Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Вик. С. Куликов, Полугруппы разложений на множители и неприводимые компоненты пространства Гурвица, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 4, 49–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4500>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 15:29:22

УДК 512.53+512.544+512.772.5

Вик. С. Куликов

Полугруппы разложений на множители и неприводимые компоненты пространства Гурвица

Определена естественная структура полугруппы (изоморфной полугруппе разложений на множители единицы в симметрической группе) на множестве неприводимых компонент пространства Гурвица отмеченных накрытий степени d проективной прямой $\mathbb{P}^1$ с фиксированными типами ветвлений. Доказано, что эта полугруппа является конечно определенной. Исследована также проблема, когда наборы типов ветвления однозначно определяют соответствующие неприводимые компоненты пространства Гурвица. В частности, полностью описано множество неприводимых компонент пространства Гурвица трехлистных накрытий проективной прямой.

Библиография: 14 наименований.

Ключевые слова: полугруппа, разложения на множители элемента группы, неприводимые компоненты пространства Гурвица.

Введение

Обычно, чтобы исследовать пространство Гурвица $\text{HUR}_d(\mathbb{P}^1)$ накрытий проективной прямой $\mathbb{P}^1 := \mathbb{CP}^1$ степени d , используется следующий подход. Фиксируются группа Галуа G накрытий, число b точек ветвления и типы локальных монодромий ветвления (т.е. фиксируются наборы, состоящие из b классов сопряженности элементов группы G), и после этого множество наборов, состоящих из представителей этих классов сопряженности, исследуется с точностью до так называемых преобразований Гурвица (см., например, [1]–[9]). Существует несколько других проблем (например, описать множество плоских алгебраических кривых с точностью до эквисингулярной деформации, или, более общо, описать множество плоских псевдоголоморфных кривых с точностью до симплектической деформации, описать множество симплектических пучков Лефшеца с точностью до диффеоморфизмов), в которых также возникают аналогичные объекты, а именно конечные наборы, состоящие из элементов некоторых групп и рассматриваемые с точностью до преобразований Гурвица (см., например, [10]–[12]). (В случае плоских алгебраических и псевдоголоморфных кривых, чтобы получить такие наборы, выбирается пучок прямых (псевдопрямых), задающий расслоение над проективной прямой $\mathbb{P}^1$.) Как было показано в [13], на множествах таких наборов, рассматриваемых с точностью до преобразований Гурвица, имеются естественные структуры полугрупп, а именно

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 11-01-00185), Программы Президента РФ “Поддержка ведущих научных школ” (грант НШ-4713.2010.1) и Лаборатории алгебраической геометрии ГУ-ВШЭ по гранту Правительства РФ (договор № 11.G34.31.0023).

так называемые полугруппы разложений на множители в группах. Более того, если мы рассматриваем такие расслоения не только над всей проективной прямой $\mathbb{P}^1$, но и над дисками $D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$, то эти структуры полугрупп имеют естественное геометрическое значение (см. [13]).

В § 1 приведены основные определения и исследованы свойства полугрупп разложений на множители в конечных группах. В частности, доказано, что полугруппы разложений на множители единицы являются конечно определенными. Здесь мы также исследуем проблему: когда элемент полугруппы разложений на множители однозначно определяется своим типом и произведением?

В § 2 более детально исследуются полугруппы разложений на множители в симметрических группах $\mathcal{S}_d$. Здесь мы доказываем теорему о стабилизации и полностью описываем полугруппу разложений на множители единицы в группе $\mathcal{S}_3$.

В § 3 мы определяем естественную структуру полугруппы (а именно, полугруппы разложений на множители единицы в симметрической группе) на множестве неприводимых компонент пространства Гурвица отмеченных накрытий степени d проективной прямой $\mathbb{P}^1$ с фиксированным множеством типов ветвлений и показываем, что эта структура индуцирует полугрупповую структуру на множестве неприводимых компонент пространства Гурвица HUR_d^G накрытий Галуа проективной прямой $\mathbb{P}^1$ с группой Галуа G , не имеющей внешних автоморфизмов. Кроме того, результаты, полученные в § 1, 2, применяются к решению вопроса о том, когда неприводимые компоненты пространства $\text{HUR}_d(\mathbb{P}^1)$ однозначно определяются наборами типов локальных монодромий накрытий.

§ 1. Полугруппы над группами

1.1. Полугруппы разложений на множители. Набор (S, G, α, λ) , состоящий из полугруппы S , группы G и гомоморфизмов $\alpha: S \rightarrow G$, $\lambda: G \rightarrow \text{Aut}(S)$, называется *полугруппой S над группой G* , если для всех $s_1, s_2 \in S$ выполнены равенства

$$s_1 \cdot s_2 = \rho(\alpha(s_1))(s_2) \cdot s_1 = s_2 \cdot \lambda(\alpha(s_2))(s_1),$$

где $\rho(g) = \lambda(g^{-1})$.

Пусть $(S_1, G_1, \alpha_1, \lambda_1)$ и $(S_2, G_2, \alpha_2, \lambda_2)$ – полугруппы соответственно над группами G_1 и G_2 . Пара (h_1, h_2) гомоморфизмов $h_1: S_1 \rightarrow S_2$ и $h_2: G_1 \rightarrow G_2$ называется *гомоморфизмом полугрупп над группами*, если:

- (i) $h_2 \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ h_1$;
- (ii) $\lambda_2(h_2(g))(\lambda_1(s)) = \lambda_1(\lambda_1(g))(s)$ для всех $s \in S_1$ и всех $g \in G_1$.

Определенные ниже *полугруппы разложений на множители* являются основными (для наших целей) примерами полугрупп над группами.

Пусть $O \subset G$ – инвариантное относительно действия внутренними автоморфизмами подмножество группы G . Назовем пару (G, O) *оснащенной группой*. Сопоставим множеству O алфавит $X = X_O = \{x_g \mid g \in O\}$ и для каждой пары букв $x_{g_1}, x_{g_2} \in X$, $g_1 \neq g_2$, обозначим через $R_{g_1, g_2; l}$ и $R_{g_1, g_2; r}$ следующие соотношения: $R_{g_1, g_2; l}$ – это соотношение вида

$$x_{g_1} \cdot x_{g_2} = x_{g_2} \cdot x_{g_2^{-1} g_1 g_2}, \quad (1.1)$$

если $g_2 \neq \mathbf{1}$, и вида $x_{g_1} \cdot x_{\mathbf{1}} = x_{g_1}$, если $g_2 = \mathbf{1}$, а $R_{g_1, g_2; r}$ – это соотношение вида

$$x_{g_1} \cdot x_{g_2} = x_{g_1 g_2 g_1^{-1}} \cdot x_{g_1}, \quad (1.2)$$

если $g_1 \neq \mathbf{1}$, и вида $x_{\mathbf{1}} \cdot x_{g_2} = x_{g_2}$, если $g_1 = \mathbf{1}$.

Положим

$$\mathcal{R} = \{R_{g_1, g_2; r}, R_{g_1, g_2; l} \mid (g_1, g_2) \in O \times O, g_1 \neq g_2\}.$$

С помощью множества соотношений $\mathcal{R}$ определим полугруппу

$$S(G, O) = \langle x_g \in X \mid R \in \mathcal{R} \rangle$$

и назовем ее *полугруппой разложений на множители* элементов из G с множителями из O .

Определим также гомоморфизм $\alpha: S(G, O) \rightarrow G$, заданный на порождающих элементах $x_g \in X$ формулой $\alpha(x_g) = g$, и назовем его *гомоморфизмом произведения*.

Кроме того, определим действие λ группы G на множестве X следующим образом:

$$x_a \in X \mapsto \lambda(g)(x_a) = x_{g^{-1}ag} \in X.$$

Легко видеть, что множество соотношений $\mathcal{R}$ инвариантно относительно действия λ . Поэтому действие λ определяет гомоморфизм $\lambda: G \rightarrow \text{Aut}(S(G, O))$ (*действие сопряжениями*). Действие $\lambda(g)$ на $S(G, O)$ называется *одновременным сопряжением* на элемент g . Положим $\lambda_S = \lambda \circ \alpha$ и $\rho_S = \rho \circ \alpha$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1 [11]. *Для всех $s_1, s_2 \in S(G, O)$ имеем*

$$s_1 \cdot s_2 = s_2 \cdot \lambda_S(s_2)(s_1) = \rho_S(s_1)(s_2) \cdot s_1.$$

Из утверждения 1.1 следует, что $(S(G, O), G, \alpha, \lambda)$ является полугруппой над группой G . Если группа G фиксирована, то полугруппа $S(G, O)$ будет обозначаться S_O . Элемент полугруппы S_O , заданный словом $x_{g_1} \dots x_{g_n}$, будет обозначаться через $x_{g_1} \cdot \dots \cdot x_{g_n}$.

Отметим, что сопоставление $S: (G, O) \mapsto (S(G, O), G, \alpha, \lambda)$ является функтором из категории оснащенных групп в категорию полугрупп над группами. В частности, если $O_1 \subset O_2$ – два подмножества группы G , инвариантные относительно внутренних автоморфизмов группы G , то тождественное отображение $\text{id}: G \rightarrow G$ определяет вложение $\text{id}_{O_1, O_2}: S(G, O_1) \rightarrow S(G, O_2)$. Таким образом, для каждой группы G полугруппа $S_G = S(G, G)$ является *универсальной полугруппой разложений на множители* в группе G , т.е. каждая полугруппа S_O над группой G канонически вкладывается в S_G с помощью отображения $\text{id}_{O, G}$.

Пусть Γ – подгруппа группы G . Обозначим $S_{O, \Gamma} = \{s \in S_O \mid \alpha(s) \in \Gamma\}$. Очевидно, что $S_{O, \Gamma}$ является подполугруппой полугруппы S_O и если Γ является нормальным делителем группы G , то $S_{O, \Gamma}$ является полугруппой над группой G . В частности, подполугруппа $S_{O, \mathbf{1}}$ (здесь $\Gamma = \{\mathbf{1}\}$) является важным примером таких подполугрупп.

Группа G действует на себе самой внутренними автоморфизмами, т.е. для любой группы G определен естественный гомоморфизм $h: G \rightarrow \text{Aut}(G)$ (действие образа $h(g) = a$ элемента g на G задается формулой $(g_1)a = g^{-1}g_1g$ для

всех $g_1 \in G$). Легко видеть, что гомоморфизм h определяет на S_G структуру полугруппы над группой $A = \text{Aut}(G)$, где гомоморфизм $\alpha_A: S_G \rightarrow \text{Aut}(G)$ – это композиция $h \circ \alpha$, а элемент $a \in \text{Aut}(G)$ действует на S_G по правилу $x_g \mapsto x_{(g)a}$. Легко видеть, что подполугруппа $S_{G,1}$ является инвариантной относительно действия группы $\text{Aut}(G)$ на S_G . Следовательно, полугруппа $S_{G,1}$ также может быть рассмотрена как полугруппа над группой $\text{Aut}(G)$.

Сопоставим каждому элементу $s = x_{g_1} \cdot \dots \cdot x_{g_n} \in S_O$, $g_i \neq 1$, число $\ln(s) = n$ – длину элемента s . Легко видеть, что $\ln: S_O \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \geq 0\}$ является гомоморфизмом полугрупп.

Для каждого элемента $s = x_{g_1} \cdot \dots \cdot x_{g_n} \in S_O$ обозначим через G_s подгруппу группы G , порожденную образами $\alpha(x_{g_1}) = g_1, \dots, \alpha(x_{g_n}) = g_n$ множителей $x_{g_1}, \dots, x_{g_n}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.2. *Полугруппа G_s группы G корректно определена, т. е. ее определение не зависит от представления элемента s в виде произведения порождающих элементов $x_{g_i} \in X_O$.*

Доказательства утверждения 1.2 и следующего предложения являются очень простыми и потому не приводятся.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 [11]. *Пусть (G, O) – оснащенная группа, и пусть $s \in S_O$. Имеем:*

- 1) $\ker \lambda$ совпадает с централизатором C_O группы G_O в группе G ;
- 2) если $\alpha(s)$ принадлежит центру $Z(G_s)$ группы G_s , то для каждого $g \in G_s$ действие $\lambda(g)$ оставляет неподвижным элемент $s \in S_O$;
- 3) если $\alpha(s \cdot x_g)$ принадлежит центру $Z(G_{s \cdot x_g})$ группы $G_{s \cdot x_g}$, то $s \cdot x_g = x_g \cdot s$;
- 4) если $\alpha(s) = 1$, то $s \cdot s' = s' \cdot s$ для любого $s' \in S_G$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.3. *Для каждой оснащенной группы (G, O) полугруппа $S_{O,1}$ содержится в центре полугруппы S_G и, в частности, является коммутативной полугруппой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из предложения 1.1, 4).

Легко видеть, что если порядок элемента $g \in O$ равен n , то $x_g^n \in S_{O,1}$.

ЛЕММА 1.1. *Пусть $s \in S_{O,1}$, и пусть $s_1 \in S_O$ – такой элемент, что $G_{s_1} = G_O$. Тогда имеет место равенство*

$$s \cdot s_1 = \lambda(g)(s) \cdot s_1 \quad (1.3)$$

для всех $g \in G_O$. В частности, если $C \subset O$ – некоторый класс сопряженности элементов порядка n_C , а элемент $s \in S_O$ таков, что $G_s = G$, то для любых $g_1, g_2 \in C$ имеем

$$x_{g_1}^{n_C} \cdot s = x_{g_2}^{n_C} \cdot s. \quad (1.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (1.4) доказано в [5]. Доказательство равенства (1.3) аналогично.

Для каждой подгруппы H группы G положим

$$S_O^H = S(G, O)^H = \{s \in S(G, O) \mid G_s = H\}$$

и $S_{O,1}^H = S_{O,1} \cap S_O^H$. Тогда легко видеть, что полугруппа S_O^H (соответственно, $S_{O,1}^H$) изоморфна полугруппе $S(H, H \cap O)^H$ (соответственно, полугруппе $S(H, H \cap O)_1^H$), причем изоморфизм индуцирован вложением $H \hookrightarrow G$.

1.2. C -группы, ассоциированные с оснащенными группами, и гомоморфизм типа. Пусть (G, O) – оснащенная группа такая, что $1 \notin O$, и пусть множество O состоит из объединения m классов сопряженности: $O = C_1 \cup \dots \cup C_m$.

Группа $\widehat{G}_O$, порожденная алфавитом $Y_O = \{y_g \mid g \in O\}$ (так называемые C -порождающие), элементы которого связаны соотношениями

$$y_{g_1} y_{g_2} = y_{g_2} y_{g_2^{-1} g_1 g_2} = y_{g_1 g_2 g_1^{-1}} y_{g_1}, \quad y_{g_1}, y_{g_2} \in Y_O, \quad (1.5)$$

называется C -группой, ассоциированной с оснащенной группой (G, O) . Очевидно, что отображения $x_g \mapsto y_g$ и $y_g \mapsto g$ определяют два гомоморфизма $\beta: S(G, O) \rightarrow \widehat{G}_O$ и $\gamma: \widehat{G}_O \rightarrow G$ таких, что $\alpha = \gamma \circ \beta$. Элементы, принадлежащие $\text{Im } \beta$, называются *положительными* элементами группы $\widehat{G}_O$.

C -группа $\widehat{G}_O$, ассоциированная с оснащенной группой (G, O) , имеет аналогичные свойства, что и полугруппа S_O . Например, как и в случае полугрупп разложений на множители, легко проверить, что для произвольных $\hat{g} \in \widehat{G}_O$ и $g_1 \in O$ соотношение

$$\hat{g}^{-1} y_{g_1} \hat{g} = y_{g^{-1} g_1 g} \quad (1.6)$$

является следствием соотношений (1.5), где $g = \gamma(\hat{g})$.

Обозначим через $\widehat{O}$ подмножество $\{y_g \mid g \in O\}$ группы $\widehat{G}_O$. Из соотношений (1.5), (1.6) следует, что $\widehat{O}$ является инвариантным множеством относительно действия группы $\widehat{G}_O$ на себе внутренними автоморфизмами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.4. Пусть (G, O) – оснащенная группа. Тогда полугруппы $S(G, O)$ и $S(\widehat{G}_O, \widehat{O})$ естественным образом изоморфны друг другу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что согласно соотношениям (1.5), (1.6) отображение $\xi: S(\widehat{G}_O, \widehat{O}) \rightarrow S(G, O)$, заданное формулой $\xi(x_{y_g}) = x_g$ для $g \in O$, индуцирует изоморфизм полугрупп.

Следующее предложение является непосредственным следствием соотношений (1.5), (1.6) (см., например, [14]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Для любой оснащенной полугруппы (G, O) имеет место равенство

$$Z(\widehat{G}_O) = \gamma^{-1}(Z(G_O)),$$

где $Z(G_O)$ и $Z(\widehat{G}_O)$ – центры соответственно групп G_O и $\widehat{G}_O$.

Легко видеть, что первая группа гомологий $H_1(\widehat{G}_O, \mathbb{Z}) = \widehat{G}_O / [\widehat{G}_O, \widehat{G}_O]$ группы $\widehat{G}_O$ является свободной абелевой группой ранга m . Пусть $\text{ab}: \widehat{G}_O \rightarrow H_1(\widehat{G}_O, \mathbb{Z})$ – естественный эпиморфизм. Группа $H_1(\widehat{G}_O, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^m$ порождается элементами $\text{ab}(y_{g_i}) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где $g_i \in C_i$ (1 стоит на i -м месте).

Гомоморфизм полугрупп $\tau = \text{ab} \circ \beta: S(G, O) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^m \subset \mathbb{Z}^m$ называется *гомоморфизмом типа*, а образ $\tau(s)$ элемента $s \in S(G, O)$ называется *типом*

элемента s . Если O состоит только из одного класса сопряженности, то гомоморфизм τ совпадает с гомоморфизмом $\ln: S(G, O) \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (поэтому в данном случае мы будем отождествлять эти гомоморфизмы).

ЛЕММА 1.2. *Любой элемент $\hat{g}$ C -группы $\hat{G}_O$, ассоциированной с оснащенной группой (G, O) , может быть представлен в виде*

$$\hat{g} = \hat{g}_1 \hat{g}_2^{-1}, \quad (1.7)$$

где $\hat{g}_1, \hat{g}_2$ – некоторые положительные элементы. В частности, $\hat{g} \in \hat{G}'_O = [\hat{G}_O, \hat{G}_O]$ тогда и только тогда, когда $\text{ab}(\hat{g}_1) = \text{ab}(\hat{g}_2)$ для элементов $\hat{g}_1$ и $\hat{g}_2$, участвующих в представлении (1.7) элемента $\hat{g}$ в виде отношения двух положительных элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим элемент $\hat{g}$ в виде $\hat{g} = y_{g_{i_1}}^{\varepsilon_1} \dots y_{g_{i_k}}^{\varepsilon_k}$, где $g_{i_j} \in O$ и $\varepsilon_j = \pm 1$. Чтобы доказать лемму, достаточно заметить, что согласно соотношениям (1.5) имеет место равенство $y_{g_2}^{-1} y_{g_1} = y_{g_2^{-1} g_1 g_2} y_{g_2}^{-1}$ для любых $g_1, g_2 \in O$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.5. *Пусть (G, O) – оснащенная конечная группа. Гомоморфизм $\beta: S_O \rightarrow \hat{G}_O$ является вложением тогда и только тогда, когда $O \subset Z(G_O)$, т. е. когда G_O является абелевой группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $O = C_1 \cup \dots \cup C_m$ – разложение в объединение классов сопряженности. Легко видеть, что если $O \subset Z(G_O)$, то $\hat{G}_O \simeq \mathbb{Z}^{|O|}$, где изоморфизм индуцирован гомоморфизмом ab , и в этом случае полугруппа S_O может быть отождествлена с полугруппой $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{|O|} \subset \mathbb{Z}^{|O|}$.

Если $O \not\subset Z(G_O)$, то существует класс сопряженности $C_i \subset O$, состоящий по крайней мере из двух элементов, скажем g_1 и g_2 . Пусть n – их порядок в группе G . Тогда легко видеть, что $x_{g_1}^n \neq x_{g_2}^n$ в полугруппе S_O . С другой стороны, их образы $y_{g_1}^n = \beta(x_{g_1}^n)$ и $y_{g_2}^n = \beta(x_{g_2}^n)$ совпадают в $\hat{G}_O$. Действительно, не ограничивая общности, мы можем считать, что найдется такой элемент $g \in G_O$, что $g_2 = g^{-1} g_1 g$. Рассмотрим элемент $\hat{g} \in \gamma^{-1}(g)$. Имеем

$$\hat{g}^{-1} y_{g_1}^n \hat{g} = (\hat{g}^{-1} y_{g_1} \hat{g})^n = y_{g^{-1} g_1 g}^n = y_{g_2}^n,$$

но согласно предложению 1.2 элементы $y_{g_1}^n$ и $y_{g_2}^n$ принадлежат центру $Z(\hat{G}_O)$. Следовательно, $y_{g_1}^n = y_{g_2}^n$.

1.3. Эквивалентность Гурвица. Как и выше, пусть O – подмножество группы G , инвариантное относительно внутренних автоморфизмов группы G . Рассмотрим множество

$$O^n = \{(g_1, \dots, g_n) \mid g_i \in O\}$$

всех упорядоченных n -наборов элементов из O , и пусть Br_n – группа кос с n нитями. Зафиксируем множество $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ так называемых *стандартных* (или *артиновых*) *порождающих* группы Br_n , т. е. порождающих группу Br_n элементов, связанных соотношениями

$$\begin{aligned} a_i a_{i+1} a_i &= a_{i+1} a_i a_{i+1}, & 1 \leq i \leq n-1, \\ a_i a_k &= a_k a_i, & |i-k| \geq 2. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Группа $B\Gamma_n$ действует на O^n следующим образом:

$$((g_1, \dots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_n))a_i = (g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1} g_i^{-1}, g_i, g_{i+2}, \dots, g_n).$$

Обычно эти действия стандартных порождающих $a_i \in B\Gamma_n$ и их обратных на множестве O^n называются *преобразованиями Гурвица*. Два элемента из O^n называются *гурвиц-эквивалентными*, если один из них может быть преобразован в другой с помощью конечной последовательности преобразований Гурвица, т.е. если они принадлежат одной и той же орбите действия группы $B\Gamma_n$.

