Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Миклюков, О квазиконформно плоских поверхностях в римановых многообразиях, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 5, 83–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/im452>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 16:25:40

УДК 517.53/57

В. М. Миклюков

О квазиконформно плоских поверхностях в римановых многообразиях

Указаны два свойства K -квазиконформно плоских гиперповерхностей в римановых многообразиях общего вида. Первое из них дано в терминах изопериметрии. Второе сформулировано в терминах основной частоты сечений многообразия геодезическими сферами. В двумерном случае оба условия совпадают.

Библиография: 23 наименования.

§ 1. Основные результаты

Пусть $\mathcal{X}$ – n -мерное риманово многообразие без края, которое предполагаем далее, если не оговорено противное, связным некомпактным ориентируемым и принадлежащим классу C^k , $k \geq 3$. Придерживаемся терминологии и обозначений, принятых в [1]. Для произвольной точки $x \in \mathcal{X}$ через $T_x = T_x(\mathcal{X})$ обозначим касательное пространство в точке x , через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в T_x . Пусть $T(\mathcal{X})$ – касательное расслоение над $\mathcal{X}$ и ∇ – риманова связность на $T(\mathcal{X})$.

Пусть $d(x', x'')$ – геодезическое расстояние между точками $x', x'' \in \mathcal{X}$. Используем обозначения

$$B_{\mathcal{X}}(a, t) = \{x \in \mathcal{X} : d(a, x) < t\}, \quad S_{\mathcal{X}}(a, t) = \{x \in \mathcal{X} : d(a, x) = t\}$$

для геодезического шара и геодезической сферы соответственно. Здесь $a \in \mathcal{X}$ – центр шара или сферы, $t > 0$ – радиус. Далее полагаем $B(a, t) = B_{\mathbb{R}^n}(a, t)$ и $S(a, t) = S_{\mathbb{R}^n}(a, t)$.

Положим

$$R_a = \liminf d(a, x_n),$$

где нижний предел берется по всевозможным последовательностям $\{x_n\} \subset \mathcal{X}$, не имеющим точек накопления в $\mathcal{X}$.

Для произвольного открытого множества $D \subset \mathcal{X}$ пусть ∂D обозначает его границу. Если $D_1 \subset D$ – открытое подмножество, то пусть $\partial' D_1 = \partial D_1 \setminus \partial D$ – относительная граница D_1 в D .

Мы используем стандартные обозначения для функциональных классов на многообразии. Так, например, $L^p_{\text{loc}}(D)$ – множество всех измеримых в смысле Лебега функций, определенных на открытом множестве $D \subset \mathcal{X}$ и локально интегрируемых в D со степенью p , $1 \leq p \leq \infty$, $C^k(D)$ – множество всех функций, имеющих непрерывные в D частные производные порядка $k \geq 0$, $C^k_0(D)$ – множество функций $u \in C^k(D)$ с компактным носителем $\text{supp } u \subset D$.

Работа выполнена при частичной поддержке INTAS-10170.

Обозначим через $W_p^1(D)$, $p \geq 1$, пространство Соболева над D , получаемое как пополнение по указываемой норме множества C^∞ -функций u , для которых

$$\|u\|_{W_p^1(D)} := \left(\int_D |u|^p dv_{\mathcal{X}} \right)^{1/p} + \left(\int_D |\nabla u|^p dv_{\mathcal{X}} \right)^{1/p} < \infty$$

(см. [2, п. 2.1]). Здесь $dv_{\mathcal{X}}$ – форма объема на $\mathcal{X}$.

Через $W_{p,\text{loc}}^1(D)$ обозначим множество функций $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ таких, что $u \in W_p^1(D_1)$ для всякого открытого подмножества $D_1 \Subset D$. (Запись $D_1 \Subset D$ означает, что замыкание D_1 компактно и содержится в D .)

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ – n -мерные римановы многообразия класса C^k , $k \geq 3$, и $f: D \rightarrow \mathcal{Y}$, $D \subset \mathcal{X}$, – некоторое отображение. Скажем, что $f \in L_{\text{loc}}^p(D)$, если для произвольной функции $\varphi \in C^0(\mathcal{Y})$ выполнено $\varphi \circ f \in L_{\text{loc}}^p(D)$. Отображение f принадлежит классу $W_{p,\text{loc}}^1(D)$, если $\varphi \circ f \in W_{p,\text{loc}}^1(D)$ для всякой $\varphi \in C^1(\mathcal{Y})$. В частности, вектор-функция $f = (f_1, f_2, \dots, f_n): D \rightarrow \mathbb{R}^n$ принадлежит классу $W_{p,\text{loc}}^1(D)$ тогда и только тогда, когда каждая ее компонента f_i , $i = 1, 2, \dots, n$, принадлежит данному классу.

Пусть $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ – отображение класса $W_{p,\text{loc}}^1(D)$. Обозначим через $f'(x): T_x(\mathcal{X}) \rightarrow T_{f(x)}(\mathcal{Y})$ его формальную производную. Далее полагаем

$$\|f'(x)\| = \max_{|h|=1} |f'(x)h|$$

и $J(x, f) = \det(f'(x))$ – якобиан f в точке $x \in \mathcal{X}$.

Зафиксируем постоянную $K \geq 1$. Гомеоморфизм $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ называется K -квазиконформным [3, с. 24–27], если $f \in W_{n,\text{loc}}^1(\mathcal{X})$ и

$$\|f'(x)\|^n \leq K J(x, f) \quad \text{почти всюду в } \mathcal{X}. \quad (1.1)$$

Если отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ квазиконформно, то обратное отображение $f^{-1}: f(\mathcal{X}) \subset \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ также квазиконформно в области $f(\mathcal{X})$.

Пусть $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – точка в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим гиперплоскость

$$\Pi_0 = \{y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n: y_1 = 0\},$$

разбивающую пространство $\mathbb{R}^n$ на два полупространства, которые далее обозначаются $\mathbb{R}_+^n = \{y: y_1 > 0\}$ и $\mathbb{R}_-^n = \{y: y_1 < 0\}$.

Пусть Π – гиперповерхность в $\mathcal{X}$. Зафиксируем точку $a \in \Pi$ и число R , $0 < R < R_a$. Обозначим через $\Pi(a, R)$ компоненту связности множества $\Pi \cap B_{\mathcal{X}}(a, R)$, содержащую точку a . Скажем, что поверхность Π является K -квазиконформно плоской при $n \geq 3$ и, соответственно, K -квазиконформно прямой (K -квазипрямой) при $n = 2$, если для всякой точки $a \in \Pi$ и всякого R , $0 < R < R_a$, существует K -квазиконформное отображение $f: B_{\mathcal{X}}(a, R) \rightarrow B(0, 1)$ такое, что $f(\Pi(a, R)) \subset \Pi_0$.

Целью настоящей работы является изучение свойств K -квазиконформно плоских поверхностей в римановых многообразиях. Локально свойства таких поверхностей в многообразии мало отличаются от свойств поверхностей в евклидовом

пространстве. Проблема возникает в случае, когда необходимо описать эти свойства в равномерных (не зависящих от точки) терминах с учетом того, что многообразие искривлено. (Современное состояние проблемы для $\mathbb{R}^n$ см. в [4], [5, гл. 14], [6] и цитированной в этих работах литературе.) В частности, в случае $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ хорошо известен [7] критерий для K -квазиконформно прямых линий, формулируемый в терминах двойного отношения трех точек. (Такие кривые на плоскости $\mathbb{R}^2$ называются также K -квазиокружностями.) Вместе с тем, следует отметить, что даже в случае квазипрямых в $\mathbb{R}^2$ знание данного критерия не исчерпывает интереса к таким кривым – квазипрямые обладают и другими небезынтесными свойствами (например, см. следствие 6.1 в конце статьи).

В настоящей работе указаны два свойства K -квазиконформно плоских гиперповерхностей в римановых многообразиях. Для описания этих свойств введем некоторые специальные величины, количественно характеризующие способ рассеечения многообразия K -квазиплоскостью. Докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть $\mathcal{X}$ – n -мерное связное некомпактное ориентируемое риманово C^3 -многообразие без края. Если Π – K -квазиплоскость в $\mathcal{X}$, то для всякой точки $a \in \Pi$ и произвольной пары чисел r, R , $0 < r < R < R_a$, выполняются соотношения*

$$\begin{aligned} \int_r^R (\alpha^+(a, t) + \alpha^-(a, t)) dt &\leq \frac{1}{n} 2^{1/(n-1)} \omega_{n-1}^{1/(1-n)} c_0(K, r, R), \\ \int_r^R (\lambda^+(a, t) + \lambda^-(a, t)) dt &\leq c_0(K, r, R), \end{aligned}$$

где

$$c_0(K, r, R) = K \ln \left(K^{(4n-2)/(n-1)} D^{2n}(a, r) D^{2n}(a, R) \ln^{2n} \frac{R}{r} \right).$$

Величина $\alpha^+(a, t) + \alpha^-(a, t)$ в левой части первого из неравенств выражается через $(n-1)$ -мерные меры частей геодезической сферы $S_{\mathcal{X}}(a, t)$, на которые она разрезается квазиплоскостью Π ; величина $\lambda^+(a, t) + \lambda^-(a, t)$ в левой части второго неравенства выражается через основные частоты этих частей (точные определения см. в § 2); $D(a, \rho)$ – некоторая величина, связанная с геометрическим строением многообразия $\mathcal{X}$ в геодезическом шаре $B_{\mathcal{X}}(a, \rho)$ (см. § 5), и, наконец, ω_{n-1} – площадь $(n-1)$ -мерной сферы радиуса 1 в $\mathbb{R}^n$.

В случае $n = 2$ оба условия совпадают. Для гиперповерхностей в $\mathbb{R}^n$ аналогичные утверждения можно найти в [8], [9].

Доказательство опирается на специальные оценки интеграла Дирихле квазиконформного отображения по связным кускам геодезического шара $B_{\mathcal{X}}(a, \rho)$ с центром в точке $a \in \Pi$, на которые квазиплоскость разрезает многообразие (лемма 2.3). Из других вспомогательных средств отметим утверждение, которое, как и в [10, гл. I, § 3], будем называть *D-свойством*.

