Общероссийский математический портал

О. А. Матевосян, О решениях смешанных краевых задач для системы теории упругости в неограниченных областях, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 5, 49–82

DOI: <https://doi.org/10.4213/im451>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 13:26:53

УДК 517.95

О. А. Матевосян

О решениях смешанных краевых задач для системы теории упругости в неограниченных областях

Изучены свойства обобщенных решений смешанных краевых задач для стационарной линейной системы теории упругости во внешности компакта и в полупространстве в предположении, что обобщенные решения этих задач обладают конечным интегралом энергии с весом $|x|^a$. В зависимости от значения параметра a получен критерий единственности решений смешанных краевых задач, а также найдены точные формулы для вычисления размерности пространства решений этих же задач.

Библиография: 21 наименование.

Введение

Рассматривается стационарная линейная система теории упругости

$$Lu \equiv (Lu)_i = \sum_{j,k,h=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_h} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с границей $\partial\Omega \in C^1$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ – замыкание Ω , $x = (x_1, \dots, x_n)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Здесь и далее суммирование проводится по индексам, изменяющимся от 1 до n . Предполагается, что коэффициенты постоянны и выполнены условия:

$$a_{kh}^{ij} = a_{hk}^{ji} = a_{ih}^{kj}, \quad \lambda_1 |\xi|^2 \leq a_{kh}^{ij} \xi_k^i \xi_h^j \leq \lambda_2 |\xi|^2,$$

где $\xi = \{\xi_k^i\}$ – произвольная симметрическая матрица, $\xi_k^i = \xi_i^k$, $|\xi|^2 = \xi_k^i \xi_k^i$, λ_1, λ_2 – положительные постоянные.

Введем обозначения: $C_0^\infty(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций в Ω , имеющих компактный носитель в Ω ; $H^1(\Omega, \Gamma)$, $\Gamma \subset \bar{\Omega}$, – пространство, полученное пополнением множества функций из $C^\infty(\bar{\Omega})$, равных нулю в окрестности Γ , по норме

$$\|u(x); H^1(\Omega, \Gamma)\| = \left(\int_{\Omega} \left(|u(x)|^2 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \right)^2 \right) dx \right)^{1/2};$$

если $\Gamma = \emptyset$, то пространство $H^1(\Omega, \Gamma)$ будем обозначать $H^1(\Omega)$; $\overset{\circ}{H}^1(\Omega)$ – пространство функций, полученное пополнением множества функций из $C_0^\infty(\Omega)$ по норме пространства Соболева $H^1(\Omega)$; $\overset{\circ}{H}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ – пространство функций в Ω , полученное пополнением множества функций из $C_0^\infty(\Omega)$ в системе полунорм $\|u(x); H^1(K_0)\|$, где $K_0 \subset \bar{\Omega}$ – произвольный компакт.

Положим

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$ – целые числа, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Пусть

$$\begin{aligned} D(u(x), \Omega) &= \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx, & E(u(x), \Omega) &= \int_{\Omega} |\varepsilon(u)|^2 dx, \\ D_a(u(x), \Omega) &= \int_{\Omega} |x|^a |\nabla u(x)|^2 dx, & E_a(u(x), \Omega) &= \int_{\Omega} |x|^a |\varepsilon(u)|^2 dx, \end{aligned}$$

где

$$|\nabla u(x)|^2 = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2, \quad |\varepsilon(u)|^2 = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2,$$

и обозначим $\Omega_R = \Omega \cap \{x: |x| < R\}$, $\partial\Omega_R = \partial\Omega \cup \{x: |x| = R\}$.

Конус K в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в начале координат – это такая область, что если $x \in K$, то $\lambda x \in K$ при всех $\lambda > 0$. Будем предполагать, что начало координат $x_0 = 0$ находится вне $\bar{\Omega}$.

Краевые задачи для системы теории упругости в ограниченных областях достаточно полно изучены. Изложение основных фактов этой теории можно найти в монографии [1]. В работах [2]–[5] для ограниченных и широкого класса неограниченных областей установлены обобщения неравенств Корна и Харди, с помощью которых исследованы основные краевые задачи для системы теории упругости, рассмотренных также в [6], [7]. В работе [7] при использовании неравенств Корна и Харди изучаются единственность и устойчивость обобщенных решений смешанной краевой задачи для системы теории упругости в неограниченной области с условием конечности $E(u(x), \Omega)$.

Как известно, в случае, когда Ω – неограниченная область, следует дополнительно охарактеризовать поведение решения на бесконечности. Как правило, для этой цели служит либо условие конечности интеграла Дирихле $D(u(x), \Omega)$ или интеграла энергии $E(u(x), \Omega)$, либо условие на характер убывания модуля решения при $|x| \rightarrow \infty$.

Подобного рода “условия на бесконечности” заимствованы из физики, являются “естественными” и изучались рядом авторов (см., например, [2]–[4], [6]–[9]).

В настоящей работе изучаются свойства обобщенных решений смешанных краевых задач для системы теории упругости в неограниченной области Ω с условием ограниченности весового интеграла энергии:

$$E_a(u(x), \Omega) < \infty, \quad a \in \mathbb{R}.$$

При том же условии поведения решения на бесконечности в разных классах неограниченных областей автором [10]–[13] изучены вопросы единственности и найдены размерности пространства решений краевых задач для системы теории упругости и бигармонического уравнения.

Развивая подход, основанный на использовании неравенств типа Корна и Харди [2]–[5], в настоящей статье удалось получить критерий единственности решений краевых задач для системы теории упругости. Для построения решений используется вариационный метод, т.е. минимизируется соответствующий функционал в классе допустимых функций.

Настоящая работа содержит полные доказательства результатов, анонсированных в [10] и [11].

§ 1. Смешанная задача I

Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \overline{G}$ с границей $\partial\Omega \in C^1$, где G – ограниченная односвязная область (или объединение конечного числа таких областей) в $\mathbb{R}^n$. Пусть $\partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\text{mes}_{n-1} \Gamma_1 \neq 0$.

Для системы (1) будем рассматривать следующую краевую задачу: найти вектор-функцию $u(x)$, удовлетворяющую системе (1) в Ω и однородному граничному условию

$$u(x) = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad \sigma(u) = 0 \text{ на } \Gamma_2, \quad (2)$$

где $\sigma(u) = (\sigma_1(u), \dots, \sigma_n(u))$, $\sigma_i(u) \equiv a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_h} \nu_k$, $i = 1, \dots, n$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ – единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Прежде чем перейти к рассмотрению краевой задачи (1), (2), докажем две вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $u(x)$ – решение системы (1) в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию $E_a(u(x), \Omega) < \infty$. Тогда

$$u(x) = P(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x), \quad x \in \Omega, \quad (3)$$

где $P(x)$ – многочлен, $\text{ord } P(x) \leq m = \max\{1, 1 - n/2 - a/2\}$, $\Gamma(x)$ – фундаментальное решение системы (1), $C_\alpha = \text{const}$, $\beta_0 = 1 - n/2 + a/2$, $\beta \geq 0$ – целое число, а для функции $u^\beta(x)$ справедлива оценка

$$|D^\gamma u^\beta(x)| \leq C_{\gamma\beta}(a, u) |x|^{1-n-\beta-|\gamma|}$$

для любого мультииндекса γ , $C_{\gamma\beta} = \text{const}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Как известно [14], существует фундаментальное решение $\Gamma(x)$, для которого при $n > 2$ имеет место следующая оценка:

$$|D^\alpha \Gamma(x)| \leq C(\alpha) |x|^{2-n-|\alpha|}, \quad C(\alpha) = \text{const}.$$

В случае $n = 2$ фундаментальное решение представляется в виде $\Gamma(x) = S(x) \times \ln |x| + T(x)$, где $S(x)$ и $T(x)$ – квадратные матрицы порядка 2, элементы которых – однородные функции порядка нуля [15].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Рассмотрим вектор-функцию $v(x) = \theta_N(x)u(x)$, где $\theta_N(x) = \theta(\frac{|x|}{N})$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta(s) = 0$ при $s \leq 1$, $\theta(s) = 1$ при $s \geq 2$, причем $N \gg 1$ и $G \subset \{x: |x| < N\}$. Продолжим $v(x)$ на $\mathbb{R}^n$, полагая $v(x) = 0$ на $\overline{G} = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Тогда вектор-функция $v(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет системе

$$Lv(x) = F_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $F_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } F_i \subset \{x: |x| < 2N\}$. Легко видеть, что $E_a(v(x), \mathbb{R}^n) < \infty$. Если $a + n \neq 0$, то из неравенства Корна [2, § 3, неравенство (1)] следует, что $v(x) = w(x) + Ax$, где A – постоянная кососимметрическая матрица и $w(x)$ такова, что $D_a(w(x), \Omega) < \infty$.

Теперь можно использовать теорему 1 из [16], поскольку она основывается на лемме 2 из [16], в которой никаких ограничений на знак σ' не существует. Следовательно, разложение

$$w(x) = P_0(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + w^\beta(x)$$

справедливо для любого a , где $P_0(x)$ – многочлен, $\text{ord } P_0(x) \leq \max\{1, 1 - n/2 - a/2\}$, $C_\alpha = \text{const}$, $\beta_0 = 1 - n/2 + a/2$ и

$$|D^\gamma w^\beta(x)| \leq C_{\gamma\beta} |x|^{1-n-\beta-|\gamma|}, \quad C_{\gamma\beta} = \text{const}.$$

Отсюда и из определения $v(x)$ следует равенство (3), где $P(x) = P_0(x) + Ax$.

Пусть теперь $a + n = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$E_{-n-\varepsilon}(v(x), \mathbb{R}^n) \leq E_{-n}(v(x), \mathbb{R}^n) < \infty.$$

В силу неравенства Корна [2, §3, неравенство (1)] существует постоянная кососимметрическая матрица A такая, что

$$D_{-n-\varepsilon}(v(x) - Ax, \mathbb{R}^n) \leq CE_{-n-\varepsilon}(v(x), \mathbb{R}^n) < \infty,$$

где постоянная C не зависит от $v(x)$. Следовательно, используя [16, теорема 1], имеем

$$v(x) - Ax = P_0(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x),$$

причем $P_0(x)$ – многочлен такой, что $\text{ord } P_0(x) \leq 1$, $C_\alpha = \text{const}$, $\beta_0 = 1 - n/2 + a/2$ и

$$|D^\gamma v^\beta(x)| \leq C_{\gamma\beta} |x|^{1-n-\beta-|\gamma|}, \quad C_{\gamma\beta} = \text{const}.$$

Таким образом,

$$v(x) - Ax = P_0(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x),$$

откуда следует утверждение леммы при $a = -n$.

ЛЕММА 2. Пусть $u(x)$ – решение системы (1) в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ для некоторого $a \geq 0$. Тогда для любого $x \in \Omega$ имеет место равенство (3) с приведенной выше оценкой для $u^\beta(x)$, причем $P(x) = Ax + B$, где A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x)$ – решение системы (1) в Ω . Тогда согласно лемме 1 имеем

$$u(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $\text{ord } P(x) \leq 1$,

$$R(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x), \quad R(x) = O(|x|^{2-n}), \quad n > 2.$$

Докажем, что $P(x) = Ax + B$, где A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор. Очевидно, что если $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ и $a \geq 0$, то $E(u(x), \Omega) < \infty$.

Пусть $n > 2$. Легко проверить, что $E(R(x), \Omega) < \infty$ при $n > 2$. Следовательно, по неравенству треугольника имеем $E(P(x), \Omega) < \infty$.

Пусть $P(x) = Ax + B$, т.е. $P_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i$. Имеем

$$E(P(x), \Omega) = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} + a_{ji})^2 dx,$$

где a_{ij} – элементы матрицы A . Последний интеграл сходится только в том случае, если $a_{ij} = -a_{ji}$, т.е. A – постоянная кососимметрическая матрица.

Рассмотрим случай $n = 2$. Известно [15], что $\Gamma(x) = S(x) \ln |x| + T(x)$, где $S(x)$ и $T(x)$ – (2×2) -матрицы, элементы которых – однородные функции порядка нуля. Тогда $\nabla \Gamma(x) = O(|x|^{-1} \ln |x|)$, следовательно, $\nabla R(x) = O(|x|^{-1} \ln |x|)$. Пусть существуют такие k, l , что $a_{kl} + a_{lk} \neq 0$. Тогда

$$|e_{kl}(u)| = |a_{kl} + a_{lk} + O(|x|^{-1} \ln |x|)| \geq \frac{1}{2} |a_{kl} + a_{lk}| \quad \text{при } |x| \gg 1.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \infty > E(u(x), \Omega) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n |e_{ij}(u)|^2 dx \geq \int_{\Omega} |e_{kl}(u)|^2 dx \\ &\geq \frac{1}{4} \int_{|x| > H} |a_{kl} + a_{lk}|^2 dx = \infty. \end{aligned}$$

Полученное противоречие показывает, что $a_{kl} = -a_{lk}$ для любых k, l . Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обобщенным решением смешанной задачи I для системы (1) с граничным условием (2) будем называть вектор-функцию $u(x)$ такую, что $u(x) \in H^1(\omega, \Gamma_1 \cap \partial\omega)$ для любой ограниченной области $\omega \subset \Omega$, и при этом для любой вектор-функции $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) = 0$ на Γ_1 , выполнено интегральное тождество

$$\int_{\Omega} a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_h} \frac{\partial \psi_i(x)}{\partial x_k} dx = 0. \quad (4)$$

Обозначим через $\text{Ker}_0(L)$ пространство обобщенных решений смешанной задачи I для системы (1) с граничным условием (2), имеющих конечный интеграл энергии, т.е.

$$\text{Ker}_0(L) = \{u(x) : Lu = 0, u(x)|_{\Gamma_1} = 0, \sigma(u)|_{\Gamma_2} = 0, E(u(x), \Omega) < \infty\}.$$

Положим по определению

$$\text{Ker}_a(L) = \{u(x) : Lu = 0, u(x)|_{\Gamma_1} = 0, \sigma(u)|_{\Gamma_2} = 0, E_a(u(x), \Omega) < \infty\}.$$

Через $\dim \text{Ker}_0(L)$ и $\dim \text{Ker}_a(L)$ обозначим размерности пространств $\text{Ker}_0(L)$ и $\text{Ker}_a(L)$ соответственно.

