Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Г. Танкеев, О группе Брауэра арифметической схемы. II, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 5, 155–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/im455>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:18:25

УДК 512.6

С. Г. Танкеев

О группе Брауэра арифметической схемы. II

Для арифметической модели $\pi: X \rightarrow \operatorname{Spec} A$ регулярного гладкого проективного многообразия V над числовым полем k доказана конечность группы $H^1(\operatorname{Spec} A, R^1\pi_*G_m)$ при условии, что $\pi_*G_m = G_m$ для этальной топологии (если все геометрические слои π приведены и связны, то это условие автоматически выполнено). Если простое число l не делит $\operatorname{Card}([\operatorname{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\operatorname{tors}})$, $V(k) \neq \emptyset$ и гипотеза Тэйта верна для дивизоров на V , то l -примарная компонента $\operatorname{Br}'(X)(l)$ конечна. Изучены свойства конечности группы Брауэра многообразия Калаби–Яо V размерности не меньше 2 над числовым полем.

Библиография: 21 наименование.

Введение

Пусть V – гладкое проективное многообразие над числовым полем k , $[k: \mathbb{Q}] < \infty$, и пусть A – кольцо целых в k . Предположим, что существует собственный плоский морфизм конечного типа $\pi: X \rightarrow \operatorname{Spec} A$, где X – регулярная схема, общий слой π изоморфен V , все схемные слои π приведены (мы называем $\pi: X \rightarrow \operatorname{Spec} A$ *арифметической моделью* V).

М. Артин высказал гипотезу о конечности группы Брауэра $\operatorname{Br}(X)$ [11, гл. IV, § 2, вопрос 2.19]. Напомним, что $\operatorname{Br}(X) \hookrightarrow \operatorname{Br}'(X) = H_{\text{et}}^2(X, G_m)$.

Предположим, что $V(k) \neq \emptyset$, $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ и

$$\operatorname{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)}$$

для простого числа l (другими словами, гипотеза Тэйта [19] верна для дивизоров на V). При выполнении этих условий докажем следующий вариант гипотезы М. Артина: *если l не делит $\operatorname{Card}([\operatorname{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\operatorname{tors}})$, то l -примарная компонента группы $\operatorname{Br}'(X)$ конечна* (теорема 2.4).

Этот результат был доказан в [18, теорема 2.2] при дополнительном предположении о существовании такого сечения $\theta: \operatorname{Spec} A \rightarrow X$ морфизма π , что $\theta(\operatorname{Spec} A)$ пересекается с одной неприводимой компонентой любого схемного слоя $\pi^{-1}(v)$, $v \in \operatorname{Spec} A$. Автор благодарит М. Хохстера, любезно сообщившего доказательство того факта, что это условие автоматически выполнено (следствие 2.2).

В частности, если V – односвязное многообразие Калаби–Яо размерности $d \geq 2$ над числовым полем k , $V(k) \neq \emptyset$ и $\operatorname{NS}(V) = \operatorname{NS}(V \otimes \bar{k})$, то $[\operatorname{Br}'(V)/\operatorname{Br}(k)](l)$ и $\operatorname{Br}'(X)(l)$ конечны для всех простых l (следствие 3.3).

Пусть V – гладкое проективное многообразие над числовым полем k , $[k: \mathbb{Q}] < \infty$, $V(k) \neq \emptyset$, $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$, $\operatorname{NS}(V \otimes \bar{k}) = \operatorname{NS}(V)$. Предположим, что имеется

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-01-00058).

собственный плоский морфизм конечного типа $\pi: X \rightarrow \operatorname{Spec} A$, где A – кольцо целых в k , X – регулярная схема, общий слой π изоморфен V . Докажем, что если $\pi_* G_m = G_m$ для этальной топологии, то $H^1(\operatorname{Spec} A, R^1 \pi_* G_m)$ – конечная группа (см. теорему 4.3).

Этот результат частично подтверждает гипотезу М. Артина, потому что имеется каноническая точная последовательность

$$0 \rightarrow H^1(\operatorname{Spec} A, R^1 \pi_* G_m) \rightarrow \operatorname{Br}'(X)/\operatorname{Br}(A) \rightarrow H^0(\operatorname{Spec} A, R^2 \pi_* G_m).$$

В рассматриваемой ситуации конечность группы $H^1(\operatorname{Spec} A, R^1 \pi_* G_m)$ не зависит от гипотезы Тэйта для дивизоров на V . Более того, для любой замкнутой точки $v \in \operatorname{Spec} A$ пусть $\mathcal{O}_{\bar{v}}$ – строгая гензелизация локального кольца $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, v}$. Тогда группа

$$\operatorname{Ker} \left[\operatorname{Br}'(X) \rightarrow \prod_{v \text{ неархимедова}} \operatorname{Br}'(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) \right]$$

конечна (см. теорему 4.4).

Если все геометрические слои арифметической схемы $\pi: X \rightarrow \operatorname{Spec} A$ приведены и связны, то автоматически $\pi_* G_m = G_m$ для этальной топологии (см. лемму 4.7).

§ 1. Некоторые замечания о группе Брауэра

1.1. ТЕОРЕМА. Пусть V – гладкое проективное многообразие над совершенным полем k .

i) Если $V(k) \neq \emptyset$, то

$$\operatorname{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \simeq [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)} \Rightarrow \operatorname{Card}([\operatorname{Br}'(V \otimes \bar{k})]^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)}(l)) < \infty.$$

ii) Если $\operatorname{NS}(V) = [\operatorname{NS}(V \otimes \bar{k})]^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)}$, то

$$\operatorname{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \simeq [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)} \Leftarrow \operatorname{Card}([\operatorname{Br}'(V \otimes \bar{k})]^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)}(l)) < \infty.$$

iii) Если $V(k) \neq \emptyset$ и $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$, то

$$\operatorname{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \simeq [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)} \Leftrightarrow \operatorname{Card}([\operatorname{Br}'(V \otimes \bar{k})]^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)}(l)) < \infty.$$

iv) Если k конечно и $V(k) \neq \emptyset$, то

$$\operatorname{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \simeq [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)} \Leftrightarrow \operatorname{Card}([\operatorname{Br}'(V \otimes \bar{k})]^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)}(l)) < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $\Rightarrow$ известна из [17, теорема 2.4].

Предположим, что

$$\operatorname{NS}(V) = [\operatorname{NS}(V \otimes \bar{k})]^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)}, \quad \operatorname{Card}([\operatorname{Br}'(V \otimes \bar{k})]^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)}(l)) < \infty.$$

Очевидно, $\operatorname{NS}(V \otimes \bar{k}) = \operatorname{NS}(V \otimes \bar{k})^U$ для любой малой открытой нормальной подгруппы $U \subset \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$. Поэтому $\operatorname{NS}(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l$ – дискретный $\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$ -модуль. Для любой открытой нормальной подгруппы U $\mathbb{Q}_l$ -пространство

$$H^1(\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)/U, [\operatorname{NS}(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l]^U)$$

аннулируется числом $\text{Card}(\text{Gal}(\bar{k}/k)/U)$ [4, гл. IV, §6, следствие 1]. Следовательно,

$$H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k)/U, [\text{NS}(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l]^U) = 0,$$

$$H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l) = \varinjlim H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k)/U, [\text{NS}(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l]^U) = 0.$$

Поэтому в силу точной последовательности (2.6) из [17] получим точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow [\text{NS}(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} &\rightarrow [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \\ &\rightarrow [T_l \text{Br}'(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Поскольку $T_l \text{Br}'(V \otimes \bar{k})$ – свободный конечно порожденный $\mathbb{Z}_l$ -модуль [20, §5], то видно, что $[T_l \text{Br}'(V \otimes \bar{k})]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ – свободный конечно порожденный $\mathbb{Z}_l$ -модуль. С другой стороны,

$$\begin{aligned} [T_l \text{Br}'(V \otimes \bar{k})]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} &= [\text{Hom}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l, \text{Br}'(V \otimes \bar{k}))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \\ &= \text{Hom}(\mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l, [\text{Br}'(V \otimes \bar{k})]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}(l)) \\ &= T_l [\text{Br}'(V \otimes \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}(l)]. \end{aligned}$$

Поскольку $\text{Br}'(V \otimes \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}(l)$ – конечная группа, то имеем соотношение

$$T_l [\text{Br}'(V \otimes \bar{k})^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}(l)] = 0.$$

Следовательно, $[T_l \text{Br}'(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} = 0$ и из (1.1) следует изоморфизм

$$[\text{NS}(V \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \simeq [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}.$$

Так как $[\text{NS}(V \otimes \bar{k})]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} = \text{NS}(V)$, то утверждение ii) доказано.

