\eta^{n-1} (\ln \eta)^\sigma = k^{n-q}.$$

Из этого равенства следует, что

$$\eta^{-r^*} (\ln \eta)^{-\sigma n/(n-q)} = k^{-q} \eta (\ln \eta)^{-\sigma} = k^{-r} (\ln \eta)^{-\sigma n/(n-1)}, \quad (1.21)$$

$$k^{n-q} \leq \eta^n. \quad (1.22)$$

Пусть k_1 – минимальное натуральное число, большее η . Из соотношений (1.21) и (1.22) вытекают неравенства

$$k_1^{-r^*} (\ln k_1)^{-\sigma n/(n-q)} \leq b_7 k^{-r} (\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}, \quad (1.23)$$

$$k^{-q} k_1 (\ln k_1)^{-\sigma} \leq b_8 k^{-r} (\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}. \quad (1.24)$$

Кроме того, поскольку $k_1 > e$, в силу (1.20) имеем

$$I(u, k_1) \leq b_6 k_1 (\ln k_1)^{-\sigma}. \quad (1.25)$$

Теперь, используя лемму 1.8 и неравенства (1.23)–(1.25), получаем

$$\text{meas}\{|\delta^\alpha u| \geq k\} \leq b_9 k^{-r} (\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}.$$

Тогда в силу неравенства $\sigma > (n-1)/n$ и леммы 1.2 имеем $\delta^\alpha u \in L^r(\Omega)$.

Таким образом, для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеем $\delta^\alpha u \in L^r(\Omega)$. Отсюда и из леммы 1.5 выводим, что $u \in \mathring{W}^{1,r}(\Omega)$, и тем самым утверждение 1) леммы доказано.

Перейдем к доказательству утверждения 2). Пусть α – произвольный n -мерный мультииндекс такой, что $|\alpha| = 2$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$, $k > e^{q(n-1)/p(n-q)}$. Ясно, что существует $y > e$ такое, что

$$y^{n-1} (\ln y)^\sigma = k^{p(n-q)/q}.$$

Из этого равенства следует, что

$$y^{-r^*} (\ln y)^{-\sigma n/(n-q)} = k^{-p} y (\ln y)^{-\sigma} = k^{-rp/q} (\ln y)^{-\sigma n/(n-1)}, \quad (1.26)$$

$$k^{p(n-q)} \leq y^{qn}. \quad (1.27)$$

Пусть k_2 – минимальное натуральное число, большее y . Из соотношений (1.26) и (1.27) вытекают неравенства

$$k_2^{-r^*} (\ln k_2)^{-\sigma n/(n-q)} \leq b_{10} k^{-rp/q} (\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}, \quad (1.28)$$

$$k^{-p} k_2 (\ln k_2)^{-\sigma} \leq b_{11} k^{-rp/q} (\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}. \quad (1.29)$$

Кроме того, поскольку $k_2 > e$, в силу (1.20) имеем

$$I(u, k_2) \leq b_6 k_2 (\ln k_2)^{-\sigma}. \quad (1.30)$$

Используя лемму 1.9 и неравенства (1.28)–(1.30), устанавливаем, что

$$\text{meas}\{|\delta^\alpha u| \geq k\} \leq b_{12} k^{-rp/q} (\ln k)^{-\sigma n/(n-1)}.$$

Тогда в силу неравенства $\sigma > (n-1)/n$ и леммы 1.2 имеем $\delta^\alpha u \in L^{rp/q}(\Omega)$. Тем самым справедливость утверждения 2) леммы доказана.

Остается установить справедливость утверждения 3) леммы. Предположим, что $rp/q \geq 1$. Тогда $rp/q \in [1, p]$. Поскольку $2p < q$, имеем $2rp/q < r$, и тогда в силу установленного выше, при доказательстве утверждения 1) леммы, для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеем $\delta^\alpha u \in L^{2rp/q}(\Omega)$. Теперь, учитывая утверждение 2) и используя лемму 1.6, получаем, что $u \in \mathring{W}^{2, rp/q}(\Omega)$. Таким образом, утверждение 3) леммы справедливо, и тем самым ее доказательство завершено.