Будем вычислять значения $\dim \text{Ker}_a(L)$ в зависимости от параметра a .

Докажем, что если $a \geq 0$, то при $n > 2$ $\dim \text{Ker}_a(L) \leq n(n+1)/2$, а при $n = 2$ $\dim \text{Ker}_a(L) \leq 1$.

Действительно, если $a \geq 0$, то $\text{Ker}_a(L) \subset \text{Ker}_0(L)$ и $\dim \text{Ker}_a(L) \leq \dim \text{Ker}_0(L)$. Отсюда и из [2, § 4, теорема 4] следуют указанные выше неравенства.

ТЕОРЕМА 1. Если $-n \leq a < n - 2$, $n \geq 2$, то

$$\dim \text{Ker}_a(L) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай, когда $0 \leq a < n - 2$ при $n > 2$. Очевидно, что $\text{Ker}_a(L) \subset \text{Ker}_0(L)$, если $a \geq 0$.

Докажем, что $\text{Ker}_0(L) \subset \text{Ker}_a(L)$, если $a < n - 2$. Действительно, пусть $u(x) \in \text{Ker}_0(L)$. Согласно лемме 2 имеет место равенство (3):

$$u(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x) = Ax + B$, A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор, $R(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x)$.

Легко проверить, что $E_a(R(x), \Omega) < \infty$ и $E_a(P(x), \Omega) = 0$ при $0 \leq a < n - 2$. Отсюда следует, что $E_a(u(x), \Omega) < \infty$, т.е. $u(x) \in \text{Ker}_a(L)$. Таким образом, $\text{Ker}_0(L) \subset \text{Ker}_a(L)$.

Итак, $\text{Ker}_a(L) = \text{Ker}_0(L)$ и $\dim \text{Ker}_a(L) = \dim \text{Ker}_0(L)$. Следовательно, по теореме 4 из [2, § 4] имеем $\dim \text{Ker}_a(L) = n(n+1)/2$.

Теперь рассмотрим случай, когда $-n \leq a < 0$ и $n > 2$. Пусть $u(x) \in \text{Ker}_a(L)$, где $-n \leq a < 0$. Согласно неравенству Корна [2, § 3, неравенство (43)] существует постоянная кососимметрическая матрица A такая, что

$$D_a(u(x) - Ax, \Omega) \leq CE_a(u(x), \Omega),$$

где постоянная C не зависит от u .

Для функции $v(x) = u(x) - Ax$ имеем $D_a(v(x), \Omega) < \infty$ и $E_a(v(x), \Omega) < \infty$. Кроме того, $v(x)$ – решение системы (1) в Ω , следовательно, по лемме 1 оно имеет вид (3):

$$v(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $R(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x)$.

Докажем, что $\text{ord } P(x) = 0$. Сначала установим неравенство $D_a(P(x), \Omega) < \infty$. Имеем $D_a(v(x), \Omega) < \infty$, и легко проверить, что $D_a(R(x), \Omega) < \infty$ при $-n \leq a < 0$. Тогда по неравенству треугольника $D_a(P(x), \Omega) < \infty$.

Пусть $\text{ord } P(x) = k$ и $k \neq 0$. Тогда внутри некоторого конуса K выполняется неравенство $|\nabla P(x)| \geq C|x|^{k-1}$. Следовательно,

$$\infty > D_a(P(x), \Omega) = \int_{\Omega} |x|^a |\nabla P(x)|^2 dx \geq C \int_{K \cap \{x: |x| > H\}} |x|^{a+2k-2+n} |x|^{-1} d|x|.$$

Последний интеграл сходится только в том случае, если $a + 2k - 2 + n < 0$, т.е. $k < 1$; значит, $\text{ord } P(x) = 0$ и $P(x) = B$, где B – постоянный вектор. Тем самым $v(x) = B + R(x)$.

С другой стороны, $v(x) = u(x) - Ax$. Таким образом, $u(x) = Ax + B + R(x)$, где A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор. Легко проверить, что $E(R(x), \Omega) < \infty$ и $E(Ax + B, \Omega) = 0$. Следовательно, $E(u(x), \Omega) < \infty$, т.е. $u(x) \in \text{Ker}_0(L)$. Получили, что $\text{Ker}_a(L) \subset \text{Ker}_0(L)$. Кроме того, очевидно, что $\text{Ker}_0(L) \subset \text{Ker}_a(L)$, если $a < 0$.

Итак, $\text{Ker}_a(L) = \text{Ker}_0(L)$ и $\dim \text{Ker}_a(L) = \dim \text{Ker}_0(L)$. В силу теоремы 4 из [2, §4] имеем $\dim \text{Ker}_0(L) = n(n+1)/2$. Следовательно, $\dim \text{Ker}_a(L) = n(n+1)/2$.

Пусть теперь $n = 2$. Для нетривиальной постоянной кососимметрической матрицы A построим обобщенное решение $u_A(x)$ смешанной задачи I для системы (1) в Ω с граничным условием $u_A(x)|_{\Gamma_1} = Ax$, $\sigma(u_A)|_{\Gamma_2} = 0$, минимизируя функционал

$$J(v) = \int_{\Omega} a_{kh}^{ij} \frac{\partial v_j(x)}{\partial x_h} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_k} dx$$

в классе функций $\{v(x): v(x) \in C^\infty(\bar{\Omega}), v_A(x)|_{\Gamma_1} = Ax, \sigma(v_A)|_{\Gamma_2} = 0, v(x) \text{ имеет компактный носитель в } \bar{\Omega}\}$. Таким образом полученное решение удовлетворяет условиям $E(u_A(x), \Omega) < \infty$, $D(u_A(x), \Omega) < \infty$. Согласно неравенству Харди [5] получим

$$\int_{|x|>N} |u_A(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty,$$

где $N \gg 1$ и $G \subset \{x: |x| < N\}$.

Так же находим обобщенные решения смешанной задачи I для системы (1) в Ω с граничными условиями

$$u_i(x)|_{\Gamma_1} = \Gamma(x)\tilde{C}_i, \quad \sigma(u_i(x))|_{\Gamma_2} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \tilde{C}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и с условиями

$$E(u_i(x), \Omega) < \infty, \quad D(u_i(x), \Omega) < \infty, \\ \int_{|x|>N} |u_i(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Решения $u_A(x) - Ax$, $u_i(x) - \Gamma(x)\tilde{C}_i$, $i = 1, 2$, линейно независимы. Действительно, если

$$(u_A(x) - Ax)d_0 + \sum_{i=1}^2 (u_i(x) - \Gamma(x)\tilde{C}_i)d_i = 0,$$

где d_0, d_i , $i = 1, 2$, – некоторые постоянные, то $v(x) \equiv d_0 Ax + \Gamma(x)(d_1 \tilde{C}_1 + d_2 \tilde{C}_2) \equiv 0$, так как $v(x) = d_0 u_A(x) + \sum_{i=1}^2 d_i u_i(x)$ имеет конечный интеграл Дирихле $D(v(x), \Omega) < \infty$ и

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty.$$

Таким образом, $Axd_0 + \Gamma(x)\vec{d} = 0$, где $\vec{d} = d_1\tilde{C}_1 + d_2\tilde{C}_2$. Поскольку $|Ax| \geq |x|$ и $|\Gamma(x)\vec{d}| \leq C \ln |x|$, то $d_0 = 0$. Следовательно, $\Gamma(x)\vec{d} = 0$, и, применяя к этому равенству оператор теории упругости, получим

$$0 = L(\Gamma(x)\vec{d}) = L(\Gamma(x))\vec{d} = I\delta(x)\vec{d} = \begin{pmatrix} \delta(x) & 0 \\ 0 & \delta(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $d_1 = d_2 = 0$. Легко проверить, что $E_a(u_A(x) - Ax, \Omega) < \infty$ и $E_a(u_i(x) - \Gamma(x)\tilde{C}_i, \Omega) < \infty$, $i = 1, 2$, при $-2 \leq a < 0$. Следовательно, задача (1), (2) с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ имеет по крайней мере три линейно независимых решения.

Покажем, что всякое обобщенное решение $u(x)$ смешанной задачи I для системы (1) с граничным условием (2) и с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ является линейной комбинацией построенных решений. Согласно неравенству Корна [2, § 3, неравенство (43)] существует постоянная кососимметрическая матрица A_1 такая, что

$$D_a(u(x) - A_1x, \Omega) \leq CE_a(u(x), \Omega),$$

где постоянная C не зависит от $u(x)$. Для функции $v_1(x) = u(x) - A_1x$ имеем $D_a(v_1(x), \Omega) < \infty$ и $E_a(v_1(x), \Omega) < \infty$. Поскольку $v_1(x)$ является решением системы (1) в Ω , то согласно лемме 1

$$v_1(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $R(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x)$.

Аналогичным образом, как и выше, можно показать, что $\text{ord } P(x) = 0$ и $P(x) = B_1$, где B_1 – постоянный вектор. Таким образом,

$$\begin{aligned} u(x) &= A_1x + B_1 + \Gamma(x)C_0 + R_1(x), \\ R_1(x) &= \sum_{0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x), \\ R_1(x) &= O(|x|^{-1} \ln |x|). \end{aligned}$$

Пусть $A_1 = -CA$ и $C_0 = -(d_1\tilde{C}_1 + d_2\tilde{C}_2)$. Положим

$$w(x) = u(x) - \left[C(u_A(x) - Ax) + \sum_{i=1}^2 d_i(u_i(x) - \Gamma(x)\tilde{C}_i) \right].$$

Очевидно, что $w(x)$ – решение системы (1) в Ω , $w(x)|_{\Gamma_1} = 0$, $\sigma(w)|_{\Gamma_2} = 0$ и

$$w(x) = B_1 + R_1(x) - Cu_A(x) - \sum_{i=1}^2 d_i u_i(x).$$

Легко видеть, что $D(w(x), \Omega) < \infty$ и $\int_\Omega |w(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty$. Таким образом, $w(x)$ является решением следующей задачи (w):

$$\begin{aligned} Lw(x) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ w(x)|_{\Gamma_1} &= 0, \quad \sigma(w(x))|_{\Gamma_2} = 0, \\ D(w(x), \Omega) &< \infty, \quad \int_\Omega |w(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty. \end{aligned}$$

Докажем, что решение $w(x)$ задачи (4) единственно, т.е. $w(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$. Для этого в интегральное тождество (4) подставим вектор-функцию $\psi(x) = w(x)\theta_N(x)$, где $\theta_N(x) = \theta(\ln|x|/\ln N)$, $\theta(s) = 1$ при $s \leq 1$, $\theta(s) = 0$ при $s \geq 2$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \theta \leq 1$. Получим

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(w(x))\theta_N(x) dx = - \int_{\Omega} a_{kh}^{ij} \frac{\partial w_j(x)}{\partial x_h} \frac{\partial \theta_N(x)}{\partial x_k} w(x) dx, \quad (5)$$

где $\mathcal{E}(w(x)) \equiv a_{kh}^{ij} \frac{\partial w_j(x)}{\partial x_h} \frac{\partial w_i(x)}{\partial x_k}$.