На множестве O^n определено естественное отображение $\alpha: O^n \rightarrow G$ (*отображение произведения*), заданное формулой

$$\alpha((g_1, \dots, g_n)) = g_1 \dots g_n,$$

и элемент $(g_1, \dots, g_n) \in O^n$ называется *разложением на множители элемента* $g = \alpha((g_1, \dots, g_n)) \in G$ с *множителями* из O .

Также имеется естественное отображение $\varphi: O^n \rightarrow S(G, O)$, переводящее $(g_1, \dots, g_n)$ в $s = x_{g_1} \cdot \dots \cdot x_{g_n}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.6. Два разложения на множители $y, z \in O^n$ гурвиц-эквивалентны тогда и только тогда, когда $\varphi(y) = \varphi(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Ниже в соответствии с утверждением 1.6 мы будем отождествлять классы гурвиц-эквивалентных разложений на множители из O с их образами в полугруппе $S(G, O)$.

Определим также *действие* группы G сопряжениями на множестве O^n :

$$\lambda(g)((g_1, \dots, g_n)) = (g^{-1}g_1g, \dots, g^{-1}g_ng).$$

Очевидно, что это действие совпадает при отображении φ с определенным выше действием λ группы G на $S(G, O)$.

Обозначим через $W = W(O)$ множество всех слов алфавита $X = X_{O \setminus \{1\}}$ и через W_n его подмножество, состоящее из слов длины n . В дальнейшем мы будем отождествлять элементы множества O^n с элементами из W_n (отождествление: $(g_1, \dots, g_n) \in O^n \leftrightarrow x_{g_1} \dots x_{g_n} \in W_n$). Положим

$$W(s) = \{w \in W \mid \varphi(w) = s \in S(G, O)\}.$$

1.4. Неперфорированные подполугруппы полугруппы $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$. Ниже нам понадобятся некоторые факты о подполугруппах в полугруппе $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$.

Подполугруппа S полугруппы $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ называется *неперфорированной*, если для каждого элемента $\mathbf{a} \in S$ и любого $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ имеем $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in S$. Заметим, что если S_1 и S_2 – неперфорированные подполугруппы, то $S_1 \cup S_2$ и $S_1 \cap S_2$ также являются неперфорированными подполугруппами. Элемент $\mathbf{a}$ неперфорированной подполугруппы S называется *вершиной* подполугруппы S , если не существует элементов $\mathbf{b} \in S$ и $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m \setminus \{0\}$ таких, что $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Обозначим через $O(S)$ множество всех вершин неперфорированной подполугруппы S . Неперфорированная подполугруппа S с единственной вершиной называется *простой*. Легко видеть, что если $\mathbf{a}$ – вершина простой неперфорированной подполугруппы S , то

$$S = F_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m \mid \mathbf{b} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m\}.$$

Очевидно, что любая неперфорированная подполугруппа S может быть представлена в виде объединения простых неперфорированных подполугрупп, например

$$S = \bigcup_{\mathbf{a} \in S} F_{\mathbf{a}}.$$

Пусть A – некоторое подмножество в S , и пусть S представлена в виде объединения простых неперфорированных подполугрупп:

$$S = \bigcup_{\mathbf{a} \in A} F_{\mathbf{a}}. \quad (1.9)$$

Скажем, что представление (1.9) является *минимальным*, если

$$S \neq \bigcup_{\mathbf{a} \in A \setminus \{\mathbf{a}_0\}} F_{\mathbf{a}}$$

для всех $\mathbf{a}_0 \in A$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.7. *Для неперфорированной подполугруппы $S \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ существует единственное минимальное представление в виде объединения простых неперфорированных подполугрупп, а именно*

$$S = \bigcup_{\mathbf{a} \in O(S)} F_{\mathbf{a}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения вершин следует, что если $S = \bigcup F_{\mathbf{a}_i}$ – представление в виде объединения простых неперфорированных подполугрупп и $\mathbf{a}$ – вершина подполугруппы S , то $\mathbf{a} = \mathbf{a}_i$ для некоторого i .

Предположим, что множество

$$C = S \setminus \bigcup_{\mathbf{a} \in O(S)} F_{\mathbf{a}}$$

не пусто, тогда существует элемент $\mathbf{c}_0 = (c_{1,0}, \dots, c_{m,0}) \in C$ такой, что $c_{m,0} = \min c_m$ для $(c_1, \dots, c_m) \in C$, $c_{m-1,0} = \min c_{m-1}$ для $(c_1, \dots, c_{m-1}, c_{m,0}) \in C$, $\dots$, $c_{1,0} = \min c_1$ для $(c_1, c_{2,0}, \dots, c_{m,0}) \in C$. Очевидно, что $\mathbf{c}_0$ является вершиной подполугруппы S .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Каждая возрастающая последовательность неперфорированных подполугрупп полугруппы $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$*

$$S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots$$

такая, что $S_i \neq S_{i+1}$, является конечной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае $m = 1$ предложение является очевидным. Применим индукцию по m . Рассмотрим возрастающую последовательность неперфорированных подполугрупп $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \dots \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$, $m \geq 2$. Обозначим $P_j = \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m \mid z_m = j\}$, и пусть $S_{i,j} = S_i \cap P_j$. Тогда $S_{i,j}$ также могут быть рассмотрены как неперфорированные подполугруппы полугруппы $\mathbb{Z}_{\geq 0}^{m-1}$ (если мы “забудем” о последней координате). По предположению индукции

возрастающие последовательности $S_{1,j} \subset S_{2,j} \subset S_{3,j} \subset \dots$ должны стабилизироваться при каждом j . Обозначим через $\bar{S}_j = S_{i(j),j}$ первые наибольшие подполугруппы в этих последовательностях.

Рассмотрим отображение $\text{sh}: \mathbb{Z}_{\geq 0}^m \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$, заданное формулой

$$\text{sh}((z_1, \dots, z_{m-1}, z_m)) = (z_1, \dots, z_{m-1}, z_m + 1).$$

Из определения неперфорированных подполугрупп следует, что $\text{sh}: S_{i,j} \rightarrow S_{i,j+1}$ является вложением. Следовательно, мы можем (и будем) отождествлять подполугруппы $S_{i,j}$ с подполугруппами $\text{sh}^n(S_{i,j})$ подполугрупп $S_{i,j+n}$. Кроме того, из определения неперфорированных подполугрупп также следует, что если $j_1 < j_2$, то $\bar{S}_{j_1} = S_{i(j_1),j_1} \subset \bar{S}_{j_2} = S_{i(j_2),j_2}$. В результате мы получаем возрастающую последовательность неперфорированных подполугрупп

$$S_{i(0),0} \subset S_{i(1),1} \subset S_{i(2),2} \subset \dots \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^{m-1}.$$

Она должна стабилизироваться. Легко видеть, что если $S_{i(j_0),j_0}$ – наибольшая подполугруппа, то $S_{i(j_0)} = S_{i(j_0)+1} = S_{i(j_0)+2} = \dots$.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Множество вершин $O(S)$ неперфорированной подполугруппы $S \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ непусто и конечно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если множество $O(S) = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots\}$ является бесконечным, то согласно утверждению 1.7 мы будем иметь бесконечную возрастающую последовательность

$$F_{\mathbf{a}_1} \subset F_{\mathbf{a}_1} \cup F_{\mathbf{a}_2} \subset F_{\mathbf{a}_1} \cup F_{\mathbf{a}_2} \cup F_{\mathbf{a}_3} \subset \dots,$$

что противоречит предложению 1.3.

1.5. Конечная определенность некоторых подполугрупп подполугруппы $S(G, O)$. Пусть (G, O) – конечная оснащенная группа. Согласно определению подполугруппа S_O является конечно определенной. С геометрической точки зрения наиболее интересными подполугруппами подполугруппы S_G являются подполугруппы $S_{O,1}$ и $S_{O,1}^G = \{s \in S_{O,1} \mid G_s = G\}$. (Отметим, что подполугруппа $S_{O,1}^G$ не пуста тогда и только тогда, когда $G_O = G$.) В этом пункте мы покажем, что подполугруппы $S_{O,1}$ являются конечно определенными, но для подполугрупп $S_{O,1}^G$ свойство быть конечно представленными (и, более того, быть конечно порожденными) не является обязательным.

Пусть $N = |G|$ – порядок группы G и $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}$ – множество классов сопряженности в G таких, что $O = \coprod C_i$. Для класса сопряженности $C \in \mathcal{C}$ обозначим через $n_C = n_g$ порядок элемента $g \in C$. В каждом классе $C \in \mathcal{C}$ выберем и зафиксируем элемент $g_C \in C$.

Очевидно, что необходимым условием для подполугруппы S подполугруппы S_O быть конечно порожденной является следующее условие: образ $\tau(S)$ является конечно порожденной подполугруппой, где $\tau: S_O \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ – гомоморфизм типа.

ТЕОРЕМА 1.1. *Подполугруппа разложений на множители $S_{O,1}$ над конечной группой G является конечно определенной подполугруппой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $O = C_1 \cup \dots \cup C_m$ – разложение в объединение классов сопряженности, и пусть $1 \notin O$. Перенумеруем элементы множества $O = \{g_1, \dots, g_K\}$ таким образом, что $g_i = g_{C_i}$ при $i = 1, \dots, m$.

Для любого $g \in O$ имеем $s_g = x_g^{n_g} \in S_{O,1}$. Обозначим через $F = \{s_1, \dots, s_M\}$ множество элементов полугруппы $S_{O,1}$, длина которых не превосходит K^N , где $N = |G|$, и предположим также, что $s_i = s_{g_i} = x_{g_i}^{n_{g_i}}$ при $i \leq K$. Покажем, что элементы $s_1, \dots, s_M \in F$ порождают полугруппу $S_{O,1}$.

ЛЕММА 1.3. *Элемент $s \in S_{O,1}$ длины $\ln(s) > K^N$ может быть записан в виде*

$$s = s_{i_1}^{n_1} \cdot \dots \cdot s_{i_l}^{n_l} \cdot \bar{s},$$

где $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq K$ и элемент $\bar{s} \in S_{O,1}$ имеет длину $\ln(\bar{s}) \leq K^N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\ln(s) > K^N$, то в представлении элемента s в виде произведения $x_{g_1} \cdot \dots \cdot x_{g_{\ln(s)}}$ имеется по крайней мере N совпадающих множителей x_g для некоторого $g \in O$. Поскольку $n_g \leq N$, то, передвигая n_g из этих множителей влево (с помощью соотношений (1.1)), мы получим, что $s = s_g \cdot s'$, где $s' \in S_{O,1}$ такой, что $\ln(s') < \ln(s)$.

Из леммы 1.3 следует, что $S_{O,1}$ порождается элементами $s \in S_{O,1}$ длины $\ln(s) \leq K^N$, т. е. $S_{O,1}$ является конечно порожденной полугруппой.

Чтобы показать, что полугруппа $S_{O,1}$ конечно определена, разделим на части множество всех соотношений следующим образом. Первое множество R_1 состоит из соотношений вида

$$s_i \cdot s_j = s_j \cdot s_i, \quad s_i, s_j \in F.$$

Обозначим через $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_M)$ упорядоченный набор неотрицательных целых чисел и положим $s_{\mathbf{k}} = s_1^{k_1} \cdot \dots \cdot s_M^{k_M}$. Поскольку множество соотношений R_1 уже определено, мы можем считать, что все остальные соотношения в $S_{O,1}$, связывающие порождающие элементы $s_1, \dots, s_M$, имеют следующий вид:

$$s_{\mathbf{k}_1} = s_{\mathbf{k}_2}. \quad (1.10)$$

Заметим, что если мы имеем соотношение вида (1.10), то $G_{s_{\mathbf{k}_1}} = G_{s_{\mathbf{k}_2}}$ и $\tau(s_{\mathbf{k}_1}) = \tau(s_{\mathbf{k}_2})$.

Рассмотрим множество $\bar{R}_2$, состоящее из всех соотношений вида (1.10), для которых группы $G_{s_{\mathbf{k}_1}}$ являются собственными подгруппами в G . По индукции мы можем считать, что полугруппы $S(\Gamma, \bar{O})_1$ являются конечно представимыми для всех оснащенных групп $(\Gamma, \bar{O})$, порядок которых меньше N . Поскольку в группе G имеется лишь конечное число различных собственных подгрупп и вложения $(G_{s_{\mathbf{k}_1}}, O \cap G_{s_{\mathbf{k}_1}}) \hookrightarrow (G, O)$ определяют вложения $S(G_{s_{\mathbf{k}_1}}, O \cap G_{s_{\mathbf{k}_1}})_1 \hookrightarrow S_{O,1}$, отсюда вытекает, что имеется конечное множество соотношений $R_2 \subset \bar{R}_2$ таких, что все соотношения $\bar{R}_2$ являются следствиями соотношений из $R_1 \cup R_2$.

Обозначим через R_3 множество всех соотношений в $S_{O,1}$ вида $s_{\mathbf{k}_1} = s_{\mathbf{k}_2}$, которые не содержатся в $R_1 \cup R_2$ и являются такими, что $\ln(s_{\mathbf{k}_1}) \leq K^N$. Очевидно, R_3 является конечным множеством.

Для каждого элемента s_i из множества порождающих элементов полугруппы $S_{O,1}$ с номером $i \geq K+1$ положим

$$n_i = \min_n \{ \ln(s_i^n) > K^N \} - 1.$$

Следующая лемма является следствием леммы 1.3.

ЛЕММА 1.4. Для любого $i \geq K+1$ элемент $s_i^{n_i+1}$ может быть записан в виде

$$s_i^{n_i+1} = \left(\prod_{j=1}^K s_j^{a_j} \right) \cdot s_l, \quad (1.11)$$

где $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_K)$ – набор неотрицательных целых чисел и $s_l \in F$ – некоторый порождающий элемент с номером $l \geq K+1$.

Обозначим через R_4 множество всех соотношений вида (1.11). Это конечное множество. Согласно лемме 1.4, применив соотношения из $R_1 \cup R_4$, каждый элемент $s \in S_{O,1}$ мы можем записать в виде $s = s_{\mathbf{k}}$, где набор $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_M)$ удовлетворяет условию $k_i \leq n_i$ для $i \geq K+1$.

Элемент $s_{\mathbf{k}}$ называется Γ -примитивным, если в наборе $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_M)$ все $k_i \leq 1$ при $i \leq K$, $k_i \leq n_i$ при $i \geq K+1$ и $G_{s_{\mathbf{k}}} = \Gamma$. По лемме 1.1 для каждого G -примитивного элемента $s_{\mathbf{k}}$ имеют место следующие соотношения в $S_{O,1}$:

$$s_i \cdot s_{\mathbf{k}} = s_j \cdot s_{\mathbf{k}},$$

где $i \leq m$ и $j \leq K$ таковы, что $g_j \in C_i$. Обозначим через R_5 множество всех таких соотношений. Очевидно, R_5 является конечным множеством.

Пусть $s \in S_{O,1}$ – элемент, группа которого $G_s = G$. Применив соотношения из R_5 , как и выше, легко показать, что s может быть записан в виде

$$s = \left(\prod_{j=1}^m s_j^{a_j} \right) \cdot s_{\mathbf{k}}, \quad (1.12)$$

где $s_{\mathbf{k}}$ – некоторый G -примитивный элемент. Обозначим через $\bar{R}_6$ множество всех соотношений в $S_{O,1}$ вида

$$\left(\prod_{j=1}^m s_j^{b_{j,1}} \right) \cdot s_{\mathbf{k}_1} = \left(\prod_{j=1}^m s_j^{b_{j,2}} \right) \cdot s_{\mathbf{k}_2}, \quad (1.13)$$

где $s_{\mathbf{k}_1}$ и $s_{\mathbf{k}_2}$ – G -примитивные элементы.

Чтобы завершить доказательство теоремы, достаточно показать, что все соотношения из множества $\bar{R}_6$ являются следствиями из конечного множества соотношений R_6 . Поскольку существует только конечное число G -примитивных элементов, для этого достаточно показать, что для фиксированных G -примитивных элементов $s_{\mathbf{k}_1}$ и $s_{\mathbf{k}_2}$ соотношения вида (1.13) являются следствиями некоторого конечного множества соотношений.

Заметим, что если мы имеем соотношение вида (1.13), то

$$(b_{1,1}n_{C_1}, \dots, b_{m,1}n_{C_m}) + \tau(s_{\mathbf{k}_1}) = (b_{1,2}n_{C_1}, \dots, b_{m,2}n_{C_m}) + \tau(s_{\mathbf{k}_2}).$$

Следовательно, если $\tau(s_{\mathbf{k}_j}) = (\alpha_{1,j}, \dots, \alpha_{m,j})$, то $\alpha_{i,1} \equiv \alpha_{i,2} \pmod{n_{C_i}}$ при всех i . Положим $a_{i,1,0} = b_{i,1} - b_{i,2}$, если $\alpha_{i,2} \geq \alpha_{i,1}$, и $a_{i,1,0} = 0$ в противном случае. Соответственно, положим $a_{i,2,0} = b_{i,2} - b_{i,1}$, если $\alpha_{i,1} \geq \alpha_{i,2}$, и $a_{i,2,0} = 0$ в противном случае. Имеем

$$n_{C_i} a_{i,1,0} + \alpha_{i,1} = n_{C_i} a_{i,2,0} + \alpha_{i,2},$$

и числа $a_{i,1,0}$, $a_{i,2,0}$ определены однозначно числами $\alpha_{i,1}$, $\alpha_{i,2}$ и n_{C_i} . Более того, если мы обозначим $a_{i,j} = b_{i,j} - a_{i,j,0}$, то $a_{i,1} = a_{i,2} \geq 0$ для $i = 1, \dots, m$ и каждое соотношение вида (1.13) может быть записано следующим образом:

$$\left(\prod_{j=1}^m s_j^{a_j} \right) \cdot \left(\prod_{j=1}^m s_j^{a_{j,1,0}} \right) \cdot s_{\mathbf{k}_1} = \left(\prod_{j=1}^m s_j^{a_j} \right) \cdot \left(\prod_{j=1}^m s_j^{a_{j,2,0}} \right) \cdot s_{\mathbf{k}_2}, \quad (1.14)$$

где $a_j = a_{j,1} = a_{j,2}$.

Если (1.14) является соотношением в полугруппе $S_{O,1}$, то

$$\left(\prod_{j=1}^m s_j^{a_j+b_j} \right) \cdot \left(\prod_{j=1}^m s_j^{a_{j,1,0}} \right) \cdot s_{\mathbf{k}_1} = \left(\prod_{j=1}^m s_j^{a_j+b_j} \right) \cdot \left(\prod_{j=1}^m s_j^{a_{j,2,0}} \right) \cdot s_{\mathbf{k}_2}$$

также является соотношением для каждого набора $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ и оно является следствием соотношения (1.14).

Из изложенного выше следует, что множество экспонент $\{(a_1, \dots, a_m)\}$, входящих в соотношения вида (1.14) при фиксированных $s_{\mathbf{k}_1}$ и $s_{\mathbf{k}_2}$, образует неперфорированную подполугруппу $F_{s_{\mathbf{k}_1}, s_{\mathbf{k}_2}}$ в полугруппе $\mathbb{Z}_{\geq 0}^m$. Согласно следствию 1.1 множество $O(F_{s_{\mathbf{k}_1}, s_{\mathbf{k}_2}})$ его вершин конечно. Легко видеть, что соотношения вида (1.14) при фиксированных $s_{\mathbf{k}_1}$ и $s_{\mathbf{k}_2}$ являются следствиями соотношений, соответствующих вершинам подполугруппы $F_{s_{\mathbf{k}_1}, s_{\mathbf{k}_2}}$, и так как имеется только конечное множество G -примитивных элементов, то мы получаем, что соотношения из множества $\bar{R}_6$ являются следствиями некоторого конечного подмножества соотношений $R_6 \subset \bar{R}_6$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно заметить, что все соотношения являются следствиями соотношений, принадлежащих конечному множеству $R_1 \cup \dots \cup R_6$. Теорема доказана.

Отметим, что не любая подполугруппа $S_{O,1}^G$ полугруппы S_G является конечно порожденной. Например, группа $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ порождается двумя элементами, скажем g_1 и g_2 . Если $O = \{g_1, g_2\}$, то $S_{O,1}^G$ изоморфна полугруппе

$$S = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 \mid a_1 > 0, a_2 > 0\},$$

которая не является конечно порожденной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Пусть (G, O) – конечная оснащенная группа. Предположим, что O является объединением классов сопряженности: $O = C_1 \cup \dots \cup C_m$, таким, что для каждого i элементы, принадлежащие классу C_i , порождают всю группу G . Тогда подполугруппа $S_{O,1}^G$ полугруппы S_G является конечно определенной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем те же обозначения, что и в доказательстве теоремы 1.1. Рассмотрим элемент

$$s_{C_i} = \prod_{g_l \in C_i} x_{g_l}^{n_{C_i}} = \prod_{g_l \in C_i} s_l.$$

Имеем $s_{C_i} \in S_{O,1}^G$, так как элементы $g_l \in C_i$ порождают группу G .

Как было показано в доказательстве теоремы 1.1, любой элемент $s \in S_{O,1}^G$ может быть записан в виде (1.12):

$$s = \left(\prod_{i=1}^m s_i^{a_i} \right) \cdot s_{\mathbf{k}},$$

где $s_{\mathbf{k}}$ – некоторый G -примитивный элемент полугруппы $S_{O,1}^G$. Если $a_i \geq |C_i|$, то согласно лемме 1.1

$$s_i^{a_i} \cdot s_{\mathbf{k}} = s_{C_i} \cdot s_i^{a_i - |C_i|} \cdot s_{\mathbf{k}}.$$

Следовательно, любой элемент $s \in S_{O,1}^G$ может быть записан в виде

$$s = \left(\prod_{i=1}^m s_{C_i}^{b_i} \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^m s_i^{a_i} \right) \cdot s_{\mathbf{k}}, \quad (1.15)$$

где $(b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k$ и $0 \leq a_i < |C_i|$, а $s_{\mathbf{k}}$ – некоторый G -примитивный элемент. Отсюда следует, что $S_{O,1}^G$ порождается элементами

$$\left(\prod_{i=1}^m s_i^{a_i} \right) \cdot s_{\mathbf{k}},$$

где $0 \leq a_i < |C_i|$, а $s_{\mathbf{k}}$ – некоторый G -примитивный элемент, и элементами s_{C_i} , $i = 1, \dots, m$. Очевидно, что это множество порождающих элементов является конечным. Чтобы доказать конечную определенность полугруппы $S_{O,1}^G$, заметим, что все соотношения между этими порождающими элементами являются следствиями соотношений коммутирования и множества соотношений, которое в доказательстве теоремы 1.1 обозначено через $\bar{R}_6$. Поэтому конец доказательства предложения совпадает с соответствующей частью доказательства теоремы 1.1.