ЛЕММА 1.11. Пусть $b', b'' > 0$, $1 \leq m < nq/(nq - n + q)$, $\Phi \in L^m(\Omega)$, $\Phi \geq 0$ на Ω . Пусть $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$I(u, k) \leq b' \int_{\Omega} \Phi |h_k(u)| dx + b''. \quad (1.31)$$

Тогда:

- 1) если $\lambda \in [1, (q-1)m^*)$, то $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$;
- 2) если α — n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$, $u \in \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$, то $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$;
- 3) если $\frac{p}{q}(q-1)m^* > 1$ и $\lambda \in [1, \frac{p}{q}(q-1)m^*)$, то $u \in \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что в силу условия леммы имеем $m < n$, $(m-1)q^* < m$.

Положим

$$m_1 = 1 - \frac{m-1}{m} q^*, \quad m_2 = \frac{(m-1)q^*}{mq}, \quad m_3 = \frac{n-mq}{n-m}, \quad \theta = \frac{nm(q-1)}{n-mq}.$$

Ясно, что $0 < m_1 \leq 1$, $0 \leq m_2 < 1$. Кроме того, имеем

$$q^* \left[1 - \frac{m_1}{(1-m_2)q} \right] = \theta, \quad (1.32)$$

$$m_3 \theta = q - \frac{m_1 m_3}{1-m_2}. \quad (1.33)$$

Далее через b_i , $i = 13, 14, \dots$, будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от n, q, b', b'', m и нормы в $L^m(\Omega)$ функции Φ .

Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{N}$. Предположим, что $m > 1$. Тогда $m_1 < 1$ и, используя (1.31), (1.4) и неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} I(u, k) &\leq b'(2k)^{m_1} \int_{\Omega} \Phi |h_k(u)|^{1-m_1} dx + b'' \\ &\leq b'(2k)^{m_1} \|\Phi\|_{L^m(\Omega)} \left(\int_{\Omega} |h_k(u)|^{q^*} dx \right)^{(m-1)/m} + b''. \end{aligned}$$

Отсюда и из соотношений (1.3), (1.5) и леммы 1.4 вытекает, что

$$I(u, k) \leq b_{13} k^{m_1} [I(u, k)]^{m_2} + b''.$$

Следовательно,

$$I(u, k) \leq b_{14} k^{m_1/(1-m_2)}. \quad (1.34)$$

Легко проверить, что это же неравенство верно и в случае $m = 1$.

Таким образом, доказано, что для любого $k \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство (1.34).

Далее, пусть $\lambda \in [1, (q-1)m^*)$ и α — n -мерный мультииндекс такой, что $|\alpha| = 1$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$, а также $k_1 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$k^{m_3} < k_1 \leq 2k^{m_3}. \quad (1.35)$$

В силу (1.34) и (1.35) имеем $I(u, k_1) \leq b_{15} k^{m_1 m_3/(1-m_2)}$. Используя это неравенство, лемму 1.8 и соотношения (1.35), (1.32), (1.33), находим

$$\text{meas}\{|\delta^\alpha u| \geq k\} \leq b_{16} k^{-m_3 \theta}.$$

Тогда в силу леммы 1.1 $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$. Отсюда, учитывая неравенство $(q-1)m^* < q$ и применяя лемму 1.5, выводим, что $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$. Тем самым утверждение 1) леммы доказано.

Перейдем к доказательству утверждения 2) леммы. Пусть α — n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$, и $\lambda \in (0, \frac{p}{q}(q-1)m^*)$. Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$, а также $k_2 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$k^{pm_3/q} < k_2 \leq 2k^{pm_3/q}. \quad (1.36)$$

В силу (1.34) и (1.36) имеем $I(u, k_2) \leq b_{17} k^{pm_1 m_3/q(1-m_2)}$. Используя это неравенство, лемму 1.9 и соотношения (1.36), (1.32), (1.33), получаем

$$\text{meas}\{|\delta^\alpha u| \geq k\} \leq b_{18} k^{-pm_3 \theta/q}.$$

Теперь, учитывая лемму 1.1, заключаем, что $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$, и тем самым утверждение 2) леммы доказано.