Покажем, что правая часть равенства (5) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$\left| - \int_{\Omega} a_{kh}^{ij} \frac{\partial w_j(x)}{\partial x_h} \frac{\partial \theta_N(x)}{\partial x_k} w(x) dx \right| \leq C \int_{\Omega \cap \{x: N < |x| < N^2\}} |\nabla w(x)| \frac{|w(x)|}{|x| \ln N} dx \leq 2C J_1(w) J_2(w),$$

где

$$J_1(w) \equiv \left(\int_{|x| > N} |\nabla w(x)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad J_2(w) \equiv \left(\int_{N < |x| < N^2} \frac{|w(x)|^2}{|x|^2 |\ln N|^2} dx \right)^{1/2}.$$

Поскольку

$$\int_{\Omega} |w(x)|^2 |x|^{-2} |\ln|x||^{-2} dx < \infty, \quad D(w(x), \Omega) < \infty,$$

то $J_2(w) \rightarrow 0$ и $J_1(w) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(w(x))\theta_N(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

т.е. $\mathcal{E}(w(x)) = 0$ в Ω . Отсюда следует [1], что $w(x) = A_2 x + B_2$, где A_2 – постоянная кососимметрическая матрица, B_2 – постоянный вектор. Так как $w(x)|_{\Gamma_1} = 0$, $\sigma(w)|_{\Gamma_2} = 0$, $D(w(x), \Omega) < \infty$, то $A_2 = 0$, $B_2 = 0$, т.е. $w(x) \equiv 0$, $x \in \Omega$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если $n - 2 \leq a < n$, $n \geq 2$, то

$$\dim \text{Ker}_a(L) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n > 2$. Для любого постоянного вектора $\vec{e} \neq 0$ построим обобщенное решение $u_e(x)$ системы (1) с граничными условиями

$$u_e(x)|_{\Gamma_1} = \vec{e}, \quad \sigma(u_e)|_{\Gamma_2} = 0 \quad (6)$$

и с условиями $E(u_e(x), \Omega) < \infty$, $D(u_e(x), \Omega) < \infty$,

$$\int_{\Omega} |u_e(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty. \quad (7)$$

Такое решение можно построить вариационным методом, минимизируя соответствующий функционал в классе допустимых функций $\{v(x) \in C^\infty(\bar{\Omega}), v_e(x)|_{\Gamma_1} = \vec{e}$,

$\sigma(v_e)|_{\Gamma_2} = 0$, $v(x)$ имеет компактный носитель в $\bar{\Omega}$. Ограниченность интеграла Дирихле следует из неравенства Корна [2, § 3, неравенство (43)]. Условие (7) является следствием неравенства Харди [2, § 3, неравенство (27)]. Согласно лемме 2 решение $u_e(x)$ имеет вид

$$u_e(x) = P_e(x) + R_e(x), \quad (8)$$

где $P_e(x)$ – многочлен, $P_e(x) = Ax + B$, причем A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор,

$$R_e(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C'_\alpha + u_e^\beta(x), \quad R_e(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Покажем, что $P_e(x) \equiv 0$. Пусть $P_e(x) \not\equiv 0$. Тогда внутри некоторого конуса K выполнено неравенство $|P_e(x)| > C$ и

$$\infty > \int_{\Omega \cap K} |u_e(x)|^2 |x|^{-2} dx > \frac{C^2}{2} \int_{K \cap \{x: |x| > H\}} |x|^{-2} dx = \infty.$$

Полученное противоречие показывает, что $P_e(x) \equiv 0$. Таким образом,

$$u_e(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C'_\alpha + u_e^\beta(x). \quad (9)$$

Докажем, что

$$\int_{\Omega} a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_{ej}(x)}{\partial x_h} \frac{\partial u_{ei}(x)}{\partial x_k} dx = \int_{\partial \Omega} u_e(x) a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_{ej}(x)}{\partial x_h} \nu_k ds. \quad (10)$$

Для этого рассмотрим шар $Q_R = \{x: |x| < R\}$ с центром в начале координат такой, что $G \Subset Q_R$. Пусть $\Omega_R = \Omega \cap Q_R$, $\partial \Omega_R = \partial \Omega \cup \{x: |x| = R\}$. Тогда

$$\int_{\Omega_R} a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_{ej}(x)}{\partial x_h} \frac{\partial u_{ei}(x)}{\partial x_k} dx = \left(\int_{\partial \Omega} + \int_{|x|=R} \right) u_e(x) a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_{ej}(x)}{\partial x_h} \nu_k ds. \quad (11)$$

Существует последовательность областей Ω_{R_k} такая, что $\Omega_{R_k} \subset \Omega_{R_{k+1}} \subset \dots \subset \Omega_{R_n} \subset \mathbb{R}^n$ и $\bigcup_k \Omega_{R_k} = \Omega_R$.

Покажем, что интегралы в левой и правой частях равенства (11) сходятся. Действительно, по неравенству Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_R} a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_{ej}(x)}{\partial x_h} \frac{\partial u_{ei}(x)}{\partial x_k} dx \right| &\leq C \left[\int_{\Omega_R} \left| \frac{\partial u_{ej}(x)}{\partial x_h} \right|^2 dx \right]^{1/2} \\ &\quad \times \left[\int_{\Omega_R} \left| \frac{\partial u_{ei}(x)}{\partial x_k} \right|^2 dx \right]^{1/2} < \infty, \end{aligned}$$

так как $\Omega_R \subset \Omega$ и $\int_{\Omega} |\nabla u_e(x)|^2 dx < \infty$.

Докажем, что

$$\int_{|x|=R} u_e(x) a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_{ej}(x)}{\partial x_h} \nu_k ds \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty.$$

Действительно, в силу оценок $|u_e(x)| \leq C|x|^{2-n}$, $|\nabla u_e(x)| \leq C|x|^{1-n}$ и неравенства Коши–Буняковского имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x|=R} u_e(x) a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_{ej}(x)}{\partial x_h} \nu_k ds \right| &\leq c \int_{|x|=R} |u_e(x)| |\nabla u_e(x)| ds \\ &\leq c \left[C \int_{|x|=R} |x|^{4-2n} ds \right]^{1/2} \left[C \int_{|x|=R} |x|^{2-2n} ds \right]^{1/2} = cR^{2-n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $R \rightarrow \infty$ и $n > 2$, постоянные c и C не зависят от R . Из формулы (11), устремляя R к бесконечности, получаем требуемое равенство (10) и с учетом $u_e(x)|_{\Gamma_1} = \vec{e}$, $\sigma(u_e)|_{\Gamma_2} = 0$ имеем

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(u_e(x)) dx = \vec{e} \int_{\Gamma_1} \sigma(u_e(x)) ds,$$

где $\sigma(u_e(x)) \equiv a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_{ej}(x)}{\partial x_h} \nu_k$.

Покажем теперь, что в разложении (9) постоянная C'_0 не равна нулю. Пусть $C'_0 = 0$, тогда $|u_e(x)| \leq C|x|^{1-n}$ и $\sigma(u_e(x)) \leq C|x|^{-n}$. Умножая систему (1) на 1 и интегрируя по Ω_R , получим

$$\left(\int_{\partial\Omega} + \int_{|x|=R} \right) \sigma(u_e(x)) ds = 0.$$

Поскольку

$$\left| \int_{|x|=R} \sigma(u_e(x)) ds \right| \leq C \int_{|x|=R} |x|^{-n} ds = cR^{-1} \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty,$$

то

$$\int_{|x|=R} \sigma(u_e(x)) ds \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty.$$

Следовательно,

$$\int_{\partial\Omega} \sigma(u_e(x)) ds \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow \infty,$$

и из равенства (10) получаем

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(u_e(x)) dx = \vec{e} \cdot 0 = 0,$$

т.е. $\mathcal{E}(u_e(x)) = 0$ в Ω . Отсюда следует [1], что $u_e(x) = Ax + B$, где A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор.

С другой стороны (из формулы (9) при $\alpha = 0$, $\beta = 0$), $u_e(x) = C'_0 \Gamma(x) + u_e^0(x)$. Следовательно, $Ax + B = C'_0 \Gamma(x) + u_e^0(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, т.е. $Ax + B \rightarrow 0$, а это возможно, только если $A = 0$, $B = 0$, т.е. $u_e(x) \equiv 0$. Однако $u_e(x)|_{\Gamma_1} = \vec{e} \neq 0$, $\sigma(u_e)|_{\Gamma_2} = 0$. Противоречие означает, что если $\vec{e} \neq 0$, то $\vec{C}'_0 \neq 0$.

Пусть $\vec{e} \neq 0$ – произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$. Было построено решение $u_e(x)$ такое, что $u_e(x)|_{\Gamma_1} = \vec{e}$, $\sigma(u_e)|_{\Gamma_2} = 0$ и $u_e(x) = \vec{C}'_0 \Gamma(x) + u_e^0(x)$, где $\vec{C}'_0 \neq 0$. Тогда каждому вектору $\vec{e}$ из $\mathbb{R}^n$ соответствует вектор $\vec{C}'_0$ из $\mathbb{R}^n$, т.е. существует

преобразование $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что $S: \vec{e} \rightarrow \vec{C}'_0$, где $\vec{e} \neq 0$, $\vec{C}'_0 \neq 0$. Легко заметить, что преобразование S линейно и невырождено.

Пусть $\vec{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ – некоторый базис в $\mathbb{R}^n$. Для любых линейно независимых векторов $\vec{C}'_0 = \{C'_{01}, \dots, C'_{0n}\}$ существует единственное линейное преобразование S такое, что $\vec{C}'_0 = S\vec{e}$, где S – некоторая матрица. Тогда

$$\vec{e} = S^{-1}\vec{C}'_0. \quad (*)$$

Рассмотрим теперь систему теории упругости (1) в Ω с граничными условиями

$$u_A(x)|_{\Gamma_1} = Ax, \quad \sigma(u_A)|_{\Gamma_2} = 0, \quad (12)$$

где A – постоянная кососимметрическая матрица. Для такой матрицы A построим обобщенное решение системы (1) с граничными условиями (12) и с условиями $E(u_A(x), \Omega) < \infty$, $D(u_A(x), \Omega) < \infty$,

$$\int_{\Omega} |u_A(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty, \quad (13)$$

которое можно получить, используя вариационный метод и минимизируя соответствующий функционал в классе допустимых функций $\{u(x): u(x) \in H^1(\Omega), u(x)|_{\Gamma_1} = Ax, \sigma(u)|_{\Gamma_2} = 0, u(x) \text{ имеет компактный носитель в } \bar{\Omega}\}$. Ограниченность интеграла Дирихле следует из неравенства Корна [2, §3, неравенство (43)]. Условие (13) является следствием неравенства Харди [2]. Согласно лемме 2 имеет место разложение:

$$u_A(x) = P_A(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u_A^\beta(x). \quad (14)$$

Так же, как и выше, доказывается, что $P_A(x) \equiv 0$. Следовательно,

$$u_A(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u_A^\beta(x). \quad (15)$$

Рассмотрим функцию

$$v(x) = (u_A(x) - Ax) - (u_e(x) - \vec{e}), \quad (16)$$

где $\vec{e} = S^{-1}\vec{C}'_0$, $u_e(x)$ и $u_A(x)$ определяются формулами (9) и (15) соответственно. Очевидно, что $v(x)$ – решение системы (1) в Ω и $v(x)|_{\Gamma_1} = 0$, $\sigma(v)|_{\Gamma_2} = 0$.

Докажем, что $E_a(v(x), \Omega) < \infty$ при $n - 2 \leq a < n$. Поскольку $\vec{C}'_0 = S\vec{e} = S(S^{-1}\vec{C}'_0) = SS^{-1}\vec{C}'_0 = \vec{C}'_0$, то из формул (9) и (15) получим

$$u_A(x) - u_e(x) = \sum_{0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C''_\alpha + u_0^\beta(x),$$

где $C''_\alpha = C_\alpha - C'_\alpha$, $u_0^\beta(x) = u_A^\beta(x) - u_e^\beta(x)$.

Легко проверить, что $E_a(D^\alpha \Gamma(x) C''_\alpha, \Omega) < \infty$, $E_a(u_0^\beta(x), \Omega) < \infty$. Тогда $E_a(u_A(x) - u_e(x), \Omega) < \infty$. Заметим также, что $E_a(Ax, \Omega) = 0$, $E_a(S^{-1}\vec{C}'_0, \Omega) = 0$. Следовательно, $E_a(v(x), \Omega) < \infty$.

Покажем теперь, что $v(x) \not\equiv 0$. Пусть $v(x) \equiv 0$, т.е. $u_A(x) - Ax - u_{S^{-1}\vec{C}_0}(x) + S^{-1}\vec{C}_0 \equiv 0$, причем $u_A(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, $u_{S^{-1}\vec{C}_0}(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Тогда

$$|Ax| = |u_A(x) - u_{S^{-1}\vec{C}_0}(x) + S^{-1}\vec{C}_0| < \text{const.}$$

С другой стороны, $|Ax| \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$, $Ax \neq 0$. Полученное противоречие означает, что $v(x) \not\equiv 0$.

Пусть $A_1, \dots, A_p$, $p = (n^2 - n)/2$, — линейно независимые постоянные кососимметрические $(n \times n)$ -матрицы. Были построены решения $v_{A_1}(x), \dots, v_{A_p}(x)$. Покажем, что если $A_1, \dots, A_p$ — базис в пространстве кососимметрических матриц, то $v_{A_1}(x), \dots, v_{A_p}(x)$ — линейно независимые решения, т.е. из равенства

$$\sum_{i=1}^p c_i v_{A_i}(x) = 0, \quad c_i = \text{const},$$

следует, что $c_i = 0$, $i = 1, \dots, p$. Действительно, пусть

$$\sum_{i=1}^p c_i [u_{A_i}(x) - u_{e_i}(x) - A_i x + e_i] = 0,$$

где $c_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, p$, т.е.

$$\sum_{i=1}^p c_i A_i x = \sum_{i=1}^p c_i u_{A_i}(x) - \sum_{i=1}^p c_i (u_{e_i}(x) - e_i).$$

Пусть $W_1(x) \equiv \sum_{i=1}^p c_i A_i x$; тогда

$$W_1(x) = \sum_{i=1}^p c_i u_{A_i}(x) - \sum_{i=1}^p c_i (u_{e_i}(x) - e_i) \quad \text{и} \quad D_a(W_1(x), \Omega) < \infty.$$

Покажем, что $W_1(x) \equiv \sum_{i=1}^p c_i A_i x \equiv 0$.

Пусть $T = \sum_{i=1}^p c_i A_i$, $Tx = \sum_{i=1}^p c_i A_i x$, где $T = \|t_{ij}\|_{n \times n}$. Тогда

$$\int_{\Omega} |x|^a |\nabla Tx|^2 dx < \infty,$$

так как $Tx = W_1(x)$ и $\int_{\Omega} |x|^a |\nabla W_1|^2 dx < \infty$. С другой стороны,

$$\infty > \int_{\Omega} |x|^a |\nabla Tx|^2 dx = \int_{\Omega} |x|^a |t_{ij}|^2 dx,$$

а интеграл в правой части конечен только в том случае, если $t_{ij} = 0$, т.е. $T = 0$ и $\sum_{i=1}^p c_i A_i = 0$, следовательно, $c_i = 0$, $i = 1, \dots, p$.