Предположим, что $V(k) \neq \emptyset$ и $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$. Можно отождествить $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = 0$ с касательным пространством в нуле группы $\text{Pic}^0(V \otimes \bar{k})$ [12, лекция 24]. Поэтому $\text{Pic}^0(V \otimes \bar{k}) = 0$ и

$$\text{Pic}(V \otimes \bar{k}) \simeq \text{Pic}(V \otimes \bar{k}) / \text{Pic}^0(V \otimes \bar{k}) = \text{NS}(V \otimes \bar{k}).$$

Поскольку $V(k) \neq \emptyset$, то мы имеем изоморфизм $\text{Pic}(V) \simeq [\text{Pic}(V \otimes \bar{k})]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ [17, (2.10)]. Поэтому $\text{NS}(V) \simeq [\text{NS}(V \otimes \bar{k})]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ и утверждение iii) следует из ii).

Предположим, что k конечно и $V(k) \neq \emptyset$. Тогда снова

$$\text{Pic}(V) \simeq [\text{Pic}(V \otimes \bar{k})]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \quad (1.2)$$

(см. [17, (2.10)]). Точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{Pic}^0(V \otimes \bar{k}) \rightarrow \text{Pic}(V \otimes \bar{k}) \rightarrow \text{NS}(V \otimes \bar{k}) \rightarrow 0$$

индуцирует каноническую точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow [\text{Pic}^0(V \otimes \bar{k})]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} &\rightarrow [\text{Pic}(V \otimes \bar{k})]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \rightarrow [\text{NS}(V \otimes \bar{k})]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} \\ &\rightarrow H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Pic}^0(V \otimes \bar{k})). \end{aligned}$$

По теореме С. Ленга $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{Pic}^0(V \otimes \bar{k})) = 0$ [14, гл. VI, §1.4, следствие 1]. Напомним, что $\text{NS}(V)$ – образ группы $\text{Pic}(V)$ в $\text{NS}(V \otimes \bar{k})$. Поэтому из (1.2) имеем равенство $\text{NS}(V) = [\text{NS}(V \otimes \bar{k})]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$, и утверждение iv) следует из ii). Теорема доказана.

1.2. ТЕОРЕМА. Пусть V – гладкое проективное многообразие над совершенным полем k , причем $V(k) \neq \emptyset$, $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ и $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ для некоторого простого числа l . Тогда существует каноническая точная последовательность l -примарных компонент

$$0 \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}))(l) \rightarrow [\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)](l) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})(l)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)},$$

где $\mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})(l)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ – конечная группа.

Если l не делит $\mathrm{Card}([\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\mathrm{tors}})$, то l -примарная компонента группы $\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно отождествить $H^1(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}}) = 0$ с касательным пространством в нуле группы $\mathrm{Pic}^0(V \otimes \bar{k})$ [12, лекция 24]. Поэтому $\mathrm{Pic}^0(V \otimes \bar{k}) = 0$ и

$$\mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k}) \simeq \mathrm{Pic}(V \otimes \bar{k})/\mathrm{Pic}^0(V \otimes \bar{k}) = \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}).$$

Следовательно, соотношение (2.11) из [17] принимает вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Br}(k) \rightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}] \\ \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В силу [17, предложение 2.3] все группы в (1.3) являются группами кручения. В итоге мы получаем точную последовательность l -примарных компонент

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathrm{Br}(k)(l) \rightarrow \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V)(l) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})(l)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}] \\ \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}))(l) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Поэтому мы имеем изоморфизм

$$\mathrm{Ker}[\mathrm{Br}'(V)(l)/\mathrm{Br}(k)(l) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})(l)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}] \simeq H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}))(l)$$

и точную последовательность

$$0 \rightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}))(l) \rightarrow [\mathrm{Br}'(V)/\mathrm{Br}(k)](l) \rightarrow \mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})(l)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}. \quad (1.4)$$

Из соотношений $V(k) \neq \emptyset$ и $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ следует конечность группы $\mathrm{Br}'(V \otimes \bar{k})(l)^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ [17, теорема 2.4].

Поскольку $\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})$ имеет конечное множество образующих и любая из образующих “определена” над конечным расширением, можно выбрать такое конечное расширение Галуа K/k , что $\mathrm{NS}(V \otimes K) = \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})$. Более того, $H^1(\mathrm{Gal}(K/k), \mathrm{NS}(V \otimes K))$ – конечная группа [4, гл. IV, § 6, следствие 2].

Рассмотрим каноническую точную последовательность инфляции – ограничения [4, гл. IV, § 5, предложение 5.1]

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(K/k), \mathrm{NS}(V \otimes K)) \xrightarrow{\mathrm{inf}} H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})) \\ \xrightarrow{\mathrm{res}} H^1(\mathrm{Gal}(\bar{k}/K), \mathrm{NS}(V \otimes \bar{k})). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Поскольку $\text{NS}(V \otimes K) = \text{NS}(V \otimes \bar{k})$, то группа $\text{Gal}(\bar{k}/K)$ действует тривиально на $\text{NS}(V \otimes \bar{k}) \simeq \mathbb{Z}^\rho \oplus [\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}}$ (неканонический изоморфизм, где $\rho = \text{rank NS}(V \otimes \bar{k})$). Следовательно,

$$\begin{aligned} H^1(\text{Gal}(\bar{k}/K), \text{NS}(V \otimes \bar{k})) &= \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/K), \text{NS}(V \otimes \bar{k})) \\ &= \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/K), \mathbb{Z}^\rho) \oplus \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/K), [\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}}) \\ &= \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/K), [\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}}), \end{aligned}$$

так как $\mathbb{Z}^\rho$ не содержит нетривиальных компактных подгрупп и поэтому

$$\text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/K), \mathbb{Z}^\rho) = 0.$$

Следовательно,

$$H^1(\text{Gal}(\bar{k}/K), \text{NS}(V \otimes \bar{k})) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{k}/K), [\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$$

аннулируется числом $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$.

Если простое число l не делит $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$, то подгруппа l -крючения в $H^1(\text{Gal}(\bar{k}/K), \text{NS}(V \otimes \bar{k}))$ тривиальна (иначе эта группа содержит элемент порядка l , аннулируемый числом $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$, и поэтому он аннулируется 1 (наибольшим общим делителем l и $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$). Следовательно, из (1.5) и конечности $H^1(\text{Gal}(K/k), \text{NS}(V \otimes K))$ получаем конечность группы

$$H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V \otimes \bar{k}))(l) = H^1(\text{Gal}(K/k), \text{NS}(V \otimes K))(l). \quad (1.6)$$

Поэтому из (1.4) и (1.6) следуют конечность $[\text{Br}'(V)/\text{Br}(k)](l)$. Теорема доказана.

1.3. ТЕОРЕМА. Пусть V – гладкое проективное многообразие над $k(t)$, где $k(t)$ – поле рациональных функций алгебраически независимой переменной t над числовым полем $k \hookrightarrow \mathbb{C}$, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, и пусть $\pi : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ – такой собственный плоский k -морфизм гладких проективных k -многообразий, что общий слой π изоморфен V .

Предположим, что $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$, $V(k(t)) \neq \emptyset$, простое число l не делит $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \overline{k(t)})]_{\text{tors}})$ и существует канонический изоморфизм

$$\text{NS}(V \otimes_{k(t)} \bar{k}(t)) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes_{k(t)} \overline{k(t)}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\overline{k(t)}/\bar{k}(t))}$$

(другими словами, геометрический аналог гипотезы Тэйта выполняется для дивизоров на общем слое пучка $\pi \otimes \bar{k} : X \otimes \bar{k} \rightarrow \mathbb{P}_k^1$).