Докажем утверждение 3). Пусть $\frac{p}{q}(q-1)m^* > 1$ и $\lambda \in [1, \frac{p}{q}(q-1)m^*)$. Имеем $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $\lambda \in [1, p]$. Кроме того, $2\lambda \in [1, (q-1)m^*)$, и тогда в силу установленного при доказательстве утверждения 1) для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 1$, имеем $\delta^\alpha u \in L^{2\lambda}(\Omega)$. Наконец, согласно утверждению 2) для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, имеем $\delta^\alpha u \in L^\lambda(\Omega)$. Используя теперь лемму 1.6, заключаем, что $u \in \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$. Таким образом, утверждение 3) леммы справедливо, и тем самым ее доказательство завершено.

§ 2. О суммируемости решений задачи Дирихле

Пусть $c_1, c_2 > 0$, g_1, g_2 – неотрицательные функции на Ω , $g_1, g_2 \in L^1(\Omega)$, и пусть $A_\alpha: \Omega \times \mathbb{R}^{n,2} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция Каратеодори для любого $\alpha \in \Lambda$. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi \in \mathbb{R}^{n,2}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=1} |A_\alpha(x, \xi)|^{q/(q-1)} + \sum_{|\alpha|=2} |A_\alpha(x, \xi)|^{p/(p-1)} \\ \leq c_1 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} + g_1(x), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \xi) \xi_\alpha \geq c_2 \left\{ \sum_{|\alpha|=1} |\xi_\alpha|^q + \sum_{|\alpha|=2} |\xi_\alpha|^p \right\} - g_2(x). \quad (2.2)$$

Пусть $f \in L^1(\Omega)$. Рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, \nabla_2 u) = f \quad \text{в } \Omega, \quad (2.3)$$

$$D^\alpha u = 0, \quad |\alpha| = 0, 1, \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (2.4)$$

Введем отображение: если $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, то $\delta_2 u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n,2}$, причем для любых $x \in \Omega$ и $\alpha \in \Lambda$ имеем $(\delta_2 u(x))_\alpha = \delta^\alpha u(x)$.

Заметим, что если $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in \Lambda$, то существуют конечные интегралы функций $A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha u$ и $A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi$ по множеству $\{|u - \varphi| < 2k\}$. Это вытекает из (2.1) и леммы 1.3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Энтропийным решением задачи (2.3), (2.4) будем называть функцию $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$, удовлетворяющую условию: существуют $c > 0$, $b \in (1, r)$ и $\gamma > 0$ такие, что для любых $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ и $k \in \mathbb{N}$ [1], [2]*

$$\begin{aligned} \int_{\{|u-\varphi|<2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) (\delta^\alpha u - \delta^\alpha \varphi) \right\} h'_k(u - \varphi) dx \\ \leq \int_{\Omega} f h_k(u - \varphi) dx + c[1 + \|\varphi\|_{W^{1,b}(\Omega)}]^b k^{-\gamma}. \end{aligned}$$

Положим

$$p_1 = \frac{(3n-2)p}{n+p-1}, \quad p_2 = \frac{np}{n(p-1)+1}.$$

Поскольку $p \in (1, n/2)$, имеем $p_1 \in (2p, n)$, $p_2 \in (1, n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из результатов [1], [2] следует, что если $q > p_1$ и для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$, имеет место неравенство

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} [A_\alpha(x, \xi) - A_\alpha(x, \xi')] (\xi_\alpha - \xi'_\alpha) > 0, \quad (2.5)$$

то существует единственное энтропийное решение u задачи (2.3), (2.4), причем

- 1) для любого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha(x, \delta_2 u) \in L^1(\Omega)$;
- 2) для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \delta_2 u) \delta^\alpha \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