Таким образом, смешанная задача (1), (2) имеет по крайней мере $p = (n^2 - n)/2$ линейно независимых обобщенных решений.

Докажем теперь, что всякое обобщенное решение $u(x)$ однородной задачи (1), (2) с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ является линейной комбинацией построенных решений $v_{A_1}(x), \dots, v_{A_p}(x)$, т.е.

$$u(x) = \sum_{i=1}^p c'_i v_{A_i}(x),$$

где $c'_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, p$. Согласно лемме 2 решение системы (1) в Ω можно представить в виде (3). Докажем, что существуют такие $c'_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, p$, что при $x \in \Omega$ имеет место равенство

$$P(x) + \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x) = \sum_{i=1}^p c'_i (u_{A_i}(x) - u_{e_i}(x) - A_i x + e_i).$$

Поскольку $A_1, \dots, A_p$, $p = (n^2 - n)/2$, – базис в пространстве кососимметрических матриц, то существуют такие $c_1, \dots, c_p$, что $A = \sum_{i=1}^p c_i A_i$. Положим

$$u_0(x) \equiv \sum_{i=1}^p c'_i (u_{A_i}(x) - u_{e_i}(x) - A_i x + e_i),$$

где $c'_i = -c_i$. Очевидно, что $u_0(x)$ – решение системы (1) в Ω , $u_0(x)|_{\Gamma_1} = 0$, $\sigma(u_0(x))|_{\Gamma_2} = 0$ и $E_a(u_0(x), \Omega) < \infty$ при $n - 2 \leq a < n$.

Рассмотрим разность $W(x) = u(x) - u_0(x)$. По построению имеем $W(x)|_{\Gamma_1} = 0$, $\sigma(W(x))|_{\Gamma_2} = 0$. Из неравенства треугольника следует, что $E_a(W(x), \Omega) < \infty$ при $n - 2 \leq a < n$.

Докажем, что $W(x) \equiv 0$ в Ω . Действительно, пусть $A = \sum_{i=1}^p c_i A_i$. Тогда

$$W(x) = \vec{b} + Z(x),$$

где

$$\vec{b} = B - \sum_{i=1}^p c'_i e_i, \quad Z(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x) - \sum_{i=1}^p c'_i [u_{A_i}(x) - u_{e_i}(x)],$$

т.е. $Z(x) = W(x) - \vec{b}$ и $Z(x)|_{\Gamma_1} = -\vec{b}$, $\sigma(Z(x))|_{\Gamma_2} = 0$.

Легко заметить, что $D(Z(x), \Omega) < \infty$ и $\int_\Omega |Z(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty$. Итак, получили задачу (Z_b) :

$$\begin{aligned} LZ(x) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ Z(x)|_{\Gamma_1} &= -\vec{b}, \quad \sigma(Z)|_{\Gamma_2} = 0, \\ D(Z(x), \Omega) &< \infty, \quad \int_\Omega |Z(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty. \end{aligned}$$

По построению имеем задачу (e):

$$\begin{aligned} Lu_e(x) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u_e(x)|_{\partial\Omega} &= \vec{e}, \quad \sigma(u_e)|_{\Gamma_2} = 0, \\ D(u_e(x), \Omega) &< \infty, \quad \int_\Omega |u_e(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty. \end{aligned}$$

Докажем единственность решения задачи (e). Пусть $u'_e(x)$ и $u''_e(x)$ – два решения такие, что

$$u'_e(x)|_{\Gamma_1} = \vec{e}, \quad \sigma(u'_e)|_{\Gamma_2} = 0, \quad u''_e(x)|_{\Gamma_1} = \vec{e}, \quad \sigma(u''_e)|_{\Gamma_2} = 0.$$

Тогда функция $u'_0(x) = u'_e(x) - u''_e(x)$ удовлетворяет условиям

$$u'_0(x)|_{\Gamma_1} = 0, \quad \sigma(u'_0(x))|_{\Gamma_2} = 0, \quad E(u'_0(x), \Omega) < \infty, \quad D(u'_0(x), \Omega) < \infty, \\ \int_{\Omega} |u'_0(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty.$$

Покажем, что $u'_0(x) \equiv 0$ в Ω . Для этого в интегральное тождество (4) для $u'_0(x)$ подставим вектор-функцию $\psi(x) = u'_0(x)\theta_N(x)$, где $\theta_N(x) = \theta(\frac{|x|}{N})$, $\theta(s) = 1$ при $s \leq 1$, $\theta(s) = 0$ при $s \geq 2$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \theta \leq 1$. Получим

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(u'_0(x))\theta_N(x) dx = - \int_{\Omega} a_{kh}^{ij} \frac{\partial u'_{0j}(x)}{\partial x_h} \frac{\partial \theta_N(x)}{\partial x_k} u'_0(x) dx. \quad (17)$$

Аналогичным образом, как в равенстве (5) (теорема 1, случай $n = 2$), можно показать, что правая часть равенства (17) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(u'_0(x))\theta_N(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty,$$

т.е. $\mathcal{E}(u'_0(x)) = 0$ в Ω . Как известно [1], отсюда следует, что $u'_0(x) = A_0x + B_0$, где A_0 – постоянная кососимметрическая матрица, B_0 – постоянный вектор. Поскольку $u'_0(x)|_{\Gamma_1} = 0$, $\sigma(u'_0(x))|_{\Gamma_2} = 0$ и

$$D(u'_0(x), \Omega) < \infty, \quad \int_{\Omega} |u'_0(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty,$$

то $A_0 = 0$, $B_0 = 0$, т.е. $u'_0(x) \equiv 0$. Таким образом, решение задачи (e) единственно.

Теперь докажем, что

$$E_a(u_e(x), \Omega) = \int_{\Omega} |x|^a |\varepsilon(u_e(x))|^2 dx = \infty \quad \text{при } \vec{e} \neq 0. \quad (18)$$

Сначала покажем, что если $C'_0 \neq 0$ в (9), то

$$E_a(C'_0\Gamma(x), \Omega) = \int_{\Omega} |x|^a |\varepsilon(C'_0\Gamma(x))|^2 dx = \infty.$$

Из свойств фундаментального решения системы теории упругости [14] следует, что $\Gamma(x) = |x|^{2-n}U(x)$, где $U(x)$ – однородная функция порядка нуля. Тогда $|x|^a |\varepsilon(C'_0\Gamma(x))|^2$ – однородная функция порядка $a + 2(1 - n)$, т.е.

$$0 \neq |x|^a |\varepsilon(C'_0\Gamma(x))|^2 \stackrel{\text{def}}{=} f(x) = C(C'_0)|x|^{a+2-2n}f_0(x),$$

где $f_0(x)$ – однородная функция порядка нуль. Зафиксируем какую-нибудь точку x_0 , где $f_0(x_0) \neq 0$. Из непрерывности следует, что $f_0(x) \neq 0$ в окрестности $Q_\delta(x_0)$ точки x_0 . Построим конус K с вершиной в начале координат такой, что $Q_\delta(x_0) \subset K$. Тогда

$$\begin{aligned} E_a(C'_0\Gamma(x), \Omega) &= \int_{\Omega} |x|^a |\varepsilon(C'_0\Gamma(x))|^2 dx \\ &\geq C(C'_0) \int_{K \cap \{x: |x| > H\}} |x|^{a+2-2n} dx = \infty \end{aligned}$$

при $C'_0 \neq 0$.

Применяя неравенство треугольника к формуле (9) вида $C'_0\Gamma(x) = u_e(x) - R_{1e}(x)$, где $R_{1e}(x) = \sum_{0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C'_\alpha + u_e^\beta(x)$, получаем

$$\infty = E_a(C'_0\Gamma(x), \Omega) \leq E_a(u_e(x), \Omega) + E_a(R_{1e}(x), \Omega).$$

Легко проверить, что $E_a(R_{1e}(x), \Omega) < \infty$. Следовательно, $E_a(u_e(x), \Omega) = \infty$ при $\vec{e} \neq 0$. Таким образом, имеем задачу (e_a) :

$$\begin{aligned} Lu_e(x) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u_e(x)|_{\Gamma_1} &= \vec{e}, \quad \sigma(u_e)|_{\Gamma_2} = 0, \\ D(u_e(x), \Omega) &< \infty, \quad \int_{\Omega} |u_e(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty, \\ E_a(u_e(x), \Omega) &= \infty \quad \text{при } \vec{e} \neq 0. \end{aligned}$$

Из формулы (18) следует, что

$$\int_{\Omega} |x|^a |\varepsilon(Z)|^2 dx = \infty \quad \text{при } \vec{b} \neq 0 \quad (\vec{e} \neq 0).$$

Для функции $Z(x) = W(x) - \vec{b}$ имеем

$$\infty = \int_{\Omega} |x|^a |\varepsilon(Z)|^2 dx = \int_{\Omega} |x|^a |\varepsilon(W)|^2 dx < \infty.$$

Полученное противоречие означает, что $\vec{b} = 0$, т.е. $\vec{e} = 0$. Следовательно, $W(x) = Z(x)$ является решением следующей задачи (z_0) :

$$\begin{aligned} LZ(x) &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ Z(x)|_{\Gamma_1} &= 0, \quad \sigma(Z)|_{\Gamma_2} = 0, \\ D(Z(x), \Omega) &< \infty, \quad \int_{\Omega} |Z(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty. \end{aligned}$$

В силу единственности решения задачи (e) имеем $Z(x) \equiv 0$ в Ω . Отсюда следует, что $W(x) = 0$, и так как $W(x)|_{\Gamma_1} = 0$, $\sigma(W)|_{\Gamma_2} = 0$, то $W(x) \equiv 0$ в Ω . Теорема в случае $n > 2$ доказана.

Доказательство теоремы для случая $n = 2$ проводится аналогично. Для нетривиальной постоянной кососимметрической матрицы A построим обобщенное решение $u_A(x)$ смешанной задачи для системы (1) в Ω с граничным условием (12), минимизируя соответствующий функционал в классе $\{u(x): u(x) \in H^1(\Omega), u(x)|_{\Gamma_1} = Ax, \sigma(u(x))|_{\Gamma_2} = 0, u(x) \text{ имеет компактный носитель в } \bar{\Omega}\}$ допустимых функций. Таким образом полученное решение удовлетворяет условиям $E(u_A(x), \Omega) < \infty$, $D(u_A(x), \Omega) < \infty$. Согласно неравенству Харди [5] получим

$$\int_{|x| > N} |u_A(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty,$$

где $N \gg 1$ такое, что $G \subset \{x: |x| < N\}$.

Покажем, что любое обобщенное решение $u(x)$ задачи (1), (2), удовлетворяющее условию $E_a(u(x), \Omega) < \infty$, имеет вид

$$u(x) = u_A(x) - Ax,$$

где A – постоянная кососимметрическая матрица. Согласно лемме 2 решение системы (1) имеет вид (14), где $P_A(x) = Ax + B$, причем A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор.

Докажем, что $A = 0$. Предположим, что $A \neq 0$. Запишем равенство (14) в виде

$$u_A(x) = Ax + B + \Gamma(x)C_0 + R_1(x), \quad R_1(x) = \sum_{0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x).$$

По построению $D(u_A(x), \Omega) < \infty$, т.е.

$$\int_{\rho < |x| < R} |u_A(x)|^2 dx < C'_1$$

при любом R . Легко проверить, что $\int_{\Omega} |\nabla R_1(x)|^2 dx < \infty$. Следовательно,

$$\int_{\rho < |x| < R} |\nabla R_1(x)|^2 dx < C'_2$$

для любого R . Поскольку $\Gamma(x)$ – фундаментальное решение системы (1), $\Gamma(x) = S(x) \ln |x| + T(x)$, где $S(x)$ и $T(x)$ – (2×2) -матрицы, элементы которых – однородные функции порядка нуль [15], то $|\nabla(\Gamma(x)C_0)| \leq C(C_0) |\ln |x|| |x|^{-1}$. Отсюда следует, что

$$\int_{\rho < |x| < R} |\nabla(\Gamma(x)C_0)|^2 dx \leq C'(C_0) \int_{\rho < |x| < R} |x|^{-2} |\ln |x||^2 dx \leq C'(C_0) (\ln R)^3.$$

Из формулы (14) и неравенства треугольника следует, что

$$\int_{|x| < R} |\nabla P_A(x)|^2 dx \leq C'_1 + C'_2 + C'(C_0) (\ln R)^3.$$

С другой стороны,

$$\nabla P_A(x) = A, \quad \int_{|x| < R} |\nabla P_A(x)|^2 dx = \int_{|x| < R} |A|^2 |x| d|x| = C'_3 R^2.$$

Таким образом, $C'_3 R^2 \leq C'_1 + C'_2 + C'(C_0)(\ln R)^3$ для любого $R \gg 1$. Полученное противоречие означает, что $A = 0$ и $P_A(x) = B$.

Итак, $u_A(x) = B + \Gamma(x)C_0 + R_1(x)$.