ТЕОРЕМА 1.2. *Пусть $\mathcal{X}$ – произвольное n -мерное связное некомпактное ориентируемое риманово C^3 -многообразие без края. Пусть $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – K -квазиконформное отображение.*

Тогда для всякой точки $a \in \mathcal{X}$ и всякого ρ , $0 < \rho < R_a$, выполнено

$$\frac{\max |f(x) - f(a)|}{\min |f(x) - f(a)|} \leq D(a, \rho), \quad (1.2)$$

где максимум и минимум берутся по геодезической сфере $S_{\mathcal{X}}(a, \rho)$.

По форме неравенство (1.2) такое же, как соответствующее неравенство для квазиконформных отображений $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (см. [3, формула (7.17)]). В своей существенной части доказательство теоремы 1.2 включает вывод специальной формулы (5.1) для величины $D(a, \rho)$, записываемой в терминах подходящих характеристик многообразия $\mathcal{X}$. Заметим, что каких-либо “доведенных до числа” оценок $D(a, \rho)$ на многообразиях не известно и что подобные оценки нетривиальны, к примеру, даже для двумерных многообразий постоянной кривизны.

Автор признателен А. Н. Кондрашову и рецензенту, прочитавшим рукопись статьи и сделавшим ряд полезных замечаний по тексту и форме изложения материала.

§ 2. Оценки интеграла энергии

Пусть $n \geq 2$, и пусть $\mathcal{X}$ – произвольное некомпактное риманово многообразие, $\dim \mathcal{X} = n$. Рассмотрим K -квазиконформно плоскую гиперповерхность Π в $\mathcal{X}$. Фиксируем произвольно точку $a \in \Pi$, радиус R , $0 < R < R_a$, и K -квазиконформное отображение $f: B_{\mathcal{X}}(a, R) \rightarrow B(0, 1)$, для которого $f(\Pi(a, R)) \subset \Pi_0$. Гиперповерхность $\Pi(a, R)$ разбивает шар $B_{\mathcal{X}}(a, R)$ на две подобласти

$$\Delta^+ = f^{-1}(B_+) \quad \text{и} \quad \Delta^- = f^{-1}(B_-)$$

таким образом, что $\Delta^+ \cup \Pi(a, R) \cup \Delta^- = B_{\mathcal{X}}(a, R)$. Здесь $B_{\pm} = B(0, 1) \cap \mathbb{R}_{\pm}^n$.

Пусть $\gamma \subset B_{\mathcal{X}}(a, R)$ – непрерывный путь, выходящий из точки $x_0 \in B_{\mathcal{X}}(a, R)$. Назовем путь γ *расходящимся* в $B_{\mathcal{X}}(a, R)$, если $\overline{\gamma} \cap (\mathcal{X} \setminus B_{\mathcal{X}}(a, R)) \neq \emptyset$. Скажем, что множество $\Gamma \subset \Delta^+$ *отделяет точку* $a \in \Delta^+$, если для всякого расходящегося в $B_{\mathcal{X}}(a, R)$ пути $\gamma \subset \Delta^+$ с началом в точке a выполнено $\gamma \cap \Gamma \neq \emptyset$.

Для произвольного r , $0 < r < R$, пусть $S_{\mathcal{X}}^+(a, r)$ – связная компонента множества $S_{\mathcal{X}}(a, r) \setminus \Pi$, содержащаяся в Δ^+ и отделяющая точку $a \in \Pi$ в Δ^+ . Пусть $B_{\mathcal{X}}^+(a, r)$ – множество всех $x \in \Delta^+$, отделяемых в Δ^+ гиперповерхностью $S_{\mathcal{X}}^+(a, r)$. Ясно при этом, что $\partial' B_{\mathcal{X}}^+(a, r) = S_{\mathcal{X}}^+(a, r)$. Пусть $S_{\mathcal{X}}^-(a, r)$ и $B_{\mathcal{X}}^-(a, r)$ – соответствующие величины для области Δ^- . Положим

$$I^{\pm}(a, r) = \int_{B_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} \|f'(x)\|^n dv_{\mathcal{X}},$$

где $dv_{\mathcal{X}}$ – элемент n -мерного объема в $\mathcal{X}$.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $L_0 = \omega_{n-1}^{1/n} n^{(n-1)/n}$, и пусть $\theta_0(t) = L_0 t^{(n-1)/n}$. Используя изопериметрическое свойство $\mathbb{R}^n$, заключаем, что

$$\theta_0(\mathcal{H}^n(G)) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial G)$$

для всякой области $G \subset \mathbb{R}^n$ с границей ∂G , $\mathcal{H}^{n-1}(\partial G) < \infty$. (Здесь и далее $\mathcal{H}^k(E)$ – k -мерная мера Хаусдорфа множества E .) Легко видеть, что изопериметрический профиль полупространств $\mathbb{R}_\pm^n$ задается выражением

$$\theta_{\mathbb{R}_\pm^n}(t) = L_1 t^{(n-1)/n}, \quad L_1 = (\omega_{n-1}/2)^{1/n} n^{(n-1)/n}, \quad (2.1)$$

и, в частности,

$$\theta_{\mathbb{R}_\pm^n}(\mathcal{H}^n(f(B_{\mathcal{X}}^\pm(a, r)))) \leq \mathcal{H}^{n-1}(f(S_{\mathcal{X}}^\pm(a, r))). \quad (2.2)$$

Далее потребуются два простых утверждения, хорошо известных для квазиконформных отображений областей евклидова пространства. Первое из них будет необходимо, в частности, для вычисления меры образа $B_{\mathcal{X}}^\pm(a, r)$ при квазиконформных отображениях.

ЛЕММА 2.1. Пусть $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – квазиконформное отображение. Тогда для произвольного измеримого в смысле Лебега множества $E \subset \mathbb{R}^n$ и для произвольной измеримой функции $\chi: E \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено

$$\int_E \chi(y) dv_{\mathbb{R}^n} = \int_{f^{-1}(E)} \chi(f(x)) J(x, f) dv_{\mathcal{X}}. \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, фиксируем покрытие $\{U_i\}$ многообразия $\mathcal{X}$ областями U_i , $i = 1, 2, \dots$, с системой локальных C^2 -гладких координат в каждой U_i . Не уменьшая общности, можно предполагать, что каждая из карт $t = \tau_i(x): U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots$, является квазиизометрической, т.е. для произвольной пары точек $x', x'' \in U_i$ выполнено

$$A_i d(x', x'') \leq |\tau_i(x') - \tau_i(x'')| \leq B_i d(x', x'') \quad (2.4)$$

с некоторыми постоянными $A_i, B_i > 0$, $i = 1, 2, \dots$.

В силу [11, гл. I, теорема 1] существует локально конечное разбиение единицы $\sum_i \varphi_i$, подчиненное покрытию $\{U_i\}$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{f^{-1}(E)} \chi(f(x)) J(x, f) dv_{\mathcal{X}} &= \int_{f^{-1}(E)} \sum_i \varphi_i(x) \chi(f(x)) J(x, f) dv_{\mathcal{X}} \\ &= \sum_i \int_{U_i \cap f^{-1}(E)} \varphi_i(x) \chi(f(x)) J(x, f) dv_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Поскольку отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ K -квазиконформно, а отображения τ_i билипшицевы, то отображения

$$\tilde{f}_i = f \circ \tau_i^{-1}: \tau_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

являются K_i -квазиконформными с некоторыми постоянными $K_i \geq 1$, зависящими от $K, A_i, B_i, i = 1, 2, \dots$. Пусть $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Пользуясь формулой замены переменной для квазиконформных отображений в $\mathbb{R}^n$ [3, теоремы 2.2 и 6.2], находим

$$\begin{aligned} & \int_{U_i \cap f^{-1}(E)} \varphi_i(x) \chi(f(x)) J(x, f) dv_{\mathcal{X}} \\ &= \int_{\tau_i^{-1}(U_i \cap f^{-1}(E))} \varphi_i(\tau_i^{-1}(t)) \chi(\tilde{f}_i(t)) J(t, \tilde{f}_i) dt_1 \wedge \dots \wedge dt_n \\ &= \int_{f(U_i) \cap E} \varphi_i(f^{-1}(y)) \chi(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \int_{f^{-1}(E)} \chi(f(x)) J(x, f) dv_{\mathcal{X}} &= \sum_i \int_{f(U_i) \cap E} \varphi_i(f^{-1}(y)) \chi(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \\ &= \sum_i \int_E \varphi_i(f^{-1}(y)) \chi(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \\ &= \int_E \sum_i \varphi_i(f^{-1}(y)) \chi(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n \\ &= \int_E \chi(y) dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n, \end{aligned}$$

и равенство (2.3) действительно справедливо.

Для случая квазиконформных отображений областей евклидова пространства следующее неравенство см. в [3, с. 35].

ЛЕММА 2.2. *Для почти всех $r, 0 < r < R_a$, выполнено*

$$\mathcal{H}^{n-1}(f(S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r))) \leq \int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} \|f'(x)\|^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1}, \quad (2.5)$$

где $d\mathcal{H}^{n-1}$ – элемент $(n-1)$ -меры Хаусдорфа на $S_{\mathcal{X}}(a, r)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ квазиконформно, поэтому обратное отображение $f^{-1}: f(\mathcal{X}) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{X}$ также квазиконформно. Поскольку $d(a, x)$ удовлетворяет условию Липшица на $\mathcal{X}$, то функция $\tilde{d}(y) = d(a, f^{-1}(y))$ принадлежит классу $W_{n, \text{loc}}^1(f(B_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, R_a)))$. В силу [12, теорема 12] для почти всех $r, 0 < r < R_a$, множества уровня

$$E_r = \{y \in f(B_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, R_a)): \tilde{d}(y) = r\}$$

являются счетно $(\mathcal{H}^{n-1}, n-1)$ -спрямляемыми и, в частности, имеют σ -конечную $(n-1)$ -мерную меру Хаусдорфа.

