Общероссийский математический портал

Л. И. Сазонов, Обоснование асимптотического разложения решения двумерной задачи обтекания при малых числах Рейнольдса, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 5, 125–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/im454>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 10:37:13

УДК 517.9

Л. И. Сазонов

**Обоснование асимптотического разложения
решения двумерной задачи обтекания
при малых числах Рейнольдса**

Строится и обосновывается полное асимптотическое разложение решения двумерной задачи обтекания ограниченного тела потоком вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса.

Библиография: 9 наименований.

Введение

Двумерная стационарная задача обтекания состоит в определении решения краевой задачи для системы Навье–Стокса

$$\begin{aligned} \Delta u - \nabla p &= 2\varepsilon(u, \nabla)u, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_S = b, \quad u|_\infty = e^1 = (1, 0) \end{aligned} \quad (0.1)$$

во внешней области $D \subset \mathbb{R}^2$ с границей $\partial D = S$, где u – скорость жидкости, p – давление, 2ε – число Рейнольдса.

В задаче обтекания $b = 0$, но представляют интерес и неоднородные граничные условия.

Отметим, что рассматриваемая задача является особой в том смысле, что, несмотря на наличие малого параметра лишь при младших производных, решение невозможно построить в виде ряда по степеням ε , так как получающаяся в первом приближении система Стокса не имеет решения с нулевым граничным условием и указанным условием на бесконечности (парадокс Стокса).

В случае нулевых граничных условий для внешности круга задача рассматривалась во многих работах (см., например, [1]), где применялся метод сращиваемых асимптотических разложений: растущее решение системы Стокса с нулевым граничным условием сращивалось с решением линеаризованной системы Озеена.

Далее согласование асимптотических разложений реализуется в иной форме. Сначала строится двухпараметрическое решение полной системы Озеена, рассматриваемой в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (т.е. допускаются особенности в нуле типа особенностей фундаментального решения линеаризованной системы Озеена). Затем для выполнения заданных граничных условий к указанному решению добавляется решение системы Стокса с неоднородными граничными условиями. Из условий разрешимости (условий существования решения системы Стокса с нулевым значением

Работа выполнена при поддержке РФФИ и гранта Президента РФ для поддержки научных школ НШ-1768.2003.1.

на бесконечности) однозначно определяется зависимость двух параметров, входящих в граничные условия, от числа Рейнольдса.

Отметим, что вопрос о существовании решения задачи обтекания при любых числах Рейнольдса остается открытым; при малых числах Рейнольдса существование решения установлено в [2]. Ниже этот результат получается в процессе обоснования асимптотики, осуществляемого в соответствии с идеями, изложенными в работе [3].

Настоящая работа состоит из двух параграфов. В §1 изложены необходимые элементы линейной теории, возможно, представляющие и самостоятельный интерес, §2 посвящен построению и обоснованию асимптотического разложения.

§1. Линеаризованная система Озеена в пространстве $\mathbb{R}^2$

Исследуем линеаризованную систему Озеена

$$\begin{aligned}\Delta u - 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} u - \nabla q &= f, \\ \operatorname{div} u &= 0,\end{aligned}\tag{1.1}$$

которая получается при линеаризации системы Навье–Стокса на постоянном решении $u = (1, 0)$.

1.1. Фундаментальное решение и некоторые его оценки. *Фундаментальным решением* линеаризованной системы Озеена называется набор распределений $(u_\varepsilon^k, q_\varepsilon^k)$, $k = 1, 2$, являющийся решением системы

$$\begin{aligned}\Delta u_\varepsilon^k - 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} u_\varepsilon^k - \nabla q_\varepsilon^k &= e^k \delta(x), \\ \operatorname{div} u_\varepsilon^k &= 0,\end{aligned}\tag{1.2}$$

где $\delta(x)$ – δ -распределение Дирака, e^k – единичный орт оси x_k . Распределения $(u_\varepsilon^k, q_\varepsilon^k)$, $k = 1, 2$, имеют вид (см., например, [4])

$$\begin{aligned}q_\varepsilon^k &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} \ln \frac{1}{|x|}, \\ u_\varepsilon^1 &= \frac{1}{2\pi} \left[-e^{\varepsilon x_1} K_0(|\varepsilon x|) e^1 + \frac{\nabla}{2\varepsilon} (\ln |x| + e^{\varepsilon x_1} K_0(|\varepsilon x|)) \right], \\ u_{\varepsilon,2}^2 &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_1} (\ln |x| + e^{\varepsilon x_1} K_0(|\varepsilon x|)), \\ u_{\varepsilon,2}^1 &= u_{\varepsilon,1}^2,\end{aligned}\tag{1.3}$$

где

$$K_0(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \left[\ln \frac{2}{r} + c_k \right]\tag{1.4}$$

– функция Макдональда.

В терминах преобразования Фурье $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(x) \exp \{-i(x, \xi)\} dx$ имеем

$$\hat{q}_\varepsilon^k = \frac{i\xi_k}{2\pi|\xi|^2}, \quad \hat{u}_\varepsilon^k = -\frac{1}{2\pi} \left(e^k - \frac{\xi\xi_k}{|\xi|^2} \right) \frac{1}{|\xi|^2 + 2i\varepsilon\xi_1}.\tag{1.5}$$

Используя (1.3), можно получить разложение фундаментального решения в ряд по ε^k , $\varepsilon^k \ln 2/\varepsilon$:

$$u_{\varepsilon,j}^k = \ln \frac{2}{\varepsilon} u_{j,-1}^k + u_{j,0}^k + \varepsilon \ln \frac{2}{\varepsilon} u_{j,1}^k + \varepsilon u_{j,2}^k + \dots,$$

где матрицы $u_l = (u_{j,l}^k)_{k,j=1}^2$ имеют вид

$$u_{-1} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

$$u_0 = -\frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \ln \frac{1}{|x|} + \frac{x_1^2}{|x|^2} + c_0 & \frac{x_1 x_2}{|x|^2} \\ \frac{x_1 x_2}{|x|^2} & \ln \frac{1}{|x|} + \frac{x_2^2}{|x|^2} + c_0 - 1 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

$$u_1 = \frac{1}{8\pi} \begin{pmatrix} -x_1 & x_2 \\ x_2 & -3x_1 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Исключая постоянные слагаемые в u_0 , получаем фундаментальное решение системы Стокса

$$p^k = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_k} \ln \frac{1}{|x|}, \quad v_j^k = -\frac{1}{4\pi} \left(\delta_{k,j} \ln \frac{1}{|x|} + \frac{x_k x_j}{|x|^2} \right).$$

Далее для фундаментального решения при $\varepsilon = 1$ будем использовать обозначение (u^k, q^k) . Существует простая связь: $u_\varepsilon^k(x) = u^k(\varepsilon x)$, $q_\varepsilon^k(x) = q^k(x)$.

Для получения L_p -оценок фундаментального решения заметим, что

$$\partial^\alpha u_{\varepsilon,j}^k(x) = \varepsilon^{|\alpha|} (\partial^\alpha u_j^k)(\varepsilon x).$$

Поэтому

$$\|\partial^\alpha u_{\varepsilon,j}^k\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} = \varepsilon^{|\alpha|-2/p} \|u_j^k\|_{L_p(\mathbb{R}^2)},$$

и достаточно установить принадлежность пространству $L_p(\mathbb{R}^2)$ фундаментального решения при $\varepsilon = 1$. В окрестности нуля функция $|\partial^\alpha u_j^k(x)|$ ограничена функциями $c \ln(1/|x|)$ при $|\alpha| = 0$ и $c|x|^{-|\alpha|}$ при $|\alpha| > 0$, в окрестности бесконечности оценки получаются из асимптотики функции Макдональда. В результате устанавливаем, что

$$\|u_{\varepsilon,j}^k\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \leq c\varepsilon^{-2/p}, \quad (1.9)$$

где $p \in (3, \infty)$, если $(k, j) = (1, 1)$; $p \in (2, \infty)$, если $(k, j) \neq (1, 1)$;

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_s} u_{\varepsilon,j}^k \right\|_{L_p(\mathbb{R}^2)} \leq c\varepsilon^{1-2/p}, \quad (1.10)$$

где $p \in (3/2, 2)$, если $(k, j, s) = (1, 1, 2)$; $p \in (1, 2)$, если $(k, j, s) \neq (1, 1, 2)$.

Далее потребуются оценки производных фундаментального решения вне окрестности нуля. Имеем

$$\|\partial^\alpha u_{\varepsilon,j}^k\|_{L_p(|x|>1)} = \varepsilon^{|\alpha|-2/p} \|\partial^\alpha u_j^k\|_{L_p(|x|>\varepsilon)}.$$

Учитывая особенность в нуле, получаем

$$\|\partial^\alpha u_{\varepsilon,j}^k\|_{L_p(|x|>1)} \leq c\theta(\varepsilon, |\alpha|, p) + \varepsilon^{|\alpha|-2/p} \|\partial^\alpha u_j^k\|_{L_p(|x|>1)},$$

где c не зависит от ε , функция θ определяется соотношениями

$$\theta(\varepsilon, |\alpha|, p) = \begin{cases} \left| \frac{\varepsilon^{|\alpha|p-2} - 1}{|\alpha|p-2} \right|^{1/p} & \text{при } |\alpha|p \neq 2, \\ (\ln 1/\varepsilon)^{1/p} & \text{при } |\alpha|p = 2. \end{cases}$$

В частности,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_s} u_{\varepsilon,j}^k \right\|_{L_p(|x|>1)} \leq c\theta(\varepsilon, 1, p), \quad (1.11)$$

где $p \in (3/2, \infty)$, если $(k, j, s) = (1, 1, 2)$; $p \in (1, \infty)$, если $(k, j, s) \neq (1, 1, 2)$;

$$\|\partial^2 u_{\varepsilon,j}^k\|_{L_p(|x|>1)} \leq c\theta(\varepsilon, 2, p) \quad (1.12)$$

при $1 < p < \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Функция θ введена для обеспечения равномерности оценок по ε . Более грубо было бы использовать оценку

$$\theta(\varepsilon, |\alpha|, p) \leq c \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/p} \begin{cases} \varepsilon^{|\alpha|-2/p}, & |\alpha|p - 2 < 0, \\ 1, & |\alpha|p - 2 \geq 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

так как на самом деле логарифмический множитель появляется лишь в окрестности точки $p = 2/|\alpha|$.

Условимся использовать далее обозначение c для различных констант, не зависящих от ε , хотя они могут зависеть от других аргументов. В частности, константы в оценках норм зависят от показателя p и стремятся к бесконечности при приближении к границам интервалов изменения p .

В дальнейшем важную роль будут играть операторы свертки

$$\partial^\alpha U_{\varepsilon,j}^k f = \partial^\alpha u_{\varepsilon,j}^k * f.$$

Из теорем о свертках [5] при $|\alpha| < 2$ и мультипликаторах преобразования Фурье [6], примененных при $|\alpha| = 2$ к равенствам (1.5), вытекает справедливость неравенств

$$\|\partial^\alpha U_{\varepsilon,j}^k f\|_{L_q(\mathbb{R}^2)} \leq c\varepsilon^{|\alpha|-2+2(1/p-1/q)} \|f\|_{L_p(\mathbb{R}^2)}, \quad (1.14)$$

если только выполняются условия:

1) $1 \leq p \leq q \leq \infty$ при $|\alpha| < 2$ и величина r , определяемая соотношением $1/r = 1 - 1/p + 1/q$, должна удовлетворять включениям:

а) при $|\alpha| = 0$

$$r \in (3, \infty), \text{ если } (k, j) = (1, 1),$$

$$r \in (2, \infty), \text{ если } (k, j) \neq (1, 1);$$

б) при $|\alpha| = 1$

$$r \in (3/2, 2), \text{ если } (k, j, \alpha_1, \alpha_2) = (1, 1, 0, 1),$$

$$r \in (1, 2), \text{ если } (k, j, \alpha_1, \alpha_2) \neq (1, 1, 0, 1);$$

2) $1 < p = q < \infty$ при $|\alpha| = 2$.

1.2. Гидродинамические потенциалы системы Озеена. Пусть v, u – гладкие соленоидальные поля, p, q – гладкие функции, определенные на плоскости $\mathbb{R}^2$, $T_{ij}(v) = -\delta_{ij}p + v_{ij}$ – тензор напряжений, $v_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$, Ω – область с гладкой границей $\partial\Omega = S$.

Тогда имеют место формулы Грина

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\Delta v_i - 2\varepsilon \frac{\partial v_i}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) u_i dx \\ = - \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} u_{ik} v_{ik} + 2\varepsilon \frac{\partial v_i}{\partial x_1} u_i \right) dx + \int_S T_{ik}(v) u_i n_k ds, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\left(\Delta v_i - 2\varepsilon \frac{\partial v_i}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) u_i - \left(\Delta u_i + 2\varepsilon \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \frac{\partial q}{\partial x_i} \right) v_i \right] dx \\ = \int_S (T_{ik}(v) u_i n_k - T'_{ik}(u) v_i n_k - 2\varepsilon n_1 v_i u_i) ds, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $n = (n_1, n_2)$ – вектор внешней нормали на S , $T'_{ik}(u) = \delta_{ik}q + u_{ik}$, причем здесь и далее по повторяющимся индексам осуществляется суммирование.