Докажем теперь, что в (14) постоянная C_0 равна нулю. Предположим, что $C_0 \neq 0$. Тогда по неравенству треугольника имеем

$$\int_{\Omega} |\nabla(\Gamma(x)C_0)|^2 dx < \infty.$$

С другой стороны, $\Gamma(x)C_0 = (S(x) \ln |x| + T(x))C_0$. Тогда в некотором конусе K справедливо неравенство $|\nabla(\Gamma(x)C_0)|^2 \geq C(C_0)|x|^{-2}(\ln |x|)^2$. Следовательно,

$$\infty > \int_{\Omega} |\nabla(\Gamma(x)C_0)|^2 dx \geq C(C_0) \int_{K \cap \{x: |x| > H\}} |\ln |x||^2 |x|^{-2} dx = \infty.$$

Полученное противоречие показывает, что $C_0 = 0$. Итак, $u_A(x) = B + R_1(x)$.

Легко проверить, что $E_a(u_A(x), \Omega) < \infty$ при $0 \leq a < 2$. Тогда имеем $E_a(u_A(x) - Ax, \Omega) < \infty$ и $(u_A(x) - Ax) \in \text{Ker}_a(L)$, т.е. задача (1), (2) с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$, $0 \leq a < 2$, имеет по крайней мере одно ненулевое решение; значит, $\dim \text{Ker}_a(L) \geq 1$.

С другой стороны, $\text{Ker}_a(L) \subset \text{Ker}_0(L)$ при $a \geq 0$. Следовательно, выполнено $\dim \text{Ker}_a(L) \leq \dim \text{Ker}_0(L)$. В силу теоремы 4 из [2, §4] $\dim \text{Ker}_0(L) = 1$.

Таким образом, $\dim \text{Ker}_a(L) = 1$ при $0 \leq a < 2$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Если $n \leq a < \infty$, $n \geq 2$, то $\dim \text{Ker}_a(L) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $n > 2$. Пусть $a = n$. Теорему докажем от противного. Пусть $\dim \text{Ker}_a(L) > 0$. Это значит, что существует $u(x)$ такое, что $u(x) \in \text{Ker}_a(L)$ и $u(x) \neq 0$. Поскольку $a = n$, то $u(x) \in \text{Ker}_n(L) \subset \text{Ker}_{n-2}(L)$. Тогда в силу теоремы 2 имеет место формула

$$u(x) = u_A(x) - Ax - u_e(x) + \vec{e}, \quad (19)$$

где $\vec{e} = S^{-1}\vec{C}_0$ (см. (*)), $\vec{C}_0$ определяется из формулы (15). Подставляя формулы (9) и (15) в (19), получаем

$$u(x) = P(x) + (\vec{C}_0 - \vec{C}'_0)\Gamma(x) + \sum_{0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) \tilde{C}_\alpha + u_0^\beta(x),$$

где $P(x) = -Ax + \vec{e}$, $\tilde{C}_\alpha = C_\alpha - C'_\alpha$, $u_0^\beta(x) = u_A^\beta(x) - u_e^\beta(x)$. Так как $\vec{C}'_0 = S\vec{e} = S(S^{-1}\vec{C}_0) = S S^{-1}\vec{C}_0 = \vec{C}_0$, то $\vec{C}_0 - \vec{C}'_0 = 0$. Следовательно,

$$u(x) = P(x) + (\tilde{C}_1 \nabla) \Gamma(x) + R_2(x), \quad (20)$$

где $R_2(x) = \sum_{1 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) \tilde{C}_\alpha + u^\beta(x)$.

Теперь докажем, что в (20) постоянная $\tilde{C}_1$ не равна нулю. Предположим, что $\tilde{C}_1 = 0$. Умножая систему (1) на $u(x)$ и интегрируя по Ω_R , получим

$$\int_{\Omega_R} \mathcal{E}(u(x)) dx = \left(\int_{\partial\Omega} + \int_{|x|=R} \right) u(x) \sigma(u(x)) ds. \quad (21)$$

Покажем, что

$$\int_{|x|=R} u(x) \sigma(u(x)) ds \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty.$$

Легко проверить, что $|u(x)| \leq C|x|$ и $|\sigma(u(x))| \leq C|x|^{-n-1}$ при $\tilde{C}_1 = 0$. Тогда по неравенству Коши–Буняковского получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x|=R} u(x) \sigma(u(x)) ds \right| &\leq c \int_{|x|=R} |u(x)| |\sigma(u(x))| ds \\ &\leq c \left[\int_{|x|=R} |x|^2 ds \right]^{1/2} \left[\int_{|x|=R} |x|^{2(-n-1)} ds \right]^{1/2} \\ &= cR^{-1} \rightarrow 0 \text{ при } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Существует последовательность областей Ω_{R_k} такая, что $\Omega_{R_k} \subset \Omega_{R_{k+1}} \subset \dots \subset \mathbb{R}^n$, $\bigcup_k \Omega_{R_k} = \Omega$.

В равенстве (21) перейдем к пределу при $R = R_k \rightarrow \infty$. По неравенству Коши–Буняковского

$$\left| \int_{\Omega_R} \mathcal{E}(u(x)) dx \right| \leq c \left[\int_{\Omega_R} \left| \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_h} \right|^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_{\Omega_R} \left| \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_k} \right|^2 dx \right]^{1/2} < \infty,$$

так как $\Omega_R \subset \Omega$ и $\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx < \infty$.

Таким образом,

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(u(x)) dx = \int_{\partial\Omega} u(x) \sigma(u(x)) ds.$$

С другой стороны, $u(x) = u_A(x) - Ax - (u_e(x) - \vec{e})$ и $u(x)|_{\Gamma_1} = 0$, $\sigma(u)|_{\Gamma_2} = 0$. Следовательно,

$$\int_{\partial\Omega} u(x) \sigma(u(x)) ds = 0 \text{ и } \int_{\Omega} \mathcal{E}(u(x)) dx = 0,$$

т.е. $\mathcal{E}(u(x)) = 0$ в Ω . Как известно [1], отсюда вытекает, что $u(x) = A_0x + B_0$, где A_0 – постоянная кососимметрическая матрица, B_0 – постоянный вектор. Поскольку $D(u(x), \Omega) < \infty$, то $A_0 = 0$. В силу граничных условий $u(x)|_{\Gamma_1} = 0$, $\sigma(u)|_{\Gamma_2} = 0$ следует, что $B_0 = 0$. Значит, $u(x) \equiv 0$. Это является противоречием, так как $u(x) \in \text{Ker}_a(L)$ и $u(x) \neq 0$; таким образом, $\tilde{C}_1 \neq 0$ в формуле (20).

По условию теоремы $E_a(u(x), \Omega) < \infty$. Легко проверить, что $E_a(R_2(x), \Omega) < \infty$ и $E_a(P(x), \Omega) = 0$. Тогда в силу неравенства треугольника получим

$$E_a((\tilde{C}_1 \nabla) \Gamma(x), \Omega) < \infty \text{ при } a = n.$$

Из свойств фундаментального решения системы (1) следует [14], что $\Gamma(x) = |x|^{2-n}U(x)$, $U(x)$ – однородная функция порядка нуль; тогда $|x|^n|\varepsilon((\tilde{C}_1\nabla)\Gamma(x))|^2$ – однородная функция порядка $(-n)$, т.е.

$$0 \neq |x|^n|\varepsilon((\tilde{C}_1\nabla)\Gamma(x))|^2 \stackrel{\text{def}}{=} f(x) = |x|^{-n}f_0(x),$$

где $f_0(x)$ – однородная функция порядка нуль. Зафиксируем какую-нибудь точку x_0 такую, что $f_0(x_0) \neq 0$. Из непрерывности следует, что $f_0(x) \neq 0$ в окрестности $Q_\delta(x_0)$ точки x_0 . Построим конус K с вершиной в начале координат такой, что $Q_\delta(x_0) \subset K$. Тогда

$$\infty > \int_{\Omega} |x|^n|\varepsilon((\tilde{C}_1\nabla)\Gamma(x))|^2 dx \geq C(\tilde{C}_1) \int_{\{x: |x|>H\}} |x|^{-n} dx = \infty.$$

Полученное противоречие означает, что $u(x) \equiv 0$. Теорема доказана при $n > 2$.

Рассмотрим теперь случай $n = 2$. Достаточно показать, что $\dim \text{Ker}_a(L) = 0$ при $a = 2$. Предположим, что $\dim \text{Ker}_a(L) > 0$, т.е. существует $u(x)$ такое, что $u(x) \in \text{Ker}_a(L)$ и $u(x) \neq 0$. Поскольку $a = 2$, то $u(x) \in \text{Ker}_a(L) \subset \text{Ker}_0(L)$. Тогда по теореме 2 имеет место равенство

$$u(x) = u_A(x) - Ax$$

и для $u_A(x)$ в силу леммы 2 справедливо разложение (14), т.е.

$$u_A(x) = P_A(x) + R(x),$$

где $P_A(x) = Ax + B$, A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор. Подставляя разложение $u_A(x)$ в представление для $u(x)$, получаем

$$u(x) = B + \Gamma(x)C_0 + R_1(x), \quad R_1(x) = \sum_{0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x)C_\alpha + u_A^\beta(x).$$

Докажем, что $C_0 = 0$. Предположим, что $C_0 \neq 0$. Имеем $E_a(R(x), \Omega) = E_a(u(x), \Omega) < \infty$.

С другой стороны, $\Gamma(x) = S(x) \ln |x| + T(x)$, где $S(x)$ и $T(x)$ – (2×2) -матрицы, элементы которых – однородные функции порядка нуль [15]. Следовательно,

$$|\varepsilon(R(x))|^2 \geq C|x|^{-2}(\ln |x|)^2$$

в некотором конусе K . Тогда

$$\begin{aligned} \infty > E_a(R(x), \Omega) &= \int_{\Omega} |x|^a |\varepsilon(R(x))|^2 dx \\ &\geq C(C_0) \int_{K \cap \{x: |x|>H\}} |x|^{a-2} (\ln |x|)^2 dx = \infty \end{aligned}$$

при $a \geq 2$. Противоречие означает, что $C_0 = 0$. Таким образом,

$$u(x) = B + R_1(x), \quad R_1(x) = O(|x|^{-1} \ln |x|).$$

Умножая систему (1) на $u(x)$ и интегрируя по Ω_R , получим

$$\int_{\Omega_R} \mathcal{E}(u(x)) dx = \left(\int_{\partial\Omega} + \int_{|x|=R} \right) u(x) \sigma(u(x)) ds.$$

В силу граничных условий $u(x)|_{\Gamma_1} = 0$, $\sigma(u(x))|_{\Gamma_2} = 0$ и $\int_{\partial\Omega} u(x) \sigma(u(x)) ds = 0$ имеем

$$\int_{\Omega_R} \mathcal{E}(u(x)) dx = \int_{|x|=R} u(x) \sigma(u(x)) ds. \quad (22)$$

Поскольку $|u(x)| \leq C$ и $|\sigma(u(x))| \leq C|x|^{-2} \ln|x|$, то

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x|=R} u(x) \sigma(u(x)) ds \right| &\leq \int_{|x|=R} |u(x)| |\sigma(u(x))| ds \\ &\leq C \int_{|x|=R} |x|^{-2} \ln|x| ds = CR^{-1} \ln R \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Переходя к пределу в равенстве (22) при $R \rightarrow \infty$, получим

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(u(x)) dx = 0,$$

т.е. $\mathcal{E}(u(x)) = 0$ в Ω . Как известно [1], отсюда следует, что $u(x) = A_1 x + B_1$, где A_1 – постоянная кососимметрическая матрица, B_1 – постоянный вектор. Следовательно,

$$A_1 x + B_1 = B + R_1(x),$$

причем $R_1(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Значит, $A_1 x + (B_1 - B) \rightarrow 0$, а это возможно только в том случае, если $A_1 = 0$, $B_1 = B$. В силу граничных условий (2), $B = 0$ и $u(x) \equiv 0$. Таким образом, $\dim \text{Ker}_a(L) = 0$ при $n = 2$ и $2 \leq a < \infty$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Смешанная задача I для системы (1) в Ω с граничным условием (2) и с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ имеет $k(r, n)$ линейно независимых решений при $-2r - n \leq a < -2r - n + 2$, т.е.*

$$\dim \text{Ker}_a(L) = k(r, n),$$

где

$$k(r, n) = \begin{cases} n(C_{r+n-1}^{n-1} + C_{r+n-2}^{n-1}), & \text{если } n > 2, \\ 4r + 2, & \text{если } n = 2, \end{cases}$$

причем $r > 0$, $k(0, n) = n$; C_r^s – число сочетаний из r по s , $C_r^s = 0$, если $s > r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n > 2$. Для доказательства теоремы необходимо определить число линейно независимых полиномиальных решений системы (1), степени которых не превосходят заданного числа.

Пусть $P = (P_1, \dots, P_n)$ – полиномиальное решение системы (1) степени r . Тогда степень многочлена P_i не превосходит r и P можно представить в виде

$$P = \sum_{s=0}^r P^{(s)}, \quad (P)$$

где $P^{(s)} = (P_1^{(s)}, \dots, P_n^{(s)})$ – однородный многочлен степени s , являющийся решением системы (1) (см. [14]).

Размерность всех многочленов в $\mathbb{R}^n$ степени не выше r равна $(r+n)!/r!n!$ [17]. Тогда размерность всех вектор-многочленов в $\mathbb{R}^n$ степени не выше r равна

$$\frac{n(r+n)!}{r!n!} = \frac{(r+n)!}{r!(n-1)!}.$$

Такие многочлены, являющиеся решениями системы теории упругости, образуют пространство размерности

$$\frac{(r+n)!}{r!(n-1)!} - \frac{(r+n-2)!}{(r-2)!(n-1)!} = n \left(\frac{(r+n)!}{r!n!} - \frac{(r+n-2)!}{(r-2)!n!} \right),$$

так как каждое уравнение из системы теории упругости представляет собой равенство нулю некоторого многочлена степени $r-2$.