Фиксируем произвольно r_1, r_2 так, чтобы $0 < r_1 < r_2 < R_a$. В силу [12, теорема 12] находим

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} \mathcal{H}^{n-1}(E_r) dr &= \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{f(S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r))} |\nabla \tilde{d}(y)| \frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{|\nabla \tilde{d}(y)|} \\ &= \int_{r_1 < \tilde{d}(y) < r_2} |\nabla \tilde{d}(y)| dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n. \end{aligned}$$

Данное утверждение справедливо в предположении конечности интеграла в левой части соотношения. Это будет ясно из дальнейшего.

Пусть $f^{-1} = g$. Заметим, что

$$\begin{aligned} |\nabla \tilde{d}(y)| &= |\nabla d(a, g(y))| = |(g'(f(x))) \nabla_x d(a, x)| \\ &= |(f'(x))^{-1} \nabla_x d(a, x)|. \end{aligned}$$

Таким образом, из предыдущего равенства на основании леммы 2.1 имеем

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathcal{H}^{n-1}(E_r) dr = \int_{r_1 < d(a, x) < r_2} |(f'(x))^{-1} \nabla_x d(a, x)| \det(f'(x)) dv_{\mathcal{X}}.$$

Пусть $x \in \mathcal{X}$ – точка, в которой определено линейное отображение $f'(x): T_x(\mathcal{X}) \rightarrow T_{f(x)}\mathbb{R}^n$. Найдем в $T_x(\mathcal{X})$ и $\mathbb{R}^n$ ортонормальные системы векторов $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ и $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ такие, что $f'(\mathbf{u}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i$, где λ_i – некоторые постоянные, $i = 1, \dots, n$. Выбирая в $T_x(\mathcal{X})$ и $\mathbb{R}^n$ соответствующие системы координат, можно записать

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (f'(x))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

При этом выполнено

$$\|f'(x)\| = \lambda_n, \quad \|(f'(x))^{-1}\| = \lambda_1^{-1}, \quad \det(f'(x)) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n.$$

Далее находим

$$\begin{aligned} |(f'(x))^{-1} \nabla_x d(a, x)| |\det(f'(x))| &= \left| (f'(x))^{-1} \frac{\nabla_x d(a, x)}{|\nabla_x d(a, x)|} \right| |\nabla_x d(a, x)| \prod_{i=1}^n \lambda_i \\ &\leq \|(f'(x))^{-1}\| |\nabla_x d(a, x)| \prod_{i=1}^n \lambda_i \leq \prod_{i=2}^n \lambda_i |\nabla d(a, x)| \leq \|f'(x)\|^{n-1} |\nabla d(a, x)|. \end{aligned}$$

Следовательно, приходим к соотношению

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathcal{H}^{n-1}(E_r) dr \leq \int_{r_1 < d(x, a) < r_2} \|f'(x)\|^{n-1} |\nabla d(a, x)| dv_{\mathcal{X}}.$$

Функция $d(a, x)$ удовлетворяет условию Липшица. По формуле Кронрода–Федерера для липшицевых функций на многообразиях (см. [13, гл. 3, п. 2.4]) можно записать

$$\int_{r_1 < d(x, a) < r_2} \|f'(x)\|^{n-1} |\nabla d(a, x)| dv_{\mathcal{X}} = \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} \|f'(x)\|^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Таким образом,

$$\int_{r_1}^{r_2} \mathcal{H}^{n-1}(E_r) dr \leq \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} \|f'(x)\|^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Разделим обе части этого неравенства на $r_2 - r_1$ и перейдем к пределу при $r_2 \rightarrow r_1$. На основании теоремы Лебега о дифференцируемости интеграла по переменному пределу интегрирования легко убеждаемся в справедливости (2.5) для почти всех $r \in (0, R_a)$.

Вернемся к оценке интеграла энергии. Заметим сначала, что условие квазиконформности (1.1) вместе с соотношением (2.3) влекут

$$K^{-1}I^{\pm}(a, r) = K^{-1} \int_{B_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} \|f'(x)\|^n dv_{\mathcal{X}} \leq \int_{B_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} J(x, f) dv_{\mathcal{X}}.$$

Теперь в силу (2.1)–(2.3) и (2.5) из последнего неравенства получим

$$\begin{aligned} L_1^{n/(n-1)} K^{-1} I^{\pm}(a, r) &\leq L_1^{n/(n-1)} \int_{B_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} J(x, f) dv_{\mathcal{X}} \\ &= L_1^{n/(n-1)} \mathcal{H}^n(f(B_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r))) \leq (\mathcal{H}^{n-1}(f(S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r))))^{n/(n-1)} \\ &\leq \left(\int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} \|f'(x)\|^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1} \right)^{n/(n-1)} \\ &\leq (\mathcal{H}^{n-1}(S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)))^{1/(n-1)} \int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} \|f'(x)\|^n d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned}$$

Пользуясь еще раз формулой Кронрода–Федерера для коплощади и замечая, что $|\nabla d(a, x)| = 1$ почти всюду на $\mathcal{X}$, имеем

$$I^{\pm}(a, r) = \int_0^r dt \int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, t)} \|f'(x)\|^n \frac{d\mathcal{H}^{n-1}}{|\nabla d(a, x)|} = \int_0^r dt \int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, t)} \|f'(x)\|^n d\mathcal{H}^{n-1},$$

т. е. для почти всех r , $0 < r < R_a$,

$$\frac{d}{dr} I^{\pm}(a, r) = \int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} \|f'(x)\|^n d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (2.6)$$

Следовательно, неравенство, выписанное выше, можно представить в виде

$$c_1(n, K) \alpha^{\pm}(a, r) \leq \frac{1}{I^{\pm}(a, r)} \frac{d}{dr} I^{\pm}(a, r) \quad \text{для почти всех } r > 0,$$

где

$$\alpha^{\pm}(a, r) = (\mathcal{H}^{n-1}(S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)))^{1/(1-n)}.$$

Здесь и далее $c(a, b, \dots)$ – постоянная (возможно, с индексом), зависящая только от a, b и т.п. В частности,

$$c_1(n, K) = L_1^{n/(n-1)} K^{-1} = n\omega_{n-1}^{1/(n-1)} / (K \cdot 2^{1/(n-1)}).$$

Интегрируя дифференциальное неравенство от r до R , $0 < r < R < R_a$, выводим

$$c_1(n, K) \int_r^R \alpha^{\pm}(a, t) dt \leq \ln \frac{I^{\pm}(a, R)}{I^{\pm}(a, r)}. \quad (2.7)$$

Случай 2. Для произвольного открытого множества $\Sigma \subset S_{\mathcal{X}}(a, r) \subset \mathcal{X}$ определим величину

$$\lambda(\Sigma) = \inf \frac{(\int_{\Sigma} |\nabla_S \varphi|^n d\mathcal{H}^{n-1})^{1/n}}{(\int_{\Sigma} |\varphi|^n d\mathcal{H}^{n-1})^{1/n}},$$

где точная нижняя грань берется по всевозможным функциям $\varphi \in W_n^1(\Sigma)$, $\text{supp } \varphi \subset \Sigma$, и $\nabla_S \varphi$ означает градиент φ в метрике $S_{\mathcal{X}}(a, r)$.

Величина $\lambda(\Sigma)$ называется *основной частотой* множества $\Sigma \subset S_{\mathcal{X}}(a, r)$. В случае, когда Σ — область в $\mathbb{R}^n$ и $n = 2$, данная величина имеет конкретный физический смысл и означает частоту наиболее низкого собственного тона однородной упругой мембраны, жестко закрепленной вдоль границы области Σ (см., например, [15, гл. III]). Некоторые оценки основной частоты $\lambda(\Sigma)$ для общего случая см. в [16].

Пользуясь формулой Остроградского–Гаусса, для почти всех $r \in (0, R_a)$ можно записать

$$\int_{B_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} J(x, f) dv_{\mathcal{X}} = \int_{\partial B_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} f_1 df_2 \wedge \cdots \wedge df_n \quad (2.8)$$

(пояснения см. ниже). Однако гиперповерхность Π является K -квазиконформно плоской, и потому $f_1|_{\Pi} = 0$. Следовательно,

$$\int_{B_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} J(x, f) dv_{\mathcal{X}} = \int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} f_1 df_2 \wedge \cdots \wedge df_n. \quad (2.9)$$

Соотношения (2.8) и (2.9) не нуждаются в пояснениях для случая C^2 -гладких отображений. Аппроксимируем гомеоморфизмы $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ класса $W_{n, \text{loc}}^1(\mathcal{X})$ гладкими отображениями $f_k: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющими свойствам:

- i) $f_k \rightarrow f$ локально равномерно в $\mathcal{X}$ при $k \rightarrow \infty$;
- ii) $\|f'_k(x) - f'(x)\|_{L^n(D)} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ для всякой подобласти $D \Subset \mathcal{X}$.

Нетрудно видеть, что такая аппроксимация возможна, если воспользоваться известной техникой приближения соболевских функций сглаживающими средними (см., например, [17, гл. II, § 5] или [18, п. 4.2.1]). Действительно, зафиксируем произвольно r_1, r_2 , $0 < r_1 < r_2 < R_a$. Пользуясь соотношением (2.8) для гладких функций, докажем равенство

$$\int_{r_1}^{r_2} dr \int_{B_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} J(x, f_k) dv_{\mathcal{X}} = \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{\partial B_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} f_{k1} df_{k2} \wedge \cdots \wedge df_{kn}.$$

Поскольку $f_k \rightarrow f$ равномерно на $B_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)$ и $f_1|_{\Pi} = 0$, то, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем

$$\int_{r_1}^{r_2} dr \int_{B_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} J(x, f) dv_{\mathcal{X}} = \int_{r_1}^{r_2} dr \int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} f_1 df_2 \wedge \cdots \wedge df_n.$$

Теперь, как и выше, разделим обе части этого равенства на $r_2 - r_1$. Переходя к пределу при $r_2 \rightarrow r_1$, убеждаемся в справедливости соотношения (2.9) для почти всех r , $0 < r < R_a$.