Тогда $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ и для любого простого числа l существует канонический изоморфизм

$$\text{NS}(X \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} H^2(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i_y: \text{Spec}(\bar{k}(y)) \rightarrow X \otimes \bar{k}$ – каноническое вложение точки $y \in X \otimes \bar{k}$ и

$$\text{Div}_{X \otimes \bar{k}}^{\text{vert}} = \bigoplus_{\substack{y \in X \otimes \bar{k} \setminus V \otimes_{k(t)} \bar{k}(t) \\ \text{codim}_{X \otimes \bar{k}}(y)=1}} i_{y*} \mathbb{Z}$$

– пучок вертикальных дивизоров Картье.

Имеется точная последовательность пучков (для этальной топологии $X \otimes \bar{k}$)

$$0 \rightarrow G_{m, X \otimes \bar{k}} \rightarrow (h \otimes \bar{k})_* G_{m, V \otimes_{k(t)} \bar{k}(t)} \rightarrow \text{Div}_{X \otimes \bar{k}}^{\text{vert}} \rightarrow 0,$$

где $h \otimes \bar{k}: V \otimes_{k(t)} \bar{k}(t) \hookrightarrow X \otimes \bar{k}$ – вложение общего слоя $\pi \otimes \bar{k}$. Используя идеи [18, § 2.6], мы получим точную последовательность $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей (являющуюся геометрическим аналогом последовательности (2.20) из [18]):

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Br}'(X \otimes \bar{k}) &\rightarrow \text{Ker}[\text{Br}'(V \otimes_{k(t)} \bar{k}(t)) \rightarrow H^0(X \otimes \bar{k}, R^2(h \otimes \bar{k})_* G_{m, V \otimes_{k(t)} \bar{k}(t)})] \\ &\rightarrow H^2(X \otimes \bar{k}, \text{Div}_{X \otimes \bar{k}}^{\text{vert}}). \end{aligned} \quad (1.7)$$

По теореме из п. 1.2 $[\text{Br}'(V \otimes_{k(t)} \bar{k}(t)) / \text{Br}(\bar{k}(t))](l)$ – конечная группа. С другой стороны, $\text{Br}(\bar{k}(t)) = 0$ [11, гл. III, § 2, пример 2.22 (d)]. Поэтому $\text{Br}'(V \otimes_{k(t)} \bar{k}(t))(l)$ – конечная группа. В силу (1.7) $\text{Br}'(X \otimes \bar{k})(l)$ конечна. Следовательно, $T_l \text{Br}'(X \otimes \bar{k}) = 0$ и точная последовательность [11, гл. V, § 3, замечание 3.29 (d)]

$$0 \rightarrow \text{NS}(X \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Z}_l \rightarrow H^2(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1)) \rightarrow T_l \text{Br}'(X \otimes \bar{k}) \rightarrow 0$$

влечет изоморфизм $\text{NS}(X \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Z}_l \xrightarrow{\sim} H^2(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Z}_l(1))$.

В частности, $\text{rank NS}(X \otimes \bar{k}) = b_2(X \otimes \bar{k})$, $h^{2,0}(X \otimes \bar{k}) = 0$, для любого простого l

$$\text{NS}(X \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} H^2(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1)).$$

Теорема доказана.

1.4. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $k \hookrightarrow \mathbb{C}$ – числовое поле, $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, и пусть $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ – собственный плоский k -морфизм гладких проективных k -многообразий с гладким общим слоем $V = X_t$.

Предположим, что $V(k(t)) \neq \emptyset$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий:

а) общий слой V морфизма π – поверхность типа КЗ и существуют не-изоморфные гладкие геометрические слои (другими словами, π индуцирует потенциально непостоянное семейство поверхностей типа КЗ над некоторым открытым подмножеством $\emptyset \neq U \hookrightarrow \mathbb{P}_k^1$);

б) общий слой V морфизма π – гладкая поверхность, $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$, существует такой приведенный геометрический слой $X_{\bar{s}} \hookrightarrow X \otimes \bar{k}$, что $X_{\bar{s}}$ – объединение гладких неприводимых компонент с нормальными пересечениями, $H^0(E, \Omega_E^2) = 0$ для любой неприводимой компоненты $E \hookrightarrow X_{\bar{s}}$.

Тогда $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ и для любого простого числа l существует канонический изоморфизм

$$\text{NS}(X \otimes \bar{k}) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} H^2(X \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме из п. 1.3 можно предположить, что простое число l не делит $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k}(t))]_{\text{tors}})$. Остается показать, что

$$\text{NS}(V \otimes \bar{k}(t)) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes \bar{k}(t), \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\bar{k}(t)/\bar{k}(t))}. \quad (1.8)$$

В случае а) биективность (1.8) доказана в [17, п. 3.3].

В случае б) поверхность V является поверхностью со стабильным сильным вырождением (в смысле [15, § 1], [17, § 3]) в некоторой точке поля $k(t)$ и биективность (1.8) хорошо известна из принципа Лефшеца, согласно которому можно рассматривать $\mathbb{C}$ вместо $\bar{k}$, и из [15, теорема 1.4]. Следствие доказано.

§ 2. О группе Брауэра арифметической схемы

2.1. ЛЕММА (М. Хохстер). Пусть $(R, \mathfrak{m})$ – регулярное локальное кольцо, и пусть $u_1, \dots, u_k, x_1, \dots, x_n$ – регулярная система параметров (другими словами, минимальное множество образующих $\mathfrak{m}$). Пусть $H = (u_1, \dots, u_k)R$, и пусть J – такой идеал, содержащийся в $I = (x_1, \dots, x_n)R$, что кольцо R/J регулярно. Тогда J порождается частью минимального множества образующих для I , которая может быть продолжена до регулярной системы параметров, содержащей $u_1, \dots, u_k$. В частности, кольцо $R/(H + J)$ регулярно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конечно, размерность R равна $k + n$. Поскольку R/J регулярно, то J имеет образующие $f_1, \dots, f_h$ в R , являющиеся частью регулярной системы параметров, и поэтому f_i линейно независимы в $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Но f_i лежат в I , и, следовательно, ни одно из них не лежит в линейной оболочке других элементов в $I/\mathfrak{m}I$, иначе это будет выполняться в $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Таким образом, f_i являются частью минимальной системы образующих I , которая должна содержать n элементов. Эти n элементов вместе с элементами $u_j, j = 1, \dots, k$, порождают $\mathfrak{m}$. В итоге $u_1, \dots, u_k, f_1, \dots, f_h$ являются частью регулярной системы параметров для R . Поэтому факторизация по этим элементам, совпадающая с факторизацией по $H + J$, дает регулярное кольцо. Лемма доказана.

2.2. СЛЕДСТВИЕ (М. Хохстер). Пусть $\pi: X \rightarrow Y$ – морфизм конечного типа регулярных нётеровых схем, обладающий сечением $\theta: Y \rightarrow X$. Тогда точка пересечения $\theta(Y)$ со слоем $\pi^{-1}(y)$ над точкой y схемы Y является регулярной точкой слоя $\pi^{-1}(y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Локализуя X и Y , можно заменить Y схемой $\text{Spec } A$, где $(A, \mathfrak{m}_A)$ – локальное кольцо в точке y . Утверждение локально по X , поэтому можно считать, что X – аффинная схема. Таким образом, мы имеем регулярную A -алгебру B и отображение A -алгебр $B \rightarrow A$ (ретракцию A -алгебр; в частности, оно сюръективно). Существует только одна точка в пересечении слоя над $\mathfrak{m}_A$ с образом сечения: она соответствует ядру Q композиции сюръекций $B \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{m}_A$. Необходимо показать, что кольцо $B_Q/(\mathfrak{m}_A \cdot B_Q)$ регулярно.