Если через $k(r, n)$ обозначим число линейно независимых полиномиальных решений системы (1), степени которых не превосходят r , а через $l(r, n)$ – число линейно независимых однородных многочленов степени r , являющихся решениями системы (1), то из представления (P) имеем

$$k(r, n) = \sum_{s=0}^r l(s, n),$$

где $l(s, n) = n(C_{s+n-2}^{n-2} + C_{s+n-3}^{n-2})$, причем $s \geq 1$; $l(0, n) = n$.

Справедливы следующие утверждения:

- i) задача (1), (2) с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ при $-2r - n \leq a < -2r - n + 2$ имеет $k(r, n)$ линейно независимых решений;
- ii) любая совокупность $k(r, n) + 1$ решений является линейно зависимой.

Докажем эти утверждения.

i) Пусть $w_1(x), \dots, w_k(x)$ – базис в пространстве полиномиальных решений системы (1), степени которых не превосходят r . Поскольку $\text{ord } w_i(x) \leq r$, то $E_a(w_i(x), \Omega) < \infty$ при $-2r - n \leq a < -2r - n + 2$. Для каждого $w_i(x)$, $i = 1, \dots, k$, построим решение $v_i(x)$ системы (1) такое, что $v_i(x)|_{\Gamma_1} = w_i(x)$, $\sigma(v_i(x))|_{\Gamma_2} = 0$ и

$$D(v_i(x), \Omega) < \infty, \quad \int_{\Omega} |v_i(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty.$$

Такое решение можно построить вариационным методом, минимизируя соответствующий функционал в классе допустимых функций $\{v(x) : v(x) \in H^1(\Omega), v(x)|_{\Gamma_1} = w(x), \sigma(v(x))|_{\Gamma_2} = 0, v(x) \text{ имеет компактный носитель в } \overline{\Omega}\}$.

Рассмотрим разность $z_i(x) = w_i(x) - v_i(x)$. Имеем $Lz_i(x) = 0$ в Ω , $z_i(x)|_{\Gamma_1} = 0$, $\sigma(z_i(x))|_{\Gamma_2} = 0$ и $E_a(z_i(x), \Omega) < \infty$. Докажем, что $z_i(x)$, $i = 1, \dots, k$, линейно независимы. Действительно, если

$$Z(x) \equiv \sum_{i=1}^k c_i z_i(x) = 0, \quad c_i = \text{const},$$

то $\sum_{i=1}^k c_i (w_i(x) - v_i(x)) = 0$, т.е.

$$W(x) \equiv \sum_{i=1}^k c_i w_i(x) = \sum_{i=1}^k c_i v_i(x) \equiv V(x).$$

Следовательно, $|W(x)|^2 = |V(x)|^2$, $|\nabla W(x)|^2 = |\nabla V(x)|^2$ и

$$\begin{aligned} D(W(x), \Omega) &= D(V(x), \Omega) < \infty, \\ \int_{\Omega} |W(x)|^2 |x|^{-2} dx &= \int_{\Omega} |V(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty. \end{aligned} \quad (23)$$

Согласно лемме 1 решение $V(x)$ системы (1) в Ω имеет вид

$$V(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $R(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + V^\beta(x)$, $R(x) = O(|x|^{2-n})$. Легко проверить, что

$$D(R(x), \Omega) < \infty, \quad \int_{\Omega} |R(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty, \quad n > 2.$$

В силу неравенства треугольника имеем

$$D(P(x), \Omega) < \infty, \quad \int_{\Omega} |P(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty.$$

Докажем, что $P(x) \equiv 0$. Пусть $\text{ord } P(x) = r$. Тогда внутри некоторого конуса K выполняется неравенство $|\nabla P(x)| \geq C|x|^{r-1}$. Поэтому

$$\infty > D(P(x), \Omega) \geq C \int_{K \cap \{x: |x| > H\}} |x|^{2(r-1)} dx = C \int_{|x| > H} |x|^{2r-2+n} |x|^{-1} d|x|.$$

Полученный интеграл сходится только при $r < 0$. Следовательно, $P(x) \equiv 0$.

Таким образом, $V(x) = R(x)$, где $R(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, т.е. $V(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^k c_i w_i(x) \equiv W(x) = V(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

и в силу оценок (23) получим $\sum_{i=1}^k c_i w_i(x) \equiv 0$.

Поскольку $w_i(x)$ – базис в пространстве полиномиальных решений системы (1), степени которых не превосходят r , то $c_i = 0$, $i = 1, \dots, k$; значит, задача имеет по крайней мере $k(r, n)$ линейно независимых решений.

ii) Докажем, что всякое решение $u(x)$ системы (1) с условиями $u(x)|_{\Gamma_1} = 0$, $\sigma(u(x))|_{\Gamma_2} = 0$ и $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ можно представить в виде линейной комбинации построенных решений $z_i(x)$, $i = 1, \dots, k$, $z_i(x) = w_i(x) - v_i(x)$. Согласно лемме 1 решение системы (1) в Ω можно представить в виде

$$u(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $\text{ord } P(x) \leq m = [1 - n/2 - a/2]$,

$$R(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + u^\beta(x).$$

Поскольку $-2r - n \leq a < -2r - n + 2$, то $-n/2 - a/2 \leq r < 1 - n/2 - a/2$, следовательно, $r = [1 - n/2 - a/2] = m$. Таким образом, $\text{ord } P(x) \leq r$.

Покажем, что $P(x)$ – решение системы (1). Имеем

$$0 = Lu(x) = LP(x) + LR(x), \quad \text{причем } LR(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty.$$

Так как $LP(x)$ – многочлен и $LP(x) = -LR(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, то $LP(x) \equiv 0$, т.е. $P(x)$ – полиномиальное решение системы (1). Следовательно, оно представляется в виде линейных комбинаций функций $w_i(x)$, $i = 1, \dots, k$:

$$P(x) = \sum_{i=1}^k c_i w_i(x).$$

Докажем, что $u(x) = \sum_{i=1}^k c_i z_i(x)$. Положим $u_0(x) = u(x) - \sum_{i=1}^k c_i z_i(x)$. По построению решений и после элементарных преобразований получим

$$u_0(x) = R(x) + \sum_{i=1}^k c_i v_i.$$

Покажем, что $u_0(x) \equiv 0$. Пусть $u_0(x)$ – решение, т.е. $Lu_0(x) = 0$ в Ω и $u_0(x)|_{\Gamma_1} = 0$, $\sigma(u_0(x))|_{\Gamma_2} = 0$. По построению решения $v_i(x)$ имеем

$$D(v_i(x), \Omega) < \infty, \quad \int_{\Omega} |v_i(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty, \quad i = 1, \dots, k.$$

Кроме того, легко проверить, что

$$D(R(x), \Omega) < \infty, \quad \int_{\Omega} |R(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty.$$

Отсюда следует, что

$$D(u_0(x), \Omega) < \infty, \quad \int_{\Omega} |u_0(x)|^2 |x|^{-2} dx < \infty.$$

В силу единственности решения $u_e(x)$ задачи (e) из теоремы 2 получим, что $u_0(x) \equiv 0$. Теорема доказана для случая $n > 2$.

Доказательство теоремы для случая $n = 2$ проводится аналогично.

Справедливы следующие утверждения:

i) задача (1), (2) с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ при $-2r - 2 \leq a < -2r$ имеет $k(r, 2)$ линейно независимых решений;

ii) любая совокупность $k(r, 2) + 1$ решений является линейно зависимой.

Докажем эти утверждения.

i) Пусть $w_1(x), \dots, w_k(x)$ – базис в пространстве полиномиальных решений системы (1), степени которых не превосходят r . Поскольку вектор-функции $u_1(x) = (\text{const}, 0)$ и $u_2(x) = (0, \text{const})$ являются линейно независимыми полиномиальными решениями системы (1), то, не ограничивая общности, можно считать, что $w_1(x) \equiv (1, 0)$, $w_2(x) \equiv (0, 1)$. Из условия $\text{ord } w_i(x) \leq r$ следует, что $|w_i(x)| \leq c|x|^r$, значит, $E_a(w_i(x), \Omega) < \infty$ при $-2r - 2 \leq a < -2r$. Для каждого $w_i(x)$, $i = 3, \dots, k$, построим решение $v_i(x)$ системы (1) такое, что $v_i(x)|_{\Gamma_1} = w_i(x)$, $\sigma(v_i)|_{\Gamma_2} = 0$, $D(v_i(x), \Omega) < \infty$, и в силу неравенства Харди [5] имеем

$$\int_{|x|>N} |v_i(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty,$$

причем $N \gg 1$ такое, что $G \subset \{x: |x| < N\}$.

Такое решение можно построить, используя вариационный метод и минимизируя соответствующий функционал в классе допустимых функций. Таким же образом построим решения системы (1) с граничными условиями $v_i(x)|_{\Gamma_1} = \Gamma(x)\tilde{c}_i$, $\sigma(v_i)|_{\Gamma_2} = 0$, $i = 1, 2$, где $\tilde{c}_1 = (1, 0)$, $\tilde{c}_2 = (0, 1)$, и с условиями $E(v_i(x), \Omega) < \infty$, $D(v_i(x), \Omega) < \infty$. Согласно неравенству Харди [5] получим

$$\int_{|x|>N} |v_i(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty,$$

где $N \gg 1$, $G \subset \{x: |x| < N\}$. Пусть $z_i(x) = w_i(x) - v_i(x)$, $i = 3, \dots, k, k+1, k+2$, где $w_{k+1}(x) = \Gamma(x)\tilde{c}_1$, $w_{k+2}(x) = \Gamma(x)\tilde{c}_2$. Имеем $Lz_i(x) = 0$ в Ω , $z_i(x)|_{\Gamma_1} = 0$, $\sigma(z_i)|_{\Gamma_2} = 0$ и

$$E_a(z_i(x), \Omega) \leq CD_a(z_i(x), \Omega) < \infty.$$

Докажем, что $z_i(x)$, $i = 3, \dots, k+2$, линейно независимы. Действительно, если

$$Z(x) \equiv \sum_{i=3}^{k+2} c'_i z_i(x) = 0, \quad c'_i = \text{const},$$

то $\sum_{i=3}^{k+2} c'_i (w_i(x) - v_i(x)) = 0$, т.е.

$$W(x) \equiv \sum_{i=3}^{k+2} c'_i w_i(x) = \sum_{i=3}^{k+2} c'_i v_i(x) \equiv V(x).$$

Следовательно, $|W(x)|^2 = |V(x)|^2$, $|\nabla W(x)|^2 = |\nabla V(x)|^2$ и

$$D(W(x), \Omega) = D(V(x), \Omega) < \infty,$$

$$\int_{|x|>N} |W(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^2 dx = \int_{|x|>N} |V(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^2 dx < \infty.$$

Согласно лемме 1 решение $V(x)$ системы (1) в Ω имеет вид

$$V(x) = P(x) + R(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $R(x) = \sum_{\beta_0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x)$.

Покажем, что $\text{ord } P(x) = 0$. Пусть $\text{ord } P(x) = k$ и $k \neq 0$. Тогда внутри некоторого конуса K выполняется неравенство $|P(x)| \geq C|x|^k$. Кроме того, $R(x) \sim \ln|x|$. Следовательно,

$$|V(x)| = |P(x) + R(x)| \geq |P(x)| - |R(x)| \geq C|x|^k - C \ln|x| \geq \frac{C}{2}|x|^k$$

при $|x| \gg 1$. Отсюда получим, что

$$\infty > \int_{|x| > N} |V(x)|^2 |x|^{-2} |\ln|x||^{-2} dx \geq \frac{C}{2} \int_{|x| > N} |x|^{2k-2} |\ln|x||^{-2} dx.$$

Последний интеграл расходится только при $k \geq 1$. Следовательно, $\text{ord } P(x) = 0$ и $P(x) = C = \text{const}$. Таким образом,

$$V(x) = C + \Gamma(x)C_0 + R_1(x), \quad R_1(x) = \sum_{0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x) C_\alpha + v^\beta(x).$$

Теперь покажем, что $C_0 = 0$. Если $C_0 \neq 0$, то

$$|V(x)| = |C + \Gamma(x)C_0 + R_1(x)| \geq c(C_0)|\ln|x|| - C - |R_1(x)| \geq \frac{c(C_0)}{2} \ln|x|,$$

так как $|R_1(x)| \ll 1$ при $|x| \gg 1$. В силу неравенства Харди [5]

$$\begin{aligned} \infty &> \int_{|x| > N} |V(x)|^2 |x|^{-2} |\ln|x||^{-2} dx \\ &\geq \frac{c(C_0)}{2} \int_{|x| > N} |\ln|x||^2 |x|^{-2} |\ln|x||^{-2} dx = \infty. \end{aligned}$$

Полученное противоречие означает, что $C_0 = 0$. Итак, получили

$$C + R_1(x) = \sum_{i=3}^{k+2} c'_i w_i(x),$$

следовательно,

$$\sum_{i=3}^{k+2} c'_i w_i(x) - C = R_1(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Пусть $C = -(c'_1, c'_2)$; тогда в силу выбора функций $w_1(x)$ и $w_2(x)$ имеем

$$-C = c'_1 w_1(x) + c'_2 w_2(x).$$

Отсюда и из (24) получим

$$\sum_{i=3}^{k+2} c'_i w_i(x) = 0, \quad \text{т.е.} \quad \sum_{i=3}^k c'_i w_i(x) = -c'_{k+1} w_{k+1} - c'_{k+2} w_{k+2}.$$

Так как $w_{k+1}(x) = \Gamma(x)\tilde{c}_1$, $w_{k+2}(x) = \Gamma(x)\tilde{c}_2$, то

$$\sum_{i=1}^k c'_i w_i(x) = -c'_{k+1} \Gamma(x)\tilde{c}_1 - c'_{k+2} \Gamma(x)\tilde{c}_2. \quad (25)$$

Поскольку в равенстве (25) левая часть – многочлен, а правая часть имеет логарифмический рост при $|x| \rightarrow \infty$, то они равны нулю, т.е. $\sum_{i=1}^k c'_i w_i(x) = 0$.