Пользуясь (2.9), для почти всех r , $0 < r < R_a$, находим

$$\begin{aligned} \int_{B_{\mathcal{X}}^{\pm}(a,r)} \|f'(x)\|^n dv_{\mathcal{X}} &\leq K \int_{B_{\mathcal{X}}^{\pm}(a,r)} J(x, f) dv_{\mathcal{X}} = K \int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a,r)} f_1 df_2 \wedge \cdots \wedge df_n \\ &\leq K \int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a,r)} |f_1| |df_2 \wedge \cdots \wedge df_n| d\mathcal{H}^{n-1}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Оценим норму $(n-1)$ -формы $df_2 \wedge \cdots \wedge df_n$. Поскольку форма $df_2 \wedge \cdots \wedge df_n$ простая, то

$$\begin{aligned} |df_2 \wedge \cdots \wedge df_n|^2 &= \langle df_2 \wedge \cdots \wedge df_n, df_2 \wedge \cdots \wedge df_n \rangle \\ &= \langle \nabla f_2 \wedge \cdots \wedge \nabla f_n, \nabla f_2 \wedge \cdots \wedge \nabla f_n \rangle \leq \prod_{i=2}^n |\nabla f_i|^2. \end{aligned}$$

В силу неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим имеем

$$\left(\prod_{i=2}^n |\nabla f_i|^2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \leq \frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n |\nabla f_i|^2,$$

и потому

$$|\nabla f_2 \wedge \cdots \wedge \nabla f_n| \leq \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^n |\nabla f_i|^2 \right)^{(n-1)/2}. \quad (2.11)$$

Далее, для произвольного вектора $h \in T_x(\mathcal{X})$ выполнено

$$|f'(x)h|^2 = \sum_{i=1}^n \langle \nabla f_i, h \rangle^2,$$

а потому, полагая здесь $h = \nabla f_k / |\nabla f_k|$, будем иметь

$$|\nabla f_k|^2 + \frac{1}{|\nabla f_k|^2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \langle \nabla f_i, \nabla f_k \rangle^2 \leq \|f'\|^2.$$

Тем самым из (2.11) следует $|df_2 \wedge \cdots \wedge df_n| \leq \|f'\|^{n-1}$.

Пользуясь неравенством Гёльдера, в силу (2.10) имеем

$$\begin{aligned} \int_{B_{\mathcal{X}}^{\pm}(a,r)} \|f'\|^n dv_{\mathcal{X}} &\leq K \int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a,r)} |f_1| \cdot \|f'\|^{n-1} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq K \left(\int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a,r)} |f_1|^n d\mathcal{H}^{n-1} \right)^{1/n} \left(\int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a,r)} \|f'\|^n d\mathcal{H}^{n-1} \right)^{(n-1)/n}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Рассмотрим произвольную локальную C^2 -карту $t = \tau(x): U \rightarrow \mathbb{R}^n$ многообразия $\mathcal{X}$ со свойством (2.4). Функция $\tilde{d}(t) = d(a, \tau^{-1}(t))$ липшицева в области $\tau(U)$ и, следовательно, имеет ограниченную вариацию в $\tau(U)$ (см., например, [18, п. 5.1]). В силу [18, п. 5.5, теорема 1] почти все поверхности уровня функции $\tilde{d}$ имеют конечный периметр Де Джорджи. Поэтому, используя [18, п. 5.7, теорема 2],

можно заключить, что почти все поверхности уровня являются с точностью до множеств $\mathcal{H}^{n-1}$ -меры нуль C^1 -гладкими гиперповерхностями и, в частности, почти всюду имеют касательные плоскости. Поскольку C^2 -гомеоморфизм $\tau: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ билипшицев, это же высказывание верно для почти всех поверхностей $S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)$.

Фиксируем поверхность $S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)$, $r \in (0, R_a)$, с указанными свойствами. Поскольку $f(\partial S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)) \subset \Pi_0$, то $f_1|_{\partial S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} = 0$, и по определению основной частоты множества $S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)$ получаем

$$\left(\int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} |f_1|^n d\mathcal{H}^{n-1} \right)^{1/n} \leq \frac{1}{\lambda(S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r))} \left(\int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} |\nabla_S f_1|^n d\mathcal{H}^{n-1} \right)^{1/n}. \quad (2.13)$$

Пусть $x \in S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)$ – точка, в которой $S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)$ имеет касательную плоскость, а отображение f – дифференциал. Поскольку

$$|\nabla_S f_1| \leq |\nabla f_1| \leq \|f'(x)\|,$$

то в силу (2.13) находим

$$\left(\int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} |f_1|^n d\mathcal{H}^{n-1} \right)^{1/n} \leq \frac{1}{\lambda^{\pm}(a, r)} \left(\int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} \|f'\|^n d\mathcal{H}^{n-1} \right)^{1/n},$$

где $\lambda^{\pm}(a, r) = \lambda(S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r))$.

Учитывая (2.12), получаем

$$\int_{B_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} \|f'(x)\|^n dv_{\mathcal{X}} \leq \frac{K}{\lambda^{\pm}(a, r)} \int_{S_{\mathcal{X}}^{\pm}(a, r)} \|f'\|^n d\mathcal{H}^{n-1}.$$

В силу (2.6) приходим к дифференциальному неравенству

$$K^{-1} \lambda^{\pm}(a, r) I^{\pm}(a, r) \leq \frac{d}{dr} I^{\pm}(a, r).$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$K^{-1} \int_r^R \lambda^{\pm}(a, t) dt \leq \ln \frac{I^{\pm}(a, R)}{I^{\pm}(a, r)}. \quad (2.14)$$

Из неравенств (2.7) и (2.14) следуют необходимые оценки для интеграла энергии. Именно, имеет место

ЛЕММА 2.3. Пусть $\mathcal{X}$ – n -мерное связное некомпактное риманово многообразие без края. Пусть Π – локально K -квазиконформно плоская гиперповерхность в $\mathcal{X}$. Зададим произвольно точку $a \in \Pi$, радиус R , $0 < R < R_a$, и K -квазиконформное отображение $f: B_{\mathcal{X}}(a, R) \rightarrow B(0, 1)$ такое, что $f(\Pi(a, R)) \subset \Pi_0$. Тогда для любого $r \in (0, R)$ выполнено

$$\exp \left\{ c_1(n, K) \int_r^R (\alpha^+(a, t) + \alpha^-(a, t)) dt \right\} \leq \frac{I^+(a, R) I^-(a, R)}{I^+(a, r) I^-(a, r)} \quad (2.15)$$

и

$$\exp \left\{ K^{-1} \int_r^R (\lambda^+(a, t) + \lambda^-(a, t)) dt \right\} \leq \frac{I^+(a, R) I^-(a, R)}{I^+(a, r) I^-(a, r)}. \quad (2.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства потенцируем неравенства (2.7). Имеем

$$\exp \left\{ c_1(n, K) \int_r^R \alpha^\pm(a, t) dt \right\} \leq \frac{I^\pm(a, R)}{I^\pm(a, r)}.$$

Перемножив полученные неравенства, приходим к (2.15).

Неравенство (2.16) следует из (2.14) аналогичным образом.

§3. Уравнения

Пусть $\mathcal{X}$ – риманово многообразие, и пусть $A: T(\mathcal{X}) \rightarrow T(\mathcal{X})$ – сохраняющее слои отображение, определенное почти всюду на касательном расслоении $T(\mathcal{X})$ многообразия $\mathcal{X}$. Предполагаем выполненными условия:

- (i) для почти всех $x \in \mathcal{X}$ отображение A непрерывно на слоях T_x , т.е. для почти всех $x \in \mathcal{X}$ отображение $A(x, \cdot): T_x \rightarrow T_x$ определено и непрерывно;
- (ii) отображение $x \rightarrow A(X)$ измеримо для всех измеримых векторных полей X ;
- (iii) для почти всех $x \in \mathcal{X}$ и всех $\xi \in T_x$ выполняются следующие структурные ограничения:

$$\nu_1 |\xi|^n \leq \langle \xi, A(x, \xi) \rangle, \quad (3.1)$$

$$|A(x, \xi)| \leq \nu_2 |\xi|^{n-1}, \quad (3.2)$$

$$A(x, \lambda \xi) = \lambda |\lambda|^{n-2} A(x, \xi), \quad (3.3)$$

где $\nu_1, \nu_2 > 0$ – некоторые постоянные.

Пусть $\nu = \nu_2/\nu_1$. Ясно, что $\nu \geq 1$.

Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{div} A(x, \nabla h) = 0. \quad (3.4)$$

Непрерывная функция h класса $W_{n, \operatorname{loc}}^1(\mathcal{X})$ является в $\mathcal{X}$ *обобщенным решением уравнения* (3.4), если для всякой функции $\varphi(x) \in W_n^1(\mathcal{X})$ с компактным носителем $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathcal{X}$ выполнено равенство

$$\int_{\mathcal{X}} \langle \nabla \varphi, A(x, \nabla h) \rangle dv_{\mathcal{X}} = 0. \quad (3.5)$$

Пусть $a \in \mathcal{X}$ – фиксированная точка и $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – K -квазиконформное отображение. Введем в рассмотрение функцию $h(x) = \ln |f(x) - f(a)|$.

Имеет место

ЛЕММА 3.1. *Функция $h(x)$ является в $\mathcal{X} \setminus \{a\}$ обобщенным решением некоторого уравнения вида (3.4) со структурными ограничениями (3.1)–(3.3) и постоянными $\nu_1 = K^{1-n}$, $\nu_2 = K^{n-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данное утверждение можно получить, доказав сначала некоторую общую теорему о квазиконформных отображениях многообразий как экстремалих интегралов типа интеграла Дирихле (см. доказательство теоремы 5.1 в [3] для отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$). Воспользуемся здесь альтернативным методом, базирующимся на связях квазиконформных отображений с дифференциальными

формами [21]. Прежде всего, для сокращения записи предположим, что $f(a) = 0$. Рассмотрим $(n-1)$ -форму

$$\theta(y) = \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{-\frac{n}{2}} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} y_i dy_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy_i} \wedge \cdots \wedge dy_n,$$

где символ $\widehat{}$ над выражением означает, что оно пропускается.