Можно представить B как образ гомоморфизма кольца многочленов $S = A[x_1, \dots, x_n]$. Заменяя x_i новой переменной, а именно вычитая из каждой переменной ее образ относительно композиции сюръективных отображений

$S \rightarrow B \rightarrow A$, можно считать, что все x_i отображаются в 0 при композиции $S \rightarrow B \rightarrow A$. Пусть J_0 – ядро отображения $S \rightarrow B$. Очевидно,

$$\begin{aligned} J_0 &= \text{Ker}(S = A[x_1, \dots, x_n] \rightarrow B) \hookrightarrow (x_1, \dots, x_n)A[x_1, \dots, x_n] \\ &= \text{Ker}(A[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A), \end{aligned}$$

где $A[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A$ – композиция сюръективных морфизмов

$$S = A[x_1, \dots, x_n] \rightarrow B \rightarrow A.$$

Мы видим, что $B = S/J_0$. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_A \cdot S + (x_1, \dots, x_n)S$. Тогда

$$\begin{aligned} Q &= \text{Ker}[B \rightarrow A/\mathfrak{m}_A] = \text{Ker}[S/J_0 \rightarrow A/\mathfrak{m}_A] = \text{Ker}[A[x_1, \dots, x_n]/J_0 \rightarrow A/\mathfrak{m}_A] \\ &= \text{Ker}[A[x_1, \dots, x_n] \rightarrow A/\mathfrak{m}_A]/J_0 = \text{Ker}[S \rightarrow A/\mathfrak{m}_A]/J_0 \\ &= (\mathfrak{m}_A \cdot S + (x_1, \dots, x_n)S)/J_0 = \mathfrak{M}/J_0. \end{aligned}$$

Поскольку Q – максимальный идеал кольца B , то $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}_A \cdot S + (x_1, \dots, x_n)S$ – максимальный идеал кольца S . Заменяем S регулярным локальным кольцом $R = S_{\mathfrak{M}}$. Пусть $J = J_0 \cdot R$. Так как B_Q – регулярное локальное кольцо и

$$R/J = S_{\mathfrak{M}}/(J_0 \cdot S_{\mathfrak{M}}) = B_{\mathfrak{M}}/J_0 = B_Q,$$

то R/J – регулярное локальное кольцо. Пусть $u_1, \dots, u_k$ – регулярная система параметров для A . Наши обозначения и предположения сейчас полностью согласуются с леммой из п. 2.1, где $H = (u_1, \dots, u_k)R = \mathfrak{m}_A \cdot R$, $J \hookrightarrow (x_1, \dots, x_n)R$. Поскольку кольцо R/J регулярно, из леммы п. 2.1 вытекает, что кольцо $R/(H + J) = B_Q/(\mathfrak{m}_A \cdot B_Q)$ регулярно. Следствие доказано.

2.3. Следующая теорема обобщает теорему 2.2 из [18] и подтверждает вариант гипотезы М. Артина [11, гл. IV, § 2, вопрос 2.19] о конечности группы Брауэра арифметической собственной схемы над $\text{Spec } \mathbb{Z}$.

2.4. ТЕОРЕМА. Пусть V – такое гладкое проективное многообразие над числовым полем k , что $V(k) \neq \emptyset$, $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$, $\text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \xrightarrow{\sim} [H^2(V \otimes k, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$ для простого числа l . Предположим, что существует собственный плоский морфизм конечного типа $\pi: X \rightarrow \text{Spec } A$, где A – кольцо целых в k , X – регулярная схема, общий слой π изоморфен V , все схемные слои π приведены.

Если l не делит $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$, то l -примарная компонента группы $\text{Br}'(X)$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.2 из [18] достаточно показать, что существует такое сечение $\theta: \text{Spec } A \rightarrow X$ морфизма π , что $\theta(\text{Spec } A)$ пересекается с одной неприводимой компонентой каждого схемного слоя $\pi^{-1}(v)$, $v \in \text{Spec } A$.

Поскольку $V(k) \neq \emptyset$, то имеется сечение $\theta: \text{Spec } A \rightarrow X$ морфизма π . По следствию из п. 2.2 для любой точки $v \in \text{Spec } A$ имеем, что $\theta(v)$ – регулярная точка схемного слоя $\pi^{-1}(v)$. Поэтому $\mathcal{O}_{\pi^{-1}(v), \theta(v)}$ – регулярное локальное кольцо и $\pi^{-1}(v)$ – аналитически неприводимая схема в точке $\theta(v)$ [1, гл. 11, замечание 1 к предложению 11.24]; в частности, $\theta(\text{Spec } A)$ пересекает одну неприводимую компоненту схемного слоя $\pi^{-1}(v)$. Теорема доказана.

§ 3. О группе Брауэра многообразия Калаби–Яо

3.1. По определению многообразие Калаби–Яо размерности d над числовым полем k – это гладкое проективное k -многообразие с тривиальным каноническим классом и нулевыми числами Ходжа $h^{i,0}$ для $0 < i < d$. Например, многообразие Калаби–Яо размерности 1 является эллиптической кривой, а поверхность Калаби–Яо является поверхностью типа КЗ.

3.2. ТЕОРЕМА. Пусть V – многообразие Калаби–Яо размерности $d \geq 2$ над числовым полем k , $[k : \mathbb{Q}] < \infty$. Предположим, что $V(k) \neq \emptyset$ и $\text{NS}(V) = \text{NS}(V \otimes \bar{k})$. Тогда l -примарная компонента группы $\text{Br}'(V)/\text{Br}(k)$ конечна, если и только если l не делит $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$.

Предположим, что существует собственный плоский морфизм конечного типа $\pi: X \rightarrow \text{Spec } A$, где A – кольцо целых в k , X – регулярная схема, общий слой π изоморфен V и все схемные слои π приведены.

Если l не делит $\text{Card}([\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}})$, то l -примарная компонента группы $\text{Br}'(X)$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $d = 2$, то V – поверхность типа КЗ, поэтому выполнено $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ и в силу [16] имеем

$$\text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \simeq [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}.$$

Напомним, что в рассматриваемом случае $[\text{NS}(V \otimes \bar{k})]_{\text{tors}} = 0$. По теореме 2.1 из [18] группа $[\text{Br}'(V)/\text{Br}(k)](l)$ конечна для всех l . По теореме из п. 2.4 $[\text{Br}'(X)](l)$ конечна для всех простых чисел l .

Если $d \geq 3$, то $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ и $H^2(V, \mathcal{O}_V) = 0$. Следовательно,

$$\text{rank } \text{NS}(V \otimes \bar{k}) = h^{1,1}(V \otimes \bar{k}), \quad \text{NS}(V) \otimes \mathbb{Q}_l \simeq [H^2(V \otimes \bar{k}, \mathbb{Q}_l(1))]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)}$$

по лемме 3.2 из [17]. Остается воспользоваться теоремой 2.1 из [18] и теоремой из п. 2.4. Теорема доказана.

3.3. СЛЕДСТВИЕ. Пусть V – односвязное многообразие Калаби–Яо размерности $d \geq 2$ над числовым полем k , $[k : \mathbb{Q}] < \infty$. Предположим, что $V(k) \neq \emptyset$, $\text{NS}(V) = \text{NS}(V \otimes \bar{k})$, существует собственный плоский морфизм конечного типа $\pi: X \rightarrow \text{Spec } A$, где A – кольцо целых в k , X – регулярная схема, общий слой π изоморфен V и все схемные слои π приведены.

Тогда группы $[\text{Br}'(V)/\text{Br}(k)](l)$ и $\text{Br}'(X)(l)$ конечны для всех l .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что существует точная последовательность

$$0 \rightarrow (\text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}})^* \rightarrow \pi_1(V \otimes \bar{k})^{\text{ab}} \rightarrow \prod_l T_l(\text{Alb}(V \otimes \bar{k})) \rightarrow 0,$$

где $(\text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}})^*$ – группа, двойственная по Понтрягину конечной группе $\text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}}$ [11, гл. III, § 4, следствие 4.19]. Поскольку $V \otimes \bar{k}$ односвязно, то $\pi_1(V \otimes \bar{k}) = 1$. Следовательно, $\text{NS}(V \otimes \bar{k})_{\text{tors}} = 0$, и остается применить теорему из п. 3.2.

§ 4. О когомологиях относительного функтора Пикара

4.1. Пусть V – гладкое проективное многообразие над числовым полем k , $[k : \mathbb{Q}] < \infty$. Предположим, что существует собственный плоский морфизм конечного типа $\pi : X \rightarrow \operatorname{Spec} A$, где A – кольцо целых в k , X – регулярная схема, общий слой π изоморфен V .

Пусть $\operatorname{Pic}_{X/\operatorname{Spec} A}$ – относительный функтор Пикара. Это – пучок, ассоциированный с предпучком $U \mapsto \operatorname{Pic}(X \times_{\operatorname{Spec} A} U)$ для этальной топологии. Для морфизма схем $U \rightarrow \operatorname{Spec} A$ имеем

$$\operatorname{Pic}_{X/\operatorname{Spec} A}(U) = H^0(U, R^1 \pi'_* G_m),$$

где $\pi' : X \times_{\operatorname{Spec} A} U \rightarrow U$ – каноническая проекция [13, (1.2)].