Полагая во второй формуле Грина $u = u_{\varepsilon}^k(x - y)$, $q = q^k(x - y)$, выбирая в качестве $v = v(y)$, $p = p(y)$ гладкое решение неоднородной системы Озеена и интегрируя по y , получаем интегральные представления решения v, p :

$$\begin{aligned} v_k(x) = \int_{\Omega} u_{\varepsilon,i}^k(x - y) f_i(y) dy - \int_S T_{ij}(v(y)) u_{\varepsilon,i}^k(x - y) n_j(y) ds_y \\ + \int_S (T'_{ij}(u_{\varepsilon}^k(x - y))_y + 2\varepsilon \delta_{1j} u_{\varepsilon,i}^k(x - y)) n_j(y) v_i(y) ds_y, \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} p(x) = \int_{\Omega} q^k(x - y) f_k(y) dy - \int_S q^i(x - y) T_{ij}(v(y)) n_j(y) ds_y \\ + \int_S \left(-2 \frac{\partial}{\partial x_j} q^i(x - y) - 2\varepsilon q^1(x - y) \delta_{ij} + 2\varepsilon q^i(x - y) \delta_{1j} \right) n_j(y) v_i(y) ds_y \end{aligned} \quad (1.18)$$

(здесь $T'_{ij}(\dots)_y$ означает, что дифференцирование осуществляется по y).

На основании (1.17) и (1.18) введем следующие гидродинамические потенциалы для системы Озеена:

– объемный потенциал

$$\begin{aligned} (U_{\varepsilon} f)_k(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} u_{\varepsilon,i}^k(x - y) f_i(y) dy, \\ (Pf)(x) &= \int_{\mathbb{R}^2} q^k(x - y) f_k(y) dy; \end{aligned} \quad (1.19)$$

– потенциал простого слоя

$$\begin{aligned} (V_{\varepsilon} \psi)_k(x) &= - \int_S u_{\varepsilon,i}^k(x - y) \psi_i(y) ds_y, \\ (Q\psi)(x) &= - \int_S q^i(x - y) \psi_i(y) ds_y; \end{aligned} \quad (1.20)$$

– потенциал двойного слоя

$$\begin{aligned} (W_\varepsilon \varphi)_k(x) &= \int_S (T'_{ij}(u_\varepsilon^k(x-y))_y + \varepsilon \delta_{1j} u_{\varepsilon,i}^k(x-y)) n_j(y) \varphi_i(y) ds_y, \\ (\Pi \varphi)(x) &= \int_S \left(-2 \frac{\partial}{\partial x_j} q^i(x-y) - 2\varepsilon q^1(x-y) \delta_{ij} \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon q^i(x-y) \delta_{1j} \right) n_j(y) \varphi_i(y) ds_y. \end{aligned} \quad (1.21)$$

С помощью введенных потенциалов формулы для v и p представляются в виде

$$v = U_\varepsilon f + W_\varepsilon v + V_\varepsilon (T(v)n - \varepsilon(e^1, n)v), \quad (1.22)$$

$$p = Pf + \Pi v + Q(T(v)n - \varepsilon(e^1, n)v). \quad (1.23)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. При $\varepsilon = 0$ система Озеена переходит в систему Стокса, поэтому формулы Грина для системы Стокса получаются из соответствующих формул для системы Озеена при $\varepsilon = 0$. Однако непосредственный предельный переход возможен только для производных фундаментального решения и, следовательно, только для потенциала двойного слоя. Объемный потенциал и потенциал простого слоя для системы Стокса получаются из формул (1.19), (1.20) заменой $u_{\varepsilon,j}^k$ фундаментальным решением системы Стокса v_j^k .

Далее для потенциалов простого и двойного слоев для системы Стокса будем использовать обозначения W и V .

Предельные соотношения для потенциалов Озеена аналогичны соответствующим соотношениям для потенциалов Стокса [8].

Пусть φ – непрерывное поле на S ; тогда прямое значение потенциала двойного слоя $(\overline{W}_\varepsilon \varphi)(x)$, $x \in S$, непрерывно на S и существуют непрерывные предельные значения потенциала $(W_\varepsilon \varphi)(x)$ на S внутри и вне S , обозначаемые соответственно $(W_\varepsilon \varphi)_{(i)}(x)$ и $(W_\varepsilon \varphi)_{(e)}(x)$, причем выполняются соотношения

$$(W_\varepsilon \varphi)_{(i)}(x) = \pm \frac{1}{2} \varphi(x) + (\overline{W}_\varepsilon \varphi)(x), \quad x \in S. \quad (1.24)$$

Аналогично, если ψ – непрерывное поле на S , то потенциал простого слоя $(V_\varepsilon \psi)(x)$ непрерывен на всем пространстве $\mathbb{R}^2$ и справедливы предельные соотношения

$$M_{ij}(\varepsilon, V_\varepsilon \psi)_{(i)}(x) n_j(x) = \pm \frac{1}{2} \psi_i(x) + \overline{M}_{ij}(\varepsilon, V_\varepsilon \psi)(x) n_j(x), \quad x \in S, \quad (1.25)$$

где $M_{ij}(\varepsilon, v) = T_{ij}(v) - \varepsilon \delta_{1j} v_i$, причем предельные значения и прямое значение непрерывны на S .

1.3. Единственность решений краевых задач для системы Озеена.

Пусть $v \in C^2(\Omega)$, $p \in C^1(\Omega)$ – решение однородной системы Озеена. Рассмотрим два типа краевых условий:

- 1) условие типа Дирихле $v|_{\partial\Omega} = 0$,
- 2) условие типа Неймана $M_{ij}(\varepsilon, v) n_j|_{\partial\Omega} = 0$,

добавляя в случае внешней области условие на бесконечности: $v|_\infty = 0$.

Если Ω – внутренняя область, то, применяя к ее внутренней δ -подобласти $\Omega_\delta = \{x \in \Omega, \varrho(x, \partial\Omega) > \delta > 0\}$ первую формулу Грина и полагая $u = v$, получаем

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\delta} v_{ik} v_{ik} dx = \int_{\partial\Omega_\delta} M_{ik}(\varepsilon, v) v_i n_k ds. \quad (1.26)$$

Предполагая, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\delta} M_{ik}(\varepsilon, v) v_i n_k ds = 0, \quad (1.27)$$

устанавливаем, что $v_{ik} = 0$, $i, k = 1, 2$, и, следовательно,

$$v = (c_1 + c_3 x_2, c_2 - c_3 x_1), \quad (1.28)$$

где c_i – произвольные постоянные.

Поэтому если $v|_{\partial\Omega} = 0$, то $v = 0$ в Ω , если же выполняется условие 2), то из системы Озеена вытекает, что $p = c + 2\varepsilon c_3 x_2$, а само условие 2) принимает вид $(pn + \varepsilon n_1 v)|_{\partial\Omega} = 0$. Отсюда получаем, что при $\varepsilon \neq 0$ система имеет лишь тривиальное решение $v = 0$, а при $\varepsilon = 0$ ее общее решение имеет вид (1.28) при $p = 0$.

В случае внешней области Ω формула

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_\delta} v_{ik} v_{ik} dx = - \int_{\partial\Omega_\delta} M_{ik}(\varepsilon, v) v_i n_k ds \quad (1.29)$$

справедлива при условии

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} M_{ik}(\varepsilon, v) v_i n_k ds = 0. \quad (1.30)$$

Если выполнены соотношения (1.27), (1.30), то для граничных условий 1) или 2) вместе с условием на бесконечности $v|_\infty = 0$ система Озеена имеет лишь тривиальное решение.

1.4. Интегральные уравнения. Рассмотрим следующие задачи:

1) для внешней области $\Omega = \Omega_e$:

$$\begin{aligned} \Delta v - 2\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_1} - \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div} v &= 0, \quad v|_\infty = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = a \in C(\partial\Omega); \end{aligned} \quad (1.31)$$

2) для внутренней области $\Omega = \Omega_i$:

$$\begin{aligned} \Delta v + 2\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x_1} - \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div} v &= 0, \quad M_{ij}(-\varepsilon, v) n_j|_{\partial\Omega} = b_i \in C(\partial\Omega). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Решение задачи 1) будем искать в виде потенциала двойного слоя $v = W_\varepsilon \varphi$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$, а решение задачи 2) – в виде потенциала простого слоя $v = V_{-\varepsilon} \psi$, $\psi \in C(\partial\Omega)$.

Для определения φ и ψ в силу предельных соотношений имеем интегральные уравнения

$$-\frac{1}{2}\varphi + \overline{W}_\varepsilon \varphi = a, \quad (1.33)$$

$$\frac{1}{2}\psi_k + \overline{M}_{kj}(-\varepsilon, V_{-\varepsilon}\psi)n_j = b_k, \quad k = 1, 2, \quad (1.34)$$

которые, как легко проверяется, взаимно сопряжены.

Покажем, что при $\varepsilon \neq 0$ эти уравнения однозначно разрешимы. Для этого достаточно установить, что хотя бы одно из однородных уравнений имеет лишь тривиальное решение. Пусть ψ – решение уравнения (1.34) при $b = 0$. Тогда $v = V_{-\varepsilon}\psi$ является решением задачи 2) при $b = 0$. В силу непрерывности потенциала простого слоя и его предельных значений выполняется условие единственности и, следовательно, $V_{-\varepsilon}\psi = 0$ в Ω_i . С другой стороны, $v = V_{-\varepsilon}\psi$ является решением в Ω_e задачи 1) при $a = 0$ с заменой ε на $-\varepsilon$. Используя асимптотику функции K_0 , легко установить выполнение условий единственности из п. 1.3. Поэтому $V_{-\varepsilon}\psi = 0$ и в Ω_e , но тогда из предельных соотношений вытекает, что $\psi = 0$.

Этим завершается доказательство однозначной разрешимости при $\varepsilon \neq 0$.

В случае $\varepsilon = 0$, т.е. для системы Стокса [4], однородные уравнения имеют по три линейно независимых решения, которые обозначим через φ^i для уравнения задачи Дирихле и через ψ^i для сопряженного уравнения, причем эти решения можно выбрать так, чтобы выполнялись условия ортогональности

$$(\varphi^i, \psi^j) = \int_{\partial\Omega} \varphi^i \psi^j ds = \delta_{ij}, \quad (1.35)$$

при этом $\varphi^1 = e^1$, $\varphi^2 = e^2$, $\varphi^3 = V\psi^3$.

Отметим, что приведенные условия однозначно определяют базисы ядер уравнений (φ^3 , ψ^3 с точностью до знака). Напомним также, что $V\psi^j = (c_1^j + c_3^j x_2, c_2^j - c_3^j x_1)$ во внутренней области Ω_i и в силу выбора базисов $c_3^3 \neq 0$.

Имеет место следующее утверждение о парадоксе Стокса.

Внешняя задача

$$\begin{aligned} \Delta u - \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_{\partial\Omega} = f \in C(\partial\Omega) \end{aligned} \quad (1.36)$$

имеет единственное решение в классе потенциалов вида

$$u = c_1\varphi^1 + c_2\varphi^2 + c_3V\psi^3 + W\varphi. \quad (1.37)$$

Действительно, для определения плотности φ и констант c_i имеем интегральное уравнение

$$-\frac{1}{2}\varphi + W\varphi = f - c_1\varphi^1 - c_2\varphi^2 - c_3\varphi^3. \quad (1.38)$$

Из условий разрешимости однозначно определяются $c_j = (f, \psi^j)$, при таком выборе констант уравнение разрешимо и его общее решение имеет вид

$$\varphi = \alpha_1\varphi^1 + \alpha_2\varphi^2 + \alpha_3\varphi^3 + \varphi_0, \quad (1.39)$$

где φ_0 принадлежит прямому дополнению к ядру $\{\varphi^i\}$ и этим условием определяется однозначно. Тем не менее, решение

$$v = W\varphi + c_1\varphi^1 + c_2\varphi^2 + c_3V\psi^3 \quad (1.40)$$

единственно, так как $W\varphi^i = 0$ в Ω_e .

1.5. L_p -оценки потенциалов. Ниже приводятся L_p -оценки потенциалов двойного и простого слоев и их производных.

ТЕОРЕМА 1.1. *Для внешней области Ω справедливы следующие оценки:*

$$\|(W_\varepsilon\varphi)_k\|_{L_{q_k}(\Omega)} \leq c\theta(\varepsilon, 1, q_k)\|\varphi\|_{L_p(\partial\Omega)}, \quad (1.41)$$

где $3 < q_1 < \infty$, $2 < q_2 < \infty$, $q_k \leq 2p$;

$$\|W_\varepsilon\varphi\|_{W_q^2(\Omega')} \leq c\|\varphi\|_{W_q^{2-1/q}(\partial\Omega)}, \quad (1.42)$$

где $1 < q < \infty$, Ω' – ограниченная подобласть в Ω ;

$$\|\partial^\alpha W_\varepsilon\varphi\|_{L_q(|x|>R)} \leq c\|\varphi\|_{L_1(\partial\Omega)}, \quad (1.43)$$

где $\partial\Omega \subset \{|x| < R\}$, $|\alpha| \geq 1$, причем $3/2 < q < \infty$, если $\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_2}$, $1 < q \leq \infty$ в остальных случаях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В окрестности границы ядро оператора W_ε равномерно оценивается через $|x - y|^{-1}$. Используя результаты об ограниченности потенциалов в случае разных измерений [7, с. 170], получаем, что оператор W_ε равномерно по ε ограничен из $L_p(\partial\Omega)$ в $L_q(\Omega')$ при $1 \leq q \leq 2p$.