Легко убедиться, что эта форма замкнута. Действительно,

$$\begin{aligned} d\theta &= -n \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{-\frac{n+2}{2}} \left(\sum_{i=1}^n y_i dy_i \right) \wedge \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} y_i dy_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy_i} \wedge \cdots \wedge dy_n \right) \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{-\frac{n}{2}} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} dy_i \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy_i} \wedge \cdots \wedge dy_n \\ &= \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{-\frac{n+2}{2}} \left(-n \sum_{i=1}^n (-1)^{i+n} y_i^2 dy_i \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dy_i} \wedge \cdots \wedge dy_n \right. \\ &\quad \left. + n(-1)^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{-\frac{n+2}{2}} \left(-n \sum_{i=1}^n (-1)^{n+1} y_i^2 dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_i \wedge \cdots \wedge dy_n \right. \\ &\quad \left. + n(-1)^{n+1} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \right) = 0. \end{aligned}$$

Индуктированная $(n-1)$ -форма $\theta^*(x) = \theta(f(x))$ имеет коэффициенты класса $L_{\text{loc}}^n(\mathcal{X})$. Покажем, что θ^* является слабо замкнутой [21] в том смысле, что для произвольной n -формы β с компактным носителем $\text{supp } \beta \subset \mathcal{X}$ и коэффициентом класса $W_{\frac{n}{n-1}}^1(\mathcal{X})$ выполнено

$$\int_{\mathcal{X}} \langle \theta^*, \delta\beta \rangle dv_{\mathcal{X}} = 0. \quad (3.6)$$

Здесь $\delta\beta = (-1)^{n-1} *^{-1} d * \beta$.

Ясно, что в качестве n -форм β достаточно брать C^2 -формы с компактными носителями. Аппроксимируем вектор-функцию $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ последовательностью C^2 -гладких вектор-функций $f^k: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$, сходящейся по W_n^1 -норме на подобласти D' с компактным замыканием $\overline{D'} \subset \mathcal{X}$, $\text{supp } \beta \subset D'$.

Пусть $\theta_k^* = \theta(f^k(x))$. Имеем

$$\int_{\mathcal{X}} d\theta_k^* \wedge * \beta = \int_{\mathcal{X}} d(\theta_k^* \wedge * \beta) + (-1)^n \int_{\mathcal{X}} \theta_k^* \wedge d * \beta.$$

Поскольку форма β имеет компактный носитель, то по формуле Стокса первый интеграл в правой части обращается в нуль. Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} d\theta_k^* \wedge * \beta &= (-1)^n \int_{\mathcal{X}} \theta_k^* \wedge * *^{-1} d * \beta \\ &= - \int_{\mathcal{X}} \theta_k^* \wedge * \delta\beta = - \int_{\mathcal{X}} \langle \theta_k^*, \delta\beta \rangle dv_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Так как $d(\theta(f^k)) = (d\theta)(f^k)$, то замкнута каждая из форм θ_k^* . Это влечет справедливость соотношения (3.6) при всяком $k = 1, 2, \dots$. Переходя в нем к пределу при $k \rightarrow \infty$ и пользуясь сходимостью $f_k \rightarrow f$ по W_n^1 -норме, заключаем, что равенство (3.6) справедливо для вектор-функции f и произвольной n -формы β . Тем самым слабая замкнутость формы $\theta^*(y)$ доказана.

По определению (см. [21]) дифференциальная форма $w \in L_{\text{loc}}^n(\mathcal{X})$, $\deg w = 1$, принадлежит классу $\mathcal{WT}_2$ на $\mathcal{X}$, если существует слабо замкнутая $(n-1)$ -форма $\varphi \in L_{\text{loc}}^{\frac{n-1}{n}}(\mathcal{X})$, $\deg \varphi = n-1$, такая, что почти всюду на $\mathcal{X}$ выполнено

$$\nu'_1 |w|^n \leq \langle w, * \varphi \rangle \quad \text{и} \quad |\varphi| \leq \nu'_2 |w|^{n-1} \quad (3.7)$$

с некоторыми постоянными $\nu'_1, \nu'_2 > 0$.

Покажем, что 1-форма $dh = d \ln |f(x)|$ принадлежит классу $\mathcal{WT}_2$ в $\mathcal{X} \setminus \{a\}$. Выберем $\varphi = \theta^*$. Нам необходимо проверить условия (3.7), которые в данном случае принимают вид

$$\nu'_1 |dh|^n \leq \langle dh, *\theta^* \rangle \quad \text{и} \quad |\theta^*| \leq \nu'_2 |dh|^{n-1}. \quad (3.8)$$

Имеем

$$|dh|^2 = \frac{1}{|f|^4} \left\langle \sum_{i=1}^n f_i df_i, \sum_{i=1}^n f_i df_i \right\rangle = |f|^{-4} \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla f_i, \nabla f_j \rangle f_i f_j. \quad (3.9)$$

Воспользуемся соотношением $\langle \alpha, \beta \rangle = *^{-1}(\alpha \wedge *\beta)$, справедливым для произвольной пары форм одинаковой степени. Находим

$$\begin{aligned} \langle dh, *\theta^* \rangle &= |f|^{-(n+2)} \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i+n} f_i f_j \langle df_i, *(df_1 \wedge \dots \wedge \widehat{df_i} \wedge \dots \wedge df_n) \rangle \\ &= |f|^{-n} J(x, f). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Далее необходима следующая формула для вычисления скалярного произведения двух простых k -форм:

$$\langle \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k, \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k \rangle = \det(\langle \varphi_i, \psi_j \rangle)_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=1,\dots,k}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} |\theta^*|^2 &= |f|^{-2n} \sum_{i,j=1}^n f_i f_j \langle df_1 \wedge \dots \wedge \widehat{df_i} \wedge \dots \wedge df_n, df_1 \wedge \dots \wedge \widehat{df_j} \wedge \dots \wedge df_n \rangle \\ &= |f|^{-2n} \sum_{i,j=1}^n f_i f_j \det(\langle df_p, df_q \rangle)_{\substack{p=1,\dots,\widehat{i},\dots,n \\ q=1,\dots,\widehat{j},\dots,n}} \\ &= |f|^{-2n} \sum_{i,j=1}^n f_i f_j \det(\langle \nabla f_p, \nabla f_q \rangle)_{\substack{p=1,\dots,\widehat{i},\dots,n \\ q=1,\dots,\widehat{j},\dots,n}}. \end{aligned}$$

Пусть $L = (f'(x)): T_x \rightarrow T_{f(x)}$ и $L^* = (f'(x))^*$. Рассмотрим матрицу

$$LL^* = \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1, \nabla f_1 \rangle & \dots & \langle \nabla f_1, \nabla f_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle \nabla f_n, \nabla f_1 \rangle & \dots & \langle \nabla f_n, \nabla f_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Обозначим через Δ_{ij} алгебраическое дополнение к элементу, стоящему на пересечении i -й строки и j -го столбца данной матрицы. Тогда

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\langle \nabla f_p, \nabla f_q \rangle)_{\substack{p=1, \dots, \widehat{i}, \dots, n \\ q=1, \dots, \widehat{j}, \dots, n}}$$

и

$$|\theta^*|^2 = |f|^{-2n} \sum_{i,j=1}^n (-1)^{i+j} f_i f_j \Delta_{ij}.$$

Пусть $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ – собственные значения матрицы LL^* . Имеем

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^n f_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla f_i, \nabla f_j \rangle f_i f_j \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n f_i^2 \quad (3.11)$$

и, поскольку $(\Delta_{ij}) = J^2(x, f)(LL^*)^{-1}$, находим

$$|\theta^*|^2 \leq \lambda_1^{-1} J^2(x, f) \left(\sum_{i=1}^n f_i^2 \right)^{1-n}. \quad (3.12)$$

Заметим также, что

$$J(x, f) = (\det LL^*)^{1/2} = (\lambda_1 \dots \lambda_n)^{1/2}$$

и, следовательно, условие квазиконформности (1.1) переписывается в виде

$$\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \dots \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \right)^{1/2} \leq K. \quad (3.13)$$

В силу (3.10) и (3.11) получаем

$$\frac{1}{|dh|^n} \langle dh, * \theta^* \rangle \geq \frac{1}{\lambda_n^{n/2}} J(x, f) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \dots \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right)^{1/2}$$

и, тем самым, имеем

$$\langle dh, * \theta^* \rangle \geq \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \right)^{\frac{n-1}{2}} |dh|^n.$$

Учитывая (3.13), убеждаемся в справедливости первого условия (3.8) с постоянной $\nu'_1 = K^{1-n}$.

С другой стороны, соотношение (3.12) влечет

$$|\theta^*| \leq \sqrt{\lambda_2 \cdots \lambda_n} |f|^{1-n}.$$

Пользуясь (3.9) и (3.11), выводим $|dh|^{n-1} \geq \lambda_1^{(n-1)/2} |f|^{1-n}$. Тем самым,

$$|\theta^*| \leq \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdots \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{1/2} |dh|^{n-1},$$

и в силу (3.13) второе из требований (3.8) выполнено с постоянной $\nu'_2 = K^{n-1}$.

Таким образом, мы установили, что 1-форма dh принадлежит классу $\mathcal{WT}_2$. Согласно [21, теорема 5.8] форма dh является A -гармонической и, в частности, функция $h = \ln |f(x) - f(a)|$ есть решение некоторого уравнения вида (3.4) со структурными ограничениями (3.1), (3.2) и теми же структурными постоянными $\nu_1 = \nu'_1 = K^{1-n}$, $\nu_2 = \nu'_2 = K^{n-1}$.

Поскольку $(n-1)$ -форма θ обладает свойством

$$\theta(\lambda dy) = \lambda |\lambda|^{n-2} \theta(dy),$$

то этим же свойством обладает форма θ^* , а данное уравнение будет удовлетворять условию (3.3).