1.6. Стабилизирующие элементы. Если G – конечная абелева группа, то очевидно, что гомоморфизм типа $\tau: S_G \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^{|G|-1}$ является изоморфизмом. Если G не является абелевой группой и $c(G)$ – число классов сопряженности ее элементов $g \neq 1$, то гомоморфизм типа $\tau: S_G \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^{c(G)}$ является сюръективным, но не инъективным гомоморфизмом и одна из основных проблем состоит в описании прообразов $\tau^{-1}(\mathbf{a})$ элементов $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{c(G)}$ (в частности, описании множества элементов $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{c(G)}$, для которых каждый элемент $s \in \tau^{-1}(\mathbf{a})$ однозначно определяется своим значением $\alpha(s) \in G$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. Пусть полугруппа $S_{O,1}^G$ такая же, как и в предложении 1.4. Тогда существует константа $c = c(G, O)$ такая, что для любого $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ число $|\tau^{-1}(\mathbf{a})|$ прообразов элемента $\mathbf{a}$ при гомоморфизме $\tau: S_{O,1}^G \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$ меньше c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве предложения 1.4 было показано, что каждый элемент $s \in S_{O,1}^G$ может быть записан в виде (1.15). Поэтому предложение следует из того, что число различных выражений вида (1.15), имеющих одинаковый тип, является конечным и ограничено некоторой константой c , не зависящей от типов этих выражений.

Отметим, что предложение 1.5 становится не верным, если мы рассмотрим полугруппу $S_{O,1}$ вместо полугруппы $S_{O,1}^G$ (см., например, следствие 2.4).

Элемент $s \in S(G, O)$ называется *стабилизирующим*, если $s \cdot s_1 = s \cdot s_2$ для любых $s_1, s_2 \in S(G, O)$ таких, что $\tau(s_1) = \tau(s_2)$ и $\alpha(s_1) = \alpha(s_2)$. Полугруппа $S(G, O)$ называется *стабильной*, если она обладает стабилизирующим элементом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.8. *Если s – является стабилизирующим элементом полугруппы $S(G, O)$, то для любого $s_1 \in S(G, O)$ элемент $s \cdot s_1$ также является стабилизирующим. В частности, если $S(G, O)$ – стабильная полугруппа, то существует стабилизирующий элемент $s \in S(G, O)$ такой, что $\alpha(s) = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Теорема Конвея–Паркера (см. приложение в [5]) дает некоторое достаточное условие для того, чтобы полугруппа S_G была стабильной. Чтобы сформулировать эту теорему, напомним, что *накрывающей группой Шура* R конечной группы G называется группа максимального порядка, обладающая свойством: R имеет подгруппу $M \subset R' \cap Z(R)$ такую, что $R/M \simeq G$, где $R' = [R, R]$ – коммутант и $Z(R)$ – центр группы R . Такая группа R существует всегда (но не обязательно, что такая группа единственна). Группа M изоморфна мультипликатору Шура $M(G) = H^2(G, \mathbb{C}^*)$ группы G . Говорят, что мультипликатор Шура $M(G)$ порождается коммутаторами, если $M \cap \{g^{-1}h^{-1}gh \mid g, h \in R\}$ порождает группу M .

ТЕОРЕМА 1.2 (Дж. Х. Конвей, Р. А. Паркер [5]). *Пусть G – конечная группа, $O = G \setminus 1 = C_i \cup \dots \cup C_m$ – разложение в объединение классов сопряженности. Обозначим*

$$\bar{s} = \prod_{g \in G \setminus \{1\}} x_g^{n_g} \in S_G,$$

где n_g – порядок элемента g в группе G . Предположим, что мультипликатор Шура $M(G)$ группы G порождается коммутаторами. Тогда существует константа $n = n(G)$ такая, что $\bar{s}^n$ является стабилизирующим элементом полугруппы S_G .

Отметим, что накрывающая группа Шура G конечной группы H удовлетворяет условиям теоремы Конвея–Паркера (см. [5]).

В следующем параграфе мы докажем, что полугруппа разложений на множители S_{S_d} симметрической группы S_d также является стабильной. С другой стороны, имеется много конечных оснащенных групп (G, O) , для которых полугруппы $S(G, O)$ не являются стабильными.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. *Пусть $(H, \tilde{O})$ – конечная оснащенная группа такая, что:*

- (i) элементы из $\tilde{O}$ порождают группу H ;
- (ii) $H' \cap Z(H) \neq 1$;
- (iii) $\tilde{g}_1 \tilde{g}_2^{-1} \notin Z(H) \setminus \{1\}$ для всех $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2 \in \tilde{O}$.

Пусть $f: H \rightarrow H/Z(H) = G$ – естественный эпиморфизм, и пусть $O = f(\tilde{O}) \subset G$. Тогда существуют по крайней мере два элемента $s_1, s_2 \in S_{O,1}^G$ таких, что $\tau(s \cdot s_1) = \tau(s \cdot s_2)$, но $s \cdot s_1 \neq s \cdot s_2$ для всех $s \in S_{O,1}^G$. В частности, если $\tilde{O}$ состоит только из одного класса сопряженности группы H , то существует константа $N \in \mathbb{N}$ такая, что для любого $t \in \tau(S_{O,1}^G) \cap \mathbb{Z}_{\geq N}$ существуют по крайней мере два элемента $s_1, s_2 \in S_{O,1}^G$ таких, что $\tau(s_1) = \tau(s_2) = t$, но $s_1 \neq s_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условию (i) элементы из O порождают группу G . Из условия (iii) следует, что сюръективное отображение $f|_{\tilde{O}}: \tilde{O} \rightarrow O$ является биекцией, и если мы обозначим $g_i = f(\tilde{g}_i)$ для $\tilde{g}_i \in \tilde{O}$, то равенство $g_i^{-1} g_j g_i = g_k$ выполнено в группе G для некоторых $g_i, g_j, g_k \in O$ тогда и только тогда, когда равенство $\tilde{g}_i^{-1} \tilde{g}_j \tilde{g}_i = \tilde{g}_k$ выполнено в H . Следовательно, индуцированный гомоморфизм $f_*: S_{\tilde{O}} \rightarrow S_O$ (отображающий порождающие элементы $x_{\tilde{g}_i}$ полугруппы $S_{\tilde{O}}$ в порождающие элементы x_{g_i} полугруппы S_O) является изоморфизмом полугрупп. В частности, ограничение отображения f_* на $S_{\tilde{O},Z(H)}^H = \{\tilde{s} \in S_{\tilde{O}}^H \mid \alpha(\tilde{s}) \in Z(H)\}$ дает изоморфизм между $S_{\tilde{O},Z(H)}^H$ и $S_{O,1}^G$. Кроме того, гомоморфизм f индуцирует сюръективный гомоморфизм $f_*: \hat{H}_{\tilde{O}} \rightarrow \hat{G}_O$ C -групп, ассоциированных с оснащенными группами $(H, \tilde{O})$ и (G, O) (f_* отображает порождающие элементы $y_{\tilde{g}_i}$ группы $\hat{H}_{\tilde{O}}$ в порождающие элементы y_{g_i} группы $\hat{G}_O$), такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} S_{\tilde{O}} & \xrightarrow{\beta} & \hat{H}_{\tilde{O}} & \xrightarrow{\gamma} & H \\ f_* \downarrow \simeq & & \downarrow f_* & & \downarrow f \\ S_O & \xrightarrow{\beta} & \hat{G}_O & \xrightarrow{\gamma} & G \end{array}$$

является коммутативной и, кроме того, индуцированный гомоморфизм

$$f_{**}: H_1(\hat{H}_{\tilde{O}}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\hat{G}_O, \mathbb{Z})$$

является изоморфизмом, совместимым с изоморфизмом $f_*: S_{\tilde{O}} \rightarrow S_O$ (т.е. если $s = f_*(\tilde{s})$, то $\tau(s) = f_{**}(\tau(\tilde{s}))$). Следовательно, чтобы доказать первую часть предложения, достаточно показать, что существуют два элемента $\tilde{s}_1, \tilde{s}_2 \in S_{\tilde{O},Z(H)}^H$ таких, что $\tau(\tilde{s}_1) = \tau(\tilde{s}_2)$, но $\alpha(\tilde{s}_1) \neq \alpha(\tilde{s}_2)$. Действительно, для таких двух элементов имеем $\tau(\tilde{s} \cdot \tilde{s}_1) = \tau(\tilde{s} \cdot \tilde{s}_2)$, но $\alpha(\tilde{s} \cdot \tilde{s}_1) \neq \alpha(\tilde{s} \cdot \tilde{s}_2)$ для всех $\tilde{s} \in S_{\tilde{O},Z(H)}^H$. Следовательно, ввиду изоморфизма $f_*: S_{\tilde{O},Z(H)}^H \xrightarrow{\simeq} S_{O,1}^G$ элементы $s_1 = f_*(\tilde{s}_1)$ и $s_2 = f_*(\tilde{s}_2)$ не равны друг другу в полугруппе $S_{O,1}^G$, но $\tau(s \cdot s_1) = \tau(s \cdot s_2)$ и $s \cdot s_1 \neq s \cdot s_2$ для всех элементов $s \in S_{O,1}^G$.

Из предложения 1.2 следует, что для любой подгруппы $\hat{H}_1$ группы $\hat{H}_{\tilde{O}}$ имеем

$$\gamma(\hat{H}_1 \cap Z(\hat{H}_{\tilde{O}})) = \gamma(\hat{H}_1) \cap Z(H),$$

в частности

$$\gamma(\hat{H}'_{\tilde{O}} \cap Z(\hat{H}_{\tilde{O}})) = H' \cap Z(H).$$

Поэтому согласно условию (ii) найдется элемент $\hat{h} \in \hat{H}'_{\tilde{O}} \cap Z(\hat{H}_{\tilde{O}}) \setminus \{1\}$. Согласно лемме 1.2 имеем $\hat{h} = \hat{h}_1 \hat{h}_2^{-1}$, где $\hat{h}_1 = \beta(\hat{s}_1)$ и $\hat{h}_2 = \beta(\hat{s}_2)$ для некоторых $\hat{s}_1, \hat{s}_2 \in S_{\tilde{O}}$ (т.е. $\hat{h}_1$ и $\hat{h}_2$ – положительные элементы). Поскольку $\hat{h} \in \hat{H}'_{\tilde{O}}$, то $\text{ab}(\hat{h}_1) = \text{ab}(\hat{h}_2)$.

Каждый элемент конечной группы H может быть записан в виде некоторого положительного слова, состоящего из порождающих элементов. Следовательно, согласно условию (i) существуют $\hat{s} \in S_{\tilde{O}}$ и положительный элемент $\hat{g} = \beta(\hat{s}) \in \hat{H}_{\tilde{O}}$ такие, что $\gamma(\hat{g}) = \gamma(\hat{h}_2^{-1})$. Обозначим $\hat{s}_0 = \prod_{\tilde{g}_i \in \tilde{O}} x_{\tilde{g}_i}^{n_i} \in S_{\tilde{O},1}^H$, где n_i – порядок элемента $\tilde{g}_i$. Тогда $\tilde{s}_1 = \hat{s}_0 \cdot \hat{s} \cdot \hat{s}_1$ и $\tilde{s}_2 = \hat{s}_0 \cdot \hat{s} \cdot \hat{s}_2$ являются искомыми элементами.

Чтобы доказать вторую часть предложения, выберем элементы $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n$, порождающие полугруппу $S_{O,1}^G$ (согласно предложению 1.4 полугруппа $S_{O,1}^G$ является конечно порожденной в случае, когда O состоит из одного класса сопряженности), и пусть s_1, s_2 – два элемента, существование которых доказано в первой части доказательства. Обозначим $t_0 = \tau(s_1) = \tau(s_2)$ и $t_i = \tau(\bar{s}_i)$ при $i = 1, \dots, n$, и пусть $\text{НОД}(t_1, \dots, t_n) = d$, $t_i = a_i d$. Тогда тип $\tau(s)$ любого элемента полугруппы $S_{O,1}^G$ делится на d . Покажем, что существует константа $M \in \mathbb{N}$ такая, что для любого $j \in \mathbb{N}$ найдется элемент $s \in S_{O,1}^G$, тип которого есть $\tau(s) = (M + j)d$. Действительно, найдутся числа $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$\sum_{i=1}^n q_i a_i = 1. \quad (1.16)$$

После, быть может, перенумерации элементов $\bar{s}_i$ мы можем предполагать, что $q_i = -p_i < 0$ при $i \leq k$ и $q_i \geq 0$ при $i \geq k+1$. Положим $M = a_1 d \sum_{i=1}^k a_i p_i$ и для $j = 0, 1, \dots, a_1$ рассмотрим элементы

$$s_{0,j} = \left(\prod_{i=1}^k \bar{s}_i^{(a_1-j)p_i} \right) \cdot \left(\prod_{i=k+1}^n \bar{s}_i^{j q_i} \right) \in S_{O,1}^G.$$

Имеем

$$\tau(s_{0,j}) = d a_1 \sum_{i=1}^k p_i a_i + d j \left(- \sum_{i=1}^k a_i p_i + \sum_{i=k+1}^n a_i q_i \right) = d(M + j)$$

для $0 \leq j \leq a_1$. Поэтому $\tau(\bar{s}_1^m \cdot s_{0,j}) = d(m a_1 + M + j)$. Поскольку

$$\{d(m a_1 + M + j) \mid m \geq 0, 0 \leq j \leq a_1\} = d\mathbb{N}_{\geq M},$$

отсюда легко видеть, что M удовлетворяет условию: для любого $j \in \mathbb{N}$ найдется элемент $s \in S_{O,1}^G$, тип которого есть $\tau(s) = (M + j)d$.

Для завершения доказательства предложения осталось заметить, что $N = M + t_0 = M + \tau(s_1)$ является искомой константой.

Несложно дать примеры групп H , удовлетворяющих условиям предложения 1.6. Например, пусть $H = \mathrm{SL}_{p-1}(\mathbb{Z}_p)$ – группа $((p-1) \times (p-1))$ -матриц с определителем 1 над конечным полем $\mathbb{Z}_p$, $p \neq 2$. Хорошо известно, что $H' = H$, а центр $Z(H)$, состоящий из скалярных матриц, является циклической группой порядка $p-1$. Для $i \neq j$ обозначим через $e_{i,j}$ матрицу, все элементы которой равны нулю, за исключением одного, равного единице и стоящего на пересечении i -й строки и j -го столбца. Положим $t_{i,j} = e + e_{i,j}$, где e – единичная матрица. Хорошо известно, что матрицы $t_{i,j}$ (так называемые трансвекции) сопряжены друг другу и порождают группу $H = \mathrm{SL}_{p-1}(\mathbb{Z}_p)$. Следовательно, для оснащенной группы (G, O) , где $G = \mathrm{PGL}_{p-1}(\mathbb{Z}_p)$ и O – множество трансвекций, почти все элементы полугруппы $S_{O,1}^G$ не определяются однозначно своим типом, другими словами, $S_{O,1}^G$ (соответственно, S_O) не является стабильной полугруппой.

§ 2. Полугруппы разложений на множители в симметрической группе

2.1. Основные обозначения и определения. Пусть $\mathcal{S}_d$ – симметрическая группа, действующая на множестве $\{1, \dots, d\} = I_d$. Напомним, что элемент $\sigma = (i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{S}_d$, отображающий i_1 в i_2 , i_2 в i_3 , ..., i_{k-1} в i_k , i_k в i_1 и оставляющий не месте все остальные элементы множества I_d , называется *циклической перестановкой длины k* . Циклическая перестановка длины 2 называется *транспозицией*. Любая циклическая перестановка $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ является произведением $k-1$ транспозиций:

$$\sigma = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \dots (i_{k-1}, i_k). \quad (2.1)$$

Разложение (2.1) циклической перестановки $\sigma = (i_1, \dots, i_k)$ называется *каноническим*, если $i_1 = \min_{1 \leq j \leq k} i_j$.

Как известно, любая перестановка $\sigma \in \mathcal{S}_d$, $\sigma \neq 1$, может быть представлена в виде произведения циклических перестановок:

$$\sigma = (i_{1,1}, \dots, i_{k_1,1})(i_{1,2}, \dots, i_{k_2,2}) \dots (i_{1,m}, \dots, i_{k_m,m}), \quad (2.2)$$

где $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m \geq 2$ и при $j_1 \neq j_2$ любые два множества $\{i_{1,j_1}, \dots, i_{k_{j_1},j_1}\}$ и $\{i_{1,j_2}, \dots, i_{k_{j_2},j_2}\}$ имеют пустое пересечение. Если перестановка σ записана в виде (2.2), то упорядоченный набор $t(\sigma) = [k_1, \dots, k_m]$ называется *типом* перестановки σ , а число $l_t(\sigma) = \sum_{i=1}^m k_i - m$ называется ее *транспозиционной длиной*.

Отметим, что для любых $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m \geq 2$ таких, что $\sum k_j \leq d$, существует перестановка σ , тип которой есть $[k_1, \dots, k_m]$, и, как хорошо известно, две перестановки σ_1 и σ_2 сопряжены в $\mathcal{S}_d$ тогда и только тогда, когда $t(\sigma_1) = t(\sigma_2)$. Для фиксированного типа $t(\sigma) = [k_1, \dots, k_m]$ перестановка

$$(1, \dots, k_1)(k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2) \dots \left(\sum_{i=1}^{m-1} k_i + 1, \dots, \sum_{i=1}^m k_i \right)$$

называется *каноническим представителем* типа $t(\sigma)$. Скажем, что $\min t(\sigma_1) = [k_{1,1}, \dots, k_{m_1,1}]$ больше, чем $\min t(\sigma_2) = [k_{1,2}, \dots, k_{m_2,2}]$, если существует $l \geq 0$

такое, что $k_{1,i} = k_{2,i}$ при $i \leq l$ и $k_{1,l+1} > k_{2,l+1}$ (здесь $k_{j,i} = 0$, если $i > m_j$). Скажем, что *циклическая перестановка* $\sigma_1 = (j_1, \dots, j_{k_1})$ *больше, чем циклическая перестановка* $\sigma_2 = (l_1, \dots, l_{k_2})$, если $t(\sigma_1) \geq t(\sigma_2)$, причем если $t(\sigma_1) = t(\sigma_2)$, то найдется $r < k_1 = k_2$ такое, что $j_1 = l_1, \dots, j_r = l_r$ и $j_{r+1} > l_{r+1}$ в канонических представлениях перестановок σ_1 и σ_2 . Наконец, скажем, что *перестановка* σ_1 *больше, чем перестановка* σ_2 , если $t(\sigma_1) \geq t(\sigma_2)$, причем если $t(\sigma_1) = t(\sigma_2)$ и $\sigma_i = \sigma_{i,1} \dots \sigma_{i,m}$, $i = 1, 2$, – разложения в произведения циклических перестановок, то найдется l такое, что $\sigma_{1,j} = \sigma_{2,j}$ при $j < l$ и $\sigma_{1,l} > \sigma_{2,l}$. Обозначим через $\mathcal{T} = \{t_1 < t_2 < \dots < t_N\}$ множество всех типов перестановок $\sigma \in \mathcal{S}_d$.

Согласно определению полугруппа разложений на множители $\Sigma_d = S(\mathcal{S}_d, \mathcal{S}_d)$ в симметрической группе $\mathcal{S}_d$ порождается алфавитом $X = \{x_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{S}_d\}$. Пусть $s = x_{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_n}$ – элемент полугруппы Σ_d . Применив соотношения (1.1) и (1.2), мы можем считать, что $t(\sigma_1) \leq \dots \leq t(\sigma_n)$, и в этом случае сумма $\tau(s) = \sum_{i=1}^N a_i t_i$ является *типом* элемента s , где a_i – число множителей x_{σ_j} , входящих в s , для которых $t(\sigma_j) = t_i$.

Для подгруппы Γ симметрической группы $\mathcal{S}_d$ обозначим $\Sigma_{d,\Gamma} = \{s \in \Sigma_d \mid \alpha(s) \in \Gamma\}$ и $\Sigma_d^\Gamma = \{s \in \Sigma_d \mid (\mathcal{S}_d)_s = \Gamma\}$.

Если $J \subset I_d$ – подмножество множества I_d , $|J| = d_1 \leq d$, то вложение $J \subset I_d$ определяет вложение $\mathcal{S}_{d_1} \subset \mathcal{S}_d$ и вложение $\psi_J: \Sigma_{d_1} \hookrightarrow \Sigma_d$.

2.2. Разложения в произведения транспозиций. Обозначим через T_d множество транспозиций группы $\mathcal{S}_d$. Подполугруппа S_{T_d} полугруппы Σ_d порождается элементами $x_{(i,j)}$, $1 \leq i, j \leq d$, $i \neq j$, связанными соотношениями

$$\begin{aligned} x_{(i,j)} &= x_{(j,i)} & \forall \{i, j\}_{\text{ord}} \subset I_d, \\ x_{(i_1, i_2)} \cdot x_{(i_1, i_3)} &= x_{(i_2, i_3)} \cdot x_{(i_1, i_2)} = x_{(i_1, i_3)} \cdot x_{(i_2, i_3)} & \forall \{i_1, i_2, i_3\}_{\text{ord}} \subset I_d, \\ x_{(i_1, i_2)} \cdot x_{(i_3, i_4)} &= x_{(i_3, i_4)} \cdot x_{(i_1, i_2)} & \forall \{i_1, i_2, i_3, i_4\}_{\text{ord}} \subset I_d \end{aligned} \quad (2.3)$$

(здесь $\{i_1, \dots, i_k\}_{\text{ord}}$ – подмножество множества I_d , состоящее из k упорядоченных элементов; таким образом, для любого подмножества $\{i_1, \dots, i_k\}$ множества I_d мы имеем $k!$ упорядоченных подмножеств $\{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_k)\}_{\text{ord}}$, $\sigma \in \mathcal{S}_k$).

Обозначим $S_{T_d,1} = S_{T_d} \cap \Sigma_{d,1}$. Согласно предложению 1.1, 4) полугруппа $\Sigma_{d,1}$ является подполугруппой центра полугруппы Σ_d . В частности, это коммутативная полугруппа.