Вне окрестности границы имеем

$$\|(W_\varepsilon\varphi)_k\|_{L_{q_k}(|x|>R)} \leq \sup_{j,y \in \partial\Omega} \|W_{\varepsilon,j}^k(x,y)\|_{L_{q_k}(|x|>R)} \|\varphi\|_{L_1(\partial\Omega)},$$

где $W_{\varepsilon,j}^k(x,y)$ – ядро потенциала W_ε .

Учитывая вид этих ядер, получаем

$$\begin{aligned} \|W_{\varepsilon,j}^k(x,y)\|_{L_{q_k}(|x|>R)} &\leq c\{\varepsilon\|u_\varepsilon^k(x-y)\|_{L_{q_k}(|x|>R)} \\ &\quad + \|\nabla u_\varepsilon^k(x-y)\|_{L_{q_k}(|x|>R)} + \||x-y|^{-1}\|_{L_{q_k}(|x|>R)}\}. \end{aligned}$$

Справедливость оценки (1.41) теперь следует из L_p -оценок фундаментального решения вне окрестности нуля. Аналогично устанавливаются оценки (1.43). Ограниченность оператора W_ε из $W_q^{2-1/q}(\partial\Omega)$ в $W_q^2(\Omega')$ доказывается так же, как и в [8, с. 78–82] для потенциала двойного слоя системы Стокса.

ТЕОРЕМА 1.2. Для оператора потенциала простого слоя справедливы оценки

$$\|(V_\varepsilon \varphi)_k\|_{L_{q_k}(\Omega)} \leq c\varepsilon^{-2/q_k} \|\varphi\|_{L_1(\partial\Omega)}, \quad (1.44)$$

где $3 < q_1 < \infty$, $2 < q_2 < \infty$;

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_s} (V_\varepsilon \varphi)_k \right\|_{L_q(\Omega)} \leq c\theta(\varepsilon, 1, q) \|\varphi\|_{L_p(\partial\Omega)} \quad (1.45)$$

для $q \leq 2p$, причем $3/2 < q < \infty$ при $(k, s) = (1, 2)$, $1 < q < \infty$ при $(k, s) \neq (1, 2)$;

$$\|\partial^2 (V_\varepsilon \varphi)_k\|_{L_q(\Omega)} \leq c(\theta(\varepsilon, 2, q) \|\varphi\|_{L_1(\partial\Omega)} + \|\varphi\|_{W_q^{1-1/q}(\partial\Omega)}), \quad (1.46)$$

где $1 < q < \infty$.

Для объемного потенциала справедливы следующие оценки:

$$\|U_\varepsilon\|_{L_p(\Omega) \rightarrow L_\infty(\partial\Omega)} \leq c\varepsilon^{-2+2/p} \quad (1.47)$$

при $1 < p < 3/2$;

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_s} U_\varepsilon \right\|_{L_p(\Omega) \rightarrow L_q(\partial\Omega)} \leq c\theta(\varepsilon, 1, p'), \quad (1.48)$$

где $1/p' + 1/p = 1$, $1 < p < 3$, $1/q \geq 2/p - 1$;

$$\|U_\varepsilon f\|_{W_q^{1-1/q}(S)} \leq c(\varepsilon^{-2+2/p} \|f\|_{L_p(\Omega)} + \theta(\varepsilon, 1, s') \|f\|_{L_s(\Omega)}) \quad (1.49)$$

при $1 < p < 3/2$, $1 < s < 3$, $1/s \leq 1/q + 1/2$;

$$\|U_\varepsilon f\|_{W_q^{2-1/q}(S)} \leq c(\varepsilon^{-2+2/p} \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{L_q(\Omega)}) \quad (1.50)$$

при $1 < p < 3/2$, $1 < q < \infty$;

$$\|\partial_j U_\varepsilon f\|_{W_q^{1-1/q}(S)} \leq c(\theta(\varepsilon, 1, p') \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{L_q(\Omega)}), \quad (1.51)$$

где $1 < p < \infty$ при $j = 1$, $1 < p < 3$ при $j = 2$, $1/p \leq 1/q + 1/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (1.44) непосредственно следует из L_p -оценок фундаментального решения. Оценка (1.45), по существу, установлена в предыдущей теореме. Оценка (1.46) вне границы следует из оценок вторых производных фундаментального решения. В окрестности границы, рассматривая $v = V_\varepsilon \varphi - \ln \frac{2}{\varepsilon} V_1 \varphi$ (оператор V_1 определяется далее, в формуле (1.65)) как решение системы Стокса с правой частью $2\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} V_\varepsilon \varphi$, получаем

$$\|v\|_{W_q^2(\Omega')} \leq c \left(\left\| \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} V_\varepsilon \varphi \right\|_{L_q(\Omega')} + \left\| V_\varepsilon \varphi - \ln \frac{2}{\varepsilon} V_1 \varphi \right\|_{W_q^{2-1/q}(\partial\Omega')} \right). \quad (1.52)$$

Оценивая первую норму, как и в случае оператора двойного слоя, и используя для второй нормы разложение в ряд фундаментального решения и сглаживающее свойство потенциала простого слоя для системы Стокса, имеем

$$\|v\|_{W_q^2(\Omega')} \leq c \|\varphi\|_{W_q^{1-1/q}(\partial\Omega)} \quad \text{при } 1 < q < \infty.$$

Остается заметить, что $\partial^2 v = \partial^2 V_\varepsilon \varphi$.

Для доказательства (1.47) и (1.48) отметим, что рассматриваемые операторы являются сопряженными к операторам $V_{-\varepsilon}$ и $\frac{\partial}{\partial x_s} V_{-\varepsilon}$. Для получения оценок (1.49)–(1.51) используем теорему о следах, согласно которой

$$\|U_\varepsilon f\|_{W_q^{j-1/q}(S)} \leq c \sum_{|\alpha|=0,j} \|\partial^{|\alpha|} U_\varepsilon f\|_{L_q(\Omega')},$$

где Ω' – ограниченная окрестность $\partial\Omega = S$.

Для вторых производных имеем $\|\partial^2 U_\varepsilon f\|_{L_q(\Omega')} \leq c\|f\|_{L_q(\Omega)}$ при $1 < q < \infty$.

При $|\alpha| = 0, 1$ удобно рассмотреть сопряженный оператор

$$(\partial^\alpha U_\varepsilon)^*: L_{q'}(\Omega') \rightarrow L_{p'}(\Omega),$$

который совпадает с оператором $(-1)^{|\alpha|} \partial^\alpha U_{-\varepsilon}$. Его оценки вытекают из оценок фундаментального решения вне окрестности нуля и оценок для ограниченных областей.

Рассмотрим теперь потенциал $W_\varepsilon \varphi^j$, $j = 1, 2$. Применяя теорему Остроградского–Гаусса, получаем представление

$$(W_\varepsilon \varphi^j)_k(x) = -\varepsilon \int_{\Omega_i} \frac{\partial}{\partial y_1} (u_{\varepsilon,j}^k(x-y)) dy. \quad (1.53)$$

Обратный переход к криволинейному интегралу приводит к представлению $W_\varepsilon \varphi^j$ в форме потенциала простого слоя:

$$(W_\varepsilon \varphi^j)_k(x) = -\varepsilon \int_{\partial\Omega} u_{\varepsilon,j}^k(x-y) n_1(y) ds_y. \quad (1.54)$$

Отсюда вытекает следующая оценка:

$$\|W_\varepsilon \varphi^j\|_{L_q(\Omega)} \leq \varepsilon \theta(\varepsilon, 1, q), \quad j = 1, 2, \quad 1 < q < \infty. \quad (1.55)$$

Действительно, для оценки вне границы следует использовать представление (1.53), а в окрестности границы – представление (1.54).

Отметим также, что справедлива оценка

$$\|\partial^\alpha W_\varepsilon \varphi^j\|_{L_q(\Omega)} \leq \varepsilon \theta(\varepsilon, |\alpha| + 1, q), \quad |\alpha| = 1, 2, \quad 1 < q < \infty. \quad (1.56)$$

Вне окрестности границы следует использовать формулу (1.53), а в ее окрестности – формулу (1.54).

1.6. Разрешающий оператор системы Озеена и его оценки при малых ε . Ниже исследуется зависимость от ε решения внешней задачи Дирихле для однородного уравнения Озеена при малых ε . Для этого к интегральному уравнению (1.33) применим метод Ляпунова–Шмидта.

Заметим, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (1.33) является уравнением внешней задачи Дирихле для системы Стокса, при этом оператор $-\frac{1}{2}I + \bar{W}$ и его сопряженный $(-\frac{1}{2}I + \bar{W})^*$ имеют трехмерные ядра N и N^* , их базисы выберем специальным образом, как это указано в п. 1.4, причем ниже используем обозначение $\varphi^3 = V\psi^3 = A + \gamma(x_2, -x_1)$.

Предварительно рассмотрим случай, когда поле a удовлетворяет условиям разрешимости $(a, \psi^j) = 0$, $j = 1, 2, 3$. Введем проектор

$$P\psi = \psi - \sum_{i=1}^3 (\psi, \psi^i) \varphi^i \quad (1.57)$$

на $\text{Im}(-\frac{1}{2}I + \overline{W})$ и его дополнительный проектор $Q = I - P$, который одновременно является проектором на N . Применяя проекторы P и Q к уравнению (1.33) и представляя φ в виде $\varphi = c_1\varphi^1 + c_2\varphi^2 + c_3\varphi^3 + \xi$, где $Q\xi = 0$, сведем его к системе уравнений

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2}I + \overline{W}\right)\xi + P(\overline{W}_\varepsilon - \overline{W})\left(\xi + \sum_{i=0}^3 c_i\varphi^i\right) &= a, \\ Q(\overline{W}_\varepsilon - \overline{W})\left(\xi + \sum_{i=1}^3 c_i\varphi^i\right) &= 0. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Покажем, что второе уравнение однозначно разрешимо относительно c_j при любом ξ , а затем, подставляя $c_j = c_j(\xi)$ в первое уравнение, установим его однозначную разрешимость при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$.

Предварительно преобразуем к удобной форме поля $(\overline{W}_\varepsilon - \overline{W})\varphi^j$. Для этого заметим, что пары φ^j , $p = 0$ ($j = 1, 2$) и φ^3 , $p = 2\varepsilon\gamma x_2$ являются решением системы Озеена, и поэтому из интегрального представления решения в Ω_i (см. (1.22)) получаем

$$\varphi^j = W_\varepsilon \varphi^j - \varepsilon V_\varepsilon(n_1 \varphi^j), \quad j = 1, 2, \quad (1.59)$$

$$\varphi^3 = W_\varepsilon \varphi^3 - \varepsilon V_\varepsilon(n_1 \varphi^3 + 2\gamma n x_2). \quad (1.60)$$

Внутренние предельные соотношения приводят к формулам

$$\left(-\frac{1}{2}I + \overline{W}_\varepsilon\right)\varphi^j - \varepsilon V_\varepsilon(n_1 \varphi^j) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (1.61)$$

$$\left(-\frac{1}{2}I + \overline{W}_\varepsilon\right)\varphi^3 - \varepsilon V_\varepsilon(n_1 \varphi^3 + 2\gamma n x_2) = 0. \quad (1.62)$$

Из разложения фундаментального решения в ряд имеем следующие разложения для потенциалов:

$$\overline{W}_\varepsilon = \overline{W} + \varepsilon \ln \frac{2}{\varepsilon} W_1 + \varepsilon W_2 + \varepsilon^2 \ln \frac{2}{\varepsilon} W_3 + \dots, \quad (1.63)$$

$$V_\varepsilon = \ln \frac{2}{\varepsilon} V_1 + V_2 + \varepsilon \ln \frac{2}{\varepsilon} V_3 + \dots, \quad (1.64)$$

где операторы V_j , $j = 1, 2, 3$, определяются формулами

$$V_1\psi = \frac{1}{4\pi} \int_S \psi ds, \quad (1.65)$$

$$V_2\psi = V\psi + \Lambda V_1\psi, \quad \Lambda = \text{diag}(c_0, c_0 - 1), \quad (1.66)$$

$$V_3\psi(x) = \frac{1}{8\pi} \int_S \begin{pmatrix} x_1 - y_1 & -x_2 + y_2 \\ -x_2 + y_2 & 3(x_1 - y_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(y) \\ \psi_2(y) \end{pmatrix} ds_y. \quad (1.67)$$

Используя ряды (1.63), (1.64), из соотношений (1.61) и (1.62) получаем

$$W_j(\varphi^k) = V_j(n_1\varphi^k), \quad k = 1, 2, \quad (1.68)$$

$$W_j(\varphi^3) = V_j(n_1\varphi^3 + 2\gamma nx_2), \quad j = 1, 2, \dots \quad (1.69)$$