§ 4. Три леммы

Далее до конца параграфа будем предполагать, что $\mathcal{X}$ — n -мерное связное компактное ориентируемое риманово C^3 -многообразие без края. Фиксируем произвольно сферу $S_{\mathcal{X}}(a, t)$ так, чтобы $0 < t < R_a$. Пусть Σ — открытое подмножество $S_{\mathcal{X}}(a, t)$, для которого $\mathcal{H}^{n-1}(\Sigma) < \infty$. Для всякой пары точек $p, q \in \Sigma \subset S_{\mathcal{X}}(a, t)$ пусть $\Gamma = \Gamma(p, q)$ обозначает семейство локально спрямляемых дуг $\gamma \subset \Sigma$, соединяющих p и q . Определим конформный модуль семейства Γ , полагая

$$\text{mod } \Gamma = \inf_{\Sigma} \int_{\Sigma} \rho^n d\mathcal{H}^{n-1} / \left(\inf_{\gamma \in \Gamma} \int_{\gamma} \rho d\mathcal{H}^1 \right)^n,$$

где инфимум берется по всем неотрицательным измеримым по Борелю функциям ρ на Σ . Если $\Gamma(p, q) = \emptyset$, то по определению $\text{mod } \Gamma = \infty$.

Следуя [19], вводим величину

$$\mu_a(t) = \inf_{p, q \in S_{\mathcal{X}}(a, t)} \text{mod } \Gamma.$$

В случае евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ имеем $\mu_a(t) \geq c_2/t$ с некоторой постоянной $c_2 = c_2(n)$ (см. [20, лемма 5.29]) и, тем самым,

$$\int_t^s \mu_a(\tau) d\tau \geq c_2 \ln \frac{s}{t}, \quad 0 < t < s. \quad (4.1)$$

Пусть $0 < t' < t'' < R_a$. Рассмотрим кольцевую область

$$\mathcal{X}_a(t', t'') = \{x \in \mathcal{X} : t' < d(a, x) < t''\}.$$

Пусть $\text{cap } \mathcal{X}_a(t', t'')$ – конформная емкость конденсатора $\mathcal{X}_a(t', t'')$, определяемая из вариационной задачи

$$\text{cap } \mathcal{X}_a(t', t'') = \inf_u \int_{\mathcal{X}_a(t', t'')} |\nabla u|^n dv_{\mathcal{X}},$$

где точная нижняя грань берется по всем непрерывным функциям $u: \overline{\mathcal{X}}(t', t'') \rightarrow \mathbb{R}$ класса $W_n^1(\mathcal{X}_a(t', t''))$ таким, что $u = 0$ на $S_{\mathcal{X}}(a, t')$ и $u = 1$ на $S_{\mathcal{X}}(a, t'')$.

Рассмотрим некоторую версию обобщенной леммы Лебега–Куранта [19, лемма 5.1].

ЛЕММА 4.1. *Если функция h принадлежит $W_n^1(B_{\mathcal{X}}(a, t''))$, то для всех $0 < t' < t''$ выполнено*

$$\int_{t'}^{t''} \text{osc}^n(h, S_{\mathcal{X}}(a, t)) \mu_a(t) dt \leq \int_{\mathcal{X}_a(t', t'')} |\nabla h|^n dv_{\mathcal{X}}, \quad (4.2)$$

где через $\text{osc}(h, E)$ обозначено колебание функции h на множестве E .

Нам будет необходимо также следующее утверждение.

ЛЕММА 4.2. *Пусть $0 < R' < R'' < R_a$ и $h \in W_{n, \text{loc}}^1(\mathcal{X}_a(R', R''))$ – положительное обобщенное решение уравнения (3.1)–(3.4). Тогда для всяких $t', t'', 0 < R' < t' < t'' < R''$, выполнено*

$$\int_{\mathcal{X}_a(t', t'')} |\nabla \ln h|^n dv_{\mathcal{X}} \leq \left(\frac{\nu n}{n-1} \right)^n (\text{cap } \mathcal{X}_a(R', t') + \text{cap } \mathcal{X}_a(t'', R'')). \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $u = \ln h$. Тогда

$$u \in W_{n, \text{loc}}^1(\mathcal{X}_a(R', R'')).$$

Выберем произвольно липшицеву функцию φ с носителем, содержащимся в $\mathcal{X}_a(R', R'')$. Согласно определению обобщенного решения (3.5) и на основании соотношения (3.3) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{X}} \langle \nabla \varphi, A(x, \nabla e^u) \rangle dv_{\mathcal{X}} = \int_{\mathcal{X}} \langle e^{(n-1)u} \nabla \varphi, A(x, \nabla u) \rangle dv_{\mathcal{X}} \\ &= \int_{\mathcal{X}} \langle \nabla(e^{(n-1)u} \varphi), \nabla A(x, \nabla u) \rangle dv_{\mathcal{X}} \\ &\quad - (n-1) \int_{\mathcal{X}} \varphi e^{(n-1)u} \langle \nabla u, A(x, \nabla u) \rangle dv_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\int_{\mathcal{X}_a(R', R'')} \langle \nabla \eta, A(x, \nabla u) \rangle dv_{\mathcal{X}} = (n-1) \int_{\mathcal{X}_a(R', R'')} \eta \langle \nabla u, A(x, \nabla u) \rangle dv_{\mathcal{X}},$$

где $\eta = \varphi e^{(n-1)u}$.

В частности, для произвольной непрерывной неотрицательной функции $\psi \in W_n^1(\mathcal{X}_a(R', R''))$ с носителем, содержащимся в $\mathcal{X}_a(R', R'')$, выполнено

$$\begin{aligned} (n-1) \int_{\mathcal{X}_a(R', R'')} \psi^n \langle \nabla u, A(x, \nabla u) \rangle dv_{\mathcal{X}} \\ = n \int_{\mathcal{X}_a(R', R'')} \psi^{n-1} \langle \nabla \psi, A(x, \nabla u) \rangle dv_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Пользуясь структурными ограничениями (2.5)–(2.7), получаем

$$\begin{aligned} (n-1)\nu_1 \int_{\mathcal{X}_a(R', R'')} \psi^n |\nabla u|^n dv_{\mathcal{X}} &\leq n\nu_2 \int_{\mathcal{X}_a(R', R'')} \psi^{n-1} |\nabla \psi| |\nabla u|^{n-1} dv_{\mathcal{X}} \\ &\leq n\nu_2 \left(\int_{\mathcal{X}_a(R', R'')} \psi^n |\nabla u|^n dv_{\mathcal{X}} \right)^{1/n} \left(\int_{\mathcal{X}_a(R', R'')} |\nabla \psi|^n dv_{\mathcal{X}} \right)^{(n-1)/n}. \end{aligned}$$

Это неравенство влечет

$$\int_{\mathcal{X}_a(R', R'')} \psi^n |\nabla u|^n dv_{\mathcal{X}} \leq \left(\frac{n\nu}{n-1} \right)^n \int_{\mathcal{X}_a(R', R'')} |\nabla \psi|^n dv_{\mathcal{X}}.$$

Выберем функцию ψ так, чтобы $\psi \equiv 1$ на $\mathcal{X}_a(t', t'')$. Тогда

$$\int_{\mathcal{X}_a(t', t'')} |\nabla u|^n dv_{\mathcal{X}} \leq \left(\frac{n\nu}{n-1} \right)^n \int_{\mathcal{X}_a(R', t') \cup \mathcal{X}_a(t'', R'')} |\nabla \psi|^n dv_{\mathcal{X}}.$$

Минимизируя правую часть по всем функциям ψ , приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}_a(t', t'')} |\nabla u|^n dv_{\mathcal{X}} &\leq \left(\frac{n\nu}{n-1} \right)^n \left(\inf_{\psi} \int_{\mathcal{X}_a(R', t')} |\nabla \psi|^n dv_{\mathcal{X}} \right. \\ &\quad \left. + \inf_{\psi} \int_{\mathcal{X}_a(t'', R'')} |\nabla \psi|^n dv_{\mathcal{X}} \right). \end{aligned}$$

Пользуясь определением емкости конденсатора, получаем (4.3).

Пусть M, N – римановы многообразия соответственно размерности n и $n-1$. Пусть $g: M \rightarrow N$ – локально липшицево отображение. По теореме Радемахера g дифференцируемо почти всюду. Действительно, в [22, теорема 3.1.6] это доказано для локально липшицевого отображения $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. “Распрямляя” многообразия M и N локально посредством C^2 -диффеоморфизмов φ и ψ соответственно и рассматривая отображения $\psi \circ g \circ \varphi^{-1}$, легко получаем нужное утверждение для отображения $g: M \rightarrow N$.

В точках дифференцируемости отображения g определено касательное отображение $dg: T_x M \rightarrow T_{g(x)} N$. Пусть $T^\perp$ – ортогональное дополнение в $T_x M$ к подпространству $\text{Ker } dg$. Если $\dim T^\perp = n-1$, т.е. $\text{rang } dg = n-1$, то *якобианом* $J_{n-1}(g, x)$ отображения g в точке x называется якобиан отображения $dg|_{T^\perp}$. Если $\dim T^\perp < n-1$, т.е. $\text{rang } dg < n-1$, то по определению полагаем $J_{n-1}(g, x) = 0$ [13, гл. 3, п. 2.4].

Для всякой кольцевой области $\mathcal{X}_a(t', t'')$ можно определить величину, двойственную емкости. Рассмотрим произвольное локально липшицево отображение $g: \mathcal{X}_a(t', t'') \rightarrow S^{n-1}$, удовлетворяющее свойству

$$\operatorname{ess\,inf}_{x \in A} J_{n-1}(g, x) > 0 \quad \text{для всякого измеримого } A \Subset \mathcal{X}_a(t', t''). \quad (4.4)$$

Предположим, что каждая линия уровня

$$l(\theta) = \{x \in \mathcal{X}_a(t', t'') : g(x) = \theta, \theta \in S^{n-1}\}$$

отображения g связна и соединяет в $\mathcal{X}_a(t', t'')$ геодезические сферы $S_{\mathcal{X}}(a, t')$, $S_{\mathcal{X}}(a, t'')$. Положим

$$\operatorname{dual} \mathcal{X}_a(t', t'') = \sup \int_{S^{n-1}} \frac{d\theta}{\left(\int_{l(\theta)} J_{n-1}^{1/(n-1)} d\mathcal{H}^1 \right)^{n-1}}, \quad (4.5)$$

где $S^{n-1} = S^{n-1}(0, 1)$ и точная верхняя грань берется по всевозможным отображениям g описанного вида. В случае, когда множество допустимых отображений g пусто, полагаем $\operatorname{dual} \mathcal{X}_a(t', t'') = +\infty$.