ЛЕММА 2.1. Пусть u – энтропийное решение задачи (2.3), (2.4). Тогда существуют $c', c'' > 0$ такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$I(u, k) \leq c' \int_{\Omega} |f| |h_k(u)| dx + c''. \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу определения 2.1 существует $c > 0$ такое, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\int_{\{|u| < 2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) \delta^{\alpha} u \right\} h'_k(u) dx \leq \int_{\Omega} f h_k(u) dx + c. \quad (2.7)$$

Положим

$$c' = \frac{1}{c_2}, \quad c'' = \frac{1}{c_2} (\|g_2\|_{L^1(\Omega)} + c).$$

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Используя (2.2) и (1.5), устанавливаем, что

$$c_2 I(u, k) \leq \int_{\{|u| < 2k\}} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_{\alpha}(x, \delta_2 u) \delta^{\alpha} u \right\} h'_k(u) dx + \|g_2\|_{L^1(\Omega)}.$$

Отсюда и из неравенства (2.7) выводим (2.6). Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $(n-1)/n < \sigma < 1$ и $f[\ln(1+|f|)]^{\sigma} \in L^1(\Omega)$. Пусть u – энтропийное решение задачи (2.3), (2.4). Тогда:

- 1) $u \in \mathring{W}^{1,r}(\Omega)$;
- 2) для любого n -мерного мультииндекса α , $|\alpha| = 2$, имеем $\delta^{\alpha} u \in L^{rp/q}(\Omega)$;
- 3) если $q \geq p_2$, то $u \in \mathring{W}^{2,rp/q}(\Omega)$.

Этот результат вытекает из лемм 2.1 и 1.10.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть $p \geq 3/2 - 1/n$, и пусть выполняются условия теоремы 2.1. Тогда $u \in \mathring{W}^{1,r}(\Omega) \cap \mathring{W}^{2,rp/q}(\Omega)$.

Для доказательства этого результата достаточно воспользоваться теоремой 2.1, а затем учесть, что $q > 2p$ и в силу неравенства $p \geq 3/2 - 1/n$ справедливо неравенство $p_2 \leq 2p$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $1 \leq m < nq/(nq - n + q)$ и $f \in L^m(\Omega)$. Пусть u – энтропийное решение задачи (2.3), (2.4). Тогда:

- 1) если $\lambda \in [1, (q-1)m^*)$, то $u \in \mathring{W}^{1,\lambda}(\Omega)$;
- 2) если α – n -мерный мультииндекс, $|\alpha| = 2$, и $\lambda \in (0, \frac{p}{q}(q-1)m^*)$, то $\delta^{\alpha} u \in L^{\lambda}(\Omega)$;
- 3) если $\frac{p}{q}(q-1)m^* > 1$ и $\lambda \in [1, \frac{p}{q}(q-1)m^*)$, то $u \in \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$.

Этот результат вытекает из лемм 2.1 и 1.11.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $q > p_2$, и пусть выполняются условия теоремы 2.2. Тогда $\frac{p}{q}(q-1)t^* > 1$, и для любого $\lambda \in [1, \frac{p}{q}(q-1)t^*)$ имеем $u \in \mathring{W}^{1,2\lambda}(\Omega) \cap \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$.

Для доказательства этого следствия достаточно воспользоваться теоремой 2.2 и тем, что из $q > p_2$ вытекает неравенство $\frac{p}{q}(q-1)t^* > 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Нетрудно проверить, что если $q \leq p_2$, то $nq/(npq - np + q) \geq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Пусть $q \leq p_2$, $nq/(npq - np + q) < t < nq/(nq - n + q)$ и $f \in L^m(\Omega)$. Пусть u – энтропийное решение задачи (2.3), (2.4). Тогда $\frac{p}{q}(q-1)t^* > 1$ и для любого $\lambda \in [1, \frac{p}{q}(q-1)t^*)$ имеем $u \in \mathring{W}^{1,2\lambda}(\Omega) \cap \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$.