Далее, легко проверяется, что

$$V_1(n_1\varphi^k) = 0, \quad V_2(n_1\varphi^k) = V(n_1\varphi^k), \quad k = 1, 2, \quad (1.70)$$

$$V_3(n_1\varphi^k) = \alpha_k\varphi^k, \quad k = 1, 2, \quad \alpha_1 = -\frac{\mu(\Omega_i)}{8\pi}, \quad \alpha_2 = -\frac{3\mu(\Omega_i)}{8\pi}, \quad (1.71)$$

$$V_1(n_1\varphi^3 + 2\gamma nx_2) = V_1(\gamma(x_2, -x_1)n_1 + 2\gamma nx_2) = -2\gamma\alpha_1\varphi^2, \quad (1.72)$$

$$V_2(n_1\varphi^3 + 2\gamma nx_2) = V(n_1\varphi^3 + 2\gamma nx_2) - 2\gamma\alpha_1(c_0 - 1)\varphi^2. \quad (1.73)$$

Теперь, используя разложение для $\overline{W}_\varepsilon$, связь потенциалов двойного и простого слоев для базисных полей (формулы (1.68), (1.69)) и соотношения (1.70)–(1.73), устанавливаем

$$\begin{aligned} (\overline{W}_\varepsilon - \overline{W}) \left(\sum_{i=1}^3 c_i \varphi^i \right) &= -\varepsilon \ln \frac{2}{\varepsilon} 2\gamma\alpha_1 c_3 \varphi^2 \\ &+ \varepsilon \left(V \left(\sum_{i=1}^3 c_i \varphi^i n_1 + c_3 2\gamma nx_2 \right) - 2\gamma\alpha_1 (c_0 - 1) c_3 \varphi^2 \right) \\ &+ \varepsilon^2 \ln \frac{2}{\varepsilon} (c_1 \alpha_1 \varphi^1 + c_2 \alpha_2 \varphi^2 + c_3 V_3(n_1 \varphi^3 + 2\gamma nx_2)) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (1.74)$$

Отметим также, что справедливы соотношения

$$(\psi^3, V(n_1\varphi^i)) = -\delta_{i2}\gamma\mu(\Omega_i), \quad i = 1, 2, \quad (1.75)$$

$$(\psi^j, V(n_1\varphi^i)) = 0, \quad i, j = 1, 2. \quad (1.76)$$

Действительно, имеем

$$(\psi^3, V(n_1\varphi^i)) = (V\psi^3, n_1\varphi^i) = (\gamma(x_2, -x_1), n_1\varphi^i) = -\delta_{i2}\gamma\mu(\Omega_i). \quad (1.77)$$

Для доказательства (1.76) рассмотрим поле

$$w^i = V(n_1\varphi^i) - b_1\varphi^1 - b_2\varphi^2 - b_3V\psi^3 - W\xi, \quad (1.78)$$

где $b_j = (\psi^j, V(n_1\varphi^i))$, $j = 1, 2, 3$; ξ – решение уравнения

$$\left(-\frac{1}{2}I + \overline{W} \right) \xi = V(n_1\varphi^i) - b_1\varphi^1 - b_2\varphi^2 - b_3V\psi^3. \quad (1.79)$$

Пара w^i , $p = Q(n_1\varphi^i - b_3\psi^3) - \Pi\xi$ (здесь Q и Π – соответственно операторы простого и двойного слоя для давления) является решением системы Стокса во внешней области и удовлетворяет условиям

$$w^i|_S = 0, \quad |p(x)| \leq c|x|^{-2}, \quad |T_{kj}(w^i)| \leq c|x|^{-2}, \quad |w^i(x)| \leq c. \quad (1.80)$$

Поэтому из результатов, полученных в п. 1.3, следует, что $w^i = 0$ в Ω_ε , и так как $V(n_1\varphi^i), V\psi^3, W\xi$ стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$, то $b_1 = b_2 = 0$, что и доказывает соотношение (1.76).

С учетом формул (1.74)–(1.76) второе уравнение системы (1.58) приводится к виду

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij}c_j = (\eta, \psi^i), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.81)$$

где $\eta = -(\overline{W}_\varepsilon - \overline{W})\xi$, а коэффициенты a_{ij} разлагаются в ряды по $\varepsilon^k \ln \frac{2}{\varepsilon}$, ε^k и их главные члены имеют вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= \varepsilon^2 \ln \frac{2}{\varepsilon} a_{11}^0, & a_{12} &= \varepsilon^2 a_{12}^0, & a_{13} &= \varepsilon a_{13}^0, \\ a_{21} &= \varepsilon^2 a_{21}^0, & a_{22} &= \varepsilon^2 \ln \frac{2}{\varepsilon} a_{22}^0, & a_{23} &= \varepsilon \ln \frac{2}{\varepsilon} a_{23}^0, \\ a_{31} &= \varepsilon^2 a_{31}^0, & a_{32} &= \varepsilon a_{32}^0, & a_{33} &= \varepsilon a_{33}^0, \end{aligned}$$

причем a_{ij}^0 не зависят от ε и $a_{11}^0 = \alpha_1$, $a_{22}^0 = \alpha_2$, $a_{23}^0 = -2\gamma\alpha_1$, $a_{32}^0 = -\gamma\mu(\Omega_i)$ заведомо отличны от нуля.

Для определителей Крамера системы (1.81) имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta_0 \varepsilon^4 \left(\ln \frac{2}{\varepsilon} \right)^2, \\ \Delta_1 &= \Delta_{11}(\eta, \psi^1) \varepsilon^2 \ln \frac{2}{\varepsilon} + \Delta_{12}(\eta, \psi^2) \varepsilon^2 + \Delta_{13}(\eta, \psi^3) \varepsilon^3 \ln \frac{2}{\varepsilon}, \\ \Delta_2 &= \Delta_{21}(\eta, \psi^1) \varepsilon^3 \ln \frac{2}{\varepsilon} + \Delta_{22}(\eta, \psi^2) \varepsilon^3 \ln \frac{2}{\varepsilon} + \Delta_{23}(\eta, \psi^3) \varepsilon^3 \left(\ln \frac{2}{\varepsilon} \right)^2, \\ \Delta_3 &= \Delta_{31}(\eta, \psi^1) \varepsilon^3 + \Delta_{32}(\eta, \psi^2) \varepsilon^3 \ln \frac{2}{\varepsilon} + \Delta_{33}(\eta, \psi^3) \varepsilon^4 \left(\ln \frac{2}{\varepsilon} \right)^2, \end{aligned}$$

где главные члены Δ_0, Δ_{ij} суть

$$\begin{aligned} \Delta_0 &\sim -a_{11}^0 a_{32}^0 a_{23}^0 \neq 0, \\ \Delta_{11} &\sim -a_{23}^0 a_{32}^0, & \Delta_{12} &\sim a_{32}^0 a_{13}^0, & \Delta_{13} &\sim a_{12}^0 a_{23}^0 - a_{22}^0 a_{13}^0, \\ \Delta_{21} &\sim a_{31}^0 a_{23}^0, & \Delta_{22} &\sim a_{11}^0 a_{33}^0, & \Delta_{23} &\sim -a_{11}^0 a_{23}^0, \\ \Delta_{31} &\sim a_{21}^0 a_{32}^0, & \Delta_{32} &\sim -a_{11}^0 a_{32}^0, & \Delta_{33} &\sim a_{11}^0 a_{22}^0. \end{aligned}$$

Тогда функционалы c_j определяются формулами

$$c_1 = \frac{\Delta_{11}(\eta, \psi^1)}{\Delta_0 \varepsilon^2 \ln \frac{2}{\varepsilon}} + \frac{\Delta_{12}(\eta, \psi^2)}{\Delta_0 \varepsilon^2 (\ln \frac{2}{\varepsilon})^2} + \frac{\Delta_{13}(\eta, \psi^3)}{\Delta_0 \varepsilon \ln \frac{2}{\varepsilon}}, \quad (1.82)$$

$$c_2 = \frac{\Delta_{21}(\eta, \psi^1)}{\Delta_0 \varepsilon \ln \frac{2}{\varepsilon}} + \frac{\Delta_{22}(\eta, \psi^2)}{\Delta_0 \varepsilon \ln \frac{2}{\varepsilon}} + \frac{\Delta_{23}(\eta, \psi^3)}{\Delta_0 \varepsilon}, \quad (1.83)$$

$$c_3 = \frac{\Delta_{31}(\eta, \psi^1)}{\Delta_0 \varepsilon (\ln \frac{2}{\varepsilon})^2} + \frac{\Delta_{32}(\eta, \psi^2)}{\Delta_0 \varepsilon \ln \frac{2}{\varepsilon}} + \frac{\Delta_{33}(\eta, \psi^3)}{\Delta_0}. \quad (1.84)$$

Применяя к (1.74) проектор P , приведем первое уравнение системы (1.58) к виду

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2} + \overline{W}\right)\xi + P(\overline{W}_\varepsilon - \overline{W})\xi + \varepsilon PV\left(n_1 \sum_{i=1}^3 c_i \varphi^i + 2\gamma c_3 n x_2\right) \\ + \varepsilon^2 \ln \frac{2}{\varepsilon} c_3 PV_3(n_1 \varphi^3 + 2\gamma n x_2) + \dots = a. \end{aligned} \quad (1.85)$$

Учитывая, что

$$\eta = -(\overline{W}_\varepsilon - \overline{W})\xi = -\varepsilon \ln \frac{2}{\varepsilon} W_1 \xi - \varepsilon W_2 \xi - \dots, \quad PV(\varphi^1 n_1) = V(\varphi^1 n_1)$$

(см. (1.75), (1.76)), и подставляя выражения для c_j в (1.85), представим уравнение (1.85) в форме

$$\left(-\frac{1}{2} + \overline{W}\right)\xi - \frac{\Delta_{11}}{\Delta_0}(W_1 \xi, \psi^1)V(n_1 \varphi^1) + \dots = a, \quad (1.86)$$

где остальные члены имеют порядок $O((\ln \varepsilon^{-1})^{-1})$.

Покажем, что уравнение (1.86) однозначно разрешимо при достаточно малом $\varepsilon \neq 0$. Поскольку

$$\frac{\Delta_{11}}{\Delta_0} = \frac{1}{a_{11}^0} + O\left(\left(\ln \frac{2}{\varepsilon}\right)^{-1}\right) = \frac{1}{\alpha_1} + O\left(\left(\ln \frac{2}{\varepsilon}\right)^{-1}\right),$$

то достаточно установить, что однородное уравнение

$$\left(-\frac{1}{2} + \overline{W}\right)\xi - \frac{1}{\alpha_1}(W_1 \xi, \psi^1)V(n_1 \varphi^1) = 0 \quad (1.87)$$

имеет лишь тривиальное решение. Так как для поля $V(n_1 \varphi^1)$ выполнены условия разрешимости (см. (1.75), (1.76)), то существует единственное поле ψ , для которого $(\psi^j, \psi) = 0$, $j = 1, 2, 3$, $(-\frac{1}{2} + \overline{W})\psi = V(n_1 \varphi^1)$. Но тогда решение уравнения (1.87) определяется из уравнения

$$\xi - \frac{1}{\alpha_1}(W_1 \xi, \psi^1)\psi = 0, \quad (1.88)$$

и, следовательно, достаточно установить, что

$$1 - \frac{1}{\alpha_1}(W_1 \psi, \psi^1) \neq 0. \quad (1.89)$$

Из формул разложения фундаментального решения следует, что ядро оператора W_1 не зависит от x , поэтому $W_1 \psi$ – постоянный вектор и, следовательно, $(W_1 \psi, \psi^1) = (W_1 \psi)_1$. Проводя вычисления с применением формул (1.6)–(1.8), получим

$$(W_1 \psi, \psi^1) = -\frac{1}{4\pi} \int_S n_2 \psi_2 ds.$$

Для нахождения последнего интеграла воспользуемся равенством

$$V(n_1 \varphi^1) = W(\psi),$$

справедливым в Ω_e , и вычислим асимптотику этих интегралов при $|x| \rightarrow \infty$. Опуская простые выкладки, имеем

$$V(n_1\varphi^1)_k(x) \sim \frac{x_k(x_1^2 - x_2^2)\mu(\Omega_i)}{4\pi|x|^4}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} (W\psi)_k(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_S \frac{(x_k - y_k)(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x - y|^4} \psi_j(y) n_i(y) ds_y \\ &\sim -\frac{1}{\pi} \int_S \frac{x_k x_i x_j}{|x|^4} \psi_j(y) n_i(y) ds_y = -\frac{x_k x_i x_j \gamma_{ij}}{\pi|x|^4}, \end{aligned}$$

где $\gamma_{ij} = \int_S n_i \psi_j ds$.

Сравнивая полученные асимптотики, устанавливаем, что

$$\gamma_{11} = -\frac{\mu(\Omega_i)}{4}, \quad \gamma_{22} = -\gamma_{11}, \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = 0.$$

Следовательно,

$$(W_1\psi, \psi^1) = -\frac{\gamma_{22}}{4\pi} = -\frac{\mu(\Omega_i)}{16\pi}.$$

Поскольку $\alpha_1 = -\frac{\mu(\Omega_i)}{8\pi}$, то

$$1 - \frac{1}{\alpha_1}(W_1\psi, \psi^1) = \frac{1}{2} \neq 0,$$

чем и завершается доказательство однозначной разрешимости.