Если $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ и $\mathcal{X}_a(t', t'') = \{x : t' < |x - a| < t''\}$, то $g = x/|x|$ и $J_{n-1}(g, x) = |x|^{1-n}$. Тогда, как легко видеть, g обладает свойством (4.4) и

$$\operatorname{dual} \mathcal{X}_a(t', t'') \geq \frac{\omega_{n-1}}{\ln^{n-1} t''/t'}.$$

Используем введенную величину в оценках следующего вида.

ЛЕММА 4.3. Пусть $h \in W_n^1(\mathcal{X}_a(t', t''))$. Тогда

$$\inf_{\theta \in S^{n-1}} \operatorname{osc}^n \{h, l(\theta)\} \leq \int_{\mathcal{X}_a(t', t'')} |\nabla h|^n dv_{\mathcal{X}} / \operatorname{dual} \mathcal{X}_a(t', t''). \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем локально липшицево отображение

$$g: \mathcal{X}_a(t', t'') \rightarrow S^{n-1},$$

допустимое в вариационной проблеме (4.5). По формуле Кронрода–Федерера (см. [13, гл. 3, следствие 6]) для отображения $g: M \rightarrow N$ и произвольной измеримой функции $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ выполнено

$$\int_M \varphi J_{n-1}(g, x) dv_M = \int_N \left[\int_{g^{-1}(y)} \varphi(x) d\mathcal{H}^1 \right] d\mathcal{H}^{n-1}(y).$$

В частности, мы имеем

$$\int_{\mathcal{X}_a(t', t'')} |\nabla h|^n dv_{\mathcal{X}} = \int_{S^{n-1}} d\theta \int_{l(\theta)} |\nabla h|^n \frac{d\mathcal{H}^1}{J_{n-1}}.$$

Для почти всех $\theta \in S^{n-1}$ функция h абсолютно непрерывна вдоль $l(\theta)$. Поэтому

$$\operatorname{osc}^n \{h, l(\theta)\} \leq \left(\int_{l(\theta)} |\nabla h| d\mathcal{H}^1 \right)^n \leq \int_{l(\theta)} |\nabla h|^n \frac{d\mathcal{H}^1}{J_{n-1}} \left(\int_{l(\theta)} J_{n-1}^{1/(n-1)} d\mathcal{H}^1 \right)^{n-1}.$$

Интегрируя данное неравенство, находим

$$\int_{S^{n-1}} \operatorname{osc}^n \{h, l(\theta)\} d\theta / \left(\int_{l(\theta)} J_{n-1}^{1/(n-1)} d\mathcal{H}^1 \right)^{n-1} \leq \int_{S^{n-1}} d\theta \int_{l(\theta)} |\nabla h|^n \frac{d\mathcal{H}^1}{J_{n-1}}.$$

Неравенство (4.6) доказано.

§ 5. D-свойство

Для произвольного гомеоморфизма $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ обозначим

$$L(a, r) = \max_{x \in S_{\mathcal{X}}(a, r)} |f(x) - f(a)| \quad \text{и} \quad l(a, r) = \min_{x \in S_{\mathcal{X}}(a, r)} |f(x) - f(a)|.$$

Пусть $a \in \mathcal{X}$ и $\rho \in (0, R_a)$ произвольны. Фиксируем R' так, чтобы $0 < R' < \rho < R_a$, и $t' \in (R', \rho)$, $t'' \in (\rho, R_a)$. Введем величину

$$I_a(\xi, \eta) = \operatorname{cap} X_a(\xi, \eta), \quad 0 < \xi < \eta < R_a.$$

Далее полагаем

$$\begin{aligned} \Phi_a(R', t', t'') &= (I_a(R', \rho) + I_a(\rho, R_a))^{1/n} / \left(\int_{t'}^{\rho} \mu_a(t) dt \right)^{1/n} \\ &\quad + (I_a(R', \rho) + I_a(t'', R_a))^{1/n} / \left(\int_{\rho}^{t''} \mu_a(t) dt \right)^{1/n} \\ &\quad + (I_a(R', t') + I_a(t'', R_a))^{1/n} / \operatorname{dual}^{1/n} \mathcal{X}_a(t', t'') \end{aligned}$$

и, наконец,

$$D(a, \rho) = \exp \left\{ \frac{nK^{2n-2}}{n-1} \inf \Phi_a(R', t', t'') \right\}, \quad (5.1)$$

где точная нижняя грань берется по всем R', t', t'' таким, что $0 < R' < t' < \rho < t'' < R_a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Пусть $a \in \mathcal{X}$ и $\rho \in (0, R_a)$ произвольны. Фиксируем R', R'' так, чтобы $0 < R' < \rho < R'' < R_a$, и $t' \in (R', \rho)$, $t'' \in (\rho, R'')$. Оценим величину $L(a, \rho)/l(a, \rho)$.

Прежде всего заметим, что данная величина инвариантна относительно растяжений с полюсом в точке a , и потому посредством такого преобразования можно добиться того, чтобы $l(a, R') > 1$. Поэтому, не умаляя общности, предположим, что всюду в кольцевой области $\mathcal{X}_a(R', R'')$ функция $h = \ln |f(x) - f(a)| > 0$.

Далее, согласно лемме 3.1 функция h является обобщенным решением некоторого уравнения вида (3.5). Пользуясь леммой 4.2, находим

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}_a(t', \rho)} |\nabla \ln h|^n dv_{\mathcal{X}} &\leq \left(\frac{\nu n}{n-1} \right)^n (\operatorname{cap} \mathcal{X}_a(R', t') + \operatorname{cap} \mathcal{X}_a(\rho, R'')) \equiv I_1, \\ \int_{\mathcal{X}_a(\rho, t'')} |\nabla \ln h|^n dv_{\mathcal{X}} &\leq \left(\frac{\nu n}{n-1} \right)^n (\operatorname{cap} \mathcal{X}_a(R', \rho) + \operatorname{cap} \mathcal{X}_a(t'', R'')) \equiv I_2, \\ \int_{\mathcal{X}_a(t', t'')} |\nabla \ln h|^n dv_{\mathcal{X}} &\leq \left(\frac{\nu n}{n-1} \right)^n (\operatorname{cap} \mathcal{X}_a(R', t') + \operatorname{cap} \mathcal{X}_a(t'', R'')) \equiv I_3. \end{aligned}$$

Отсюда на основании леммы 4.1 получаем

$$\int_{t'}^{\rho} \operatorname{osc}^n(\ln h, S_{\mathcal{X}}(a, t)) \mu_a(t) dt \leq I_1, \quad \int_{\rho}^{t''} \operatorname{osc}^n(\ln h, S_{\mathcal{X}}(a, t)) \mu_a(t) dt \leq I_2.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Существуют $u \in (t', \rho)$, $v \in (\rho, t'')$ такие, что

$$\operatorname{osc}^n\{\ln h, S_{\mathcal{X}}(a, u)\} \leq (I_1 + \varepsilon) / \int_{t'}^{\rho} \mu_a(t) dt, \quad (5.2)$$

$$\operatorname{osc}^n\{\ln h, S_{\mathcal{X}}(a, v)\} \leq (I_2 + \varepsilon) / \int_{\rho}^{t''} \mu_a(t) dt. \quad (5.3)$$

Воспользуемся теперь леммой 4.3. Существует $\theta_0 \in S^{n-1}$, для которого

$$\operatorname{osc}^n\{\ln h, l(\theta_0)\} \leq (I_3 + \varepsilon) / \operatorname{dual} \mathcal{X}_a(t', t''). \quad (5.4)$$

По лемме 3.1 функция h является в $\mathcal{X} \setminus \{a\}$ обобщенным решением некоторого уравнения вида (3.4), а потому монотонна в смысле Лебега в кольцевой области $\mathcal{X}_a(R', R'')$, т.е. для всякой подобласти $U \Subset \mathcal{X}_a(R', R'')$ выполнено

$$\operatorname{osc}(h, U) \leq \operatorname{osc}(h, \partial U). \quad (5.5)$$

Это можно показать стандартными приемами точно так же, как для решений в областях $\mathbb{R}^n$ (см., например, [3, гл. II, теорема 5.4] или [14, пример 3.2]).

Объединяя оценки (5.2)–(5.4) и учитывая свойство (5.5) монотонности решений уравнений вида (3.4), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \operatorname{osc}\{\ln h, S_{\mathcal{X}}(a, \rho)\} &\leq \operatorname{osc}\{\ln h, \mathcal{X}_a(t', t'')\} \\ &\leq \operatorname{osc}\{\ln h, S_{\mathcal{X}}(a, u)\} + \operatorname{osc}\{\ln h, S_{\mathcal{X}}(a, v)\} + \operatorname{osc}\{\ln h, l(\theta_0)\} \\ &\leq (I_1 + \varepsilon)^{1/n} / \left(\int_{t'}^{\rho} \mu_a(t) dt \right)^{1/n} \\ &\quad + (I_2 + \varepsilon)^{1/n} / \left(\int_{\rho}^{t''} \mu_a(t) dt \right)^{1/n} \\ &\quad + (I_3 + \varepsilon)^{1/n} / \operatorname{dual}^{1/n} \mathcal{X}_a(t', t''). \end{aligned}$$

В силу произвольного выбора $\varepsilon > 0$ находим

$$\begin{aligned} \ln \frac{L(a, \rho)}{l(a, \rho)} &\leq I_1^{1/n} / \left(\int_{t'}^{\rho} \mu_a(t) dt \right)^{1/n} \\ &\quad + I_2^{1/n} / \left(\int_{\rho}^{t''} \mu_a(t) dt \right)^{1/n} + I_3^{1/n} / \operatorname{dual}^{1/n} \mathcal{X}_a(t', t''). \end{aligned}$$

Перейдем к пределу при $R'' \rightarrow R_a$. Тогда получим

$$\ln \frac{L(a, \rho)}{l(a, \rho)} \leq \frac{nK^{2n-2}}{n-1} \Phi_a(R', t', t''),$$

откуда следует оценка (1.2).