В силу того, что $w_i(x)$, $i = 1, \dots, k$, – базис в пространстве полиномиальных решений, имеем $c'_i = 0$, $i = 1, \dots, k$, и $\Gamma(x)(c'_{k+1}\tilde{c}_1 + c'_{k+2}\tilde{c}_2) = 0$ и в силу линейной независимости векторов $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$ получим $c'_{k+1} = c'_{k+2} = 0$.

Таким образом, $z_i(x)$, $i = 3, \dots, k+2$, – линейно независимые решения, т.е. задача (1), (2) с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ имеет по крайней мере $k(r, 2)$ линейно независимых решений.

ii) Докажем, что любое решение $u(x)$ системы (1) с граничным условием (2) и с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ при $-2r - 2 \leq a < -2r$ можно представить в виде линейной комбинации построенных решений $z_i(x)$, $i = 3, \dots, k+2$, $z_i(x) = w_i(x) - v_i(x)$.

Согласно лемме 1 решение $u(x)$ системы (1) в Ω имеет вид

$$u(x) = P(x) + \Gamma(x)C_0 + R_1(x),$$

где $P(x)$ – многочлен, $\text{ord } P(x) \leq m = [-a/2]$, $R_1(x) = \sum_{0 < |\alpha| \leq \beta} D^\alpha \Gamma(x)C_\alpha + u^\beta(x)$. Поскольку $-2r - 2 \leq a < -2r$, то $-1 - a/2 \leq r < -a/2$, следовательно, $r = [-a/2] = m$. Таким образом, $\text{ord } P(x) \leq r$.

Покажем, что $P(x)$ – решение системы (1). Имеем

$$0 = Lu(x) = LP(x) + LR(x),$$

причем $LR(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$.

Так как $LP(x)$ – многочлен и $LP(x) = -LR(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$, то $LP(x) \equiv 0$, т.е. $P(x)$ – полиномиальное решение системы (1). Следовательно, оно представляется в виде линейной комбинации функций $w_i(x)$, $i = 1, \dots, k$:

$$P(x) = \sum_{i=1}^k d_i w_i(x), \quad d_i = \text{const.}$$

Пусть $C_0 = d_{k+1}\tilde{c}_1 + d_{k+2}\tilde{c}_2$. Докажем, что $u(x) = \sum_{i=3}^{k+2} d_i z_i(x)$. Положим

$$u_0(x) = u(x) - \sum_{i=3}^{k+2} d_i z_i(x).$$

После элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} u_0(x) &= P(x) + \Gamma(x)C_0 + R_1(x) - \sum_{i=3}^{k+2} d_i (w_i(x) - v_i(x)) \\ &= \Phi(x) + R_1(x) + \sum_{i=3}^{k+2} d_i v_i(x), \end{aligned}$$

где $\Phi(x) = \sum_{i=1}^2 d_i w_i(x)$.

Покажем, что $u_0(x) \equiv 0$. Имеем $Lu_0(x) = 0$ в Ω , $u_0(x)|_{\Gamma_1} = 0$, $\sigma(u_0(x))|_{\Gamma_2} = 0$. По построению решений $v_i(x)$

$$D(v_i(x), \Omega) < \infty, \quad \int_{|x|>N} |v_i(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty, \quad i = \overline{3, k+2}.$$

Легко проверить, что $D(R_1(x), \Omega) < \infty$, $D(\Phi(x), \Omega) < \infty$ и

$$\int_{|x|>N} |R_1(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty, \quad \int_{|x|>N} |\Phi(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty.$$

Тогда из неравенства треугольника следует, что $D(u_0(x), \Omega) < \infty$ и

$$\int_{|x|>N} |u_0(x)|^2 |x|^{-2} |\ln |x||^{-2} dx < \infty.$$

Следовательно, в силу единственности решения задачи (w) из теоремы 1 получим, что $u_0(x) \equiv 0$. Таким образом,

$$u(x) = \sum_{i=3}^{k+2} d_i(w_i(x) - v_i(x)),$$

т.е. задача (1), (2) имеет $(k+2) - 2 = k = k(r, 2)$ линейно независимых решений. Теорема доказана.

§ 2. Смешанная задача II (задача Робэна)

Пусть теперь $\Omega \equiv \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 1\}$ с границей $\partial\Omega = \{x : x_n = 1\}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $u = (u_1, \dots, u_n)$.

Для системы (1) будем рассматривать следующую краевую задачу: найти вектор-функцию $u(x)$, удовлетворяющую системе (1) в Ω и однородному граничному условию

$$\sigma(u) + \tau(x)u(x) = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (26)$$

где $\sigma(u) = (\sigma_1(u), \dots, \sigma_n(u))$, $\sigma_i(u) \equiv a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_h} \nu_k$, $i = 1, \dots, n$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$, $\tau(x)$ — бесконечно гладкая функция с равномерно ограниченными производными на $\partial\Omega$, $\tau \geq 0$, $\tau \not\equiv 0$.

Докажем сначала следующую вспомогательную лемму.

ЛЕММА 3. Пусть $u(x)$ — решение системы (1) в Ω , удовлетворяющее граничному условию (26) и неравенству $D(u(x), \Omega_R) \leq C(1 + R^m)$, где C — некоторая положительная постоянная, $m \geq 0$ — целое число. Тогда $u(x)$ — многочлен степени не выше m , т.е.

$$u(x) = P(x), \quad \text{ord } P(x) \leq m. \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта лемма является некоторым аналогом теоремы Лиувилля для системы уравнений и справедлива для общих эллиптических систем по Дуглису–Ниренбергу с постоянными коэффициентами. В случае, когда $\Omega \equiv \mathbb{R}^n$, она доказана в [18].

Доказательство при $\Omega \equiv \mathbb{R}_+^n$ аналогично. Именно в теории эллиптических систем установлено неравенство Бернштейна:

$$\int_{|x| \leq 1/2} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u(x)|^2 dx \leq C_1 \int_{|x| \leq 1} |u(x)|^2 dx, \quad l \geq 1, \quad (28)$$

где постоянная C_1 не зависит от u .

Если $u(x)$ является решением однородной эллиптической системы с постоянными коэффициентами в полушаре $|x| \leq 1$, $x_n > 0$ и при $x_n = 0$ удовлетворяет нулевым краевым условиям Шапиро–Лопатинского [19] (более подробно см. [20]), то, сделав в (28) замену $x = \lambda y$, в силу однородности систем и краевых условий получим

$$\begin{aligned} I(\lambda) &\equiv \int_{|x| \leq \lambda/2} \sum_{|\alpha|=l} |D^\alpha u(x)|^2 dx \leq \lambda^{-l} \int_{|x| \leq \lambda} |u(x)|^2 dx \\ &\leq 2\lambda^{-l} \left(\int_{|x| \leq \lambda} |u(x) - C|^2 dx + \int_{|x| \leq \lambda} C^2 dx \right) \\ &\leq 2\lambda^{-l} \left(C\lambda^2 \int_{|x| \leq \lambda} |\nabla u(x)|^2 dx + C^2 \lambda^n \right). \end{aligned}$$

Из условий леммы 3 имеем

$$I(\lambda) \leq 2\lambda^{-l} (C\lambda^2 \lambda^m + C^2 \lambda^n).$$

Взяв $l > \max\{2 + m, n\}$ и устремив λ к бесконечности, получим $D^\alpha u = 0$ при $|x| \leq 1$. Следовательно, $u(x)$ является многочленом степени меньше, чем l , при $|x| \leq 1$. Поскольку решение эллиптической системы аналитично, то $u(x)$ – многочлен в $\mathbb{R}_+^n$. Из условия $D(u(x), \Omega_R) \leq C(1 + R^m)$ вытекает, что степень такого многочлена не выше m . Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Обобщенным решением смешанной задачи II (задачи Робэна) для системы (1) с граничным условием (26) будем называть вектор-функцию $u(x) \in \mathring{H}_{\text{loc}}^1(\Omega)$ такую, что для всякой вектор-функции $\psi(x) \in H^1(\Omega)$ выполнено интегральное тождество*

$$\int_{\Omega} a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_h} \frac{\partial \psi_i(x)}{\partial x_k} dx + \int_{\partial\Omega} \tau(x) u_i(x) \psi_i(x) ds = 0. \quad (29)$$

Аналогичным образом, как и в случае смешанной задачи I, обозначим

$$\begin{aligned} \text{Ker}_0(L) &= \{u(x): Lu(x) = 0, (\sigma(u(x)) + \tau(x)u(x))|_{\partial\Omega} = 0, E(u(x), \Omega) < \infty\}, \\ \text{Ker}_a(L) &= \{u(x): Lu(x) = 0, (\sigma(u(x)) + \tau(x)u(x))|_{\partial\Omega} = 0, E_a(u(x), \Omega) < \infty\}. \end{aligned}$$

Через $\dim \text{Ker}_0(L)$ и $\dim \text{Ker}_a(L)$ обозначим размерности этих пространств соответственно. Вычислим значение $\dim \text{Ker}_a(L)$ в зависимости от параметра a .

ТЕОРЕМА 5. *Пусть $u(x)$ является обобщенным решением смешанной задачи II (задачи Робэна) для системы (1) в области Ω с граничным условием (26) на $\partial\Omega$ и условием $E(u(x), \Omega) < \infty$. Тогда $u(x) = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно неравенству Корна [2, § 3, неравенство (52)] имеем $D(u(x), \Omega) \leq C_3 E(u(x), \Omega)$, где постоянная C_3 не зависит от $u(x)$.

Пусть $n = 2$. Подставляя в интегральное тождество (29) для $u(x)$ вектор-функцию $\psi(x)$ в виде $\psi(x) = u(x)\theta_N(x)$, где $\theta_N(x) = \theta(\frac{\ln|x|}{\ln N})$, $\theta(s) = 1$ при $s < 1$, $\theta(s) = 0$ при $s > 2$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \theta \leq 1$, получим

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(u(x))\theta_N(x) dx + \int_{\partial\Omega} \tau(x)|u(x)|^2\theta_N(x) ds = - \int_{\Omega} a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_h} \frac{\partial \theta_N(x)}{\partial x_k} u(x) dx, \quad (30)$$

где $\mathcal{E}(u(x)) \equiv a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_h} \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_k}$.

Покажем, что правая часть равенства (30) стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Имеем по неравенству Коши–Буняковского

$$\left| - \int_{\Omega} a_{kh}^{ij} \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_h} \frac{\partial \theta_N(x)}{\partial x_k} u(x) dx \right| \leq 2C_4 J_1(u) J_2(u), \quad C_4 = \text{const},$$

где

$$J_1(u) \equiv \left(\int_{|x|>N} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$J_2(u) \equiv \left(\int_{\Omega \cap \{x: N < |x| < N^2\}} |u(x)|^2 |x|^{-2} |\ln N|^{-2} dx \right)^{1/2}.$$

Из условия $D(u(x), \Omega) < \infty$ и неравенства Харди [5, неравенство (8)] при достаточно большом N следует

$$\int_{|x|>N} |u(x)|^2 |x|^{-2} |\ln|x||^{-2} dx < \infty. \quad (31)$$

В силу неравенств (31) и $D(u(x), \Omega) < \infty$ получим $J_1(u) \rightarrow 0$ и $J_2(u) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(u(x))\theta_N(x) dx + \int_{\partial\Omega} \tau(x)|u(x)|^2\theta_N(x) ds \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

С помощью интегрального тождества

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(u(x)) dx + \int_{\partial\Omega} \tau(x)|u(x)|^2 ds = 0$$

получаем, что если $u(x)$ является решением однородной задачи (1), (26), то $u(x) = Ax + B$ в Ω , где A – постоянная кососимметрическая матрица, B – постоянный вектор. Поскольку $D(Ax + B, \Omega) \leq \frac{1}{2} E(Ax + B, \Omega) = 0$ и $\sigma(u) + \tau(x)u(x) = 0$ на $\partial\Omega$, то $Ax + B = 0$. Множество точек, где $Ax + B = 0$, представляет собой линейное многообразие размерности меньше, чем $n - 1$, так как ранг матрицы A больше или равен 2, если $A \neq 0$. Значит, $u(x) = 0$. Это следует из того, что

$$\int_{\partial\Omega} \tau(x)|u(x)|^2 ds = 0,$$

и поэтому $u(x) \equiv 0$ на множестве $\partial\Omega$ положительной меры.