Решая уравнение (1.86), для ξ получаем оценку

$$\|\xi\|_{C(S)} \leq c\|a\|_{C(S)}. \quad (1.90)$$

Отметим, что ввиду сглаживающего действия оператора прямого значения потенциала двойного слоя уравнение однозначно разрешимо во всех пространствах $L_p(S)$ и, более того, во всех пространствах Соболева–Слободенцкого $W_p^\alpha(S)$ и выполняются оценки

$$\|\xi\|_{W_p^\alpha(S)} \leq c\|a\|_{W_p^\alpha(S)}. \quad (1.91)$$

Для функционалов c_j ввиду формул (1.82)–(1.84) и (1.91) справедливы оценки

$$|c_1| \leq (c/\varepsilon)\|a\|_{L_1(S)}, \quad |c_2| \leq c \ln(2/\varepsilon)\|a\|_{L_1(S)}, \quad (1.92)$$

$$|c_3| \leq c\|a\|_{L_1(S)}. \quad (1.93)$$

Пусть a не удовлетворяет условиям разрешимости $(\psi^j, a) = 0$, $j = 1, 2, 3$. Тогда решение внешней задачи будем искать в форме

$$v = W_\varepsilon \varphi + b_1 u_\varepsilon^1 + b_2 u_\varepsilon^2 + b_3 V_\varepsilon \psi^3, \quad (1.94)$$

плотность φ определяется из уравнения

$$\left(-\frac{1}{2}I + \overline{W}_\varepsilon\right)\varphi = a - b_1 u_\varepsilon^1 - b_2 u_\varepsilon^2 - b_3 V_\varepsilon \psi^3, \quad (1.95)$$

а константы b_j выбираются из условий

$$(\psi^j, a - b_1 u_\varepsilon^1 - b_2 u_\varepsilon^2 - b_3 V_\varepsilon \psi^3) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.96)$$

Поскольку

$$u_\varepsilon^j \sim -\frac{1}{4\pi} \varphi^j \ln \frac{2}{\varepsilon} + O(1), \quad (1.97)$$

$$V_\varepsilon \psi^3 \sim V \psi^3 + O\left(\varepsilon \ln \frac{2}{\varepsilon}\right) = \varphi^3 + O\left(\varepsilon \ln \frac{2}{\varepsilon}\right), \quad (1.98)$$

то для определителя системы (1.96) справедливо асимптотическое соотношение

$$\Delta \sim \frac{1}{16\pi^2} \left(\ln \frac{2}{\varepsilon} \right)^2$$

и главные члены функционалов b_j имеют вид

$$\begin{aligned} b_1 &\sim -4\pi(a, \psi^1) \left(\ln \frac{2}{\varepsilon} \right)^{-1}, \\ b_2 &\sim -4\pi(a, \psi^2) \left(\ln \frac{2}{\varepsilon} \right)^{-1}, \quad b_3 \sim (a, \psi^3). \end{aligned} \quad (1.99)$$

Теперь остается применить к уравнению (1.95) предыдущие результаты для случая выполнения условий разрешимости. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 1.3. *При достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ решение внешней задачи (1.31) можно представить в виде*

$$v = W_\varepsilon(c_1 \varphi^1 + c_2 \varphi^2 + c_3 \varphi^3 + \xi) + b_1 u_\varepsilon^1 + b_2 u_\varepsilon^2 + b_3 V_\varepsilon \psi^3, \quad (1.100)$$

где $b_j = b_j(a)$ – функционалы с оценками

$$|b_j| \leq c \|a\|_{L_1(S)} (\ln(2/\varepsilon))^{-1}, \quad j = 1, 2, \quad |b_3| \leq c \|a\|_{L_1(S)}, \quad (1.101)$$

$c_j = c_j(a)$ – функционалы с оценками

$$|c_1| \leq c(\varepsilon)^{-1} \|a\|_{L_1(S)}, \quad |c_2| \leq c \ln(2/\varepsilon) \|a\|_{L_1(S)}, \quad |c_3| \leq c \|a\|_{L_1(S)}, \quad (1.102)$$

причем

$$\|\xi\|_{C(S)} \leq c \|a\|_{C(S)}, \quad \|\xi\|_{W_p^\alpha(S)} \leq c \|a\|_{W_p^\alpha(S)}. \quad (1.103)$$

Получим L_p -оценки для $\partial^\alpha v$. Из соотношения (1.100) имеем

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha v\|_{L_q(\Omega)} &\leq \sum_{j=1}^3 |c_j| \|\partial^\alpha W_\varepsilon \varphi^j\|_{L_q(\Omega)} + \|\partial^\alpha W_\varepsilon \xi\|_{L_q(\Omega)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 |b_j| \|\partial^\alpha u_\varepsilon^j\|_{L_q(\Omega)} + |b_3| \|\partial^\alpha V_\varepsilon \psi^3\|_{L_q(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Теперь, используя оценки фундаментального решения и потенциалов, получаем

$$\|v_k\|_{L_{q_k}(\Omega)} \leq c\{\theta(\varepsilon, 1, q_k)(\|a\|_{L_1(S)} + \|\xi\|_{L_{q_k/2}(S)}) + \varepsilon^{-2/q_k}\|a\|_{L_1(S)}\},$$

откуда с учетом оценок ξ имеем

$$\|v_k\|_{L_{q_k}(\Omega)} \leq c\{\theta(\varepsilon, 1, q_k)\|a\|_{L_{q_k/2}(S)} + \varepsilon^{-2/q_k}\|a\|_{L_1(S)}\}, \quad (1.105)$$

где $3 < q_1 < \infty$, $2 < q_2 < \infty$;

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_s} v_k \right\|_{L_q(\Omega)} \leq c\{\theta(\varepsilon, 1, q) + \theta(\varepsilon, 2, q)\}\|a\|_{L_1(S)} + \|a\|_{W_q^{1-1/q}(S)}, \quad (1.106)$$

где $3/2 < q < \infty$, если $(k, s) = (1, 2)$, и $1 < q < \infty$, если $(k, s) \neq (1, 2)$;

$$\|\partial^2 v\|_{L_q(\Omega)} \leq c\{\theta(\varepsilon, 2, q)\|a\|_{L_1(S)} + \|a\|_{W_q^{2-1/q}(S)}\} \quad \text{при } 1 < q < \infty. \quad (1.107)$$

Рассмотрим неоднородную систему Озеена с однородными граничными условиями

$$\begin{aligned} \Delta u - 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} u - \nabla p &= f, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{\infty} = 0. \end{aligned} \quad (1.108)$$

Оператор $u = R_\varepsilon f$, представляющий ее решение, будем называть *разрешающим оператором*. Его можно представить в виде $R_\varepsilon = U_\varepsilon + L_\varepsilon$, где U_ε – оператор объемного потенциала, а $v = L_\varepsilon f$ – оператор, представляющий решение однородной системы Озеена с неоднородным граничным условием $a = -U_\varepsilon f|_{\partial\Omega}$. Оценки для $v = L_\varepsilon f$ могут быть получены из предыдущих оценок с использованием оценок $\|U_\varepsilon f\|_{W_q^{l-1/q}(S)}$.

Таким образом, имеем

$$\|(L_\varepsilon f)_k\|_{L_{q_k}(\Omega)} \leq c\varepsilon^{-2+2(1/p-1/q_k)}\|f\|_{L_p(\Omega)}, \quad (1.109)$$

где $3 < q_1 < \infty$, $2 < q_2 < \infty$, $1 < p < 3/2$;

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} (L_\varepsilon f)_k \right\|_{L_q(\Omega)} &\leq c\{(\theta(\varepsilon, 1, q) + \theta(\varepsilon, 2, q))\varepsilon^{-2+2/p}\|f\|_{L_p(\Omega)} \\ &\quad + \theta(\varepsilon, 1, s')\|f\|_{L_s(\Omega)}\}, \end{aligned} \quad (1.110)$$

где $3/2 < q < \infty$, если $(k, j) = (1, 2)$, и $1 < q < \infty$, если $(k, j) \neq (1, 2)$; $1 < p < 3/2$, $1 < s < 3$, $1/s \leq 1/q + 1/2$;

$$\|\partial^2 L_\varepsilon f\|_{L_q(\Omega)} \leq c\{\theta(\varepsilon, 2, q)\varepsilon^{-2+2/p}\|f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{L_q(\Omega)}\} \quad (1.111)$$

при $1 < q < \infty$, $1 < p < 3/2$.

В случае $f = \partial_j g$ имеем

$$\|(L_\varepsilon \partial_j g)_k\|_{L_{q_k}(\Omega)} \leq c\varepsilon^{-2/q_k}\theta(\varepsilon, 1, p')\|g\|_{L_p(\Omega)}, \quad (1.112)$$

где $3 < q_1 < \infty$, $2 < q_2 < \infty$, $1 < p < 3$, $1/p \leq 1/q_k + 1/2$;

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_s} (L_\varepsilon \partial_j g)_k \right\|_{L_q(\Omega)} \leq c \{ (\theta(\varepsilon, 1, q) + \theta(\varepsilon, 2, q)) \theta(\varepsilon, 1, p') \|g\|_{L_p(\Omega)} + \|g\|_{L_q(\Omega)} \}, \quad (1.113)$$

где $3/2 < q < \infty$, если $(k, s) = (1, 2)$, и $1 < q < \infty$, если $(k, s) \neq (1, 2)$; $1 < p < 3$, $1/p \leq 1/q + 1/2$.

Сравнивая оценки объемного потенциала с оценками (1.109), убеждаемся в том, что

$$\|(R_\varepsilon f)_k\|_{L_{q_k}(\Omega)} \leq c \varepsilon^{-2+2(1/p-1/q_k)} \|f\|_{L_p(\Omega)} \quad (1.114)$$

при $1 < p \leq q_k < \infty$, $1 - 1/p + 1/q_1 \in (0, 1/3)$, $1 - 1/p + 1/q_2 \in (0, 1/2)$, т.е. оценки разрешающего оператора полностью определяются оценками оператора объемного потенциала. Однако для производных этот факт не имеет места, и приходится отдельно использовать оценки для U_ε и для L_ε .

§ 2. Асимптотическое разложение

Рассмотрим задачу обтекания для системы Навье–Стокса

$$\begin{aligned} \Delta u - \nabla p &= 2\varepsilon(u, \nabla)u, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_S = b, \quad u|_\infty = e^1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

во внешней области D с границей S класса C^∞ .

Осуществляя в системе Навье–Стокса (0.1) замену $u = v + e^1$, для определения v получим систему

$$\begin{aligned} \Delta v - \nabla q - 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} v &= 2\varepsilon(v, \nabla)v, \\ \operatorname{div} v &= 0, \quad v|_S = b - e^1, \quad v|_\infty = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Будем искать решение системы (2.2) при малых ε в виде формального ряда¹

$$v = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (v_{0k} + v_{sk}). \quad (2.3)$$

Предполагая, что v_{0k} и v_{sk} при $k = 0, 1, 2, \dots$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta v_{0k} - \nabla q_{0k} - 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} v_{0k} &= 2\varepsilon \sum_{m+n=k} (v_{0m}, \nabla) v_{0n} + 2 \frac{\partial}{\partial x_1} v_{sk-1} \\ &+ 2 \sum_{m+n=k-1} \{ (v_{sm} + v_{0m}, \nabla) v_{sn} + (v_{sm}, \nabla) v_{0n} \}, \\ \operatorname{div} v_{0k} &= 0, \quad v_{0k}|_\infty = 0; \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\Delta v_{sk} - \nabla q_{sk} = 0, \quad \operatorname{div} v_{sk} = 0, \quad v_{sk}|_\infty = 0; \quad (2.5)$$

$$(v_{sk} + v_{0k})|_S = (b - e^1) \delta_{k0}, \quad (2.6)$$

получаем, что формально ряд (2.3) удовлетворяет задаче (2.2).

¹Поля v_{0k} и v_{sk} — решения соответственно системы Озеена (2.4) и системы Стокса (2.5), (2.6).

Отметим, что после подстановки

$$v^N = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k (v_{o\,k} + v_{s\,k}) \quad (2.7)$$

в систему (2.2) получаем соотношения

$$\begin{aligned} \Delta v^N - \nabla q^N - 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} v^N - 2\varepsilon (v^N, \nabla) v^N &= 2\varepsilon^{N+1} \sum_{m+n=N} (v_{o\,m}, \nabla) v_{o\,n} \\ &- 2\varepsilon^{N+1} \frac{\partial}{\partial x_1} v_{s\,N} - 2 \sum_{k=N}^{2N} \varepsilon^{k+1} \sum_{\substack{m+n=k \\ m, n \leq N}} \{(v_{s\,m} + v_{o\,m}, \nabla)(v_{s\,n} + v_{o\,n})\}, \quad (2.8) \\ \operatorname{div} v^N &= 0, \quad v^N|_S = b - e^1, \quad v^N|_\infty = 0. \end{aligned}$$

Наша дальнейшая цель – построить ряд (2.3), который является асимптотическим разложением решения задачи обтекания при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2.1. Построение нулевого приближения. Полагая в (2.4) $k = 0$, $y = \varepsilon x$, $v = v(y) = v_{o\,0}(y/\varepsilon)$, приходим к системе Озеена

$$\begin{aligned} \Delta v - \nabla q - 2 \frac{\partial}{\partial y_1} v &= 2(v, \nabla)v, \quad (2.9) \\ \operatorname{div} v &= 0, \quad v|_\infty = 0, \end{aligned}$$

которую будем рассматривать в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Обращая линейную часть, получим уравнение

$$v = v^1 + 2U[(v, \nabla)v], \quad (2.10)$$

где v^1 – решение однородной линейаризованной системы Озеена в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, U – оператор объемного потенциала при $\varepsilon = 1$. В качестве v^1 возьмем решение вида $v^1 = \delta_1 u^1 + \delta_2 u^2$, где u^k – фундаментальное решение при $\varepsilon = 1$, δ_j – произвольные постоянные.