Оценим величину $D(a, \rho)$ для подобластей евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $q = (R_a/\rho)^{1/2}$. Положим $R' = q^{-2}\rho$, $t' = q^{-1}\rho$, $t'' = q\rho$; n -емкость сферического конденсатора $\mathcal{X}_a(\xi, \eta)$ легко вычисляется по формуле

$$\text{cap } \mathcal{X}_a(\xi, \eta) = \frac{\omega_{n-1}}{(\ln \frac{\eta}{\xi})^{n-1}}.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \Phi_a(R', t', t'') &\leq \left(\frac{\omega_{n-1}}{(2 \ln q)^{n-1}} + \frac{\omega_{n-1}}{(\ln q)^{n-1}} \right)^{1/n} / (c_2 \ln q)^{1/n} \\ &\quad + \left(\frac{\omega_{n-1}}{(2 \ln q)^{n-1}} + \frac{\omega_{n-1}}{(\ln q)^{n-1}} \right)^{1/n} / (c_2 \ln q)^{1/n} \\ &\quad + \left(\frac{(\ln q)^{n-1}}{\omega_{n-1}} \right)^{1/n} \left(\frac{\omega_{n-1}}{(\ln q)^{n-1}} + \frac{\omega_{n-1}}{(\ln q)^{n-1}} \right)^{1/n} \\ &= \frac{\omega_{n-1}^{1/n}}{c_2^{1/n} 2^{(n-2)/n} \ln q} + \frac{\omega_{n-1}^{1/n} (1 + 2^{n-1})^{1/n}}{c_2^{1/n} 2^{(n-1)/n} \ln q} + 2^{1/n} \\ &\equiv 2^{1/n} + \frac{c_3(n)}{\ln q}. \end{aligned}$$

Таким образом, для подобластей в $\mathbb{R}^n$ приходим к оценке

$$D(a, \rho) \leq \exp \left\{ \frac{nK^{2n-2}}{n-1} \left(2^{1/n} + \frac{2c_3(n)}{\ln R_a/\rho} \right) \right\}. \quad (5.6)$$

§ 6. Доказательство теоремы 1.1

Пусть $\mathcal{X}$ — n -мерное связное некомпактное ориентируемое риманово C^3 -многообразие без края. Рассмотрим K -квазиконформное отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Для произвольной точки $a \in \mathcal{X}$ и всякого r , $0 < r < R_a$, имеем

$$I^\pm(a, r) \geq \int_{B_{\mathcal{X}}^\pm(a, r)} J(x, f) dx = \text{vol } f(B_{\mathcal{X}}^\pm(a, r)) \geq \frac{\Omega_n}{2} l^n(a, r),$$

где Ω_n — объем единичного шара $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$. Аналогично, для всякого $r < R < R_a$ выполнено

$$I^\pm(a, R) \leq K \int_{B_{\mathcal{X}}^\pm(a, R)} J(x, f) dx \leq \frac{K}{2} \Omega_n L^n(a, R).$$

Таким образом, получаем

$$\frac{I^+(a, R) I^-(a, R)}{I^+(a, r) I^-(a, r)} \leq K^2 \frac{L^{2n}(a, R)}{l^{2n}(a, r)}. \quad (6.1)$$

Пользуясь формулой (1.2), приходим к оценке

$$\frac{L(a, R)}{l(a, r)} = \frac{L(a, R)}{l(a, R)} \frac{l(a, R)}{L(a, r)} \frac{L(a, r)}{l(a, r)} \leq D(a, r) D(a, R) \frac{l(a, R)}{L(a, r)}. \quad (6.2)$$

Легко видеть, что

$$\frac{l(a, R)}{L(a, r)} \leq K^{1/(n-1)} \ln \frac{R}{r}. \quad (6.3)$$

Действительно, предполагая, что $l(a, R) > L(a, r)$, и вычисляя n -емкость сферического конденсатора в $\mathbb{R}^n$, находим

$$\begin{aligned} \omega_{n-1} \left(\ln \frac{l(a, R)}{L(a, r)} \right)^{1-n} &= \text{cap}(B(f(a), L(a, r)), B(f(a), l(a, R))) \\ &\geq \text{cap}(f\bar{B}(a, r), fB(a, R)) \\ &\geq \frac{1}{K} \text{cap}(\bar{B}(a, r), B(a, R)) \\ &= \frac{1}{K} \omega_{n-1} \left(\ln \frac{R}{r} \right)^{1-n}, \end{aligned}$$

откуда следует оценка (6.3).

Таким образом, на основании (6.2) и (6.3) мы получаем

$$\frac{L(a, R)}{l(a, r)} \leq K^{1/(n-1)} D(a, r) D(a, R) \ln \frac{R}{r}. \quad (6.4)$$

Используя (6.1) и (6.4), приходим к следующему результату.

ЛЕММА 6.1. Пусть Π – K -квазиплоская гиперповерхность в $\mathcal{X}$. Тогда в каждой точке $a \in \Pi$ и для произвольных $r, R, 0 < r < R < R_a$, выполнено

$$\frac{I^+(a, R) I^-(a, R)}{I^+(a, r) I^-(a, r)} \leq K^{(4n-2)/(n-1)} D^{2n}(a, r) D^{2n}(a, R) \ln^{2n} \frac{R}{r}.$$

На основании леммы 2.3 и леммы 6.1 приходим к основному результату настоящей работы – теореме 1.1.

В случае $n = 2$ неравенство Виртингера [23, гл. V, теорема 7] влечет

$$\lambda^\pm(a, r) = \lambda(S^\pm(a, r)) = \frac{\pi}{\text{mes}_1 S^\pm(a, r)}.$$

Таким образом, в данном случае оба соотношения в теореме 1.1 совпадают.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Если Π – K -квазипрямая в двумерном римановом многообразии $\mathcal{X}$, то для любых $a \in \Pi$ и $r, R, 0 < r < R < R_a$, выполнено

$$\int_r^R \left(\frac{1}{\text{mes}_1 S^+(a, t)} + \frac{1}{\text{mes}_1 S^-(a, t)} \right) dt \leq \frac{K}{\pi} \ln \left(K^6 D^4(a, r) D^4(a, R) \ln^4 \frac{R}{r} \right).$$

С использованием оценки (5.6) результаты работ [8], [9] о квазиплоскостях в $\mathbb{R}^n$ легко выводятся из теоремы 1.1.

Список литературы

1. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. Т. I, II. М.: Наука, 1981.
2. *Hebey E.* Sobolev Spaces on Riemannian Manifolds // Lect. Not. Math. V. 1635. Berlin–Heidelberg–N.Y.: Springer-Verlag, 1991.
3. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
4. *Gehring F. W.* Uniform domains and the ubiquitous quasidisk // Jahrsber. Deutsch. Math. Verein. 1987. V. 89. P. 88–103.
5. *Anderson G. D., Vamanamurthy M. K., Vuorinen M. K.* Conformal Invariants, Inequalities, and Quasiconformal Maps // Canadian Math. Soc. Ser. of Monographs and Advanced Texts. N.Y.–Chichester–Weinheim–Brisbane–Singapore–Toronto: John Wiley & Sons, 1997.
6. *Крушкаль С. Л.* Квазиконформные зеркала // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40. № 4. С. 880–892.
7. *Beurling A., Ahlfors L.* The boundary correspondence under quasiconformal mappings // Acta Math. 1956. V. 96. P. 125–142.
8. *Вуоринен М., Мартио О., Миклюков В. М.* К геометрической структуре квазиплоскостей // Тр. кафедры математического анализа и теории функций Волгоградского государственного университета. Волгоград: Изд-во Волгоградского гос. ун-та, 2002. С. 21–31.
9. *Martio O., Miklyukov V., Ponnusamy S., Vuorinen M.* On Some Properties of Quasiplanes // Results in Math. 2002. V. 42. P. 107–113.
10. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука, 1974.
11. *Де Рам Ж.* Дифференцируемые многообразия. М.: ИЛ, 1956.
12. *Hajlasz P.* Sobolev Mappings, Co-Area Formula and Related Topics // Тр. по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2000. С. 227–254.
13. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Геометрические неравенства. М.: Наука, 1980.
14. *Manfredi J. J.* Weakly Monotone Functions // J. Geom. Anal. 1994. V. 4. № 2. P. 393–402.
15. *Bandle C.* Isoperimetric inequalities and applications. Boston–London–Melbourne: Pitman Advanced Publishing, 1980.
16. *Миклюков В. М.* Об асимптотических свойствах субрешений квазилинейных уравнений эллиптического типа и отображений с ограниченным искажением // Матем. сб. 1980. Т. 111. С. 42–66.
17. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
18. *Evans L. C., Gariepy R. F.* Measure Theory and Fine Properties of Functions. Studies in Advanced Mathematics. Boca Raton–N.Y.–London–Tokio: CRC PRESS, 1992.
19. *Martio O., Miklyukov V. M., Vuorinen M.* Harnack's inequality for p -harmonic functions on Riemannian manifolds for different exhaustion // Комплексный анализ в современной математике. К 80-летию со дня рождения Б. В. Шабата / Ред. Е. М. Чирка. М.: Фазис, 2001. С. 201–230.
20. *Vuorinen M.* Conformal Geometry and Quasiregular Mappings // Lect. Not. in Math. V. 1319. N.Y.: Springer-Verlag, 1988.
21. *Franke D., Martio O., Miklyukov V. M., Vuorinen M., Wisk R.* Quasiregular mappings and $\mathcal{W}\mathcal{T}$ -classes of differential forms on Riemannian manifolds // Pacific J. Math. 2002. V. 202. № 1. P. 73–92.
22. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
23. *Беккенбах Е., Беллман Р.* Неравенства. М.: Мир, 1965.

E-mail: miklyuk@mail.ru

Поступило в редакцию
27.V.2002