Если $\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ и π имеет сечение, то

$$\operatorname{Pic}(X)/\operatorname{Pic}(\operatorname{Spec} A) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}_{X/\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A) = H^0(\operatorname{Spec} A, R^1 \pi_* G_m)$$

(см. [5, предложение 2.1]). Мы собираемся исследовать $H^1(\operatorname{Spec} A, R^1 \pi_* G_m)$.

4.2. ЛЕММА. Пусть A – кольцо целых в числовом поле k , $[k : \mathbb{Q}] < \infty$. Для замкнутой точки $v \in \operatorname{Spec} A$ пусть $\bar{v} \rightarrow v \in \operatorname{Spec} A$ – геометрическая точка, и пусть $\mathcal{O}_{\bar{v}}$ – строгая гензелизация локального кольца $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, v}$. Предположим, что существует собственный плоский морфизм конечного типа $\pi : X \rightarrow \operatorname{Spec} A$, где X – регулярная схема.

Тогда $X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}$ – регулярная схема.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку v – замкнутая точка в $\operatorname{Spec} A$, то $\mathcal{O}_{\bar{v}}$ – дискретно нормированное кольцо с алгебраически замкнутым полем вычетов положительной характеристики. Действительно, строгая гензелизация $\mathcal{O}_{\bar{v}}$ регулярного локального нётерова кольца $\mathcal{O}_v$ является регулярным локальным нётеровым кольцом [8, предложение 18.8.8, следствие 18.8.13]. Более того,

$$\dim(\mathcal{O}_{\bar{v}}) = \dim(\mathcal{O}_v) = 1$$

(см. [11, гл. I, § 4, замечание 4.11]). Поэтому $\mathcal{O}_{\bar{v}}$ – дискретно нормированное кольцо [1, гл. 9, предложение 9.2].

Очевидно, что $X \times_A \mathcal{O}_v$ – регулярная схема. С другой стороны,

$$\mathcal{O}_{\bar{v}} = \varinjlim B_i,$$

где

$$\begin{array}{ccc} B_i & \rightarrow & \overline{k(v)} \\ \uparrow & \nearrow & \\ \mathcal{O}_v & & \end{array} \quad (4.1)$$

– коммутативная диаграмма морфизмов колец, $\operatorname{Spec} B_i$ – связная схема, $\operatorname{Spec} B_i \rightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_v$ – этальный морфизм [11, гл. I, § 4, замечание 4.11, лемма 4.8]. Поскольку $\mathcal{O}_v$ – дискретно нормированное кольцо, то диаграмма (4.1) дает сюръективность этального морфизма $\operatorname{Spec} B_i \rightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_v$. В частности, $\operatorname{Spec} B_i$ – регулярная 1-мерная схема [11, гл. I, § 3, предложение 3.17].

С другой стороны,

$$\mathrm{Спес} \, \mathcal{O}_{\bar{v}} = \varprojlim \mathrm{Спес} \, B_i.$$

Рассмотрим диаграмму расслоенного произведения

$$\begin{array}{ccc} X \otimes_A B_i & \rightarrow & X \otimes_A \mathcal{O}_v \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Спес} \, B_i & \rightarrow & \mathrm{Спес} \, \mathcal{O}_v. \end{array}$$

Поскольку $\mathrm{Спес} \, B_i \rightarrow \mathrm{Спес} \, \mathcal{O}_v$ — сюръективный этальный морфизм, то он является строго плоским [11, гл. I, §2, предложение 2.7]. С другой стороны, $X \otimes_A \mathcal{O}_v \rightarrow \mathrm{Спес} \, \mathcal{O}_v$ — собственный плоский морфизм. Поэтому он является строго плоским. Следовательно,

$$X \otimes_A B_i \rightarrow X \otimes_A \mathcal{O}_v$$

— строго плоский морфизм [7, предложение 2.5.1]. В частности, он сюръективен.

Очевидно, что $X \otimes_A B_i$ — регулярная нётерова схема, потому что $X \otimes_A B_i \rightarrow X \otimes_A \mathcal{O}_v$ — этальный морфизм [11, гл. I, §3, предложение 3.17]. Следовательно, для $x \in X \otimes_A \mathcal{O}_v$ и для любой такой точки $y_i \in X \otimes_A B_i$, что y_i отображается в x , имеем соотношение

$$\mathfrak{m}_{y_i} = \mathfrak{m}_x \cdot \mathcal{O}_{X \otimes_A B_i, y_i}$$

(см. [8, теорема 17.6.1(c')]). Напомним, что обратные пределы коммутируют с расслоенными произведениями [11, гл. II, §3, доказательство теоремы 3.2(b)]. Если

$$y \in \varprojlim X \otimes_A B_i = X \otimes_A \varprojlim B_i = X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}$$

отображается в x , то имеем соотношение $\mathfrak{m}_y = \mathfrak{m}_x \cdot \mathcal{O}_{X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}, y}$.

Поскольку $\mathcal{O}_{X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}, x}$ — регулярное локальное кольцо, то $\mathfrak{m}_x$ порождается $\dim(\mathcal{O}_{X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}, x})$ элементами [1, гл. 11, теорема 11.22]. Следовательно, $\mathfrak{m}_y$ порождается

$$\dim(\mathcal{O}_{X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}, x}) = \dim(\mathcal{O}_{X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}, y})$$

элементами. Поэтому $\mathcal{O}_{X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}, y}$ — регулярное локальное кольцо [1, гл. 11, теорема 11.22]. Лемма доказана.

4.3. ТЕОРЕМА. Пусть V — гладкое проективное многообразие над числовым полем k , $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, $V(k) \neq \emptyset$, $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$, $\mathrm{NS}(V \otimes \bar{k}) = \mathrm{NS}(V)$. Предположим, что существует собственный плоский морфизм конечного типа $\pi : X \rightarrow \mathrm{Спес} \, A$, где A — кольцо целых в k , X — регулярная схема, общий слой π изоморфен V .

Если $\pi_* G_m = G_m$ для этальной топологии, то $H^1(\mathrm{Спес} \, A, R^1 \pi_* G_m)$ — конечная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. k -рациональная точка многообразия V определяет сечение морфизма π , которое, в свою очередь, дает каноническое вложение

$$H^3(\mathrm{Спес} \, A, G_m) \hookrightarrow H^3(X, G_m).$$

Поэтому спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathrm{Спес} \, A, R^q \pi_* G_m) \Rightarrow H^{p+q}(X, G_m)$$

влечет точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\operatorname{Spec} A, G_m) &\rightarrow H^1(X, G_m) \rightarrow H^0(\operatorname{Spec} A, R^1\pi_* G_m) \\ &\rightarrow H^2(\operatorname{Spec} A, G_m) \rightarrow \operatorname{Ker}[H^2(X, G_m) \rightarrow H^0(\operatorname{Spec} A, R^2\pi_* G_m)] \\ &\rightarrow H^1(\operatorname{Spec} A, R^1\pi_* G_m) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

(см. [17, лемма 1.1]). С другой стороны, сечение морфизма π определяет вложение $H^2(\operatorname{Spec} A, G_m) \hookrightarrow H^2(X, G_m)$. Поэтому из (4.2) следует точная последовательность

$$0 \rightarrow \operatorname{Br}(A) \rightarrow \operatorname{Ker}[\operatorname{Br}'(X) \rightarrow H^0(\operatorname{Spec} A, R^2\pi_* G_m)] \rightarrow H^1(\operatorname{Spec} A, R^1\pi_* G_m) \rightarrow 0.$$

Можно переписать эту последовательность в виде

$$0 \rightarrow H^1(\operatorname{Spec} A, R^1\pi_* G_m) \rightarrow \operatorname{Br}'(X)/\operatorname{Br}(A) \rightarrow H^0(\operatorname{Spec} A, R^2\pi_* G_m). \quad (4.3)$$

Для данной геометрической точки $\bar{v} \rightarrow v \in \operatorname{Spec} A$ пусть $\mathcal{O}_{\bar{v}}$ – строгая гензелизация локального кольца $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, v}$.