Оператор $Av = U[(v, \nabla)v]$ в координатной форме имеет вид

$$(Av)_k = \partial_1 u_1^k * (v_1)^2 + (\partial_2 u_1^k + \partial_1 u_2^k) * (v_1 v_2) + \partial_2 u_2^k * (v_2)^2. \quad (2.11)$$

Заметим, что компоненты фундаментального решения различаются по поведению на бесконечности. Для учета этого факта при исследовании уравнения (2.10) введем пространство $L_{p_1 p_2}(\mathbb{R}^2)$ векторных полей $u = (u_1, u_2)$ с нормой $\|u\|_{p_1 p_2} = \|u_1\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^2)} + \|u_2\|_{L_{p_2}(\mathbb{R}^2)}$. В частности, $v^1 = \delta_1 u^1 + \delta_2 u^2 \in L_{p_1 p_2}(\mathbb{R}^2)$ при $3 < p_1 < \infty$, $2 < p_2 < \infty$.

Теперь из оценок свертки (1.14) легко проверяется, что оператор A непрерывен из $L_{p_1 p_2}(\mathbb{R}^2)$ в $L_{q_1 q_2}(\mathbb{R}^2)$ при выполнении условий

$$\begin{aligned} 1 &\leq p_1, p_2, q_1, q_2 \leq \infty, \quad m < 1/q_1 < m_1, \quad m < 1/q_2 < m_2, \\ m &= \max(2/p_1, 2/p_2, 1/p_1 + 1/p_2) - 1/2 < 1, \\ m_1 &= \min(2/p_1, 2/p_2, 1/p_1 + 1/p_2 - 1/3), \\ m_2 &= \min(2/p_1, 2/p_2, 1/p_1 + 1/p_2). \end{aligned} \quad (2.12)$$

В частности, если $p_2 < 3 < p_1$ и p_1, p_2 достаточно близки к трем, то можно положить $q_1 = p_1, q_2 = p_2$. Тогда, применяя теорему о неявных операторах (см., например, [9, с. 351]), получаем, что уравнение (2.10) имеет семейство решений $v = v(\delta, y)$, принадлежащих пространству $L_{p_1 p_2}(\mathbb{R}^2)$, аналитически зависящих от параметров $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ в некоторой области $|\delta| < \varrho$ и представимых в виде ряда:

$$v(\delta) = \delta_1 u^1 + \delta_2 u^2 + \sum_{|\alpha| \geq 2} \delta^\alpha v_\alpha \quad (2.13)$$

(здесь $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ является мультииндексом, $\delta^\alpha = \delta_1^{\alpha_1} \delta_2^{\alpha_2}$), причем v_α определяются рекуррентными формулами

$$v_\alpha = 2U \left[\sum_{\beta + \gamma = \alpha} (v_\beta, \nabla) v_\gamma \right], \quad (2.14)$$

где $v_{00} = 0, v_{10} = u^1, v_{01} = u^2$. Из неравенств (2.12) методом “шнуровки” устанавливаем, что $v \in L_{q_1 q_2}(\mathbb{R}^2)$ при $3 < q_1 < \infty, 2 < q_2 < \infty, \nabla v \in L_{q_1 q_2}(\mathbb{R}^2)$ при $2 < q_1 \leq \infty, 3/2 < q_2 \leq \infty$. Далее, используя оценку (1.14), получаем, что $\nabla \Delta v \in L_q(\mathbb{R}^2)$ при $3/2 < q < \infty$, поэтому $\nabla v \in L_q(\mathbb{R}^2)$ при $3/2 < q < 2$. Тогда $(v, \nabla)v \in L_q(\mathbb{R}^2)$ при $1 < q < 2$ и $\partial^2 \Delta v \in L_q(\mathbb{R}^2)$ при $1 < q < 2$.

Отметим также, что из результатов о внутренней регулярности системы Навье–Стокса вытекает, что полученное решение является бесконечно дифференцируемым в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Таким образом, установлена

ЛЕММА 2.1. Система Озеена (2.9) имеет семейство решений $v = v(\delta, y)$, бесконечно дифференцируемых в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, аналитически зависящих от δ при $|\delta| < \varrho$, причем выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} v &\in L_{q_1 q_2}(\mathbb{R}^2), \quad 3 < q_1 < \infty, \quad 2 < q_2 < \infty; \\ \nabla v &\in L_q(\mathbb{R}^2), \quad 3/2 < q < 2; \\ (v - \delta_1 u^1 - \delta_2 u^2) &\in L_{q_1 q_2}(\mathbb{R}^2) \cap C(\mathbb{R}^2), \quad 2 < q_1 \leq \infty, \quad 3/2 < q_2 \leq \infty; \\ \nabla(v - \delta_1 u^1 - \delta_2 u^2) &\in L_q(\mathbb{R}^2), \quad 3/2 < q \leq \infty; \\ \partial^2(v - \delta_1 u^1 - \delta_2 u^2) &\in L_q(\mathbb{R}^2), \quad 1 < q < 2; \\ \|v - \delta_1 u^1 - \delta_2 u^2\|_{C(\mathbb{R}^2)} &\leq c|\delta|^2. \end{aligned}$$

Перейдем к построению поля v_{s0} . В качестве решения уравнения (2.4) возьмем $v_{o0}(x) = v(\delta, \varepsilon x)$. Для определения v_{s0} имеем систему Стокса

$$\begin{aligned} \Delta v_{s0} - \nabla q_{s0} &= 0, \\ \operatorname{div} v_{s0} &= 0, \quad v_{s0}|_S = a = b - e^1 - v_{o0}|_S, \quad v_{sk}|_\infty = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Условия ее разрешимости

$$(a, \psi^j) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (2.16)$$

приводят к определению δ_1, δ_2 как функций от ε . Действительно, учитывая разложение фундаментального решения в ряд и аналитичность $v_{o0} = \delta_1 u_\varepsilon^1 + \delta_2 u_\varepsilon^2$ как элемента из $C(\mathbb{R}^2)$, приведем систему (2.16) к виду

$$\beta_j + \frac{1}{4\pi} \ln \frac{2}{\varepsilon} \delta_{ij} \delta_i + f_j(\delta, \varepsilon) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (2.17)$$

где $\beta_j = (b - e^1, \psi^j)$, $f_j(\delta, \varepsilon)$ аналитична по δ как элемент пространства $C[0, \varepsilon_0]$, причем $f_j(0, \varepsilon) = 0$. Применяя теорему о неявной функции или принцип Банаха, убеждаемся, что при достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$ существует единственное решение $\delta_j = \delta_j(\varepsilon)$ системы (2.17), непрерывное по ε на $[0, \varepsilon_0]$ и удовлетворяющее условиям

$$\delta_j = -4\pi\beta_j \left(\ln \frac{2}{\varepsilon} \right)^{-1} + O \left(\left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-2} \right). \quad (2.18)$$

В частности, при $b = 0$

$$\delta_1 = 4\pi \left(\ln \frac{2}{\varepsilon} \right)^{-1} + O \left(\left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-2} \right), \quad \delta_2 = O \left(\left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-2} \right). \quad (2.19)$$

При таком выборе δ_j выполнено условие разрешимости системы Стокса, гладкость граничных значений определяется гладкостью b и при $b \in C^\infty(S)$ решение v_{s0} бесконечно дифференцируемо вплоть до границы и удовлетворяет следующим оценкам на бесконечности:

$$|\partial^\alpha v_{s0}(x)| \leq c|x|^{-|\alpha|-1}. \quad (2.20)$$

Таким образом, установлен следующий результат.

ЛЕММА 2.2. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ определено нулевое приближение $v^0(\varepsilon, x) = v_{o0}(\varepsilon, x) + v_{s0}(\varepsilon, x)$ ($v_{o0}(\varepsilon, x) = v(\delta(\varepsilon), \varepsilon x)$, где $v = v(\delta, x)$ определено в лемме 2.1), непрерывное по ε , бесконечно дифференцируемое вплоть до границы и удовлетворяющее следующим оценкам:*

– для $\tilde{v}_{o0}(\varepsilon, x) = v_{o0}(\varepsilon, \varepsilon^{-1}x)$

$$\|\tilde{v}_{o0}\|_{L_{q_1 q_2}(\mathbb{R}^2)} \leq c \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1}, \quad 3 < q_1 < \infty, \quad 2 < q_2 < \infty; \quad (2.21)$$

$$\|\nabla \tilde{v}_{o0}\|_{L_q(\mathbb{R}^2)} \leq c \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1}, \quad \frac{3}{2} < q < 2; \quad (2.22)$$

$$\|\tilde{v}_{o0} - \delta_1(\varepsilon)u^1 - \delta_2(\varepsilon)u^2\|_{L_{q_1 q_2}(\mathbb{R}^2) \cap C(\mathbb{R}^2)} \leq c \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-2}, \quad (2.23)$$

$$2 < q_1 \leq \infty, \quad \frac{3}{2} < q_2 \leq \infty;$$

$$\|\nabla(\tilde{v}_{o0} - \delta_1(\varepsilon)u^1 - \delta_2(\varepsilon)u^2)\|_{L_q(\mathbb{R}^2)} \leq c \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-2}, \quad \frac{3}{2} < q \leq \infty; \quad (2.24)$$

$$\|\partial^2(\tilde{v}_{o0} - \delta_1(\varepsilon)u^1 - \delta_2(\varepsilon)u^2)\|_{L_q(\mathbb{R}^2)} \leq c \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-2}, \quad 1 < q \leq 2; \quad (2.25)$$

– для v_{s0}

$$|\partial^\alpha v_{s0}(x)| \leq c(1 + |x|)^{-|\alpha|-1}. \quad (2.26)$$

2.2. Высшие приближения. Основным построениям предположим ряд лемм.

ЛЕММА 2.3. *Оператор $A: L_{p_1 p_2}(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_{q_1 q_2}(\mathbb{R}^2)$, определяемый формулой*

$$Av = U[(\nabla, \tilde{v}_{o0})v + (\nabla, v)\tilde{v}_{o0}], \quad (2.27)$$

ограничен при выполнении условий

$$\begin{aligned} \max(1/p_1, 1/p_2) - 1/2 < 1/q_1 < \min(2/3, 1/p_2, 1/p_1 + 1/6), \\ \max(1/p_1, 1/p_2) - 1/2 < 1/q_2 < \min(1, 1/p_1 + 1/3, 1/p_2 + 1/3). \end{aligned} \quad (2.28)$$

При этом

$$\|A\|_{L_{p_1 p_2} \rightarrow L_{q_1 q_2}} \leq c \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1}, \quad (2.29)$$

где c зависит только от p_1, p_2, q_1, q_2 .

В частности, оператор A ограничен, если только

$$1/p_2 - 1/2 < 1/p_1 < 1/p_2 < 1/p_1 + 1/3 < 1. \quad (2.30)$$

Доказательство легко следует из оценок сверток (1.14) и неравенства (2.21).

ЛЕММА 2.4. Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ возмущенная система Озеена

$$\begin{aligned} \Delta v - \nabla p - 2 \frac{\partial}{\partial y_1} v - 2[(\nabla, \tilde{v}_{00})v + (\nabla, v)\tilde{v}_{00}] &= f, \\ \operatorname{div} v &= 0, \end{aligned} \quad (2.31)$$

рассматриваемая в $\mathbb{R}^2$ при $f \in L_p(\mathbb{R}^2)$ для всех $p \in (1, 2)$, имеет решение, удовлетворяющее следующим условиям:

$$v \in L_{q_1 q_2}(\mathbb{R}^2) \quad \forall q_1 \in (3, \infty), \quad \forall q_2 \in (2, \infty); \quad (2.32)$$

$$\nabla v \in L_q(\mathbb{R}^2) \quad \forall q \in (3/2, \infty); \quad (2.33)$$

$$\partial^2 v \in L_q(\mathbb{R}^2) \quad \forall q \in (1, 2); \quad (2.34)$$

причем

$$\|v\|_{q_1 q_2} \leq c \|f\|_r \quad (2.35)$$

для любого $r \in (1, 2)$, удовлетворяющего условию

$$\max(1/q_1 + 2/3, 1/q_2 + 1/2, 5/6) < 1/r < 1; \quad (2.36)$$

$$\|\nabla v\|_q \leq c(\|f\|_r + \|f\|_s) \quad (2.37)$$

для любых $s, r \in (1, 2)$, удовлетворяющих условиям

$$1/3 + 1/q < 1/s < 1/2 + 1/q, \quad (2.38)$$

$$\max(1/q - 1/\varrho + 2/3, 5/6) < 1/r < 1, \quad (2.39)$$

где ϱ можно выбрать любым из интервала $(\max(3, q), \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обращая линеаризованный оператор Озеена, приходим к уравнению

$$v - Av = Uf, \quad (2.40)$$

где A – оператор (2.27).