Легко видеть, что для каждого подмножества $\{i, j\} \subset I_d$ элемент $s_{(i,j)} = x_{i,j} \cdot x_{i,j} = x_{(i,j)}^2$ принадлежит полугруппе $S_{T_d,1}$. Элемент

$$h_{d,g} = s_{(1,2)}^{g+1} \cdot s_{(2,3)} \cdot \dots \cdot s_{(d-1,d)} \in S_{T_d,1} \subset \Sigma_d$$

называется *элементом Гурвица рода g* .

ЛЕММА 2.1. *Для любого упорядоченного подмножества $\{j_1, \dots, j_{k+1}\}_{\text{ord}} \subset I_d$ и любого i , $1 \leq i \leq k$, элемент*

$$s = x_{(j_1, j_2)} \cdot x_{(j_2, j_3)} \cdot \dots \cdot x_{(j_{k-1}, j_k)} \cdot x_{(j_i, j_{k+1})} \in S_{T_d}$$

равен элементу

$$s_i = x_{(j_1, j_2)} \cdot \dots \cdot x_{(j_{i-1}, j_i)} \cdot x_{(j_i, j_{k+1})} \cdot x_{(j_{k+1}, j_{i+1})} \cdot x_{(j_{i+1}, j_{i+2})} \cdot \dots \cdot x_{(j_{k-1}, j_k)} \cdot$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно соотношениям (2.3) имеем (на каждом шаге преобразований подчеркивание означает, что будем преобразовывать подчеркнутые множители, а результат преобразования записывать в скобках)

$$\begin{aligned}
 s &= x_{(j_1, j_2)} \cdot x_{(j_2, j_3)} \cdot \dots \cdot \underline{x_{(j_{i+1}, j_{i+2})}} \cdot \dots \cdot x_{(j_{k-1}, j_k)} \cdot x_{(j_i, j_{k+1})} \\
 &= x_{(j_1, j_2)} \cdot \dots \cdot \underline{x_{(j_i, j_{i+1})}} \cdot (x_{(j_i, j_{k+1})} \cdot x_{(j_{i+1}, j_{i+2})} \cdot \dots \cdot x_{(j_{k-1}, j_k)}) \\
 &= x_{(j_1, j_2)} \cdot \dots \cdot x_{(j_{i-1}, j_i)} \cdot (\underline{x_{(j_{i+1}, j_{k+1})}} \cdot x_{(j_i, j_{i+1})}) \cdot \dots \cdot x_{(j_{k-1}, j_k)} \\
 &= x_{(j_1, j_2)} \cdot \dots \cdot x_{(j_{i-1}, j_i)} \cdot (x_{(j_i, j_{k+1})} \cdot x_{(j_{k+1}, j_{i+1})}) \cdot x_{(j_{i+1}, j_{i+2})} \cdot \dots \cdot x_{(j_{k-1}, j_k)}.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Для любого упорядоченного подмножества $\{j_1, \dots, j_k\}_{\text{ord}} \subset I_d$ и для любого $i, 1 \leq i \leq k$, элемент $s = x_{(j_1, j_2)} \cdot x_{(j_2, j_3)} \cdot \dots \cdot x_{(j_{k-1}, j_k)} \cdot x_{(j_i, j_k)} \in S_{T_d}$, где $k \leq d-1$, равен элементу

$$s_i = x_{(j_1, j_2)} \cdot \dots \cdot x_{(j_{i-1}, j_i)} \cdot x_{(j_{i+1}, j_{i+2})} \cdot \dots \cdot x_{(j_{k-1}, j_k)} \cdot x_{(j_i, j_{i+1})}^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно соотношениям (2.3) имеем

$$\begin{aligned}
 s &= x_{(j_1, j_2)} \cdot x_{(j_2, j_3)} \cdot \dots \cdot \underline{x_{(j_{k-1}, j_k)}} \cdot x_{(j_i, j_k)} \\
 &= x_{(j_1, j_2)} \cdot x_{(j_2, j_3)} \cdot \dots \cdot \underline{x_{(j_{k-2}, j_{k-1})}} \cdot (x_{(j_i, j_{k-1})} \cdot x_{(j_{k-1}, j_k)}) = \dots \\
 &\dots = x_{(j_1, j_2)} \cdot \dots \cdot x_{(j_{i-1}, j_i)} \cdot x_{(j_i, j_{i+1})} \cdot (x_{(j_i, j_{i+1})} \cdot x_{(j_{i+1}, j_{i+2})}) \cdot \dots \cdot x_{(j_{k-1}, j_k)} \\
 &= x_{(j_1, j_2)} \cdot \dots \cdot x_{(j_{i-1}, j_i)} \cdot \underline{x_{(j_i, j_{i+1})}^2} \cdot x_{(j_{i+1}, j_{i+2})} \cdot \dots \cdot x_{(j_{k-1}, j_k)} \\
 &= x_{(j_1, j_2)} \cdot \dots \cdot x_{(j_{i-1}, j_i)} \cdot (x_{(j_{i+1}, j_{i+2})} \cdot \underline{x_{(j_i, j_{i+1})}^2}) \cdot x_{(j_{i+2}, j_{i+3})} \cdot \dots \cdot x_{(j_{k-1}, j_k)} = \dots \\
 &\dots = x_{(j_1, j_2)} \cdot \dots \cdot x_{(j_{i-1}, j_i)} \cdot x_{(j_{i+1}, j_{i+2})} \cdot \dots \cdot (x_{(j_{k-1}, j_k)} \cdot \underline{x_{(j_i, j_{i+1})}^2}) = s_i.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. Равенства

$$x_{(i_1, i_2)}^2 \cdot x_{(i_2, i_3)} = x_{(i_2, i_3)} \cdot x_{(i_1, i_3)}^2 = x_{(i_1, i_3)}^2 \cdot x_{(i_2, i_3)} = x_{(i_2, i_3)} \cdot x_{(i_1, i_2)}^2, \quad (2.4)$$

$$x_{(i_1, i_2)}^2 \cdot x_{(i_2, i_3)}^2 = x_{(i_1, i_2)}^2 \cdot x_{(i_1, i_3)}^2 = x_{(i_2, i_3)}^2 \cdot x_{(i_1, i_3)}^2 \quad (2.5)$$

выполнены для всех упорядоченных троек $\{i_1, i_2, i_3\}_{\text{ord}} \subset I_d$, а равенства

$$x_{(i_1, i_2)}^2 \cdot x_{(i_3, i_4)}^2 = x_{(i_3, i_4)}^2 \cdot x_{(i_1, i_2)}^2 \quad (2.6)$$

выполнены для всех упорядоченных четверок $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}_{\text{ord}} \subset I_d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы проверим только два из трех равенств (2.4), так как проверка остальных равенств аналогична. Согласно соотношениям (2.3) имеем

$$\begin{aligned}
 x_{(i_1, i_2)}^2 \cdot x_{(i_2, i_3)} &= x_{(i_1, i_2)} \cdot \underline{x_{(i_1, i_2)}} \cdot x_{(i_2, i_3)} = \underline{x_{(i_1, i_2)}} \cdot (x_{(i_2, i_3)} \cdot x_{(i_1, i_3)}) \\
 &= (x_{(i_2, i_3)} \cdot x_{(i_1, i_3)}) \cdot x_{(i_1, i_2)} = x_{(i_2, i_3)} \cdot x_{(i_1, i_3)}^2.
 \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
 x_{(i_1, i_2)}^2 \cdot x_{(i_2, i_3)} &= x_{(i_1, i_2)} \cdot \underline{x_{(i_1, i_2)}} \cdot x_{(i_2, i_3)} = \underline{x_{(i_1, i_2)}} \cdot (x_{(i_1, i_3)} \cdot x_{(i_1, i_2)}) \\
 &= (x_{(i_2, i_3)} \cdot x_{(i_1, i_2)}) \cdot x_{(i_1, i_2)} = x_{(i_2, i_3)} \cdot x_{(i_1, i_2)}^2.
 \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следующая лемма является непосредственным следствием леммы 2.3.

ЛЕММА 2.4. Для любого упорядоченного подмножества $\{j_1, \dots, j_{k+1}\}_{\text{ord}} \subset I_d$ и любого $i, 1 \leq i \leq k$, элемент $s_i = x_{(j_1, j_2)} \cdot x_{(j_2, j_3)} \cdot \dots \cdot x_{(j_{k-1}, j_k)} \cdot x_{(j_i, j_{k+1})}^2 \in S_{T_d}$ равен элементу $s_1 = x_{(j_1, j_2)} \cdot x_{(j_2, j_3)} \cdot \dots \cdot x_{(j_{k-1}, j_k)} \cdot x_{(j_1, j_{k+1})}^2$.

Следующая лемма является частным случаем леммы 1.1.

ЛЕММА 2.5. Для любого упорядоченного подмножества $\{j_1, \dots, j_k\}_{\text{ord}} \subset I_d$ выполнено равенство

$$x_{(j_1, j_2)}^2 \cdot x_{(j_1, j_2)} \cdot x_{(j_2, j_3)} \cdot \dots \cdot x_{(j_{k-1}, j_k)} = x_{(j_i, j_l)}^2 \cdot x_{(j_1, j_2)} \cdot x_{(j_2, j_3)} \cdot \dots \cdot x_{(j_{k-1}, j_k)},$$

где $1 \leq i < l \leq k$.

Сопоставим каждому слову $w(\overline{x(i, j)}) = x_{(i_1, j_1)} \dots x_{(i_m, j_m)} \in W = W(T_d)$ граф $\tilde{\Gamma}_w$, состоящий из d вершин $v_i, 1 \leq i \leq d$, множество ребер которого находится во взаимно однозначном соответствии с набором букв, входящих в слово w , причем две вершины v_i и v_j соединены ребром, если буква $x_{(i, j)}$ содержится в w ; в частности, число ребер, соединяющих вершины v_i и v_j , равно числу вхождений буквы $x_{(i, j)}$ в w . Ребра графа $\tilde{\Gamma}_w$ перенумерованы в соответствии с положением соответствующей буквы в слове w . Обозначим через V_{iso} множество изолированных вершин графа $\tilde{\Gamma}_w$ (т.е. вершина v_i является *изолированной*, если она не соединена каким-нибудь ребром с другой вершиной графа $\tilde{\Gamma}_w$) и положим $\Gamma_w = \tilde{\Gamma}_w \setminus V_{\text{iso}}$.

ЛЕММА 2.6. Пусть $w', w'' \in W(s) = \{w \in W \mid \varphi(w) = s\}$ – два слова, представляющие элемент $s \in S_{T_d}$, и пусть $\Gamma_{w'} = \Gamma_{1,1} \sqcup \dots \sqcup \Gamma_{1,n_1}$ и $\Gamma_{w''} = \Gamma_{2,1} \sqcup \dots \sqcup \Gamma_{2,n_2}$ – представления графов $\Gamma_{w'}$ и $\Gamma_{w''}$ в виде несвязных объединений своих связных компонент. Тогда $n_1 = n_2 := n_s$ и существует взаимно однозначное соответствие между связными компонентами графов $\Gamma_{w'}$ и $\Gamma_{w''}$ такое, что соответствующие графы $\Gamma_{1,i}$ и $\Gamma_{2,i}, i = 1, \dots, n_s$, имеют одно и то же множество вершин $V(\Gamma_{1,i}) = V(\Gamma_{2,i}) := V_i(s)$. Более того, элемент s однозначно разлагается в произведение попарно коммутирующих множителей $s_i \in S_{T_d}, s = s_1 \cdot \dots \cdot s_{n_s}$, таких, что для каждого i и для любого слова $w_i \in W(s_i)$ граф Γ_{w_i} связан и $V(\Gamma_{w_i}) = V(\Gamma_{1,i})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО непосредственно следует из соотношений (2.3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть длина элемента $s \in S_{T_d}$ равна $k \leq d - 1$. Элемент $\alpha(s) \in S_d$ является циклической перестановкой длины k тогда и только тогда, когда s удовлетворяет следующему условию:

(*) существует слово $w \in W(s)$, граф которого Γ_w является деревом.

Более того, элемент s , удовлетворяющий условию (*), однозначно определяется циклической перестановкой $\alpha(s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что если s удовлетворяет условию (*), то существует ровно $k = \ln(s)$ слов $w_1, \dots, w_k \in W(s)$ таких, что графы Γ_{w_i} являются простыми путями, если мы движемся по ребрам в соответствии с их

нумерацией. Действительно, легко видеть, что из леммы 2.1 следует существование слова $w_1 = x_{(i_1, i_2)} x_{(i_2, i_3)} \dots x_{(i_{k-1}, i_k)}$, граф которого Γ_{w_1} является простым путем. Покажем, что если мы передвинем букву $x_{(i_{k-1}, i_k)}$ в крайнее положение влево, то мы снова получим определяющее тот же самый элемент s слово w_2 , граф которого Γ_{w_2} также является простым путем. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} s &= x_{(i_1, i_2)} \cdot \dots \cdot \overline{x_{(i_{k-2}, i_{k-1})} \cdot x_{(i_{k-1}, i_k)}} \\ &= x_{(i_1, i_2)} \cdot \dots \cdot \overline{x_{(i_{k-3}, i_{k-2})} \cdot (x_{(i_{k-2}, i_k)} \cdot x_{(i_{k-2}, i_{k-1})})} = \dots \\ &\dots = (x_{(i_1, i_k)} \cdot x_{(i_1, i_2)}) \cdot \dots \cdot x_{(i_{k-2}, i_{k-1})}. \end{aligned}$$

Повторяя такие преобразования k раз, мы найдем искомые слова $w_1, \dots, w_k$.

Имеем, что $\alpha(s) = (i_1, i_2) \dots (i_{k-2}, i_{k-1})(i_{k-1}, i_k)$ является циклической перестановкой длины k . С другой стороны, если $\sigma \in \mathcal{S}_d$ – циклическая перестановка длины k , то она может быть представлена как произведение $k-1$ транспозиций: $\sigma = (i_1, i_2) \dots (i_{k-2}, i_{k-1})(i_{k-1}, i_k)$, и очевидно, что $\alpha(s) = \sigma$ для $s = x_{(i_1, i_2)} \cdot \dots \cdot x_{(i_{k-2}, i_{k-1})} \cdot x_{(i_{k-1}, i_k)}$, а граф $\Gamma_{x_{(i_1, i_2)} \dots x_{(i_{k-2}, i_{k-1})} x_{(i_{k-1}, i_k)}}$ удовлетворяет условию (*).

Наконец, если мы фиксируем множество $\{i_1, \dots, i_k\} \subset I_d$, то имеется ровно $(k-1)!$ различных циклических перестановок в $\mathcal{S}_d$ длины k , циклически переставляющих элементы множества $\{i_1, \dots, i_k\}$. С другой стороны, имеется ровно $k!$ различных простых путей, соединяющих вершины $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$. Следовательно, элементы s , удовлетворяющие условию (*), однозначно определяются циклическими перестановками $\alpha(s)$.

ЛЕММА 2.7. Пусть элемент $s = x_{(i_1, i_2)}^2 \cdot x_{(i_3, i_4)}^2 \cdot \dots \cdot x_{(i_{2k-1}, i_{2k})}^2$ является произведением квадратов некоторых образующих полуруппы S_{T_d} и таков, что граф Γ_w слова $w = x_{(i_1, i_2)}^2 x_{(i_3, i_4)}^2 \dots x_{(i_{2k-1}, i_{2k})}^2$ связан. Тогда

$$s = \psi_{V(\Gamma_w)}(h_{d_1, k-d_1-1}),$$

где $d_1 = |V(\Gamma_w)|$ – число вершин графа Γ_w и $\psi_{V(\Gamma_w)}(h_{d_1, k-d_1-1})$ – образ элемента Гурвица рода $k-d_1-1$ полуруппы $S_{T_{d_1, 1}}$ при вложении $\psi_{V(\Gamma_w)}: \Sigma_{d_1} \hookrightarrow \Sigma_d$, индуцированном вложением $V(\Gamma_w) \hookrightarrow I_d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применив аргументы, аналогичные тем, которые использовались в доказательствах лемм 2.1–2.3, лемма непосредственно следует из условия о том, что граф Γ_w связан, и из соотношений (2.5) и (2.6).

ЛЕММА 2.8. Для любого $s \in S_{T_d}$ разность $\ln(s) - l_t(\alpha(s))$ является неотрицательным четным числом и существуют элемент $\tilde{s} \in S_{T_d}$ и элемент $\bar{s}$, представимый в виде произведения квадратов некоторых порождающих полуруппы S_{T_d} элементов $x_{(i, j)}$ (i , следовательно, принадлежащий полуруппе $S_{T_d, 1}$), такие, что:

- (i) $s = \tilde{s} \cdot \bar{s}$;
- (ii) $\ln(\tilde{s}) = l_t(\alpha(s))$;
- (iii) $\alpha(\tilde{s}) = \alpha(s)$.

Более того, элемент $\tilde{s}$ однозначно определяется условиями (i)–(iii).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим граф Γ_w некоторого слова $w \in W(s) = \{w \in W \mid \varphi(w) = s\}$. Он распадается в несвязное объединение своих связных компонент: $\Gamma_w = \Gamma_{w,1} \sqcup \dots \sqcup \Gamma_{w,l}$. Согласно лемме 2.6 элемент s однозначно (с точностью до перестановки множителей) разлагается в произведение попарно коммутирующих множителей: $s = \varphi(w_1(\overline{x_{(i,j)}})) \cdot \dots \cdot \varphi(w_l(\overline{x_{(i,j)}}))$, где $w_i(\overline{x_{(i,j)}})$ – слово, состоящее из букв $x_{(i,j)}$ таких, что $\Gamma_{w_i} = \Gamma_{w,i}$. Пусть $s_i = \varphi(w_i) \in S_{T_d}$ – элемент, определяемый словом w_i . Имеем $(S_d)_{s_i} \cap (S_d)_{s_j} = 1$ при $i \neq j$; в частности, $\alpha(s_i)$ и $\alpha(s_j)$ – это коммутирующие перестановки, и множества $V(\Gamma_{w,i})$ и $V(\Gamma_{w,j})$, на которых каждая из них действует нетривиально, не пересекаются. Поэтому лемму достаточно доказать для элементов $s = \varphi(w)$ со связным графом Γ_w .

Пусть $s = \varphi(w)$ таков, что граф Γ_w связан. Применив лемму 2.1, легко видеть, что можно найти такое представление элемента s в виде слова, состоящего из букв $x_{(i,j)}$, что

$$s = x_{(j_1,j_2)} \cdot \dots \cdot x_{(j_{k-1},j_k)} \cdot s_1,$$

и множество $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_{k_i}}\}$ состоит из всех вершин графа Γ_w .

Пусть $x_{(j_a,j_b)}$ – первый множитель элемента s_1 , если $s_1 \neq x_1$. Тогда из соотношений (2.3) и леммы 2.2 следует, что s может быть записан в виде $s = s' \cdot x_{(j_a,j_b)}^2$. Отметим, что $x_{(j_a,j_b)}^2 \in S_{T_{d,1}}$ и $\ln(s') = \ln(s) - 2 < \ln(s)$, т. е. элемент s может быть записан в виде $s = \tilde{s}_1 \cdot \bar{s}_1$, где $\ln(\tilde{s}_1) < \ln(s)$ и $\bar{s}_1 \in S_{T_{d,1}}$, кроме того, $\alpha(\tilde{s}_1) = \alpha(s)$, так как $\bar{s}_1 \in S_{T_{d,1}}$. Повторяя, если необходимо, вышеприведенные аргументы для элементов $\tilde{s}_1, \dots$, в результате получим, что s может быть записан в виде $s = \tilde{s} \cdot \bar{s}$, где $\bar{s} \in S_{T_{d,1}}$ – произведение квадратов некоторых элементов $x_{(i,j)}$ и $\tilde{s} = s_1 \cdot \dots \cdot s_m \in S_{T_d}$; здесь при $1 \leq i \leq m$ элементы $s_i = x_{(j_{1,i},j_{2,i})} \cdot \dots \cdot x_{(j_{k_i-1,i},j_{k_i,i})}$ таковы, что подмножества $\{j_{1,i}, \dots, j_{k_i,i}\}$ и $\{j_{1,l}, \dots, j_{k_l,l}\}$ множества I_d имеют пустое пересечение при $i \neq l$. Следовательно,

$$\alpha(s) = \alpha(\tilde{s}) = (j_{k_1,1}, \dots, j_{1,1}) \dots (j_{k_m,m}, \dots, j_{1,m}),$$

и поэтому $\ln(\tilde{s}) = l_t(\alpha(s))$.

Согласно предложению 2.1 (с точностью до перестановки) элементы s_i определяются однозначно своими произведениями $\alpha(s_i)$. Лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть $s \in S_{T_d}$ таков, что $\alpha(s) = (i_1, i_2, \dots, i_k)$ является циклической перестановкой и множество вершин $V(s)$ графа Γ_w , $w \in W(s)$, совпадает с множеством $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset I_d$. Тогда

$$s = x_{(i_1,i_2)} \cdot x_{(i_2,i_3)} \cdot \dots \cdot x_{(i_{k-1},i_k)} \cdot x_{(i_2,i_1)}^{2n},$$

где $2n = \ln(s) - k + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из леммы 2.8 и леммы 2.5.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть элемент $s = \varphi(w) \in S_{T_d}$ таков, что Γ_w является связным графом, и если $\alpha(s) = \prod_{j=1}^m (i_{1,j}, i_{2,j}, \dots, i_{k_j,j})$ – разложение в произведение циклических перестановок, то либо $m > 1$, либо $V(\Gamma_w) \neq \{i_{1,1}, i_{2,1}, \dots, i_{k_1,1}\}$ в случае $m = 1$. Обозначим

$$J = \{i_{1,1}, \dots, i_{1,m}\} \cup \left(V(\Gamma_w) \setminus \bigcup_{j=1}^m \{i_{1,j}, i_{2,j}, \dots, i_{k_j,j}\} \right) \subset I_d.$$

Тогда

$$s = \psi_J(h_{d_1, g}) \cdot \prod_{j=1}^m (x_{(i_{1,j}, i_{2,j})} \cdot x_{(i_{2,j}, i_{3,j})} \cdot \dots \cdot x_{(i_{k_j-1,j}, i_{k_j,j})}),$$

где $h_{d_1, g} \in \Sigma_{T_{d_1}}$ – элемент Гурвица рода g , $d_1 = |J|$, $g = \frac{\ln(s) - d_1 + 1}{2}$ и вложение $\psi_J: \Sigma_{d_1} \hookrightarrow \Sigma_d$ индуцировано вложением $J \hookrightarrow I_d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.8 элемент s может быть записан в виде

$$s = \tilde{s} \cdot \prod_{j=1}^m (x_{(i_{1,j}, i_{2,j})} \cdot x_{(i_{2,j}, i_{3,j})} \cdot \dots \cdot x_{(i_{k_j-1,j}, i_{k_j,j})}), \quad (2.7)$$

где $\tilde{s}$ – произведение квадратов некоторых порождающих элементов $x_{(a,b)}$ полугруппы S_{T_d} , причем из условий предложения следует, что $\ln(\tilde{s}) \neq 0$. Рассмотрим один из множителей $x_{(a,b)}^2$, входящих в разложение элемента $\tilde{s}$ на множители. Если a (либо b) принадлежит некоторому множеству $\{i_{1,j}, \dots, i_{k_j,j}\}$, то согласно леммам 2.4, 2.5 этот множитель может быть заменен в произведении (2.7) на $x_{(i_{1,j}, b)}^2$ и эта замена не меняет элемент s . Поэтому мы можем считать, что для каждого множителя $x_{(a,b)}^2$, входящего в разложение элемента $\tilde{s}$ на множители, имеют место следующие четыре возможности:

- 1) $\{a, b\} \subset V(\Gamma_w) \setminus \bigcup_{j=1}^m \{i_{1,j}, i_{2,j}, \dots, i_{k_j,j}\}$;
- 2) $a = i_{1,j}$ для некоторого $j \in [1, m]$, а $b \in V(\Gamma_w) \setminus \bigcup_{j=1}^m \{i_{1,j}, i_{2,j}, \dots, i_{k_j,j}\}$;
- 3) $\{a, b\} = \{i_{1,j_1}, i_{1,j_2}\}$ для некоторых $j_1, j_2 \in [1, m]$;
- 4) $\{a, b\} = \{i_{1,j}, i_{2,j}\}$ для некоторого $j \in [1, m]$.