Если v – замкнутая точка в $\operatorname{Spec} A$, то, как уже было доказано, $\mathcal{O}_{\bar{v}}$ – дискретно нормированное кольцо с алгебраически замкнутым полем вычетов положительной характеристики. Если $v = \eta$ – общая точка в $\operatorname{Spec} A$, то $\mathcal{O}_{\bar{\eta}} = \bar{k}$.

Поскольку G_m – групповая схема локально конечного типа над X [10, гл. II, § 3], то слой $R^1\pi_* G_m$ в геометрической точке $\bar{v} \rightarrow v \in \operatorname{Spec} A$ есть

$$(R^1\pi_* G_m)_{\bar{v}} = H^1(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}, G_m) = \operatorname{Pic}(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}})$$

(см. [11, гл. III, § 1, теорема 1.15, замечание 1.17(a)]).

Предположим, что $v \in \operatorname{Spec} A$ – замкнутая точка. По лемме из п. 4.2

$$X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}} \rightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\bar{v}}$$

– регулярная модель гладкого многообразия $X \otimes_A K_{\bar{v}}$ над полем $K_{\bar{v}}$ дробей кольца $\mathcal{O}_{\bar{v}}$.

Пусть $j: \eta \hookrightarrow \operatorname{Spec} A$ – вложение общей точки $\operatorname{Spec} A$, и пусть $B = j_* j^* R^1\pi_* G_m$. Поскольку j_* и j^* – сопряженные функторы, то

$$\operatorname{Hom}(R^1\pi_* G_m, j_* j^* R^1\pi_* G_m) \simeq \operatorname{Hom}(j^* R^1\pi_* G_m, j^* R^1\pi_* G_m)$$

(см. [11, гл. II, § 3]). Следовательно, существует канонический морфизм

$$R^1\pi_* G_m \rightarrow j_* j^* R^1\pi_* G_m = B,$$

отвечающий тождественному морфизму $j^* R^1\pi_* G_m$.

Определим

$$E = \operatorname{Ker}[R^1\pi_* G_m \rightarrow B], \quad H = \operatorname{Coker}[R^1\pi_* G_m \rightarrow B].$$

Напомним, что слой $j^* R^1\pi_* G_m$ в геометрической точке $\bar{\eta} \rightarrow \eta$ изоморфен слою $R^1\pi_* G_m$ в $\bar{\eta} \rightarrow \eta \in \operatorname{Spec} A$ [11, гл. II, § 3, теорема 3.2].

Поскольку G_m – групповая схема локально конечного типа над X , то слой $R^1\pi_* G_m$ в геометрической точке $\bar{\eta} \rightarrow \eta \in \text{Спец } A$ есть

$$(R^1\pi_* G_m)_{\bar{\eta}} = H^1(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{\eta}}, G_m)$$

(см. [11, гл. III, теорема 1.15, замечание 1.17(а)]). С другой стороны, $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ и $\text{NS}(V \otimes \bar{k}) = \text{NS}(V)$, поэтому $\text{Pic}(V \otimes \bar{k}) = \text{NS}(V)$,

$$\begin{aligned} (R^1\pi_* G_m)_{\bar{\eta}} &= H^1(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{\eta}}, G_m) = \text{Pic}(X \otimes_A \bar{k}) \\ &= \text{Pic}(X_{\eta} \otimes \bar{k}) = \text{Pic}(V \otimes \bar{k}) = \text{NS}(V) \end{aligned}$$

и

$$(j^* R^1\pi_* G_m)_{\bar{\eta}} \simeq (R^1\pi_* G_m)_{\bar{\eta}} = \text{NS}(V). \quad (4.4)$$

Для неархимедовой точки $v \in \text{Спец } A$ пусть $\overline{A_v}$ – целое замыкание кольца $\mathcal{O}_v$ в $\bar{k}$. Обозначим через $\mathfrak{m}_{\bar{v}}$ максимальный идеал кольца $\overline{A_v}$, лежащий над максимальным идеалом $\mathfrak{m}_v \hookrightarrow \mathcal{O}_v$. Пусть $D(\bar{v}) \hookrightarrow \text{Gal}(\bar{k}/k)$ – подгруппа разложения точки $\bar{v}$ (другими словами, $D(\bar{v}) = \{\sigma \in \text{Gal}(\bar{k}/k) \mid \sigma(\bar{v}) = \bar{v}\}$), и пусть $I(\bar{v}) \hookrightarrow D(\bar{v})$ – подгруппа инерции [11, гл. I, § 4, пример 4.10(а)]. Тогда $\bar{k}^{D(\bar{v})}$ – поле дробей обычной гензелизации $\mathcal{O}_v^h$ локального кольца $\mathcal{O}_v$ и $\bar{k}^{I(\bar{v})}$ – поле $K_{\bar{v}}$ дробей строгой гензелизации $\mathcal{O}_{\bar{v}}$ локального кольца $\mathcal{O}_v$ [11, гл. II, § 3, пример 3.12]. В частности, $K_{\bar{v}} = \bar{k}^{I(\bar{v})} \hookrightarrow \bar{k}$.

В силу соотношения (4.4) $j^* R^1\pi_* G_m$ – групповая схема локально конечного типа над η [10, гл. II, § 3], поэтому слой B в геометрической точке $\bar{v} \rightarrow v$ изоморфен

$$H^0(\eta \times_{\text{Спец } A} \text{Спец } \mathcal{O}_{\bar{v}}, j^* R^1\pi_* G_m)$$

(см. [11, гл. III, § 1, теорема 1.15, замечание 1.17(а)]). С другой стороны,

$$B_{\bar{v}} = H^0(\eta \times_{\text{Спец } A} \text{Спец } \mathcal{O}_{\bar{v}}, j^* R^1\pi_* G_m) = H^0(\text{Спец } K_{\bar{v}}, j^* R^1\pi_* G_m),$$

где $K_{\bar{v}}$ – поле дробей кольца $\mathcal{O}_{\bar{v}}$, и из (4.4) получим соотношения

$$B_{\bar{v}} = \text{NS}(V) = \text{NS}(V \otimes K_{\bar{v}}) = \text{Pic}(X_{\eta} \otimes K_{\bar{v}}) = \text{Pic}(X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}). \quad (4.5)$$

Поскольку $X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}$ – открытая подсхема нётеровой регулярной схемы $X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}$, то существует каноническая точная последовательность

$$\text{Pic}(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) \rightarrow \text{Pic}(X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) \rightarrow 0$$

(см. [10, гл. II, § 6, предложение 6.5, следствие 6.16]). Поэтому точная последовательность

$$0 \rightarrow E_{\bar{v}} \rightarrow (R^1\pi_* G_m)_{\bar{v}} \rightarrow B_{\bar{v}}$$

принимает вид

$$0 \rightarrow E_{\bar{v}} \rightarrow \text{Pic}(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) \rightarrow \text{Pic}(X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) \rightarrow 0. \quad (4.6)$$

Следовательно, $H_{\bar{v}} = 0$ для всех геометрических точек $\bar{v}$. Мы получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow E \rightarrow R^1\pi_* G_m \rightarrow B \rightarrow 0.$$

Если геометрический слой $\pi^{-1}(\bar{v}) = X_{\bar{v}}$ приведен и неприводим, то точная последовательность (4.6) принимает вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathbb{Z} \cdot \{\text{класс } \pi^{-1}(\bar{v}) \text{ в } \text{Pic}(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}})\} \\ \rightarrow \text{Pic}(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) \rightarrow \text{Pic}(X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(см. [10, гл. II, § 6, предложение 6.5, следствие 6.16]). Очевидно, что приведенное неприводимое многообразие $\pi^{-1}(\bar{v})$ является дивизором $(t_{\bar{v}})$ функции $t_{\bar{v}}$, где $t_{\bar{v}}$ — образующая максимального идеала кольца $\mathcal{O}_{\bar{v}}$. Поэтому класс $\pi^{-1}(\bar{v})$ в $\text{Pic}(X \times_A \mathcal{O}_{\bar{v}})$ равен нулю и $E_{\bar{v}} = 0$. Следовательно, E — пучок небоскрегов.