Рассмотрим случай $n \geq 3$. Доопределим $u(x)$ в $\mathbb{R}^n$, полагая $u(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Из неравенства Корна [2, § 3, неравенство (52)] следует, что $D(u(x), \mathbb{R}^n) < \infty$. По неравенству Харди [2, § 3, неравенство (22)] существует такой постоянный вектор B , что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - B|^2 |x|^{-2} dx \leq C_5 D(u(x), \mathbb{R}^n), \quad C_5 = \text{const.} \quad (32)$$

Пусть $v(x) = u(x) - B$. Покажем, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} |v(x)|^{2n/(n-2)} dx < \infty. \quad (33)$$

Для шара $Q = \{x: |x| = 1\}$ по теореме вложения [21] получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_Q |v(x)|^{2n/(n-2)} dx \right)^{(n-2)/(2n)} &\leq C_6 \left[\left(\int_Q |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_Q |v(x)|^2 |x|^{-2} dx \right)^{1/2} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Сделаем замену переменных $y = \lambda x$ в интегралах неравенства (34). Имеем

$$\begin{aligned} \left(\int_{|y| < \lambda} |v(y)|^{2n/(n-2)} dy \right)^{(n-2)/(2n)} &\leq C_6 \left[\left(\int_{|y| < \lambda} |\nabla v(y)|^2 dy \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{|y| < \lambda} |v(y)|^2 |y|^{-2} dy \right)^{1/2} \right], \end{aligned}$$

где постоянная C_6 не зависит от y и $v(x)$. В силу условия (32) получаем

$$\int_{|y| < \lambda} |v(y)|^{2n/(n-2)} dy < C_7, \quad (35)$$

где постоянная C_7 не зависит от λ . Поскольку $\text{mes}_n(\mathbb{R}^n \setminus \Omega) = \infty$ и $v(x) = B$ на $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, то из неравенства (9) следует, что $B = 0$.

Далее, подставляя в интегральное тождество (29) для $u(x)$ вектор-функцию $\psi(x)$ в виде $\psi(x) = u(x)\theta_N(x)$, где $\theta_N(x) = \theta(\frac{|x|}{N})$, $\theta(s) = 1$ при $s \leq 1$, $\theta(s) = 0$ при $s \geq 2$, $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \theta \leq 1$, как и при доказательстве (30), находим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathcal{E}(u(x))\theta_N(x) dx + \int_{\partial\Omega} \tau(x)|u(x)|^2\theta_N(x) ds \\ \leq C_8(D(u(x), \Omega))^{1/2} \left(\int_{N < |x| < 2N} |u(x)|^2 |x|^{-2} dx \right)^{1/2}, \quad C_8 = \text{const.} \end{aligned} \quad (36)$$

Устремляя N к бесконечности в (36), с помощью интегрального тождества

$$\int_{\Omega} \mathcal{E}(u(x)) dx + \int_{\partial\Omega} \tau(x)|u(x)|^2 ds = 0 \quad (37)$$

получаем, что если $u(x)$ является решением однородной задачи (1), (26), то $u(x) = Ax + B$. Так как $u(x) = Ax + B$ может обращаться в нуль лишь на линейном многообразии размерности не больше, чем $n - 2$, при $u(x) \not\equiv 0$, то $u(x) \equiv 0$ в Ω . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. Если $-n \leq a < \infty$, $n \geq 2$, то $\dim \text{Ker}_a(L) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала рассмотрим случай, когда $a \geq 0$ и $n \geq 2$.

Действительно, если $a \geq 0$, то $\text{Ker}_a(L) \subset \text{Ker}_0(L)$ и

$$\dim \text{Ker}_a(L) \leq \dim \text{Ker}_0(L).$$

Отсюда и из теоремы 5 следует, что $\dim \text{Ker}_a(L) = 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда $-n \leq a < 0$ и $n \geq 2$.

Пусть $u(x) \in \text{Ker}_a(L)$, где $-n \leq a < 0$. Используя теорему 1 из [2, § 3] в случае $K = \mathbb{R}_+^n$ и модифицируя ее для случая $(\sigma(u) + \tau(x)u(x))|_{\partial K} = 0$, можно показать, что при $a + n \neq 0$

$$D_a(u(x), \Omega) \leq CE_a(u(x), \Omega),$$

где постоянная C не зависит от $u(x)$.

Кроме того, $u(x)$ – решение системы (1) в Ω , значит, по лемме 3 оно имеет вид (27): $u(x) = P(x)$, где $P(x)$ – многочлен, $\text{ord } P(x) \leq m$, $m \geq 0$.

Докажем, что $\text{ord } P(x) = 0$. Пусть $\text{ord } P(x) = m$ и $m \neq 0$. Тогда внутри некоторого конуса K справедливо неравенство $|\nabla P(x)| \geq C|x|^{m-1}$, поэтому

$$\begin{aligned} \infty > D_a(u(x), \Omega) &= D_a(P(x), \Omega) = \int_{\Omega} |x|^a |\nabla P(x)|^2 dx \\ &\geq C \int_{K \cap \{x: |x| > H\}} |x|^a |x|^{2m-2} dx = C \int_{|x| > H} |x|^{a+2m-2+n} |x|^{-1} d|x|. \end{aligned}$$

Последний интеграл сходится только в том случае, если $a + 2m - 2 + n < 0$, откуда следует, что $m < 1$, значит, $\text{ord } P(x) = 0$, т.е. $P(x) = C = \text{const}$ и $u(x) = C$.

Легко видеть, что $E(u(x), \Omega) = E(C, \Omega) = 0$, т.е. $u(x) \in \text{Ker}_0(L)$. Получили, что $\text{Ker}_a(L) \subset \text{Ker}_0(L)$, если $-n \leq a$. С другой стороны, очевидно, что $\text{Ker}_0(L) \subset \text{Ker}_a(L)$, если $a < 0$.

Итак, $\text{Ker}_a(L) = \text{Ker}_0(L)$ и $\dim \text{Ker}_a(L) = \dim \text{Ker}_0(L)$.

В силу теоремы 5 имеем $\dim \text{Ker}_0(L) = 0$. Следовательно, $\dim \text{Ker}_a(L) = 0$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 7. Если $-2 - n \leq a < -n$, $n \geq 2$, то $\dim \text{Ker}_a(L) = n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x)$ – решение системы (1) такое, что

$$(\sigma(u) + \tau(x)u(x))|_{\partial\Omega} = 0$$

и $E_a(u(x), \Omega) < \infty$. Тогда, используя теорему 1 из [2, § 3] в случае $K \equiv \mathbb{R}_+^n$ и модифицируя ее для случая $(\sigma(u) + \tau(x)u(x))|_{\partial K} = 0$, можно показать, что при $a + n \neq 0$

$$D_a(u(x), \Omega) \leq CE_a(u(x), \Omega),$$

где постоянная C не зависит от u . Согласно лемме 3 решение $u(x)$ имеет вид (27). Аналогичным образом, как и выше, можно доказать, что $\text{ord } P(x) = 1$. Тогда вектор-многочлен $\vec{P}(x)$, $\text{ord } \vec{P}(x) = 1$, являющийся решением системы (1), удовлетворяющий условиям (26) и $E_a(\vec{P}(x), \Omega) < \infty$, имеет вид $\vec{P}(x) = \vec{C}(x_n - 1)$, где $\vec{C}$ – постоянный вектор. Следовательно, $u(x) = \vec{C}(x_n - 1)$.

Таким образом, размерность пространства решений $u(x)$ системы (1) таких, что $(\sigma(u) + \tau(x)u(x))|_{\partial\Omega} = 0$ и $E_a(u(x), \Omega) < \infty$, равно n , т.е. $\dim \text{Ker}_a(L) = n$ при $n \geq 2$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 8. *Смешанная задача II (задача Робэна) для системы (1) с граничным условием (26) и с условием $E_a(u(x), \Omega) < \infty$ имеет $k(r, n)$ линейно независимых решений при $-2r - n \leq a < -2r - n + 2$, $n \geq 2$, т.е.*

$$\dim \text{Ker}_a(L) = k(r, n),$$

где

$$k(r, n) = n \left(\frac{(r+n)!}{n!r!} - \frac{(r+n-2)!}{n!(r-2)!} - \frac{(r+n-1)!}{(n-1)!r!} \right) = nC_{r+n-2}^{n-1}$$

при $r \geq 2$, $k(0, n) = 0$; C_r^s – число сочетаний из r по s , $C_r^s = 0$, если $s > r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u(x)$ – решение системы (1) такое, что

$$(\sigma(u) + \tau(x)u(x))|_{\partial\Omega} = 0$$

и $E_a(u(x), \Omega) < \infty$. Согласно лемме 3 каждый элемент из $\text{Ker}_a(L)$ является многочленом некоторой степени m , т.е. $u(x) = P(x)$, где $P(x)$ – многочлен, $\text{ord } P(x) \leq m$. Используя теорему 1 из [2, §3] в случае $K \equiv \mathbb{R}_+^n$ и модифицируя ее для случая $(\sigma(u) + \tau(x)u(x))|_{\partial K} = 0$, можно показать, что при $a + n \neq 0$

$$D_a(u(x), \Omega) \leq CE_a(u(x), \Omega),$$

где постоянная C не зависит от u .

Поскольку $D_a(u(x), \Omega) < \infty$, то $a + 2m - 2 + n < 2$, т.е. $m < 1 - \frac{a}{2} - \frac{n}{2}$; поэтому $m = \left[1 - \frac{a}{2} - \frac{n}{2} \right]$, если $\frac{a+n}{2}$ не целое число, и $m = -\frac{a+n}{2}$, если $\frac{a+n}{2}$ целое. Кроме того, из неравенства $-2r - n \leq a < -2r - n + 2$ следует, что $-\frac{n}{2} - \frac{a}{2} \leq r < 1 - \frac{n}{2} - \frac{a}{2}$, значит, $m = r$. Таким образом, каждый элемент из $\text{Ker}_a(L)$ – это вектор-многочлен степени не выше r , т.е. $u(x) = P(x)$, $\text{ord } P(x) \leq r$.

Размерность всех многочленов в $\mathbb{R}^n$ степени не выше r равна $\frac{(r+n)!}{n!r!}$ (см. [17]). Тогда размерность всех вектор-многочленов в $\mathbb{R}^n$ степени не выше r равна

$$n \frac{(r+n)!}{n!r!} = \frac{(r+n)!}{(n-1)!r!}.$$

Такие многочлены, являющиеся решениями системы теории упругости, образуют пространство размерности

$$\frac{(r+n)!}{(n-1)!r!} - \frac{(r+n-2)!}{(n-1)!(r-2)!} = n \left(\frac{(r+n)!}{n!r!} - \frac{(r+n-2)!}{n!(r-2)!} \right),$$

так как каждое уравнение из системы теории упругости (1) представляет собой равенство нулю некоторого многочлена степени $r - 2$. Условие обращения многочлена в нуль на гиперплоскости $x_n = 1$ – это равенство нулю некоторого многочлена степени не выше r от $n - 1$ переменных; следовательно, все решения этой задачи образуют пространство размерности $k(r, n)$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
2. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенства Корна // УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 55–98.
3. Kondratiev V. A., Oleinik O. A. Hardy's and Korn's type inequality and their applications // Rend. Mat. Appl. Serie VII. 1990. V. 10. P. 641–666.
4. Кондратьев В. А., Олейник О. А. О неравенствах Корна и единственности решений классических краевых задач в неограниченных областях для системы теории упругости // Современные проблемы математической физики. Т. 1. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1987. С. 35–63.
5. Кондратьев В. А., Олейник О. А. О периодических по времени решениях параболического уравнения второго порядка во внешних областях // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1985. № 4. С. 38–47.
6. Knops R. J., Payne L. E. Uniqueness theorems in linear elasticity. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
7. Михайлова Т. В. Смешанная краевая задача для системы теории упругости в неограниченных областях // УМН. 1991. Т. 46. № 4. С. 163–164.
8. Коньков А. А. О размерности пространства решений эллиптических систем в неограниченных областях // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 12. С. 23–52.
9. Кудрявцев Л. Д. Решение первой краевой задачи для самосопряженных и эллиптических уравнений в случае неограниченных областей // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1967. Т. 31. № 5. С. 354–366.
10. Матевосян О. А. О единственности решения задачи Робэна для системы теории упругости в полупространстве // УМН. 2003. Т. 58. № 5. С. 151–152.
11. Матевосян О. А. О единственности решения смешанной задачи системы теории упругости для неограниченных областей // УМН. 1994. Т. 49. № 4. С. 129–130.
12. Матевосян О. А. О решениях краевых задач для системы теории упругости и бигармонического уравнения в полупространстве // Дифф. уравн. 1998. Т. 34. № 6. С. 806–811.
13. Матевосян О. А. О решениях внешней задачи Дирихле для бигармонического уравнения с конечным весовым интегралом Дирихле // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 3. С. 403–418.
14. Бучужури Т. В., Гегелия Т. Г. О единственности решений основных задач теории упругости для бесконечных областей // Дифф. уравн. 1989. Т. 25. № 9. С. 1556–1565.
15. Лопатинский Я. Б. Теория общих граничных задач. Избранные труды. Киев: Наук. думка, 1984.
16. Kondratiev V. A., Oleinik O. A. On the behavior at infinity of solutions of elliptic systems with a finite energy integral // Arch. Rat. Mech. and Analysis. 1987. V. 99. № 1. P. 75–99.
17. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. шк., 1977.
18. Douglis A., Nirenberg L. Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations // Commun. Pure Appl. Math. 1955. V. 8. P. 503–538.
19. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. Т. I. М.: ИЛ, 1962.
20. Morrey C. B. Multiple Integrals in the Calculus of Variations. Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer-Verlag, 1966.
21. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.