Обозначим через $\tilde{w}$ слово, представляющее описанное выше разложение на множители элемента $\tilde{s}$. Из связности графа Γ_w следует, что граф $\Gamma_{\tilde{w}}$ также связан, $J \subset V(\Gamma_{\tilde{w}})$ и, более того, для каждого $j \in [1, m]$ найдется $b \notin \{i_{1,j}, \dots, i_{k_j,j}\}$ такое, что $x_{(i_{1,j}, b)}^2$ является подсловом слова $\tilde{w}$. Если в разложение $\tilde{w}$ входит подслово $x_{(i_{1,j}, i_{2,j})}^2$ для некоторого j , то согласно лемме 2.3 имеем (напомним, что элементы $x_{(a,b)}^2$ принадлежат центру полугруппы S_{T_d})

$$\begin{aligned} \underline{x_{(i_{1,j}, i_{2,j})}^2 \cdot x_{(i_{1,j}, b)}^2} \cdot x_{(i_{1,j}, i_{2,j})} &= (x_{(i_{1,j}, b)}^2 \cdot \underline{x_{(i_{2,j}, b)}^2}) \cdot x_{(i_{1,j}, i_{2,j})} \\ &= x_{(i_{1,j}, b)}^2 \cdot (x_{(i_{1,j}, b)}^2 \cdot x_{(i_{1,j}, i_{2,j})}), \end{aligned}$$

поэтому мы можем считать, что $V(\Gamma_{\tilde{w}}) = J$ и граф $\Gamma_{\tilde{w}}$ связан. Чтобы завершить доказательство предложения, достаточно применить лемму 2.7.

Из предложений 2.2, 2.3 следует

ТЕОРЕМА 2.1 [7], [8]. Элементы $s_1, s_2 \in S_{T_d}^{\mathcal{S}_d}$ равны тогда и только тогда, когда $\alpha(s_1) = \alpha(s_2)$ и $\ln(s_1) = \ln(s_2)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Если $s \in S_{T_d}^{\mathcal{S}_d}$ и $\ln(s) \geq l_t(\alpha(s)) + 2(d-1)$, то существует разложение $s = \tilde{s} \cdot \bar{s}$, где $\tilde{s} = h_{d,g}$, $g = \frac{1}{2}(\ln(s) - l_t(\alpha(s))) - d + 1$, и $\bar{s}$ – такой элемент, что $\ln(\bar{s}) = l_t(\alpha(s))$, $\alpha(\bar{s}) = \alpha(s)$ и элемент $\bar{s}$ определен однозначно своим произведением $\alpha(s)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложениям 2.2, 2.3 элемент s может быть разложен в произведение: $s = \tilde{s} \cdot \bar{s} \in S_{T_d}$, где $\tilde{s} \in S_{T_d}^{\mathcal{S}_d}$ – произведение квадратов некоторых элементов $x_{(i,j)}$ и $\bar{s}$ – такой элемент, что

$$\alpha(s) = \alpha(\bar{s}) = (j_{1,1}, \dots, j_{k_1,1}) \dots (j_{1,m}, \dots, j_{k_m,m})$$

и $\ln(\bar{s}) = l_t(\alpha(s))$. Заметим, что $\ln(\tilde{s}) \geq 2(d-1)$, так как $\ln(\bar{s}) = l_t(\alpha(s))$ и $\ln(s) \geq l_t(\alpha(s)) + 2(d-1)$.

Рассмотрим графы $\Gamma_{\tilde{w}}$, $\Gamma_{\bar{w}}$ и $\Gamma_{\tilde{w}\bar{w}}$, где $\tilde{w} \in W(\tilde{s})$, $\bar{w} \in W(\bar{s})$ и $\tilde{w}\bar{w} \in W(s)$. Покажем, что существует разложение на множители $s = \tilde{s} \cdot \bar{s}$ такое, что $V_{\tilde{s}} = I_d$ и граф $\Gamma_{\tilde{w}}$ связан. Во-первых, имеем $V_s = I_d$, так как $(\mathcal{S}_d)_s = \mathcal{S}_d$. Предположим, что либо $V_{\tilde{s}} \neq I_d$, либо граф $\Gamma_{\tilde{w}}$ не связан для некоторого разложения $s = \tilde{s} \cdot \bar{s}$, и пусть $\tilde{s} = \varphi(\tilde{w}(x_{(i,j)}^2))$ и $\bar{s} = \varphi(\bar{w}(x_{(i,j)}))$. Поскольку $\ln(\tilde{s}) \geq 2(d-1)$, из леммы 2.3 следует, что существует связная компонента Γ_1 графа $\Gamma_{\tilde{w}}$ такая, что для любой пары вершин $v_{i_1}, v_{i_2} \in \Gamma_1$ мы можем найти слово $\tilde{w} \in W(\tilde{s})$ такое, что $\tilde{s} = (x_{(i_1,i_2)}^2)^2 \cdot \tilde{s}'$. Затем, так как $V_s = I_d$, найдется пара вершин $v_{i_0}, v_{i_2} \in V_{\bar{s}}$ такая, что $v_{i_0} \notin V_{\tilde{s}}$, $v_{i_2} \in V_{\bar{s}}$ и $\bar{s} = \bar{s}' \cdot x_{(i_0,i_2)}$. Согласно лемме 2.3 имеем

$$s = \tilde{s} \cdot \bar{s} = \bar{s}' \cdot x_{(i_0,i_2)} \cdot x_{(i_1,i_2)}^2 \cdot x_{(i_1,i_2)}^2 \cdot \bar{s}' = \bar{s}' \cdot x_{(i_0,i_2)} \cdot x_{(i_0,i_1)}^2 \cdot x_{(i_1,i_2)}^2 \cdot \tilde{s}' = \tilde{s} \cdot \tilde{s}_1,$$

где для слова $\tilde{w}_1 \in W(\tilde{s}_1)$ либо $V_{\tilde{s}_1} = V_{\tilde{s}} \cup \{i_0\}$ и граф $\Gamma_{\tilde{w}_1}$ имеет то же самое число связных компонент, что и граф $\Gamma_{\tilde{w}}$, а число вершин одной из его связных компонент увеличилось на единицу, либо число связных компонент графа $\Gamma_{\tilde{w}_1}$ строго меньше числа связных компонент графа $\Gamma_{\tilde{w}}$. Повторив эти преобразования несколько раз, в результате получим разложение $s = \tilde{s} \cdot \bar{s}$ такое, что $V_{\tilde{s}} = I_d$ и граф $\Gamma_{\tilde{w}_1}$ связан. Теперь, чтобы завершить доказательство предложения, достаточно еще раз применить лемму 2.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. *Существует (и притом единственный) гомоморфизм $r: \Sigma_d \rightarrow S_{T_d}$ такой, что:*

- (i) $\alpha(r(x_\sigma)) = \sigma$ для $\sigma \in \mathcal{S}_d$;
- (ii) $\ln(r(x_\sigma)) = l_t(\sigma)$;
- (iii) $r|_{S_{T_d}} = \text{Id}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая перестановка $\sigma \in \mathcal{S}_d$, $\sigma \neq 1$, может быть разложена в произведение попарно коммутирующих циклических перестановок: $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_m$, и такое разложение единственно с точностью до перестановки множителей. Согласно предложению 2.1 каждая из циклических перестановок σ_i однозначно определяет элемент $s_i \in S_{T_d}$ такой, что $\ln(s_i) = k_i - 1$ и $\alpha(s_i) = \sigma_i$, где k_i – длина циклической перестановки σ_i , и, следовательно, произведение $s(\sigma) = s_1 \dots s_m \in S_{T_d}$ однозначно определяется по σ . Легко видеть, что отображение $\sigma \mapsto s(\sigma)$ определяет гомоморфизм $r: \Sigma_d \rightarrow S_{T_d}$, заданный формулой $r(x_\sigma) = s(\sigma)$ на множестве порождающих элементов полугруппы Σ_d . Очевидно, что $\ln_t(s) = \ln(r(s))$ и $r|_{S_{T_d}} = \text{Id}$.

Гомоморфизм $r: \Sigma_d \rightarrow S_{T_d}$, определенный в предложении 2.5, называется *восстанавливающим* гомоморфизмом, а число $\ln_t(s) = \ln(r(s))$ называется *транспозиционной длиной* элемента $s \in \Sigma_d$.

2.3. Разложения единицы в произведения транспозиций. Рассмотрим полугруппу $S_{T_d,1}$.

ТЕОРЕМА 2.2. *Полугруппа $S_{T_d,1}$ является коммутативной и порождается элементами $s_{(i,j)} = x_{(i,j)}^2$, $\{i, j\} \subset I_d$, связанными соотношениями*

$$s_{(i_1, i_2)} \cdot s_{(i_2, i_3)} = s_{(i_1, i_2)} \cdot s_{(i_1, i_3)} = s_{(i_2, i_3)} \cdot s_{(i_1, i_3)} \quad (2.8)$$

для упорядоченных троек $\{i_1, i_2, i_3\}_{\text{ord}} \subset I_d$ и

$$s_{(i_1, i_2)} \cdot s_{(i_3, i_4)} = s_{(i_3, i_4)} \cdot s_{(i_1, i_2)} \quad (2.9)$$

для упорядоченных четверок $\{i_1, i_2, i_3, i_4\}_{\text{ord}} \subset I_d$. Более того, любой элемент $s \in S_{T_d,1}$ имеет нормальную форму, т.е. он может быть единственным образом записан в виде

$$s = (s_{(i_{1,1}, i_{2,1})}^{k_1} \cdot s_{(i_{2,1}, i_{3,1})} \cdot \dots \cdot s_{(i_{j_1-1,1}, i_{j_1,1})}) \cdot \dots \cdot (s_{(i_{1,n}, i_{2,n})}^{k_n} \cdot s_{(i_{2,n}, i_{3,n})} \cdot \dots \cdot s_{(i_{j_n-1,n}, i_{j_n,n})}),$$

где $1 \leq i_{1,1} < i_{1,2} < \dots < i_{1,n} \leq d-1$, $k_l \in \mathbb{N}$ для $l = 1, \dots, n$, множества $M_l = \{i_{1,l} < i_{2,l} < \dots < i_{j_l,l}\}$, $1 \leq l \leq n$, являются подмножествами множества I_d , состоящими из $j_l \geq 2$ элементов таких, что $M_{l_1} \cap M_{l_2} = \emptyset$ при $l_1 \neq l_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.8 следует, что полугруппа $S_{T_d,1}$ порождается элементами $s_{(i,j)}$. Согласно лемме 2.3 для элементов $s_{(i,j)}$ выполнены соотношения (2.8) и (2.9).

Как и в доказательстве предложения 2.4, с каждым элементом $s = s_{(j_1, j_2)} \cdot \dots \cdot s_{(j_{m-1}, j_m)}$ мы можем связать граф Γ_w , где w – слово, состоящее из букв $s_{(i,j)}$ и представляющее элемент s . Граф Γ_w распадается в несвязное объединение своих связных компонент: $\Gamma_w = \Gamma_{w,1} \sqcup \dots \sqcup \Gamma_{w,n}$. Из соотношений (2.3) легко следует, что $w = w_1(\overline{s_{(i,j)}}) \dots w_n(\overline{s_{(i,j)}})$, где слово $w_l(\overline{s_{(i,j)}})$, состоящее из букв $s_{(i,j)}$, является таким, что $\Gamma_{w_l} = \Gamma_{w,l}$. Пусть $s_l \in S_{T_d,1}$ – элемент, определяемый словом w_l , т.е. $s_l = \varphi(w_l)$.

Из соотношений (2.8) и (2.9) следует, что каждый элемент s_l может быть записан в виде

$$s_l = s_{(i_{1,l}, i_{2,l})}^{k_l} \cdot s_{(i_{2,l}, i_{3,l})} \cdot \dots \cdot s_{(i_{j_l-1,l}, i_{j_l,l})}, \quad (2.10)$$

где элементы множества $M_l = \{i_{1,l} < i_{2,l} < \dots < i_{j_l,l}\}$, $1 \leq l \leq n$, находятся во взаимно однозначном соответствии с вершинами связной компоненты $\Gamma_{w,l}$ графа Γ_w .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Элемент $s_{(i_{1,l}, i_{2,l})}^{k_l} \cdot s_{(i_{2,l}, i_{3,l})} \cdot \dots \cdot s_{(i_{j_l-1,l}, i_{j_l,l})}$ в (2.10) является элементом Гурвица h_{j_l, k_l-1} полугруппы $S_{T_{j_l},1}$, если мы рассматриваем $S_{T_{j_l},1}$ как подполугруппу полугруппы $S_{T_d,1}$ и вложение определено естественным вложением $M_l \hookrightarrow I_d$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. *Элемент Гурвица $h_{d,g}$ принадлежит центру полугруппы Σ_d , и он неподвижен при действии сопряжениями группы $\mathcal{S}_m$ на полугруппе Σ_d . Для h_{d,g_1} , h_{d,g_2} имеем*

$$h_{d,g_1} \cdot h_{d,g_2} = h_{d,g_1+g_2+d-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть предложения следует из предложения 1.1, так как, с одной стороны, $\alpha(h_{d,g}) = \mathbf{1}$ и транспозиции $(i, i+1)$, $i = 1, \dots, d-1$, порождают группу $(\mathcal{S}_d)_{h_{d,g}}$, а с другой стороны, они порождают всю группу $\mathcal{S}_d$. Вторая часть предложения следует из предложения 2.4.

Более того, в качестве следствия из теорем 2.4, 2.2 мы получаем, что элемент Гурвица $h_{d,g}$ определяется однозначно в полугруппе S_{T_d} своей длиной и следующими двумя условиями.

СЛЕДСТВИЕ 2.1 (теорема Клебша–Гурвица [1]). Пусть элемент $s \in S_{T_d}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$(i) (\mathcal{S}_d)_s = \mathcal{S}_d;$$

$$(ii) \alpha(s) = \mathbf{1}.$$

Тогда $\ln(s) \geq 2(d-1)$ и $s = h_{d,g}$, где $g = \frac{\ln(s)}{2} - d + 1$.

2.4. Разложения на множители в симметрических группах (общий случай). В этом пункте будет доказано следующее обобщение предложения 2.4.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $s = x_{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_m} \cdot \bar{s} \in \Sigma_d$, где $\bar{s} \in S_{T_d}$. Для $j = 1, \dots, m$ обозначим через $\sigma_{j,0}$ канонический представитель типа $t(\sigma_j)$ (см. определения в п. 2.1), и пусть

$$\sigma = \sigma(s) = (\sigma_{1,0} \dots \sigma_{m,0})^{-1} \alpha(s).$$

Если $s \in \Sigma_d^{S_d}$ и $\ln(\bar{s}) = k \geq 3(d-1)$, то

$$s = x_{\sigma_{1,0}} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_{m,0}} \cdot r(x_\sigma) \cdot h_{d,g},$$

где $g = \frac{k - \ln_t(x_\sigma)}{2} - d + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что существует разложение

$$s = x_{\sigma'_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma'_m} \cdot x_{(i_1, j_1)} \cdot \dots \cdot x_{(i_k, j_k)} = x_{\sigma'_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma'_m} \cdot \bar{s}_1$$

такое, что $t(\sigma_i) = t(\sigma'_i)$ для $i = 1, \dots, m$, граф $\Gamma_{\bar{w}_1}$, ассоциированный со словом $\bar{w}_1 = x_{(i_1, j_1)} \dots x_{(i_k, j_k)} \in W(\bar{s}_1)$, связан и множество $V_{\bar{s}_1}$ его вершин совпадает с множеством I_d .

Действительно, пусть $w \in W(\bar{s})$, предположим, что либо $V_{\bar{s}} \neq I_d$, либо граф $\Gamma_{\bar{w}}$ не связан. Поскольку $\ln(\bar{s}) \geq 3(d-1)$, найдется связная компонента Γ_1 графа Γ_w такая, что число ее ребер больше числа ее вершин. Тогда из доказательства предложения 2.4 следует, что для любых двух вершин v_{i_1}, v_{i_2} , принадлежащих множеству вершин $V(\Gamma_1)$ графа Γ_1 , найдется слово $w' \in W$ такое, что $\bar{s} = x_{(i_1, i_2)}^2 \cdot \varphi(w')$ и вершины из $V(\Gamma_1)$ принадлежат одной и той же связной компоненте графа $\Gamma_{x_{i_1, i_2}^2 w'}$. Затем, так как $(\mathcal{S}_d)_s = \mathcal{S}_d$, для некоторого l , $1 \leq l \leq m$, найдется перестановка σ_l такая, что $\sigma_l(i_1, i_2)\sigma_l^{-1} = (i_0, j_0)$, где или вершина v_{i_0} , или вершина v_{j_0} (но не обе сразу) не принадлежит множеству $V(\Gamma_1)$. Не ограничивая общности, мы можем предполагать, что $l = m$.

Имеем

$$\begin{aligned}
 s &= x_{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_m} \cdot \bar{s} = x_{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_m} \cdot x_{(i_1, i_2)}^2 \cdot \varphi(w') \\
 &= x_{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_{m-1}} \cdot x_{(i_0, j_0)} \cdot x_{\sigma_m} \cdot x_{(i_1, i_2)} \cdot \varphi(w') \\
 &= x_{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_{m-1}} \cdot \rho((i_0, j_0))(x_{\sigma_m}) \cdot x_{(i_0, j_0)} \cdot x_{(i_1, i_2)} \cdot \varphi(w') \\
 &= x_{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_{m-1}} \cdot \rho((i_0, j_0))(x_{\sigma_m}) \cdot \varphi(w''),
 \end{aligned}$$

где $w'' = x_{(i_0, j_0)} x_{(i_1, j_1)} w'$ – такое слово, что либо множество вершин графа $\Gamma_{w''}$ строго содержит множество $V_{\bar{s}}$, либо число связных компонент графа $\Gamma_{w''}$ строго меньше числа связных компонент графа $\Gamma_{w'}$.

Повторив аналогичные преобразования несколько раз, в результате получим такое разложение элемента s в виде

$$s = x_{\sigma'_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma'_m} \cdot \bar{s}_1,$$

что $\bar{s}_1 \in S_{T_d}$, $V_{\bar{s}_1} = I_d$, граф $\Gamma_{\bar{s}_1}$ связан и $t(\sigma'_j) = t(\sigma_j)$ для $j = 1, \dots, m$. Для этого разложения имеем $(S_d)_{\bar{s}_1} = S_d$ и $\ln(\bar{s}_1) \geq 3(d-1)$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, используем индукцию по m . Если $m = 0$ (т. е. если $s \in S_{T_d}$), то теорема следует из предложения 2.4.

Пусть $m = 1$. Согласно предложению 2.4 имеем $\bar{s}_1 = h_{d,0} \cdot \bar{s}'$ для некоторого элемента $\bar{s}' \in S_{T_d}$.

ЛЕММА 2.9. Пусть $\{i_{1,1}, \dots, i_{k_1,1}\} \sqcup \dots \sqcup \{i_{1,n}, \dots, i_{k_n,n}\}$ – несвязное объединение упорядоченных подмножеств множества I_d . Тогда элемент Гурвица $h_{d,0}$ может быть представлен как произведение:

$$h_{d,0} = (x_{(i_{1,1}, i_{2,1})} \cdot \dots \cdot x_{(i_{k_1-1,1}, i_{k_1,1})}) \cdot \dots \cdot (x_{(i_{1,n}, i_{2,n})} \cdot \dots \cdot x_{(i_{k_n-1,n}, i_{k_n,n})}) \cdot \bar{h},$$

где $\bar{h}$ – некоторый элемент полугруппы $S_{T_d}^d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полугруппа $S_{T_{d,1}}$ является коммутативной, и элемент Гурвица $h_{d,0}$ инвариантен при действии сопряжениями группы S_d . Следовательно, $h_{d,0}$ может быть записан в виде

$$h_{d,0} = (s_{(i_{1,1}, i_{2,1})} \cdot \dots \cdot s_{(i_{k_1-1,1}, i_{k_1,1})}) \cdot \dots \cdot (s_{(i_{1,n}, i_{2,n})} \cdot \dots \cdot s_{(i_{k_n-1,n}, i_{k_n,n})}) \cdot \tilde{h},$$

где $\tilde{h}$ – некоторый элемент из $S_{T_{d,1}}$. Имеем

$$\begin{aligned}
 s_{(i_{1,j}, i_{2,j})} \cdot \dots \cdot s_{(i_{k_j-1,j}, i_{k_j,j})} &= x_{(i_{1,j}, i_{2,j})}^2 \cdot \dots \cdot x_{(i_{k_j-1,j}, i_{k_j,j})}^2 \\
 &= x_{(i_{1,j}, i_{2,j})} \cdot (x_{(i_{2,j}, i_{3,j})}^2 \cdot \dots \cdot x_{(i_{k_j-1,j}, i_{k_j,j})}^2) \cdot x_{(i_{1,j}, i_{2,j})} = \dots \\
 &\dots = (x_{(i_{1,j}, i_{2,j})} \cdot \dots \cdot x_{(i_{k_j-1,j}, i_{k_j,j})}) \cdot (x_{(i_{k_j-1,j}, i_{k_j,j})} \cdot \dots \cdot x_{(i_{1,j}, i_{2,j})}),
 \end{aligned}$$

и элементы $x_{(i_{l_1, j_1}, i_{l_1+1, j_1})}$ и $x_{(i_{l_2, j_2}, i_{l_2+1, j_2})}$ коммутируют, если $j_1 \neq j_2$. Теперь, чтобы завершить доказательство леммы, заметим, что $(S_d)_{s_j} = (S_d)_{\bar{s}_j}$, где $s_j = s_{(i_{1,j}, i_{2,j})} \cdot \dots \cdot s_{(i_{k_j-1,j}, i_{k_j,j})}$ и $\bar{s}_j = x_{(i_{k_j-1,j}, i_{k_j,j})} \cdot \dots \cdot x_{(i_{1,j}, i_{2,j})}$. Следовательно, $\bar{h} = (\prod \bar{s}_i) \cdot \tilde{h} \in S_{T_d}^d$, так как $h_{d,0} \in S_{T_d}^d$. Лемма доказана.