Спектральная последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(\text{Спец } A, R^q j_*(j^* R^1 \pi_* G_m)) \Rightarrow H^*(\eta, j^* R^1 \pi_* G_m)$$

определяет точную последовательность $0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow E^1 \rightarrow E_2^{0,1}$ [11, приложение В]. В силу (4.4) и [11, гл. III, § 1, пример 1.7; гл. II, § 2, замечание 2.9(b)] она принимает форму

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\text{Спец } A, B) \rightarrow H^1(\eta, j^* R^1 \pi_* G_m) = H^1(\text{Gal}(\bar{k}/k), \text{NS}(V)) \\ \rightarrow H^0(\text{Спец } A, R^1 j_*(j^* R^1 \pi_* G_m)). \end{aligned}$$

Поскольку $j^* R^1 \pi_* G_m$ — групповая схема локально конечного типа над η , то слой $R^1 j_*(j^* R^1 \pi_* G_m)$ в геометрической точке $\bar{v} \rightarrow v \in \text{Спец } A$ изоморфен

$$H^1(\eta \times_{\text{Спец } A} \text{Спец } \mathcal{O}_{\bar{v}}, j^* R^1 \pi_* G_m) = H^1(\text{Спец } K_{\bar{v}}, j^* R^1 \pi_* G_m)$$

(см. [11, гл. III, § 1, теорема 1.15, замечание 1.17(a)]). В силу (4.4) и [11, гл. III, § 1, пример 1.7; гл. II, § 2, замечание 2.9(b)]

$$[R^1 j_*(j^* R^1 \pi_* G_m)]_{\bar{v}} = H^1(\text{Спец } K_{\bar{v}}, j^* R^1 \pi_* G_m) = H^1(\text{Gal}(\bar{K}_{\bar{v}}/K_{\bar{v}}), \text{NS}(V)).$$

Мы утверждаем, что для любого ненулевого сечения $s \in H^0(\text{Спец } A, F)$ пучка F на $(\text{Спец } A)_{\text{et}}$ существует такая замкнутая точка $v \in \text{Спец } A$, что $s_{\bar{v}} \neq 0$. В частности, имеется каноническое вложение

$$H^0(\text{Спец } A, F) \hookrightarrow \prod_{v \text{ неархимедова}} F_{\bar{v}}. \quad (4.7)$$

Действительно, если $s_{\bar{v}} = 0$ для всех замкнутых точек $v \in \text{Спец } A$, то для любой замкнутой точки v существует такой этальный морфизм $W_v \rightarrow \text{Спец } A$, что его образ содержит v , и $s|_{W_v} = 0$ [11, гл. II, § 2, доказательство предложения 2.10]. Очевидно, что образ W_v содержит общую точку η схемы $\text{Спец } A$. Поэтому

$$(W_v \rightarrow \text{Спец } A)_{v \in \text{Спец } A \setminus \eta}$$

— этальное покрытие схемы $\text{Спец } A$. По определению пучка из соотношений $s|_{W_v} = 0$ следует $s = 0$. Утверждение доказано.

В силу (4.7) получаем точную последовательность

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\operatorname{Spec} A, B) &\rightarrow H^1(\operatorname{Gal}(\bar{k}/k), \operatorname{NS}(V)) \\ &\rightarrow \prod_{v \text{ неархимедова}} H^1(\operatorname{Gal}(\bar{K}_{\bar{v}}/K_{\bar{v}}), \operatorname{NS}(V)), \end{aligned} \quad (4.8)$$

потому что канонический морфизм

$$\begin{aligned} H^0(\operatorname{Spec} A, R^1 j_* (j^* R^1 \pi_* G_m)) &\rightarrow \prod_{v \text{ неархимедова}} [R^1 j_* (j^* R^1 \pi_* G_m)]_{\bar{v}} \\ &= \prod_{v \text{ неархимедова}} H^1(\operatorname{Gal}(\bar{K}_{\bar{v}}/K_{\bar{v}}), \operatorname{NS}(V)) \end{aligned}$$

инъективен.

Поскольку группы Галуа действуют тривиально на $\operatorname{NS}(V)$, то точная последовательность (4.8) принимает вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\operatorname{Spec} A, B) &\rightarrow \operatorname{Hom}_{\operatorname{cont}}(\operatorname{Gal}(\bar{k}/k), \operatorname{NS}(V)_{\operatorname{tors}}) \\ &\rightarrow \prod_{v \text{ неархимедова}} \operatorname{Hom}_{\operatorname{cont}}(\operatorname{Gal}(\bar{K}_{\bar{v}}/K_{\bar{v}}), \operatorname{NS}(V)_{\operatorname{tors}}), \end{aligned} \quad (4.9)$$

так как $\operatorname{NS}(V) \simeq \mathbb{Z}^{\rho} \oplus \operatorname{NS}(V)_{\operatorname{tors}}$ (неканонический изоморфизм) и

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{cont}}(\operatorname{Gal}(\bar{k}/k), \mathbb{Z}) = 0, \quad \operatorname{Hom}_{\operatorname{cont}}(\operatorname{Gal}(\bar{K}_{\bar{v}}/K_{\bar{v}}), \mathbb{Z}) = 0.$$

Поскольку $\bar{k}^{I(\bar{v})} = K_{\bar{v}}$, то мы имеем равенство $I(\bar{v}) = \operatorname{Gal}(\bar{K}_{\bar{v}}/K_{\bar{v}})$. Поэтому (4.9) принимает вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\operatorname{Spec} A, B) &\rightarrow \operatorname{Hom}_{\operatorname{cont}}(\operatorname{Gal}(\bar{k}/k), \operatorname{NS}(V)_{\operatorname{tors}}) \\ &\rightarrow \prod_{v \text{ неархимедова}} \operatorname{Hom}_{\operatorname{cont}}(I(\bar{v}), \operatorname{NS}(V)_{\operatorname{tors}}). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Обозначим через k_v пополнение k относительно неархимедовой точки v . Пусть $D_v \hookrightarrow \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)^{\operatorname{ab}}$ — группа разложения. Эта группа является фактором локальной группы Галуа $\operatorname{Gal}(\bar{k}_v/k_v)^{\operatorname{ab}}$ (эти две группы, действительно, изоморфны, потому что $D(\bar{v}) = \operatorname{Gal}(\bar{k}_v/k_v)$ [4, гл. VII, § 1, предложение 1.2]), и можно отождествить подгруппу инерции I_v в $\operatorname{Gal}(\bar{k}_v/k_v)^{\operatorname{ab}}$ с группой U_v единиц поля k_v [4, гл. VI, § 2, теорема 2.3a]. С другой стороны,

$$I_v = I(\bar{v}) / (I(\bar{v}) \cap [\operatorname{Gal}(\bar{k}/k), \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)]).$$

Поэтому (4.10) принимает вид

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(\operatorname{Spec} A, B) &\rightarrow \operatorname{Hom}_{\operatorname{cont}}(\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)^{\operatorname{ab}}, \operatorname{NS}(V)_{\operatorname{tors}}) \\ &\rightarrow \prod_{v \text{ неархимедова}} \operatorname{Hom}_{\operatorname{cont}}(I_v, \operatorname{NS}(V)_{\operatorname{tors}}) = \prod_{v \text{ неархимедова}} \operatorname{Hom}_{\operatorname{cont}}(U_v, \operatorname{NS}(V)_{\operatorname{tors}}). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Напомним, что

$$\left[\prod_{v \text{ архимедова}} k_v^{\times} \right] \times \left[\prod_{v \text{ неархимедова}} U_v \right]$$

– открытая подгруппа группы $k_{\mathbb{A}}^{\times}$ иделей поля k [4, гл. II, § 16, лемма 16.2]. Пусть $k_{\infty+}^{\times}$ – подгруппа таких иделей (z_v) , что $z_v > 0$ для всех вещественных точек v и $z_v = 1$ для всех конечных точек v поля k . В силу глобальной теории полей классов имеется канонический изоморфизм

$$\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)^{\mathrm{ab}} = \mathrm{Gal}(k^{\mathrm{ab}}/k) \simeq k_{\mathbb{A}}^{\times}/U_k,$$

где U_k – замыкание $k^{\times}k_{\infty+}^{\times}$ в $k_{\mathbb{A}}^{\times}$ [21, гл. XIII, § 9, теорема 6].