Из оценок объемного потенциала (1.14) следует, что Uf удовлетворяет условиям (2.32)–(2.34), причем выполняются соотношения (2.35)–(2.39), в которых v следует заменить на Uf .

Возьмем $p_1 = 6$, $p_2 = 3$. Из леммы 2.3 вытекает, что оператор A ограничен в $L_{6,3}(\mathbb{R}^2)$ и имеет малую норму при достаточно малом ε : $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Поэтому уравнение (2.40) имеет единственное решение в этом пространстве, причем

$$\|v\|_{6,3} \leq c\|Uf\|_{6,3} \leq c\|f\|_r \quad (2.41)$$

при любом $r \in (1, 6/5)$.

Анализируя условия (2.28), получим

$$\|Av\|_{q_1 q_2} \leq c\|v\|_{6,3} \quad \forall q_1 \in (3, \infty), \quad \forall q_2 \in (2, \infty).$$

Из неравенств (2.35), (2.36), где v заменено на Uf , и (2.41) вытекает справедливость оценок (2.32), (2.35), (2.36), так как из уравнения (2.40) следует, что

$$\|v\|_{q_1 q_2} \leq \|Av\|_{q_1 q_2} + \|Uf\|_{q_1 q_2}.$$

Далее, $\|\nabla Av\|_q \leq c\|\tilde{v}_{00}\|_\varrho\|v\|_m$ при $1/q = 1/\varrho + 1/m$, $\varrho, m \in (3, \infty)$. Но из (2.35), (2.36) при $q_1 = q_2 = m$ следует, что $\|v\|_m \leq c\|f\|_r$ при любом r , удовлетворяющем условию (2.39). Остается заметить, что

$$\|\nabla v\|_q \leq c(\|\nabla Uf\|_q + \|v\|_m) \leq c(\|f\|_s + \|f\|_r),$$

где s удовлетворяет условию (2.38).

Наконец,

$$\|(\tilde{v}_{00}, \nabla)v + (v, \nabla)\tilde{v}_{00}\|_q \leq c(\|\tilde{v}_{00}\|_\varrho\|\nabla v\|_l + \|v\|_\varrho\|\nabla\tilde{v}_{00}\|_l),$$

где $1/q = 1/\varrho + 1/l$, $\varrho \in (3, \infty)$, $l \in (3/2, \infty)$, что и влечет (2.34) ввиду ограниченности оператора $\partial^2 U$ в любом пространстве $L_q(\mathbb{R}^2)$ при $q \in (1, \infty)$.

ЛЕММА 2.5. *Существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ однородная возмущенная система Озеена*

$$\begin{aligned} \Delta v - \nabla p - 2\frac{\partial}{\partial y_1}v - 2[(\nabla, \tilde{v}_{00})v + (\nabla, v)\tilde{v}_{00}] &= 0, \\ \operatorname{div} v &= 0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

рассматриваемая в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, имеет решение вида

$$v = \delta_1(u^1 + w^1) + \delta_2(u^2 + w^2), \quad (2.43)$$

где δ_j – произвольные постоянные, u^j – фундаментальное решение при $\varepsilon = 1$, w^j – поля, удовлетворяющие условиям:

$$\|w^j\|_{p_1 p_2} \leq c\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \quad \forall p_1 \in (3, \infty), \quad \forall p_2 \in (2, \infty); \quad (2.44)$$

$$\|\nabla w^j\|_p \leq c\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \quad \forall p \in \left(\frac{3}{2}, \infty\right); \quad (2.45)$$

$$\|w^j\|_{C(\mathbb{R}^2)} \leq c\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}; \quad (2.46)$$

$$\|\partial^2 w^j\|_p \leq c\left(\ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} \quad \forall p \in (1, 2). \quad (2.47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $v = u^j + w^j$, для определения w^j имеем систему из леммы 2.4, в которой $f = 2[(\nabla, \tilde{v}_{00})u^j + (\nabla, u^j)\tilde{v}_{00}]$. Учитывая, что

$$\|f\|_p \leq c(\|\tilde{v}_{00}\|_r \|\nabla u^j\|_s + \|u^j\|_r \|\nabla \tilde{v}_{00}\|_s)$$

при $1/p = 1/r + 1/s$, $r \in (3, \infty)$, $s \in (3/2, \infty)$, $\|\tilde{v}_{00}\|_r \leq c(\ln 1/\varepsilon)^{-1}$, $\|\nabla \tilde{v}_{00}\|_s \leq c(\ln 1/\varepsilon)^{-1}$, получаем, что $f \in L_p(\mathbb{R}^2) \quad \forall p \in (1, 2)$ и $\|f\|_p \leq c(\ln 1/\varepsilon)^{-1}$.

Поэтому оценки для w^j вытекают из леммы 2.4, а непрерывность – из теоремы вложения Соболева.

ТЕОРЕМА 2.1. *Существует такое ε_N , что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_N$ определено асимптотическое разложение v^N вида (2.7), удовлетворяющее следующим условиям:*

1) для любого сколь угодно малого $\eta > 0$ справедливы оценки:

$$\|v_{sk}\|_{L_q(D)} \leq c_\eta \varepsilon^{-\eta} \quad \forall q \in (2, \infty], \quad (2.48)$$

$$\|\nabla v_{sk}\|_{L_q(D)} \leq c_\eta \varepsilon^{-\eta} \quad \forall q \in (1, \infty] \quad (2.49)$$

для полей $v_{sk}(\varepsilon, x)$;

$$\|(\tilde{v}_{0k})_j\|_{L_{q_j}(\mathbb{R}^2)} \leq c_\eta \varepsilon^{-\eta} \quad \forall q_1 \in (3, \infty), \quad \forall q_2 \in (2, \infty), \quad (2.50)$$

$$\|\partial_j \tilde{v}_{0k}\|_{L_{q_j}(\mathbb{R}^2)} \leq c_\eta \varepsilon^{-\eta} \quad \forall q_1 \in (1, 2), \quad \forall q_2 \in \left(\frac{3}{2}, 2\right) \quad (2.51)$$

для полей $\tilde{v}_{0k}(\varepsilon, y) = v_{0k}(\varepsilon, y/\varepsilon)$;

2) существуют функции $\delta_{jk} = \delta_{jk}(\varepsilon)$ такие, что

$$\left\| \nabla \left(\tilde{v}_{0k} - \sum_{j=1}^2 \delta_{jk}(\varepsilon) u^j \right) \right\|_q \leq c_\eta \varepsilon^{-\eta} \quad \forall q \in (2, \infty) \quad (2.52)$$

(функции $\delta_{jk}(\varepsilon)$ определяются в процессе доказательства).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что поля v_{sk} , v_{0k} , $k = 1, 2, \dots, N-1$, обладающие нужными свойствами, уже построены. Для определения v_{0N} имеем систему

$$\begin{aligned} \Delta v_{0N} - \nabla q_{0N} - 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} v_{0N} - 2\varepsilon [(\nabla, v_{00})v_{0N} + (\nabla, v_{0N})v_{00}] &= F, \\ \operatorname{div} v_{0N} &= 0, \\ F &= 2\varepsilon \sum_{m+n=N; m, n \neq 0, N} (v_{0m}, \nabla) v_{0n} + 2 \frac{\partial}{\partial x_1} v_{s, N-1} \\ &\quad + 2 \sum_{m+n=N-1} \{(v_{sm} + v_{0m}, \nabla) v_{sn} + (v_{sm}, \nabla) v_{0n}\}. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Осуществляя замену переменных $y = \varepsilon x$ и используя для произвольной функции g обозначение $\tilde{g}(y) = g(y/\varepsilon)$, для $\tilde{v}_{0N}$ получаем систему

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{v}_{0N} - \varepsilon^{-1} \nabla \tilde{q}_{0N} - 2 \frac{\partial}{\partial y_1} \tilde{v}_{0N} - 2 [(\nabla, \tilde{v}_{00})\tilde{v}_{0N} + (\nabla, \tilde{v}_{0N})\tilde{v}_{00}] &= \varepsilon^{-2} \tilde{F}, \\ \operatorname{div} v_{0N} &= 0, \end{aligned} \quad (2.54)$$

Продолжив $\tilde{v}_{sk}$, $\frac{\partial}{\partial y_1} \tilde{v}_{sk}$ нулем на $\mathbb{R}^2 \setminus \{\varepsilon D\}$, будем рассматривать эту систему на $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Для $\varepsilon^{-2} \tilde{F}$ имеем оценку

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^{-2} \tilde{F}\|_p &= \varepsilon^{2/p-2} \|F\|_{L_p(D)} \leq \varepsilon^{2/p-2} \left\{ 2 \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} v_{s,N-1} \right\|_p \right. \\ &\quad + 2 \sum_{m+n=N-1} \left\{ \|v_{sn}\|_{p_1} \|\nabla v_{sm}\|_{p_2} + \varepsilon^{-2/s_1} \|\tilde{v}_{on}\|_{s_1} \|\nabla v_{sm}\|_{s_2} \right. \\ &\quad + \varepsilon^{1-2/r_2} \|v_{sn}\|_{r_1} \|\nabla \tilde{v}_{om}\|_{r_2} \left. \right\} \\ &\quad \left. + 2\varepsilon^{2-2/q_1-2/q_2} \sum_{m+n=N; n, m \neq 0, N} \|\tilde{v}_{oN}\|_{q_1} \|\nabla \tilde{v}_{om}\|_{q_2} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} 1/p &= 1/p_1 + 1/p_2 = 1/s_1 + 1/s_2 = 1/r_1 + 1/r_2 = 1/q_1 + 1/q_2, \\ p_1, r_1 &\in (2, \infty), \quad p_2, s_2 \in (1, \infty), \quad s_1, q_1 \in (3, \infty), \quad r_2, q_2 \in (3/2, 2). \end{aligned}$$

Нас интересует случай $p \in (1, 2)$. Но тогда s_1 и r_2 можно выбрать сколь угодно близкими к ∞ и 2, так что можно считать, что $2/s_1 < \eta$ и $2/r_2 - 1 < \eta$. Поэтому верно неравенство

$$\|\varepsilon^{-2} \tilde{F}\|_p \leq c_\eta \varepsilon^{2/p-2-2\eta}. \quad (2.55)$$

Применив теперь к системе (2.54) леммы 2.4, 2.5, установим, что существует решение $\tilde{v}_{oN}$, имеющее вид

$$\tilde{v}_{oN} = \delta_1(u^1 + \tilde{w}^1) + \delta_2(u^2 + \tilde{w}^2) + \tilde{v},$$

где $\tilde{w}^j$ удовлетворяют оценкам (2.44)–(2.47), $\tilde{v}$ удовлетворяет включениям (2.32)–(2.34), а из оценок (2.35), (2.37) с учетом (2.55) вытекает, что

$$\|\tilde{v}\|_{q_1 q_2} \leq c \varepsilon^{2/r-2-3\eta},$$

где q_1, q_2, r связаны соотношениями (2.36),

$$\|\nabla \tilde{v}\|_q \leq c(\varepsilon^{2/r-2-3\eta} + \varepsilon^{2/s-2-3\eta}),$$

где s, r, q связаны соотношениями (2.38), (2.39).

Для оценки $\|\tilde{v}\|_{q_1 q_2}$ можно выбрать r сколь угодно близким к 1, следовательно,

$$\|\tilde{v}\|_{q_1 q_2} \leq c \varepsilon^{-4\eta}.$$

Для оценки $\|\nabla \tilde{v}\|_q$ также можно полагать, что $2 - 2/r < \eta$, а $2 - 2/s < \eta$ при $q \in (3/2, 2]$ и $2/s - 2 > 2/q - 1 - \eta$ при $q \in (2, \infty)$. Таким образом, приходим к оценке

$$\|\nabla \tilde{v}\|_q \leq \begin{cases} \varepsilon^{-4\eta}, & q \in (3/2, 2], \\ \varepsilon^{2/q-1-4\eta}, & q \in (2, \infty). \end{cases} \quad (2.56)$$

В частности, по вложениям Соболева пространство $W_q^1(\mathbb{R}^2)$ при $q > 2$ непрерывно вложено в пространство $C(\mathbb{R}^2)$, следовательно,

$$\|\tilde{v}\|_{C(\mathbb{R}^2)} \leq c \varepsilon^{-5\eta}.$$

Таким образом, v_{oN} обладает нужными свойствами.

Для определения v_{sN} имеем систему Стокса (2.5) с граничным условием (2.6). Ее условия разрешимости

$$(\delta_1(u_\varepsilon^1 + w_1) + \delta_2(u_\varepsilon^2 + w_2), \psi^j) + (v, \psi^j) = 0, \quad j = 1, 2,$$

служат для определения функций $\delta_{jN}(\varepsilon)$. Ввиду соотношений

$$(u_\varepsilon^k + w^k, \psi^j) = \delta_{kj} 4\pi \ln \frac{2}{\varepsilon} + O(1)$$

при достаточно малом ε функции $\delta_{jN} = \delta_{jN}(\varepsilon)$ определяются однозначно и

$$|\delta_{jN}(\varepsilon)| \leq c_\eta \varepsilon^{-4\eta}.$$

Этим завершается доказательство теоремы.