Для канонического представителя $\sigma_{m,0}$ типа $t(\sigma_m)$ существует элемент $\bar{\sigma}_m \in \mathcal{S}_d$ такой, что $\sigma_{m,0} = \bar{\sigma}_m^{-1} \sigma'_m \bar{\sigma}_m$. Перестановка $\bar{\sigma}_m$ может быть разложена в произведение циклических перестановок и каждая из циклических перестановок может быть разложена в произведение транспозиций:

$$\bar{\sigma}_m = ((i_{1,1}, i_{2,1}) \dots (i_{k_1-1,1}, i_{k_1,1})) \dots ((i_{1,n}, i_{2,n}) \dots (i_{k_n-1,n}, i_{k_n,n})).$$

Рассмотрим элемент

$$r(x_{\bar{\sigma}_m}) = (x_{(i_{1,1}, i_{2,1})} \dots x_{(i_{k_1-1,1}, i_{k_1,1})}) \dots (x_{(i_{1,n}, i_{2,n})} \dots x_{(i_{k_n-1,n}, i_{k_n,n})}) \in S_{T_d},$$

где r – восстанавливающий гомоморфизм. Согласно лемме 2.9

$$h_{d,0} = r(x_{\bar{\sigma}_m}) \cdot \bar{h}_m,$$

где $\bar{h}_m$ – некоторый такой элемент, что $(\mathcal{S}_d)_{\bar{h}_m} = \mathcal{S}_d$. Имеем

$$\begin{aligned} s &= x_{\sigma'_m} \cdot h_{d,0} \cdot \bar{s}' = x_{\sigma'_m} \cdot r(x_{\bar{\sigma}_m}) \cdot \bar{h}_m \cdot \bar{s}' \\ &= r(x_{\bar{\sigma}_m}) \cdot x_{\sigma_{m,0}} \cdot \bar{h}_m \cdot \bar{s}' = x_{\sigma_{m,0}} \cdot r(x_{\bar{\sigma}'_m}) \cdot \bar{h}_m \cdot \bar{s}', \end{aligned}$$

где $x_{\bar{\sigma}'_m} = \lambda(\sigma_{m,0})(x_{\bar{\sigma}_m})$. Имеем также $\bar{s}'_1 = r(x_{\bar{\sigma}'_m}) \cdot \bar{h}_m \cdot \bar{s}' \in S_{T_d}$ такой, что $\ln(\bar{s}'_1) = k$, кроме того, $\alpha(\bar{s}'_1) = \sigma_{m,0}^{-1} \alpha(s)$ и $(\mathcal{S}_d)_{\bar{s}'_1} = \mathcal{S}_d$. Следовательно, согласно теореме 2.4 выполнено равенство $\bar{s}'_1 = r(x_\sigma) \cdot h_{d,g}$, где $\sigma = \alpha(\bar{s}'_1) = \sigma_{m,0}^{-1} \alpha(s)$ и $g = \frac{k - \ln_t(x_\sigma)}{2} - d + 1$.

Теперь предположим, что теорема доказана для всех $m < m_0$, и рассмотрим элемент

$$s = x_{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_{m_0}} \cdot \bar{s}_1,$$

где элемент $\bar{s}_1 \in S_{T_d}$ имеет длину $k \geq 3(d-1)$ и является таким, что $(\mathcal{S}_d)_{\bar{s}_1} = \mathcal{S}_d$. Имеем

$$\begin{aligned} s &= x_{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_{m_0}} \cdot \bar{s}_1 = x_{\sigma'_2} \cdot \dots \cdot x_{\sigma'_{m_0}} \cdot x_{\sigma_1} \cdot \bar{s}_1 \\ &= x_{\sigma'_2} \cdot \dots \cdot x_{\sigma'_{m_0}} \cdot x_{\sigma_{1,0}} \cdot \bar{s}'_1 = x_{\sigma_{1,0}} \cdot x_{\sigma'_2} \cdot \dots \cdot x_{\sigma'_{m_0}} \cdot \bar{s}'_1, \end{aligned}$$

где $\sigma'_j = \sigma_1 \sigma_j \sigma_1^{-1}$ и $\sigma''_j = \sigma_{1,0}^{-1} \sigma'_j \sigma_{1,0}$ для $j = 2, \dots, m$ и элемент $\bar{s}'_1 \in S_d$ такой, что $\ln(\bar{s}'_1) = k$ и $(\mathcal{S}_d)_{\bar{s}'_1} = \mathcal{S}_d$. Следовательно, согласно индуктивному предположению имеем

$$s = x_{\sigma_{1,0}} \cdot (x_{\sigma''_2} \cdot \dots \cdot x_{\sigma''_{m_0}} \cdot \bar{s}'_1) = x_{\sigma_{1,0}} \cdot (x_{\sigma_{2,0}} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_{m_0,0}} \cdot \bar{s}''_1),$$

где элемент $\bar{s}''_1 \in S_d$ такой, что $\ln(\bar{s}''_1) = k$ и $(\mathcal{S}_d)_{\bar{s}''_1} = \mathcal{S}_d$. Согласно предположению 2.4 имеем $\bar{s}''_1 = r(x_\sigma) \cdot h_{d,g}$, где $\sigma = \alpha(\bar{s}''_1) = (\sigma_{1,0} \dots \sigma_{m,0})^{-1} \alpha(s)$ и $g = \frac{k - \ln_t(x_\sigma)}{2} - d + 1$. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Пусть $s_i = x_{\sigma_{1,i}} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_{m,i}} \cdot \bar{s}_i$, $i = 1, 2$, – два элемента полугруппы $\Sigma_d^{\mathcal{S}_d}$, где элементы $\bar{s}_i \in S_{T_d}$ имеют длину $\ln(\bar{s}_1) = \ln(\bar{s}_2) = k$. Предположим, что $\alpha(s_1) = \alpha(s_2)$ и $\tau(s_1) = \tau(s_2)$. Если $k \geq 3(d-1)$, то $s_1 = s_2$.

СЛЕДСТВИЕ 2.3. Элемент Гурвица $h_{d, [\frac{d}{2}]}$ является стабилизирующим элементом полугруппы Σ_d , и, следовательно, Σ_d является стабильной полугруппой.

Также имеет место однозначность разложения на множители единицы в $\mathcal{S}_d$ и в следующем случае.

ТЕОРЕМА 2.4 [9]. Пусть $s = s_1 \cdot s_2$ и $s' = s'_1 \cdot s'_2 \in \Sigma_{d,1}$ – такие элементы, что $s_1, s'_1 \in ST_d$ и группы $(\mathcal{S}_d)_s$ и $(\mathcal{S}_d)_{s'}$ действуют транзитивно на множестве I_d . Тогда если $\tau(s) = \tau(s')$ и $\ln(s_2) = \ln(s'_2) \leq 2$, то $s = s'$.

Однако, как показывает следующий пример, теорема 2.4 становится неверной даже в случае $s, s' \in \Sigma_{d,1}^{\mathcal{S}_d}$, если $\ln(s_2) = \ln(s'_2) > 2$.

ПРИМЕР 2.1 [9]. Рассмотрим перестановки $\sigma_1 = \sigma'_1 = (1, 2, 3)(5, 6, 7, 8)$, $\sigma_2 = (1, 2)(3, 4, 5)$, $\sigma_3 = (\sigma_1 \sigma_2)^{-1} = (8, 7, 6, 5, 4, 2, 3)$ и $\sigma'_2 = (7, 8)(3, 4, 5)$, $\sigma'_3 = (\sigma'_1 \sigma'_2)^{-1} = (8, 6, 5, 4, 2, 1, 3)$ в $\mathcal{S}_8$. Тогда элементы $s = x_{\sigma_1} \cdot x_{\sigma_2} \cdot x_{\sigma_3}$ и $s' = x_{\sigma'_1} \cdot x_{\sigma'_2} \cdot x_{\sigma'_3} \in \Sigma_{8,1}^{\mathcal{S}_8}$ имеют один и тот же тип, но $s \neq s'$.

2.5. Разложения в группе $\mathcal{S}_3$. Рассмотрим полугруппу $\Sigma_{3,1} \subset \Sigma_3$. Полугруппа Σ_3 порождается элементами $x_{(1,2)}$, $x_{(1,3)}$, $x_{(2,3)}$, $x_{(1,2,3)}$ и $x_{(1,3,2)}$, связанными следующими соотношениями:

$$x_{(1,2)} \cdot x_{(1,3)} = x_{(2,3)} \cdot x_{(1,2)} = x_{(1,3)} \cdot x_{(2,3)}, \quad (2.11)$$

$$x_{(1,3)} \cdot x_{(1,2)} = x_{(2,3)} \cdot x_{(1,3)} = x_{(1,2)} \cdot x_{(2,3)}, \quad (2.12)$$

$$x_{(1,2)} \cdot x_{(1,2,3)} = x_{(1,3,2)} \cdot x_{(1,2)} = x_{(1,3)} \cdot x_{(1,3,2)} = x_{(1,2,3)} \cdot x_{(1,3)}, \quad (2.13)$$

$$x_{(1,2)} \cdot x_{(1,3,2)} = x_{(1,2,3)} \cdot x_{(1,2)} = x_{(2,3)} \cdot x_{(1,2,3)} = x_{(1,3,2)} \cdot x_{(2,3)}, \quad (2.14)$$

$$x_{(2,3)} \cdot x_{(1,3,2)} = x_{(1,2,3)} \cdot x_{(2,3)} = x_{(1,3)} \cdot x_{(1,2,3)} = x_{(1,3,2)} \cdot x_{(1,3)}, \quad (2.15)$$

$$x_{(1,2,3)} \cdot x_{(1,3,2)} = x_{(1,3,2)} \cdot x_{(1,2,3)}. \quad (2.16)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} s_1 &= x_{(1,2)}^2, & s_2 &= x_{(2,3)}^2, & s_3 &= x_{(1,3)}^2, & s_4 &= x_{(1,2,3)} \cdot x_{(1,3,2)}, \\ s_5 &= x_{(1,2,3)} \cdot x_{(1,3)} \cdot x_{(2,3)}, & s_6 &= x_{(1,2,3)}^3, & s_7 &= x_{(1,3,2)}^3. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $s_1, \dots, s_7 \in \Sigma_{3,1}$.

ТЕОРЕМА 2.5. Полугруппа $\Sigma_{3,1}$ имеет следующее копредставление:

$$\begin{aligned} \Sigma_{3,1} &= \{s_1, \dots, s_7 \mid s_i \cdot s_j = s_j \cdot s_i, \ 1 \leq i, j \leq 7; \\ &\quad s_i \cdot s_k = s_j \cdot s_k, \ 1 \leq i, j \leq 3, \ 4 \leq k \leq 7; \\ &\quad s_i \cdot s_6 = s_i \cdot s_7, \ 1 \leq i \leq 3; \\ &\quad s_1 \cdot s_2 = s_1 \cdot s_3 = s_2 \cdot s_3; \\ &\quad s_4^3 = s_6 \cdot s_7; \ s_5^2 = s_1^2 \cdot s_4; \ s_5^3 = s_1^3 \cdot s_6; \\ &\quad s_4 \cdot s_5 = s_1 \cdot s_6 = s_1 \cdot s_7\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего покажем, что элементы $s_1, \dots, s_7$ порождают полугруппу $\Sigma_{3,1}$. Действительно, предположим, что любой элемент $s \in \Sigma_{3,1}$ длины $\ln(s) \leq k$ может быть выражен через элементы $s_1, \dots, s_7$, и

рассмотрим элемент $s \in \Sigma_{3,1}$ длины $\ln(s) = k + 1$. Передвинув множители $x_{(1,2,3)}$ и $x_{(1,3,2)}$ влево, любой элемент $s \in \Sigma_{3,1}$ можем записать в следующем виде:

$$s = x_{(1,2,3)}^a \cdot x_{(1,3,2)}^b \cdot s',$$

где a, b – неотрицательные целые числа и s' – слово, состоящее из букв $x_{(1,2)}$, $x_{(1,3)}$ и $x_{(2,3)}$.

Согласно леммам 2.1, 2.2 если $\ln(s') \geq 3$, то s' может быть записан в виде $s' = x_{(i,j)}^2 \cdot s''$. Аналогично, если либо $a \geq 3$, либо $b \geq 3$, либо оба a и b положительны, то $s = s_i \cdot \tilde{s}$, где i – это либо 6, либо 7, либо 4 и $\tilde{s} \in \Sigma_{3,1}$, $\ln(\tilde{s}) \leq k - 1$. Таким образом, нам необходимо рассмотреть только случаи, когда $\ln(s') \leq 2$ и либо $0 \leq a \leq 2$, $b = 0$, либо $a = 0$, $0 \leq b \leq 2$. Если $a = b = 0$, то очевидно, что $s' = s_i$ для некоторого $i = 1, 2, 3$, так как $s = s' \in \Sigma_{3,1}$.

Рассмотрим случай $a = 1$ и $b = 0$, т.е. $s = x_{(1,2,3)} \cdot s'$. Поскольку $s \in \Sigma_{3,1}$ и $\alpha(x_{(1,2,3)}) = (1, 2, 3)$, мы имеем $\alpha(s') = (1, 3, 2)$. Следовательно, s' равен либо $x_{(1,3)} \cdot x_{(2,3)}$, либо $x_{(2,3)} \cdot x_{(1,2)}$, либо $x_{(1,2)} \cdot x_{(1,3)}$. Однако согласно соотношениям (2.11) последние три элемента равны друг другу, и в этом случае $s = s_5$.

Аналогично, если $a = 0$, $b = 1$, т.е. $s = x_{(1,3,2)} \cdot s'$, то мы получим, что s' равен либо $x_{(1,2)} \cdot x_{(2,3)}$, либо $x_{(2,3)} \cdot x_{(1,3)}$, либо $x_{(1,3)} \cdot x_{(1,2)}$, и согласно соотношениям (2.12) последние три элемента равны друг другу. Следовательно, согласно (2.13) имеем

$$\begin{aligned} s &= x_{(1,3,2)} \cdot x_{(1,2)} \cdot x_{(2,3)} = x_{(1,2)} \cdot x_{(1,2,3)} \cdot x_{(2,3)} \\ &= x_{(1,2,3)} \cdot x_{(1,3)} \cdot x_{(2,3)} = s_5. \end{aligned}$$

Если $a = 2$, $b = 0$, т.е. $s = x_{(1,2,3)}^2 \cdot s'$, то мы получаем, что $\alpha(s') = (1, 2, 3)$, и поэтому $s' = x_{(1,2)} \cdot x_{(2,3)}$. Следовательно, согласно соотношениям (2.14) имеем

$$\begin{aligned} s &= x_{(1,2,3)}^2 \cdot x_{(1,2)} \cdot x_{(2,3)} = x_{(1,2,3)} \cdot x_{(1,2)} \cdot x_{(1,3,2)} \cdot x_{(2,3)} \\ &= x_{(1,2,3)} \cdot x_{(1,3,2)} \cdot x_{(2,3)} \cdot x_{(2,3)} = s_4 \cdot s_2. \end{aligned}$$

Наконец, если $a = 0$, $b = 2$, т.е. $s = x_{(1,3,2)}^2 \cdot s'$, то мы имеем $\alpha(s') = (1, 3, 2)$, и поэтому $s' = x_{(1,3)} \cdot x_{(2,3)}$. Следовательно, согласно соотношениям (2.15) имеем

$$\begin{aligned} s &= x_{(1,3,2)}^2 \cdot x_{(1,3)} \cdot x_{(2,3)} = x_{(1,3,2)} \cdot x_{(1,3)} \cdot x_{(1,2,3)} \cdot x_{(2,3)} \\ &= x_{(1,3,2)} \cdot x_{(1,2,3)} \cdot x_{(2,3)} \cdot x_{(2,3)} = s_4 \cdot s_2, \end{aligned}$$

тем самым мы показали, что $\Sigma_{3,1}$ порождается элементами $s_1, \dots, s_7$.

Поскольку проверка того, что порождающие элементы $s_1, \dots, s_7$ полугруппы $\Sigma_{3,1}$ удовлетворяют всем соотношениям, упомянутым в формулировке теоремы 2.5, аналогична для всех соотношений, мы проверим только одно из них.

Покажем, например, что $s_4 \cdot s_5 = s_6 \cdot s_1$. Согласно соотношениям (2.11)–(2.16) имеем

$$\begin{aligned} s_4 \cdot s_5 &= x_{(1,2,3)} \cdot \overbrace{x_{(1,3,2)} \cdot x_{(1,2,3)}} \cdot x_{(1,3)} \cdot x_{(2,3)} \\ &= x_{(1,2,3)} \cdot \overbrace{(x_{(1,2,3)} \cdot x_{(1,3,2)})} \cdot x_{(1,3)} \cdot x_{(2,3)} \\ &= x_{(1,2,3)} \cdot x_{(1,2,3)} \cdot \overbrace{(x_{(1,2,3)} \cdot x_{(2,3)})} \cdot x_{(2,3)} = x_{(1,2,3)} \cdot x_{(1,2,3)} \cdot \overbrace{x_{(1,2,3)} \cdot x_{(2,3)}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x_{(1,2,3)} \cdot x_{(1,2,3)} \cdot \underline{(x_{(1,3)}^2 \cdot x_{(1,2,3)})} = x_{(1,2,3)} \cdot x_{(1,2,3)} \cdot (x_{(1,2,3)} \cdot x_{(1,2)}^2) \\
&= s_6 \cdot s_1.
\end{aligned}$$

Утверждение о том, что соотношения, упомянутые в формулировке теоремы 2.5, являются определяющими, вытекает из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2.6. *Каждый элемент $s \in \Sigma_{3,1}$, $s \neq 1$, имеет нормальную форму, т. е. он равен одному и только одному элементу одного из следующих видов:*

$$s = \begin{cases} s_i^n, & i = 1, 2, 3, \quad n \in \mathbb{N}, \\ s_4^a \cdot s_6^m \cdot s_7^n, & 0 \leq a \leq 2, \quad m \geq 0, \quad n \geq 0, \quad a + m + n > 0, \\ s_1^n \cdot s_2, & n \in \mathbb{N}, \\ s_1^n \cdot s_6^m, & m, n \in \mathbb{N}, \\ s_1^n \cdot s_6^m \cdot s_4, & m \geq 0, \quad n > 0, \\ s_1^n \cdot s_6^m \cdot s_5, & m \geq 0, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $s \notin \Sigma_{3,1}^{S_3}$, то очевидно, что s равен либо s_i^n , $i = 1, 2, 3$, либо $s_4^a \cdot s_6^m \cdot s_7^n$.

Пусть $s \in \Sigma_{3,1}^{S_3}$. Если $s \in S_{T_3,1}$, то согласно теореме Клебша–Гурвица $s = h_{3,g}$ для некоторого g .

Пусть $s = s' \cdot s''$, где $s' = x_{(1,2,3)}^{k_1} \cdot x_{(1,3,2)}^{k_2}$ и $s'' \in S_{T_3}$. Применив соотношения (2.13)–(2.16), мы можем предполагать, что $s' = x_{(1,2,3)}^k$ для $k = k_1 + k_2$. Если $k \equiv 0 \pmod{3}$, то, применив соотношения из теоремы 2.5, получим $s = s_1^n \cdot s_6^m$. Если $k \equiv 1 \pmod{3}$, то $s' = s_6^m \cdot x_{(1,2,3)}$ и $x_{(1,2,3)} \cdot s'' \in \Sigma_{3,1}$. Согласно теореме 2.5 имеем $x_{(1,2,3)} \cdot s'' = s_5 \cdot s_1^n$ при некотором $n \geq 0$. Аналогично, если $k \equiv 2 \pmod{3}$, то $s' = s_6^m \cdot x_{(1,2,3)}^2$ и $x_{(1,2,3)}^2 \cdot s'' \in \Sigma_{3,1}$. Применив соотношения (2.13)–(2.16), получим $x_{(1,2,3)}^2 \cdot s'' = x_{(1,2,3)} \cdot x_{(1,3,2)} \cdot s_1'' = s_4 \cdot s_1''$ с некоторым $s_1'' \in S_{T_3,1}$, а применив соотношения из теоремы 2.5, получим $s = s_1^n \cdot s_4 \cdot s_6^m$.

Для завершения доказательства осталось заметить, что различные нормальные формы определяют различные элементы, так как они имеют различные инварианты G_s и $\tau(s) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$.