Этот результат вытекает из теоремы 2.2 и замечания 2.2.

В заключение приведем несколько утверждений для слабых решений задачи (2.3), (2.4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. W -решением задачи (2.3), (2.4) будем называть функцию $u \in \mathring{W}^{2,1}(\Omega)$, удовлетворяющую условиям:

- 1) для любого $\alpha \in \Lambda$ $A_\alpha(x, \nabla_2 u) \in L^1(\Omega)$;
- 2) для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha(x, \nabla_2 u) D^\alpha \varphi \right\} dx = \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Из результатов работы [2, §7, леммы 2.5, 2.6, 8.1, 8.2] и лемм 1.4, 1.6 настоящей статьи вытекает, что если $q > p_2$ и для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$, имеет место неравенство (2.5), то существуют W -решение u задачи (2.3), (2.4) и положительные постоянные c', c'' такие, что $u \in \mathring{H}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство (2.6).

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $q > p_2$ и для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$, имеет место неравенство (2.5). Пусть $(n-1)/n < \sigma < 1$ и $f[\ln(1+|f|)]^\sigma \in L^1(\Omega)$. Тогда существует W -решение u задачи (2.3), (2.4) такое, что $u \in \mathring{W}^{1,r}(\Omega) \cap \mathring{W}^{2,rp/q}(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть $q > p_2$ и для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$, $\xi \neq \xi'$, имеет место неравенство (2.5). Пусть $1 \leq t < nq/(nq - n + q)$ и $f \in L^m(\Omega)$. Тогда существует W -решение u задачи (2.3), (2.4) такое, что для любого $\lambda \in [1, \frac{p}{q}(q-1)t^*)$ справедливо включение $u \in \mathring{W}^{1,2\lambda}(\Omega) \cap \mathring{W}^{2,\lambda}(\Omega)$.

Сформулированные теоремы являются следствиями замечания 2.3 и лемм 1.10, 1.11.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Если $t \geq nq/(nq - n + q)$, $f \in L^m(\Omega)$ и для почти всех $x \in \Omega$ и любых $\xi, \xi' \in \mathbb{R}^{n,2}$ имеет место неравенство

$$\sum_{\alpha \in \Lambda} [A_\alpha(x, \xi) - A_\alpha(x, \xi')](\xi_\alpha - \xi'_\alpha) \geq 0,$$

то существует W -решение u задачи (2.3), (2.4) такое, что $u \in \overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$.

Это следует из того, что при указанных условиях функция f естественным образом порождает линейный непрерывный функционал на $\overset{\circ}{W}_{2,p}^{1,q}(\Omega)$ и рассматриваемая задача вкладывается в обычную схему теории монотонных операторов (см., например, [8]).

Список литературы

1. Kovalevsky A. Entropy solutions of Dirichlet problem for a class of nonlinear elliptic fourth order equations with L^1 -data // Nonlinear Boundary Value Problems. 1999. V. 9. P. 46–54.
2. Ковалевский А. А. Энтропийные решения задачи Дирихле для одного класса нелинейных эллиптических уравнений четвертого порядка с L^1 -правыми частями // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 2. С. 27–80.
3. Bénilan Ph., Boccardo L., Gallouët T., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J. L. An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1995. V. 22. P. 241–273.
4. Boccardo L., Gallouët T. Non-linear elliptic and parabolic equations involving measure data // J. Funct. Anal. 1989. V. 87. P. 149–169.
5. Boccardo L., Gallouët T. Nonlinear elliptic equations with right hand side measures // Comm. Partial Differential Equations. 1992. V. 17. P. 641–655.
6. Ковалевский А. А. О суммируемости решений нелинейных эллиптических уравнений с правыми частями из классов, близких к L^1 // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 3. С. 375–385.
7. Gilbarg D., Trudinger N. S. Elliptic partial differential equations of second order. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
8. Lions J. L. Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

E-mail: alexkvl@iamm.ac.donetsk.ua

Поступило в редакцию
31.I.2001