2.3. Обоснование асимптотики. Ищем решение задачи обтекания в виде

$$v = v^N + \varepsilon^{N+1}w. \quad (2.57)$$

Тогда для определения w получаем систему

$$\begin{aligned} \Delta w - \nabla q - 2\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1} w - 2\varepsilon[(\nabla, v^N)w + (\nabla, w)v^N] - 2\varepsilon^{N+2}(w, \nabla)w &= F, \\ \operatorname{div} w &= 0, \quad w|_{\partial D} = 0, \quad w|_\infty = 0, \\ F &= 2 \sum_{k=N+1}^{2N} \varepsilon^{k-N} \sum_{m+n=k} (v_{sm} + v_{om}, \nabla)(v_{sn} + v_{on}) \\ &\quad + 2 \frac{\partial}{\partial x_1} v_{sN} + 2 \sum_{m+n=N} \{(v_{sm} + v_{om}, \nabla)v_{sn} + (v_{sm}, \nabla)v_{on}\}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Применяя разрешающий оператор для системы Озеена, приходим к следующему уравнению:

$$w = R_\varepsilon \{2\varepsilon[(v^N, \nabla)w + (w, \nabla)v^N] + 2\varepsilon^{N+2}(w, \nabla)w + F\}. \quad (2.59)$$

ЛЕММА 2.6. *Для любой точки области*

$$Q = \{(q_1, q_2); 1/6 < 1/q_1 < 1/q_2 < 1/2\}$$

существует $\varepsilon_0(q_1, q_2) > 0$ такое, что оператор $I - \mathcal{A}_\varepsilon$,

$$\mathcal{A}_\varepsilon w = 2\varepsilon R_\varepsilon[(v^N, \nabla)w + (w, \nabla)v^N], \quad (2.60)$$

обратим при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0(q_1, q_2)$ в пространстве $L_{q_1 q_2}(D)$, причем

$$\|(I - \mathcal{A}_\varepsilon)^{-1}\|_{L_{q_1 q_2} \rightarrow L_{q_1 q_2}} \leq 2\varepsilon^{-2(1/q_2 - 1/q_1)}. \quad (2.61)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уравнение

$$(I - \mathcal{A}_\varepsilon)w = f. \quad (2.62)$$

Применяя оператор растяжения $(T_\varepsilon u)(x) = u(\varepsilon x)$ и обозначая $\tilde{u} = T_\varepsilon^{-1}u$, приведем уравнение (2.62) к виду

$$\tilde{w} - T_\varepsilon^{-1}\mathcal{A}_\varepsilon T_\varepsilon \tilde{w} = \tilde{f}. \quad (2.63)$$

Положим

$$T_\varepsilon^{-1}\mathcal{A}_\varepsilon T_\varepsilon \tilde{w} = \tilde{w}^1 + \tilde{w}^2,$$

где

$$\tilde{w}^1 = 2U[(\tilde{v}^N, \nabla)\tilde{w} + (\tilde{w}, \nabla)\tilde{v}^N], \quad (2.64)$$

$$\tilde{w}^2 = 2\varepsilon T_\varepsilon^{-1}L_\varepsilon[(v^n, \nabla)w + (w, \nabla)v^N]. \quad (2.65)$$

Получим несколько более общие оценки, чем это требуется для доказательства. Они будут использованы в дальнейшем. Заметим, что при рассмотрении $\tilde{w}^1$ можно воспользоваться неравенством (2.29), так как для $\tilde{v}^N$ справедливы те же оценки, что и для $\tilde{v}_0$. Поэтому

$$\|\tilde{w}^1\|_{L_{q_1 q_2}(\varepsilon D)} \leq c(\ln \varepsilon^{-1})^{-1} \|\tilde{w}\|_{L_{p_1 p_2}(\varepsilon D)}, \quad (2.66)$$

где (q_1, q_2) и (p_1, p_2) связаны соотношениями (2.28). В частности, можно положить $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$, если только выполнены неравенства

$$1/q_2 - 1/2 < 1/q_1 < 1/q_2 < 1/q_1 + 1/3 < 1. \quad (2.67)$$

Далее, применяя оценки (1.112) для оператора $L_\varepsilon \nabla$, имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}^2\|_{L_{q_1 q_2}(\varepsilon D)} &\leq c\varepsilon(\ln \varepsilon^{-1})^{1/2}(\|w_1 v^N\|_{L_2(D)} + \|w_2 v^N\|_{L_2(D)}) \\ &\leq c(\ln \varepsilon^{-1})^{1/2}(\|\tilde{w}_1 \tilde{v}^N\|_{L_2(\varepsilon D)} + \|\tilde{w}_2 \tilde{v}^N\|_{L_2(\varepsilon D)}) \\ &\leq c(\ln \varepsilon^{-1})^{1/2}(\|\tilde{w}_1\|_{L_{p_1}(\varepsilon D)} \|\tilde{v}^N\|_{L_{s_1}(\varepsilon D)} \\ &\quad + \|\tilde{w}_2\|_{L_{p_2}(\varepsilon D)} \|\tilde{v}^N\|_{L_{s_2}(\varepsilon D)}), \end{aligned} \quad (2.68)$$

где

$$\begin{aligned} 3 &< q_1, p_1, s_1, s_2 < \infty, \quad 2 < q_2, p_2 < \infty, \\ 1/p_1 + 1/s_1 &= 1/p_2 + 1/s_2 = 1/2. \end{aligned} \quad (2.69)$$

С учетом того, что $\|\tilde{v}^N\|_{L_s(\mathbb{R}^2)} \leq (\ln \varepsilon^{-1})^{-1}$ при $s > 3$, получаем

$$\|\tilde{w}^2\|_{L_{q_1 q_2}(\varepsilon D)} \leq c(\ln \varepsilon^{-1})^{-1/2} \|\tilde{w}\|_{L_{p_1 p_2}(\varepsilon D)}, \quad (2.70)$$

где q_1, q_2, p_1, p_2 — любые числа, для которых выполняются условия (2.69). В частности, можно положить $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$, если только $q_1 \in (3, 6)$, $q_2 \in (2, 6)$. Сравнивая оценки для $\tilde{w}^1$ и $\tilde{w}^2$, имеем

$$\|T_\varepsilon^{-1}\mathcal{A}_\varepsilon T_\varepsilon \tilde{w}\|_{L_{q_1 q_2}(\varepsilon D)} \leq c(\ln \varepsilon^{-1})^{-1/2} \|\tilde{w}\|_{L_{q_1 q_2}(\varepsilon D)} \quad (2.71)$$

при $(q_1, q_2) \in Q$.

Поскольку постоянная c в оценке (2.71) зависит только от (q_1, q_2) , то существует такое $\varepsilon_0(q_1, q_2) > 0$, что оператор $I - T_\varepsilon^{-1} \mathcal{A}_\varepsilon T_\varepsilon$ обратим в $L_{q_1 q_2}(\varepsilon D)$ и

$$\|(I - T_\varepsilon^{-1} \mathcal{A}_\varepsilon T_\varepsilon)^{-1}\| < 2. \quad (2.72)$$

Но тогда оператор $I - \mathcal{A}_\varepsilon$ обратим в пространстве $L_{q_1 q_2}(D)$ и справедлива оценка (2.61).

Обращая оператор $I - \mathcal{A}_\varepsilon$, сведем уравнение (2.62) к виду

$$w = \mathcal{B}_\varepsilon w + g, \quad (2.73)$$

где

$$\mathcal{B}_\varepsilon w = 2(I - \mathcal{A}_\varepsilon)^{-1} R_\varepsilon \varepsilon^{N+2} (w, \nabla) w, \quad (2.74)$$

$$g = (I - \mathcal{A}_\varepsilon)^{-1} R_\varepsilon F. \quad (2.75)$$

Из оценок (1.114) оператора R_ε имеем

$$\|(R_\varepsilon F)_k\|_{L_{q_k}(D)} \leq \varepsilon^{-2+2(1/p-1/q_k)} \|F\|_{L_p(D)}, \quad (2.76)$$

что с учетом неравенства (см. (2.55))

$$\|F\|_{L_p(D)} \leq c_\eta \varepsilon^{-\eta}, \quad p \in (1, 2),$$

и того, что p можно взять сколь угодно близким к 1, приводит к оценке

$$\|(R_\varepsilon F)_k\|_{L_{q_k}(D)} \leq c \varepsilon^{-2/q_k - \eta}, \quad 3 < q_1 < \infty, \quad 2 < q_2 < \infty. \quad (2.77)$$

Но тогда из (2.61) вытекает неравенство

$$\|g_k\|_{L_{q_k}(D)} \leq c_\eta \varepsilon^{-2/q_k - 2(1/q_2 - 1/q_1) - 2\eta}, \quad (2.78)$$

если $1/6 < 1/q_1 < 1/q_2 < 1/2 - \eta$, $1/q_1 \leq 1/3 - \eta$.

Теперь рассмотрим поле $R_\varepsilon[(\nabla, w)w]$ и представим его в виде суммы $\zeta^1 + \zeta^2$, причем

$$\zeta^1 = 2U_\varepsilon[(\nabla, w)w], \quad (2.79)$$

$$\zeta^2 = 2L_\varepsilon[(\nabla, w)w]. \quad (2.80)$$

Из условий непрерывности оператора $v \rightarrow U(\nabla, v)v$ (см. (2.12)) и оценок (1.14), (1.112) вытекает, что

$$\|\zeta^j\|_{L_{q_1 q_2}(D)} \leq c(\varepsilon) \|w\|_{L_{p_1 p_2}(D)}^2, \quad (2.81)$$

где рост $c(\varepsilon)$ не превосходит ε^{-2} , а p_1, p_2, q_1, q_2 связаны соотношениями (2.12) и соотношениями $2 < p_1, p_2 < 6$, $3 < q_1 < \infty$, $2 < q_2 < \infty$.

Теперь заметим, что оценки (2.61), (2.78), (2.81) заведомо справедливы, если положить $1/q_1 = 1/p_1 = 1/3 - \eta$, $1/q_2 = 1/p_2 = 1/3 + \eta$.

В результате получаем

$$\|\mathcal{B}_\varepsilon w\|_{L_{q_1 q_2}(D)} \leq c\varepsilon^N \|w\|_{L_{q_1 q_2}(D)}, \quad (2.82)$$

$$\|\mathcal{B}_\varepsilon w^1 - \mathcal{B}_\varepsilon w^2\|_{L_{q_1 q_2}(D)} \leq c\varepsilon^N \max_j \|w^j\|_{L_{q_1 q_2}(D)} \|w^1 - w^2\|_{L_{q_1 q_2}(D)}, \quad (2.83)$$

$$\|g_k\|_{L_{q_k}(D)} \leq c_\eta \varepsilon^{-2/3-8\eta}. \quad (2.84)$$

Применяя принцип Банаха, устанавливаем, что уравнение (2.73) при достаточно малом ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, имеет в некотором шаре пространства $L_{q_1 q_2}(D)$ единственное решение w , для которого вследствие (2.84) справедливо неравенство

$$\|w\|_{L_{q_1 q_2}(D)} \leq c_\eta \varepsilon^{-2/3-8\eta}. \quad (2.85)$$

Возвращаясь к уравнению (2.59) и используя оценки разрешающего оператора R_ε , аналогично можно получить оценки $\partial^\alpha w$, $|\alpha| = 0, 1, 2$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть D – внешняя область с гладкой границей класса C^∞ . Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ существует решение и задачи обтекания (0.1), бесконечно дифференцируемое в области D вплоть до границы, причем для разности $u^N = u - \varepsilon^1 - v^N$ справедливы оценки

$$\|u_k^N\|_{L_{q_k}(D)} \leq c_\eta \varepsilon^{N+1-2/q_k-\eta}$$

при $3 < q_1 < \infty$, $2 < q_2 < \infty$,

$$\|\partial^\alpha u^N\|_{L_q(D)} \leq c_\eta \varepsilon^{N+1-\eta},$$

где $3/2 < q < \infty$ при $|\alpha| = 1$ и $1 < q < \infty$ при $|\alpha| = 2$.

Список литературы

1. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
2. Finn R., Smith D. R. On the stationary solutions of the Navier–Stokes equations in two dimensions // Arch. Rational Mech. Annal. 1967. V. 25. P. 26–39.
3. Срубщик Л. С., Юдович В. И. О применении метода Ньютона в задачах асимптотического интегрирования нелинейных уравнений // Тезисы Всесоюзной конференции по применению методов функционального анализа к решению нелинейных задач. Баку: Изд-во АН АзССР, 1965.
4. Белоносов С. М., Черноус К. А. Краевые задачи для уравнений Навье–Стокса. М.: Наука, 1985.
5. Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
6. Михлин С. Г. О мультипликаторах интегралов Фурье // ДАН СССР. 1956. Т. 109. С. 701–703.
7. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
8. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: ГИФМЛ, 1961.
9. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.