ТЕОРЕМА 2.7. *С точностью до одновременного сопряжения элемент $\bar{s} \in \Sigma_3$ равен либо элементу s , где s – один из элементов полугруппы $\Sigma_{3,1}$, описанных в теореме 2.6, либо элементу*

$$\bar{s} = \begin{cases} x_{(1,2)}^{2k+1}, & k \geq 0, \\ x_{(1,2,3)}^n \cdot x_{(1,3,2)}^m, & n > m, \quad n - m \not\equiv 0 \pmod{3}, \\ x_{(1,2)}^n \cdot x_{(2,3)}, & n \in \mathbb{N}, \\ x_{(1,2)}^n \cdot x_{(1,2,3)}^{3m} \cdot x_{(1,3,2)}^a, & n \in \mathbb{N}, \quad m \geq 0, \quad a = 0, 1, 2, \\ & \text{и } a \neq 0, \text{ если } n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Элементы s_1^n , s_2^n и s_3^n из теоремы 2.6 сопряжены друг другу. Элементы $s_4^a \cdot s_6^m \cdot s_7^n$ и $s_4^a \cdot s_6^n \cdot s_7^m$ также являются сопряженными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.7. Чтобы доказать теорему, мы должны рассмотреть отдельно следующие случаи:

- 1) $(\mathcal{S}_3)_s = \mathcal{S}_2$;
- 2) $(\mathcal{S}_3)_s = A_3$, где A_3 – знакопеременная группа;
- 3) $s \in S_{T_3}$, $(\mathcal{S}_3)_s = \mathcal{S}_3$, и $\alpha(s)$ – либо транспозиция, либо циклическая перестановка длины 3;
- 4) $s \notin S_{T_3}$, $(\mathcal{S}_3)_s = \mathcal{S}_3$, и $\alpha(s)$ – либо транспозиция, либо циклическая перестановка длины 3.

Легко видеть, что в случаях 1)–3) элемент s равен (с точностью до сопряжения) соответственно одному из элементов $x_{(1,2)}^{2k+1}$, $x_{(1,2,3)}^n \cdot x_{(1,3,2)}^m$, $x_{(1,2)}^n \cdot x_{(2,3)}$.

В случае 4) имеем $s = s_1 \cdot s_2$, $s_1 \in S_{T_d}$ и s_2 представлен словом, составленным из букв $x_{(1,2,3)}$ и $x_{(1,3,2)}$. Согласно соотношениям (2.13) и (2.14) мы можем предполагать, что $s_1 = x_{(1,2)}^n$. Кроме того, имеем

$$x_{(1,2)} \cdot x_{(1,2,3)}^3 = x_{(1,3,2)}^3 \cdot x_{(1,2)} = x_{(1,2)} \cdot x_{(1,3,2)}^3.$$

Применив эти соотношения и (2.16), получим, что $s = x_{(1,2)}^n \cdot x_{\sigma}^{3m} \cdot x_{\sigma^{-1}}^a$, где $\sigma = (1, 2, 3)$ или $\sigma = (1, 3, 2)$. Чтобы завершить доказательство, заметим, что $\lambda((1, 2))(x_{\sigma}) = x_{\sigma^{-1}}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.4. Пусть $(\mathcal{S}_3)_s = \mathcal{S}_2$ либо $(\mathcal{S}_3)_s = \mathcal{S}_3$ для $s \in \Sigma_3$. Тогда s с точностью до одновременного сопряжения однозначно определяется своим типом $\tau(s)$ и типом $t(\alpha(s))$ своего образа $\alpha(s) \in \mathcal{S}_3$. С точностью до одновременного сопряжения существует ровно $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor + 1$ различных элементов $s \in \Sigma_{3,1}^{A_3}$ длины $\ln(s) = n$, если $n \not\equiv 1 \pmod{6}$, и если $n \equiv 1 \pmod{6}$, то существует ровно $\lfloor \frac{n}{6} \rfloor$ различных элементов $s \in \Sigma_{3,1}^{A_3}$ длины $\ln(s) = n$. Если $\alpha(s) \neq 1$, то существует ровно $m = -\lfloor \frac{-n}{3} \rfloor$ различных элементов $s \in \Sigma_3^{A_3}$ длины $\ln(s) = n$.

2.6. Вложения Кэли. Как известно, любая конечная группа G может быть вложена в некоторую симметрическую группу. В частности, если $N = |G|$ – порядок группы G , то мы имеем вложение Кэли $c: G \hookrightarrow \text{Sym}(G) \simeq \mathcal{S}_N$:

$$(g_1)\sigma_g = g_1g, \quad g, g_1 \in G, \quad c(g) = \sigma_g,$$

т. е. группа G действует сама на себе умножениями справа. отождествим группу G с ее образом $c(G)$ и обозначим через $N(G)$ и $C(G)$ соответственно нормализатор и централизатор группы G в $\mathcal{S}_N$. Поскольку $N(G)$ действует на группе G сопряжениями, мы имеем естественный гомоморфизм $a: N(G) \rightarrow \text{Aut}(G)$.

ТЕОРЕМА 2.8. Пусть $c: G \hookrightarrow \text{Sym}(G) \simeq \mathcal{S}_N$ – вложение Кэли конечной группы G . Тогда естественный гомоморфизм $a: N(G) \rightarrow \text{Aut}(G)$ имеет следующие свойства:

- (i) a является эпиморфизмом;
- (ii) $\ker a = C(G) \simeq G$;
- (iii) группа, порожденная элементами групп G и $C(G)$, изоморфна прямому произведению $G \times_C G$ с обведенной подгруппой C , где C – центр группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим автоморфизм $f \in \text{Aut}(G)$ как перестановку $\sigma_f \in \mathcal{S}_N$ элементов группы G :

$$(g)\sigma_f = f(g), \quad g \in G.$$

Покажем, что $\sigma_f \in N(G)$. Для всех $g_1 \in G$ имеем

$$\begin{aligned} (g_1)\sigma_f^{-1}\sigma_g\sigma_f &= (f^{-1}(g_1))\sigma_g\sigma_f = (f^{-1}(g_1)g)\sigma_f \\ &= f(f^{-1}(g_1)g) = g_1f(g) = (g_1)\sigma_{f(g)}, \end{aligned}$$

т.е. $\sigma_f^{-1}\sigma_g\sigma_f = \sigma_{f(g)} \in G$ для всех $g \in G$. Поэтому $\sigma_f \in N(G)$ и, более того, сопряжение элементов из G на σ_f определяет автоморфизм f группы G . Следовательно, гомоморфизм a является эпиморфизмом.

Очевидно, что $C(G) = \ker a$. Рассмотрим элемент $\sigma \in C(G)$. Имеем $\sigma_g\sigma = \sigma\sigma_g$ для всех $g \in G$. Следовательно,

$$(g_1)\sigma_g\sigma = (g_1g)\sigma = ((g_1)\sigma) \cdot g$$

для всех $g_1, g \in G$. В частности, если для $g_1 = \mathbf{1}$ мы обозначим $(\mathbf{1})\sigma$ через g_σ , то будем иметь

$$(\mathbf{1})\sigma_g\sigma = (g)\sigma = g_\sigma g$$

для всех $g \in G$. Равенство $(g)\sigma = g_\sigma g$ показывает, что σ действует на группе G как умножение с левой стороны на элемент $g_\sigma \in G$. Очевидно, что умножения в группе G слева и справа коммутируют друг с другом. Следовательно, $C(G) \simeq G$.

Напомним, что согласно определению группа G действует на себе умножениями справа. Отсюда легко видеть, что группа, порожденная элементами групп G и $C(G)$, изоморфна прямому произведению $G \times_C G$ с объединенной подгруппой, где C – центр группы G .

Любое вложение группы $G \hookrightarrow \mathcal{S}_d$ определяет вложение полугрупп $S(G, O) \hookrightarrow \Sigma_d$. Пусть $c: S_G = S(G, G) \hookrightarrow \Sigma_d$ – вложение полугрупп, определенное вложением Кэли $c: G \rightarrow \mathcal{S}_N$. Из теоремы 2.8 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.5. *Орбиты действия сопряжениями группы $\mathcal{S}_N$ на Σ_N , пересекающие полугруппу $S(G, G)$, находятся во взаимно однозначном соответствии с орбитами действия группы $\text{Aut}(G)$ на $S(G, G)$.*

§ 3. Пространства Гурвица

3.1. Отмеченные римановы поверхности. Пусть $f: C \rightarrow D_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ – риманова поверхность, т.е. f – непрерывное конечное собственное разветвленное накрытие диска $D_R = \{|z| \leq R\}$ (или проективной прямой $\mathbb{P}^1$, если $R = \infty$) степени d , разветвленное в конечном числе точек, лежащих в $D_R^0 = D_R \setminus \partial D_R = \{|z| < R\}$ (мы не предполагаем здесь, что C обязательно является связной поверхностью). Говорят, что два накрытия (C', f') и (C'', f'') диска D_R *изоморфны*, если существует гомеоморфизм $h: C' \rightarrow C''$, сохраняющий ориентацию и такой, что $f' = h \circ f''$, и говорят, что эти накрытия *эквивалентны*, если существуют сохраняющие ориентации гомеоморфизмы $\psi: D_R \rightarrow D_R$ и $\varphi: C' \rightarrow C''$ такие, что ψ оставляет неподвижными точки границы ∂D_R диска D_R и выполнено равенство $\psi \circ f' = f'' \circ \varphi$. Обозначим через $\mathcal{R}_{R,d}$ множество классов эквивалентных накрытий диска D_R степени d относительно определенного выше отношения эквивалентности.

Пусть $q_1, \dots, q_b \in D_R^0$ – точки, над которыми разветвлено накрытие f . Зафиксируем точку $o = o_R = e^{\frac{3}{2}\pi i} R \in \partial D_R$ (если $R = \infty$, то по определению $o_\infty = \infty = \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{C}$) и перенумеруем точки из $f^{-1}(o)$. Нумерация точек прообраза $f^{-1}(o)$ определяет порядок в множестве $f^{-1}(o)$. Такие накрытия (C, f) с фиксированной точкой $o \in D_R$ и фиксированным порядком на множестве точек прообраза $f^{-1}(o)$ будем называть *накрытиями с упорядоченным множеством листов*, или *отмеченными накрытиями*. Скажем, что отмеченные накрытия $(C', f')_m$ и $(C'', f'')_m$ являются *эквивалентными*, если существуют сохраняющие ориентации гомеоморфизмы $\psi: D_R \rightarrow D_R$ и $\varphi: C' \rightarrow C''$ такие, что:

- (i) ψ оставляет неподвижными точки из ∂D_R ;
- (ii) $\varphi(p'_i) = p''_i \in (f'')^{-1}(o)$ для каждой точки $p'_i \in (f')^{-1}(o)$, $i = 1, \dots, d$;
- (iii) $\psi \circ f' = f'' \circ \varphi$.

Обозначим через $\mathcal{R}_{R,d}^m$ множество классов эквивалентных отмеченных накрытий диска D_R степени d относительно этого отношения эквивалентности. Перенумерация листов определяет действие симметрической группы $\mathcal{S}_d$ на множестве $\mathcal{R}_{R,d}^m$, и легко видеть, что $\mathcal{R}_{R,d} = \mathcal{R}_{R,d}^m / \mathcal{S}_d$.

Если $R_1 < R_2 < \infty$, то любое разветвленное накрытие $f: C \rightarrow D_{R_1}$ может быть продолжено до разветвленного накрытия $\tilde{f}: \tilde{C} \rightarrow D_{R_2}$, не разветвленного над $D_{R_2} \setminus D_{R_1}$. Подъем пути

$$l(t) = e^{\frac{3}{2}\pi i} (R_2 t + (1-t)R_1) \subset D_{R_2} \setminus D_{R_1}^0, \quad t \in [0, 1],$$

в $\tilde{C}$ дает d путей $\tilde{f}^{-1}(l(t))$, соединяющих точки множества $f^{-1}(o_{R_1})$ с точками из $f^{-1}(o_{R_2})$. Если $(C, f)_m$ – отмеченное накрытие, то эти пути позволяют задать порядок на точках множества $f^{-1}(o_{R_2})$, согласованный с имеющимся порядком на точках множества $f^{-1}(o_{R_1})$. В результате мы получаем изоморфизм $i_{R_1, R_2}: \mathcal{R}_{R_1, d}^m \hookrightarrow \mathcal{R}_{R_2, d}^m$.

Аналогично, для любого отмеченного накрытия $(C, f)_m$ проективной прямой $\mathbb{P}^1$ и для любого $R > 0$ найдется эквивалентное накрытие $(\bar{C}, \bar{f})_m$, точки ветвления которого лежат в D_R^0 . Рассмотрим ограничение $\bar{f}$ накрытия $\bar{f}$ на $\tilde{C} = \bar{f}^{-1}(D_R)$. Если мы поднимем путь

$$l(t) = e^{\frac{3}{2}\pi i} R/t \subset \mathbb{P}^1 \setminus D_R^0, \quad t \in [0, 1],$$

в $\bar{C}$, то получим d путей $\bar{f}^{-1}(l(t))$, соединяющих точки из множества $f^{-1}(o_\infty)$ с точками из $f^{-1}(o_R)$ и позволяющих определить порядок на точках множества $\bar{f}^{-1}(o_R)$ по имеющемуся порядку на точках из $\bar{f}^{-1}(o_\infty)$. Очевидно, класс эквивалентности полученных отмеченных накрытий $(\bar{C}, \bar{f})_m$ не зависит от выбора представителя $(\bar{C}, \bar{f})_m$. Следовательно, мы получаем вложение $i_{\infty, R}: \mathcal{R}_{\infty, d}^m \hookrightarrow \mathcal{R}_{R, d}^m$. Легко видеть, что $i_{\infty, R_2} = i_{R_1, R_2} \circ i_{\infty, R_1}$ для любых $R_2 \geq R_1 > 0$.

3.2. Полугруппы отмеченных накрытий. Петля $\gamma \subset D_R \setminus \{q_1, \dots, q_b\}$ с началом и концом в точке $o = o_R$ может быть поднята в C при помощи накрытия f , и мы получим d путей, начинающихся и заканчивающихся в точках из $f^{-1}(o)$. Такой подъем петель определяет гомоморфизм (моногомормию отмеченных накрытий) $\mu: \pi_1(D_R \setminus \{q_1, \dots, q_b\}, o) \rightarrow \mathcal{S}_d$ в симметрическую группу $\mathcal{S}_d$ (моногомормия отображает начальные точки поднятых путей в конечные точки тех же путей). Обратно, если задан гомоморфизм $\mu: \pi_1(D_R \setminus \{q_1, \dots, q_b\}, o) \rightarrow \mathcal{S}_d$, то он определяет отмеченное накрытие $f: C \rightarrow D$ с моногомормией μ .

Фундаментальная группа $\pi_1(D_R \setminus \{q_1, \dots, q_b\}, o)$ порождается петлями $\gamma_1, \dots, \gamma_b$ следующего вида. Каждая петля γ_i состоит из пути l_i , начинающегося в точке o и заканчивающегося в точке q'_i , близкой к точке q_i , обхода в положительном направлении (относительно комплексной ориентации на $\mathbb{C}$) вдоль окружности Γ_i малого радиуса с центром в q_i , $q'_i \in \Gamma_i$, и последующего возврата в точку q_0 вдоль пути l_i в обратном направлении; при $i \neq j$ петли γ_i и γ_j имеют только одну общую точку, а именно o ; произведение $\gamma_1 \dots \gamma_b$ равно ∂D_R в группе $\pi_1(D_R \setminus \{q_1, \dots, q_b\}, o)$. Такой набор порождающих элементов называется *хорошим геометрическим базисом* группы $\pi_1(D_R \setminus \{q_1, \dots, q_b\}, o)$. Хорошо известно, что если $R < \infty$, то $\gamma_1, \dots, \gamma_b$ являются свободными порождающими группы $\pi_1(D_R \setminus \{q_1, \dots, q_b\}, o)$, т. е. $\pi_1(D_R \setminus \{q_1, \dots, q_b\}, o) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_b \rangle$; и если $R = \infty$, то $\gamma_1, \dots, \gamma_b$ порождают группу $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{q_1, \dots, q_b\}, o)$ и связаны единственным соотношением $\gamma_1 \dots \gamma_b = 1$.

Если мы выберем хороший геометрический базис $\gamma_1, \dots, \gamma_b$, то моногомормия μ определяется набором элементов $\sigma_1 = \mu(\gamma_1), \dots, \sigma_n = \mu(\gamma_b) \in \mathcal{S}_d$, называемых *локальными моногомормиями*, а произведение $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_b = \mu(\partial D)$ называется *глобальной моногомормией* накрытия f . Легко видеть, что если $R = \infty$, то глобальная моногомормия равна 1 .

Набор $(\sigma_1, \dots, \sigma_b)$ зависит от выбора хорошего геометрического базиса $\gamma_1, \dots, \gamma_b$. Любой хороший геометрический базис может быть получен из $\gamma_1, \dots, \gamma_b$ с помощью конечного числа преобразований Гурвица. Другими словами, группа кос Wg_b естественным образом действует на множестве хороших геометрических базисов группы $\pi_1(D_R \setminus \{q_1, \dots, q_b\}, o)$ как преобразования Гурвица [10]. Следовательно, если $(\sigma'_1, \dots, \sigma'_b)$ – набор, соответствующий другому геометрическому базису $\gamma'_1, \dots, \gamma'_b$, то $(\sigma'_1, \dots, \sigma'_b)$ может быть получен из набора $(\sigma_1, \dots, \sigma_b)$ с помощью конечной последовательности преобразований Гурвица (см. п. 1.3).

Пусть $R < \infty$. На множестве $\mathcal{R}_{R,d}^m$ можно определить структуру полугруппы следующим образом. Пусть $(C_1, f_1)_m$ и $(C_2, f_2)_m$ – два отмеченных накрытия степени d . Выберем два непрерывных сохраняющих ориентацию вложения $\varphi_j: D_R \rightarrow D_R$, $j = 1, 2$, диска D_R в себя, оставляющих неподвижной точку o и таких, что:

- (i) образ $\varphi_1(D_R) = \{u \in D_R \mid \text{Re } u \geq 0\}$ является правым полудиском и $\varphi_1(\{u \in \partial D_R \mid \text{Re } u \leq 0\}) = \{u \in D_R \mid \text{Re } u = 0\}$ – вертикальный диаметр;
- (ii) $\varphi_2(D_R) = \{u \in D_R \mid \text{Re } u \leq 0\}$ является левым полудиском и $\varphi_2(\{u \in \partial D_R \mid \text{Re } u \geq 0\}) = \{u \in D_R \mid \text{Re } u = 0\}$.

Отождествим точки, принадлежащие множествам $f_1^{-1}(o)$ и $f_2^{-1}(o)$, при помощи порядков, определенных на этих множествах, и после этого отождествим

по непрерывности точки, принадлежащие d путям $f_1^{-1}(\{u \in \partial D_R \mid \operatorname{Re} u \leq 0\})$ в C_1 с точками, принадлежащими d путям $f_2^{-1}(\{u \in \partial D_R \mid \operatorname{Re} u \geq 0\})$ в C_2 так, чтобы образы всех отождествленных точек совпадали при отображениях $\varphi_1 \circ f_1$ и $\varphi_2 \circ f_2$. С помощью этих отождествлений мы можем склеить поверхности C_1 и C_2 вдоль этих d путей и в результате получить отмеченное накрытие $(C, f)_m$, где $f(q) = \varphi_1(f_1(q))$, если $q \in C_1$, и $f(q) = \varphi_2(f_2(q))$, если $q \in C_2$. Назовем полученное накрытие $(C, f)_m$ *произведением* отмеченных накрытий $(C_1, f_1)_m$ и $(C_2, f_2)_m$ (обозначение: $(C, f)_m = (C_1, f_1)_m \cdot (C_2, f_2)_m$). Легко видеть, что введенное нами произведение определяет структуру некоммутативной полугруппы на множестве $\mathcal{R}_{R,d}^m$ такую, что отображения i_{R_1, R_2} являются изоморфизмами полугрупп для всех $R_1 \geq R_2 > 0$.

Очевидно, что полугруппа $\mathcal{R}_d^m = \mathcal{R}_{R,d}^m$ порождается отмеченными накрытиями $(C, f)_m$, которые являются накрытиями диска $D = D_R$ с одной только точкой ветвления q_1 . Такие накрытия однозначно определяются (с точностью до эквивалентности) своей глобальной монодромией $\sigma_f = \mu(\partial D) \in \mathcal{S}_d$, где $\mu = \mu_f$ — монодромия отмеченного накрытия $(C, f)_m$. Следовательно, число порождающих элементов равно $d!$. Обозначим через x_{σ_f} порождающий элемент полугруппы $\mathcal{R}_d$, соответствующий накрытию $(C, f)_m$ с единственной точкой ветвления. Простая проверка показывает, что в полугруппе $\mathcal{R}_d^m$ порождающие элементы x_σ удовлетворяют следующим определяющим соотношениям:

$$x_{\sigma_1} \cdot x_{\sigma_2} = x_{\sigma_2} \cdot x_{(\sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2)}, \quad x_{\sigma_1} \cdot x_{\sigma_2} = x_{(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1^{-1})} \cdot x_{\sigma_1},$$

и $x_{\sigma_1} \cdot x_1 = x_{\sigma_1}$, $x_1 \cdot x_{\sigma_2} = x_{\sigma_2}$ для всех $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_d$.

Легко проверить, что если отмеченное накрытие $(C, f)_m$ равно $x_{\sigma_1} \cdot \dots \cdot x_{\sigma_n}$ в $\mathcal{R}_d^m$, то его глобальная монодромия $\sigma_f = \mu(\partial D)$ равна произведению $\sigma_1 \dots \sigma_n$ и очевидно, что сопоставление каждому отмеченному накрытию его глобальной монодромии определяет гомоморфизм из $\mathcal{R}_d^m$ в симметрическую группу $\mathcal{S}_d$. Обозначим этот гомоморфизм через $\alpha: \mathcal{R}_d^m \rightarrow \mathcal{S}_d$.

Перенумеровки листов в отмеченных накрытиях определяют действие группы $\mathcal{S}_d$ на $\mathcal{R}_d^m$. А именно, перестановка $\sigma_0 \in \mathcal{S}_d$ действует на порождающих элементах x_σ по следующему правилу: $x_\sigma \mapsto x_{(\sigma_0^{-1} \sigma \sigma_0)}$. Это действие определяет гомоморфизм $\lambda: \mathcal{S}_d \rightarrow \operatorname{Aut}(\mathcal{R}_d^m)$. Таким образом, мы получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Полугруппа $\mathcal{R}_d^m$ как полугруппа над группой $\mathcal{S}_d$ естественным образом изоморфна полугруппе Σ_d .*

В соответствии с предложением 3.1 в дальнейшем элементы полугруппы Σ_d будем называть *разложениями на множители монодромий* накрытий степени d .

Легко видеть, что ядро $\ker \alpha = \mathcal{R}_{d,1}^m = \{(C, f)_m \in \mathcal{R}_d^m \mid \sigma_f = 1\}$ является подполугруппой полугруппы $\mathcal{R}_d^m$, оно изоморфно полугруппе $\Sigma_{d,1}$ и если диск D вложен в $\mathbb{P}^1$, то элементы полугруппы $\mathcal{R}_{d,1}^m$ — это отмеченные накрытия $\tilde{f}: C \rightarrow D$, которые могут быть продолжены до отмеченных накрытий $\tilde{f}: \tilde{C} \rightarrow \mathbb{CP}^1$, не разветвленных над $\mathbb{P}^1 \setminus D$. Отметим, что такое продолжение $\tilde{f}: \tilde{C} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ отмеченного накрытия $f: C \rightarrow D$ с глобальной монодромией $\mu_f(\partial D) = 1$ определяется однозначно с точностью до эквивалентности.

Обратное утверждение также верно: образ множества $\mathcal{R}_{\infty,d}^m$ при вложении $i_{\infty,R}$ совпадает с $\mathcal{R}_{d,1}^m$. Ниже мы будем отождествлять множество $\mathcal{R}_{\infty,d}^m$ с полугруппой $\mathcal{R}_{d,1}^m$ при помощи этого изоморфизма. В итоге мы получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. *На множестве классов эквивалентности отмеченных накрытий степени d проективной прямой $\mathbb{P}^1$ имеется естественная структура полугруппы, изоморфной полугруппе $\Sigma_{d,1}$.*

3.3. Пространства Гурвица отмеченных римановых поверхностей.

В этом пункте мы опишем пространства Гурвица $\text{HUR}_d^m(D)$ отмеченных разветвленных накрытий степени d диска $D = D_R$, рассматриваемых с точностью до изоморфизма. Пространство $\text{HUR}_d^m(D) = \bigsqcup_{b=0}^{\infty} \text{HUR}_{d,b}^m(D)$ является несвязным объединением пространств накрытий, разветвленных в b точках, $b \in \mathbb{N}$.

Как и в статье [3], рассмотрим симметрическое произведение b копий открытого диска $D^0 = D \setminus \partial D$ и обозначим его через $D^{(b)}$. Это комплексное многообразие размерности b , полученное как факторпространство произведения $D^b = D^0 \times \cdots \times D^0$ (с b множителями) при действии группы $\mathcal{S}_b$ перестановками множителей произведения. Точки пространства $D^{(b)}$ отождествляются с неупорядоченными наборами, состоящими из b точек открытого диска D^0 . Те из наборов b точек, которые содержат менее b различных точек, составляют дискриминантное множество Δ пространства $D^{(b)}$.

Для точки $B_0 = \{q_{1,0}, \dots, q_{b,0}\} \in D^{(b)} \setminus \Delta$ зафиксируем упорядочение подмножества $B_0 = \{q_{1,0}, \dots, q_{b,0}\} \subset D$ и выберем хороший геометрический базис $\gamma_1, \dots, \gamma_b$ в группе $\pi_1(D \setminus B_0, o)$. Тогда любое слово w из множества слов W_b длины b , состоящих из букв x_σ , $\sigma \in \mathcal{S}_d$, определяет отмеченное накрытие $f = f_w: C \rightarrow D$, разветвленное над B_0 , монодромия μ которого такова, что $\mu(\gamma_i) = \sigma_i$, где x_{σ_i} – буква, стоящая на i -м месте в слове w .

Выбор хорошего геометрического базиса позволяет нам выбрать стандартные порождающие элементы $a_1, \dots, a_{b-1}$ в группе $\pi_1(D^{(b)} \setminus \Delta, B_0) \simeq \text{Gr}_b$ таким образом, что этот выбор определяет действие группы Gr_b на множестве слов W_b (см. п. 1.3). Другими словами, этот выбор определяет гомоморфизм $\theta_{d,b,R}: \pi_1(D^{(b)} \setminus \Delta, B_0) \simeq \text{Gr}_b \rightarrow \mathcal{S}_N$, где $N = (d!)^b$.

Гомоморфизм $\theta_{d,b,R}$ позволяет нам определить пространство $\text{HUR}_{d,b}^m(D)$ как неразветвленное накрытие $h_{d,b,R}: \text{HUR}_{d,b}^m(D) \rightarrow D^{(b)} \setminus \Delta$, ассоциированное с гомоморфизмом $\theta_{d,b,R}$. Действительно, если мы зафиксируем отмеченное накрытие $f: C \rightarrow D$, монодромия μ которого такова, что $\mu(\gamma_i) = \sigma_i$, то любой путь $\delta(t)$, $0 \leq t \leq 1$, в $D^{(b)}$ с началом в точке B_0 может быть поднят в D и мы получим b путей $\delta_i(t)$ в D , начинающихся в точках $q_{1,0}, \dots, q_{b,0}$. Эти пути определяют (с точностью до изотопии) непрерывное семейство гомеоморфизмов $\bar{\delta}_t: D \setminus B_0 \rightarrow D \setminus \{\delta_1(t), \dots, \delta_b(t)\}$, оставляющих неподвижной точки границы ∂D , такое, что $\bar{\delta}_0 = \text{Id}$. Это семейство гомеоморфизмов определяет непрерывное семейство отмеченных накрытий $f_t: C_t \rightarrow D$, разветвленных в точках $\delta_1(t), \dots, \delta_b(t)$ и заданных монодромией μ_t такой, что $\mu_t(\bar{\delta}_{t*}(\gamma_i)) = \sigma_i$. Очевидно, что если $\delta(t)$ – замкнутый путь, то набор $(\mu_1(\gamma_1), \dots, \mu_1(\gamma_b))$ гурвиц-эквивалентен набору $(\mu_0(\gamma_1), \dots, \mu_0(\gamma_b))$. Отсюда следует, что точки накрывающего пространства $\text{HUR}_{d,b}^m(D)$ накрытия

$h_{d,b,R}: \text{HUR}_{d,b}^m(D) \rightarrow D^{(b)} \setminus \Delta$ естественным образом параметризуют все отмеченные накрытия диска D степени d , разветвленные в b точках. Степень накрытия $h_{d,b,R}$ равна $(d!)^b$. В итоге мы получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Неприводимые компоненты пространства $\text{HUR}_{d,b}^m(D)$ взаимно однозначно соответствуют элементам s полугруппы Σ_d , длины которых $\text{ln}(s) = b$. На множестве неприводимых компонент пространства $\text{HUR}_d^m(D)$ имеется естественная структура полугруппы, изоморфная структуре полугруппы $\mathcal{R}_d \simeq \Sigma_d$.*

Для $R_2 \geq R_1 > 0$ мы имеем вложение $D_{R_1}^{(b)} \hookrightarrow D_{R_2}^{(b)}$ и легко видеть, что ограничение накрытия h_{d,b,R_2} на $h_{d,b,R_1}^{-1}(D_{R_1}^{(b)} \setminus \Delta)$ может быть отождествлено с накрытием $h_{d,b,R_1}: \text{HUR}_{d,b}^m(D_{R_1}) \rightarrow D_{R_1}^{(b)} \setminus \Delta$ при помощи отображения i_{R_1,R_2} .

В соответствии с предложением 3.3 обозначим через $\text{HUR}_{d,s}^m(D)$ неприводимые компоненты пространства $\text{HUR}_{d,\text{ln}(s)}^m(D)$, соответствующие элементам $s \in \Sigma_d$. В частности, глобальная монодромия $\sigma_f = \mu(\partial D) = \alpha(s) \in \mathcal{S}_d$ является инвариантом неприводимой компоненты $\text{HUR}_{d,s}^m(D)$. Положим

$$\text{HUR}_{d,b,\sigma}^m(D) = \bigcup_{\substack{\alpha(s)=\sigma \\ \text{ln}(s)=b}} \text{HUR}_{d,s}^m(D).$$

Из вышеизложенного следует, что

$$\text{HUR}_{d,b}^m(\mathbb{P}^1) = \bigcup_{R>0} \text{HUR}_{d,b,1}^m(D_R).$$

Для фиксированного типа t элементов $s \in \Sigma_d$ обозначим

$$\text{HUR}_{d,t}^m(D) := \bigcup_{\tau(s)=t} \text{HUR}_{d,s}^m(D)$$

и положим

$$\text{HUR}_{d,t,\sigma}^m(D) = \text{HUR}_{d,t}^m(D) \cap \text{HUR}_{d,\sigma}^m(D).$$

Как было упомянуто выше, отмеченное накрытие $f: C \rightarrow D$ степени d , разветвленное в точках $q_1, \dots, q_b$, определяет монодромию $\mu: \pi_1(D \setminus \{q_1, \dots, q_b\}) \rightarrow \mathcal{S}_d$ (и определяется ею). Образ $\mu(\pi_1(D \setminus \{q_1, \dots, q_b\})) = \text{Gal}(f) \subset \mathcal{S}_d$ называется *группой Галуа* накрытия f . Легко видеть, что $\text{Gal}(f) = (\mathcal{S}_d)_s$, если накрытие f принадлежит пространству $\text{HUR}_{d,s}^m(D)$. Нетрудно показать, что накрывающее пространство C отмеченного накрытия $(C, f)_m$ является связным тогда и только тогда, когда группа Галуа $\text{Gal}(f)$ действует транзитивно на множестве $I_d = [1, d]$.

Обозначим через $\text{HUR}_d^{m,G}(D)$ объединение неприводимых компонент пространства $\text{HUR}_d^m(D)$, состоящих из накрытий с группой Галуа $\text{Gal}(f) = G \subset \mathcal{S}_d$, и положим

$$\begin{aligned} \text{HUR}_{d,t}^{m,G}(D) &= \text{HUR}_d^{m,G}(D) \cap \text{HUR}_{d,t}^m(D), \\ \text{HUR}_{d,t,\sigma}^{m,G}(D) &= \text{HUR}_{d,t}^{m,G}(D) \cap \text{HUR}_{d,t,\sigma}^m(D). \end{aligned}$$

Согласно следствию 2.2 верна

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть тип t разложения монодромии содержит k транспозиций. Если $k \geq 3(d-1)$, то каждая неприводимая компонента пространства $\text{HUR}_{d,t}^{m,S_d}(D)$ однозначно определяется глобальной монодромией $\sigma_f = \mu(\partial D) \in \mathcal{S}_d$ накрытия $(C, f)_m$, принадлежащего этой неприводимой компоненте.

3.4. Пространства Гурвица (неотмеченных) накрытий диска. Чтобы получить пространство Гурвица $\text{HUR}_{d,b}(D)$ накрытий диска $D = D_R$ степени d , разветвленных над b точками, лежащими в D^0 , нам надо отождествить все отмеченные накрытия диска D , отличающиеся друг от друга только нумерацией листов. Перенумерация листов индуцируется действием группы $\mathcal{S}_d$ на отмеченных слоях. Напомним, что действия групп Br_b и $\mathcal{S}_d$ на множестве W_b коммутируют. Поэтому действие группы $\mathcal{S}_d$ индуцирует действие на пространстве $\text{HUR}_{d,b}^m(D)$, и мы получаем, что пространство $\text{HUR}_{d,b}(D)$ является факторпространством относительно этого действия: $\text{HUR}_{d,b}(D) = \text{HUR}_{d,b}^m(D)/\mathcal{S}_d$. Отсюда следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Неприводимые компоненты пространства $\text{HUR}_{d,b}(D)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с орбитами действия группы $\mathcal{S}_d$ одновременными сопряжениями на множестве $\Sigma_{d,b} = \{s \in \Sigma_d \mid \text{ln}(s) = b\}$.

Если $f: C \rightarrow D$ – неотмеченное накрытие, то мы также можем определить группу Галуа накрытия как $\text{Gal}(f) = (\mathcal{S}_d)_s$. Однако в этом случае подгруппа $\text{Gal}(f)$ симметрической группы $\mathcal{S}_d$ определяется не однозначно, а только с точностью до внутренних автоморфизмов группы $\mathcal{S}_d$.

Ниже мы будем использовать следующие обозначения: $\text{HUR}_{\cdot,\cdot,\cdot}(D)$ (соответственно, $\text{HUR}_{\cdot,\cdot,\cdot}^G(D)$) – образ определенных выше подпространств $\text{HUR}_{d,b}^m(D)$ (соответственно, $\text{HUR}_{d,b}^{m,G}(D)$) пространства $\text{HUR}_{d,b}^m(D)$ при каноническом отображении

$$\text{HUR}_{d,b}^m(D) \rightarrow \text{HUR}_{d,b}(D) = \text{HUR}_{d,b}^m(D)/\mathcal{S}_d.$$

В частности, имеем $\text{HUR}_{d,s_1}(D) = \text{HUR}_{d,s_2}(D)$ тогда и только тогда, когда существует такая перестановка $\sigma \in \mathcal{S}_d$, что $\lambda(\sigma)(s_1) = s_2$.

Следствие 2.4 дает полное описание неприводимых компонент пространства $\text{HUR}_{d,b}(D)$ в случае $d = 3$.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Если $G \simeq \mathcal{S}_2$ или $G \simeq \mathcal{S}_3$, то неприводимые компоненты пространства $\text{HUR}_{3,b}^G(D)$ однозначно определяются типом разложения на множители монодромии и типом глобальной монодромии. Если глобальная монодромия равна $\mathbf{1}$, то пространство $\text{HUR}_{3,b}^{A_3}(D)$ состоит из $m = \lfloor \frac{b}{6} \rfloor + 1$ неприводимых компонент, если $b \not\equiv 1 \pmod{6}$, и состоит из $\lfloor \frac{b}{6} \rfloor$ неприводимых компонент, если $b \equiv 1 \pmod{6}$. Пространство $\text{HUR}_{3,b}^{A_3}(D)$ состоит из $m = -\lfloor \frac{-b}{3} \rfloor$ неприводимых компонент, если глобальная монодромия не равна $\mathbf{1}$.

3.5. Пространства Гурвица (неотмеченных) накрытий прямой $\mathbb{P}^1$. В работе [3] пространства Гурвица $\text{HUR}_{d,b}(\mathbb{P}^1)$ накрытий проективной прямой $\mathbb{P}^1$ степени d , разветвленных над b точками, были описаны как неразветвленные накрытия дополнения к дискриминантному множеству Δ в симметрическом произведении $\mathbb{P}^{(b)}$ b копий проективной прямой $\mathbb{P}^1$. Выбор точки

$\infty \in \mathbb{P}^1$ и отождествление аффинной прямой $\mathbb{C}$ с $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$ определяет вложение пространства $\text{HUR}_{d,b}(D_\infty)$ в $\text{HUR}_{d,b}(\mathbb{P}^1)$ в виде открытого всюду плотного множества. Таким образом, мы получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. *Неприводимые компоненты пространства $\text{HUR}_{d,b}(\mathbb{P}^1)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с орбитами действия группы $\mathcal{S}_d$ одновременными сопряжениями на множестве $\Sigma_{d,1,b} = \{s \in \Sigma_{d,1} \mid \ln(s) = b\}$.*

Как и в п. 3.4, мы можем рассмотреть объединения $\text{HUR}_{\cdot,\cdot,\cdot}(\mathbb{P}^1)$ (соответственно, $\text{HUR}_{\cdot,\cdot,\cdot}^G(\mathbb{P}^1)$) неприводимых компонент пространства $\text{HUR}_{d,b}(\mathbb{P}^1)$ для фиксированных элементов полугруппы $\Sigma_{b,1}$, для фиксированных типов разложения на множители монодромий, для фиксированных групп Галуа и т.д.

Как следствие из предложения 1.1, верна

ТЕОРЕМА 3.2. *На множестве неприводимых компонент пространства Гурвица $\text{HUR}_d^{S_d}(\mathbb{P}^1)$ существует естественная структура полугруппы $\Sigma_{d,1}^{S_d} = \{s \in \Sigma_{d,1} \mid (S_d)_s = S_d\}$.*

Из теорем 2.3, 2.4 и следствия 2.4 получаем следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 3.3. *Пространство $\text{HUR}_{d,t}^{S_d}(\mathbb{P}^1)$ неприводимо, если тип t разложения на множители монодромии содержит не менее $3(d-1)$ транспозиций.*

ТЕОРЕМА 3.4 [9]. *Пусть G – транзитивная подгруппа симметрической группы $\mathcal{S}_d$. Тогда пространство $\text{HUR}_{d,t}^G(\mathbb{P}^1)$ неприводимо, если тип t разложения на множители монодромии содержит не менее $l-2$ транспозиций, где l – длина типа монодромии (другими словами, l – число точек ветвления накрытий).*

ТЕОРЕМА 3.5. *В случае $G \simeq S_2$ или $G \simeq S_3$ неприводимые компоненты пространства $\text{HUR}_{3,b}^G(\mathbb{P}^1)$ однозначно определяются своим типом разложения на множители монодромии. Пространство $\text{HUR}_{3,b}^{A_3}(\mathbb{P}^1)$ состоит из $m = \lfloor \frac{b}{6} \rfloor + 1$ неприводимых компонент, если $b \not\equiv 1 \pmod{6}$, и состоит из $\lfloor \frac{b}{6} \rfloor$ неприводимых компонент, если $b \equiv 1 \pmod{6}$.*

3.6. Пространства Гурвица накрытий Галуа. Пусть $f: C \rightarrow \mathbb{P}^1$ – накрытие Галуа с группой Галуа $G = \text{Gal}(C/\mathbb{P}^1)$, т.е. G является группой накрывающих преобразований накрытия f и факторпространство C/G совпадает с $\mathbb{P}^1$. В этом случае мы имеем $\deg f = |G|$, и если фиксирована точка $\infty \in \mathbb{P}^1$, над которой f не разветвлено и, кроме того, фиксирована точка $e \in f^{-1}(\infty)$, то действие группы G на слое $f^{-1}(\infty)$ определяет нумерацию точек из $f^{-1}(\infty)$ элементами группы G . Если мы перенумеруем точки, принадлежащие слою $f^{-1}(\infty)$, целыми числами отрезка $I_{|G|} = [1, |G|]$, то эти нумерации определяют вложение $G \hookrightarrow S_{|G|}$. Легко видеть, что это вложение Кэли. Следовательно, пространство Гурвица $\text{HUR}_{|G|,1}^G(\mathbb{P}^1)$ накрытий Галуа с группой Галуа G может быть отождествлено с пространством $\text{HUR}_{|G|,1}^G(\mathbb{P}^1)$, и, в частности, естественное отображение

$$\text{HUR}_{|G|,1}^{m,G}(\mathbb{P}^1) \rightarrow \text{HUR}_{|G|,1}^G(\mathbb{P}^1) = \text{HUR}^G(\mathbb{P}^1) \quad (3.1)$$

является сюръективным неразветвленным морфизмом.

ТЕОРЕМА 3.6. *Неприводимые компоненты пространства $\text{HUR}^G(\mathbb{P}^1)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с орбитами элементов $s \in S_G^G \subset S(G, G)$ при действии группы $\text{Aut}(G)$ на полугруппе $S(G, G)$. Если $\text{Aut}(G) = G$, то на множестве неприводимых компонент пространства $\text{HUR}^G(\mathbb{P}^1)$ имеется естественная структура полугруппы $S_{G,1}^G$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть теоремы следует из следствия 2.5.

Чтобы доказать вторую часть, заметим, что равенство $\text{Aut}(G) = G$ означает, что любой автоморфизм группы G является внутренним. Согласно предложению 1.1 элементы полугруппы $S_{G,1}^G$ остаются неподвижными при действии группы G одновременными сопряжениями. Поэтому согласно следствию 2.5 естественное отображение (3.1) является изоморфизмом, который дает искомую структуру полугруппы на пространстве $\text{HUR}^G(\mathbb{P}^1)$.

В частности, теорема 3.6 и следствие 2.4 влекут следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.7. *Неприводимые компоненты пространства $\text{HUR}^{S_3}(\mathbb{P}^1)$ накрытий Галуа с группой Галуа $G = S_3$ однозначно определяются типом разложения монодромии на множители принадлежащих им накрытий.*

Список литературы

1. A. Clebsch, “Zur Theorie der Riemann’schen Fläche”, *Math. Ann.*, **6**:2 (1873), 216–230.
2. A. Hurwitz, “Ueber Riemann’sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten”, *Math. Ann.*, **39**:1 (1891), 1–60.
3. W. Fulton, “Hurwitz schemes and irreducibility of moduli of algebraic curves”, *Ann. of Math.* (2), **90**:3 (1969), 542–575.
4. M. Fried, R. Biggers, “Moduli spaces of covers and the Hurwitz monodromy group”, *J. Reine Angew. Math.*, **335** (1982), 87–121.
5. M. D. Fried, H. Völklein, “The inverse Galois problem and rational points on moduli spaces”, *Math. Ann.*, **290**:1 (1991), 771–800.
6. V. Kanev, “Hurwitz spaces of Galois coverings of $\mathbb{P}^1$, whose Galois groups are Weyl groups”, *J. Algebra*, **305**:1 (2006), 442–456.
7. P. Kluitmann, “Hurwitz action and finite quotients of braid groups”, *Braids* (Santa Cruz, CA, 1986), *Contemp. Math.*, **78**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, 299–325.
8. S. Mochizuki, “The geometry of the compactification of the Hurwitz scheme”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **31**:3 (1995), 355–441.
9. B. Wajnryb, “Orbits of Hurwitz action for coverings of a sphere with two special fibers”, *Indag. Math. (N.S.)*, **7**:4 (1996), 549–558.
10. B. Moishezon, M. Teicher, “Braid group technique in complex geometry. I. Line arrangements in $\mathbb{CP}^2$ ”, *Braids* (Santa Cruz, CA, 1986), *Contemp. Math.*, **78**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, 425–555.
11. Вик. С. Куликов, В. М. Харламов, “О брэйд-монодромных разложениях на множители”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:3 (2003), 79–118; англ. пер.: V. M. Kharlamov, V. S. Kulikov, “On braid monodromy factorizations”, *Izv. Math.*, **67**:3 (2003), 499–534.

12. D. Auroux, “A stable classification of Lefschetz fibrations”, *Geom. Topol.*, **9** (2005), 203–217.
13. Вик. С. Куликов, “Кривые Гурвица”, *УМН*, **62**:6 (2007), 3–86; англ. пер.: V. S. Kulikov, “Hurwitz curves”, *Russian Math. Surveys*, **62**:6 (2007), 1043–1119.
14. Ю. А. Кузьмин, “Об одном способе построения C -групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:4 (1995), 105–124; англ. пер.: Yu. V. Kuz'min, “On a method of constructing C -groups”, *Izv. Math.*, **59**:4 (1995), 765–783.

Вик. С. Куликов (Vik. S. Kulikov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: kulikov@mi.ras.ru

Поступило в редакцию

15.03.2010

07.07.2010