Пусть

$$\Phi: k_{\mathbb{A}}^{\times} \rightarrow k_{\mathbb{A}}^{\times}/U_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)^{\mathrm{ab}}$$

– канонический сюръективный морфизм. Очевидно, что топология, индуцированная на подгруппе

$$\left[\prod_{v \text{ архимедова}} k_v^{\times} \right] \times 1 \hookrightarrow \left[\prod_{v \text{ архимедова}} k_v^{\times} \right] \times \left[\prod_{v \text{ неархимедова}} U_v \right],$$

является обычной топологией вещественной группы Ли

$$\prod_{v \text{ архимедова}} k_v^{\times}.$$

С другой стороны, ограничение Φ на эту подгруппу является непрерывным морфизмом

$$\left[\prod_{v \text{ архимедова}} k_v^{\times} \right] \times 1 \rightarrow k_{\mathbb{A}}^{\times}/U_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)^{\mathrm{ab}}.$$

Поскольку группа $k_{\mathbb{A}}^{\times}/U_k$ вполне несвязна, то мы видим, что

$$\Phi \left(\left[\prod_{v \text{ архимедова}} k_v^{\times} \right] \times 1 \right)$$

– конечная группа. По определению топологии на $k_{\mathbb{A}}^{\times}/U_k$ морфизм Φ открыт. Поэтому

$$U = \Phi \left(1 \times \left[\prod_{v \text{ неархимедова}} U_v \right] \right)$$

– открытая подгруппа в $k_{\mathbb{A}}^{\times}/U_k = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)^{\mathrm{ab}}$.

Предположим, что $f \in H^1(\mathrm{Spec} A, B)$. В силу (4.11) $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)^{\mathrm{ab}}, \mathrm{NS}(V)_{\mathrm{tors}})$ и $f|_{I_v} = 0$ для всех неархимедовых точек v . Значит, $f|_U = 0$, потому что $I_v = U_v$. Мы видим, что f определяется элементом конечной группы

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)^{\mathrm{ab}}/U, \mathrm{NS}(V)_{\mathrm{tors}}).$$

Поэтому $H^1(\mathrm{Spec} A, B)$ – конечная группа. Поскольку

$$0 \rightarrow E \rightarrow R^1\pi_* G_m \rightarrow B \rightarrow 0$$

– точная последовательность и E – пучок небоскрегов, то остается доказать конечность группы $H^1(v, E)$.

По определению $E_{\bar{v}} = (i_v^p E)(\bar{v})$. Другими словами, $E_{\bar{v}}$ – это $\text{Gal}(\overline{k(v)}/k(v))$ -модуль, ассоциированный с предпучком $i_v^p E$ на $\text{Spec } k(v)$, где $\bar{v} \rightarrow v \xrightarrow{i_v} \text{Spec } A$ [11, гл. II, § 2, замечание 2.9(b)]. Более того, $H^1(v, E) = H^1(\text{Gal}(\overline{k(v)}/k(v)), E_{\bar{v}})$ [11, гл. III, § 1, пример 1.7].

В силу (4.6) $E_{\bar{v}}$ состоит из классов дивизоров на $X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}$, носители которых содержатся в специальном слое морфизма $X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_{\bar{v}}$.

Действительно, пусть D_i – неприводимые компоненты дивизора D на $X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}$. В терминах дивизоров отображение $\text{Pic}(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) \rightarrow \text{Pic}(X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}})$ определено формулой

$$\begin{aligned} D &= \sum_{D_i \cap (X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) \neq \emptyset} n_i D_i + \sum_{D_i \cap (X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) = \emptyset} n_i D_i \\ &\mapsto \sum_{D_i \cap (X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) \neq \emptyset} n_i (D_i \cap (X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}})) \end{aligned}$$

(см. [10, гл. II, § 6, предложение 6.5]). Если

$$\sum_{D_i \cap (X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) \neq \emptyset} n_i (D_i \cap (X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}))$$

линейно эквивалентен нулю на $X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}$, то

$$\sum_{D_i \cap (X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) \neq \emptyset} n_i (D_i \cap (X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}})) = (f_{\eta})$$

– дивизор рациональной функции f_{η} на $X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}$. По лемме из п. 4.2 $X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}$ – регулярная схема. Более того, она связна, потому что общий схемный слой собственного плоского морфизма $X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_{\bar{v}}$ неприводим. Поэтому функцию f_{η} можно рассматривать как ограничение на $X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}$ рациональной функции f на $X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}$. Имеем

$$(f) = \sum_{D_i \cap (X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) \neq \emptyset} n_i D_i + \sum_{\alpha} m_{\alpha} D_{\alpha},$$

где D_{α} – неприводимые дивизоры, содержащиеся в специальном слое морфизма $X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_{\bar{v}}$. В частности, D линейно эквивалентен дивизору

$$-\sum_{\alpha} m_{\alpha} D_{\alpha} + \sum_{D_i \cap (X_{\eta} \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) = \emptyset} n_i D_i,$$

неприводимые компоненты которого содержатся в специальном слое морфизма $X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}} \rightarrow \text{Spec } \mathcal{O}_{\bar{v}}$.

Следовательно, $E_{\bar{v}}$ – конечно порожденный дискретный $\text{Gal}(\overline{k(v)}/k(v))$ -модуль. Существует такое конечное расширение $K/k(v)$ конечного поля $k(v)$, что группа $\text{Gal}(\overline{k(v)}/K)$ действует тривиально на $E_{\bar{v}}$. Рассмотрим каноническую точную последовательность инфляции – ограничения [4, гл. IV, § 5, предложение 5.1]

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^1(\text{Gal}(K/k(v)), E_{\bar{v}}) \xrightarrow{\text{inf}} H^1(\text{Gal}(\overline{k(v)}/k(v)), E_{\bar{v}}) \\ &\xrightarrow{\text{res}} H^1(\text{Gal}(\overline{k(v)}/K), E_{\bar{v}}). \end{aligned}$$

По построению группа $\text{Gal}(\overline{k(v)}/K)$ действует тривиально на $E_{\bar{v}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^\rho \oplus [E_{\bar{v}}]_{\text{tors}}$ (неканонический изоморфизм, где $\rho = \text{rank } E_{\bar{v}}$). Поэтому

$$\begin{aligned} H^1(\text{Gal}(\overline{k(v)}/K), E_{\bar{v}}) &= \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\overline{k(v)}/K), E_{\bar{v}}) \\ &= \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\overline{k(v)}/K), \mathbb{Z}^\rho) \oplus \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\overline{k(v)}/K), [E_{\bar{v}}]_{\text{tors}}) \\ &= \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\overline{k(v)}/K), [E_{\bar{v}}]_{\text{tors}}), \end{aligned}$$

так как $\mathbb{Z}^\rho$ не содержит нетривиальных компактных подгрупп. Следовательно, $H^1(\text{Gal}(\overline{k(v)}/K), E_{\bar{v}})$ аннулируется числом $d = \text{Card}([E_{\bar{v}}]_{\text{tors}})$. С другой стороны,

$$\text{Gal}(\overline{k(v)}/K) \xrightarrow{\sim} \hat{\mathbb{Z}} = \prod_p \mathbb{Z}_p,$$

поэтому

$$\begin{aligned} H^1(\text{Gal}(\overline{k(v)}/K), E_{\bar{v}}) &= \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\overline{k(v)}/K), [E_{\bar{v}}]_{\text{tors}}) \\ &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\text{cont}}(\hat{\mathbb{Z}}, [E_{\bar{v}}]_{\text{tors}}) \\ &= \text{Hom}(\hat{\mathbb{Z}}/d\hat{\mathbb{Z}}, [E_{\bar{v}}]_{\text{tors}}) = \text{Hom}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, [E_{\bar{v}}]_{\text{tors}}) \end{aligned}$$

– конечная группа. Поскольку $H^1(\text{Gal}(K/k(v)), E_{\bar{v}})$ – конечная группа [4, гл. IV, § 6, следствие 2], то группа $H^1(\text{Gal}(\overline{k(v)}/k(v)), E_{\bar{v}}) = H^1(v, E)$ конечна. Теорема доказана.

4.4. ТЕОРЕМА. Пусть V – гладкое проективное многообразие над числовым полем k , $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, $V(k) \neq \emptyset$, $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$, $\text{NS}(V \otimes \bar{k}) = \text{NS}(V)$. Предположим, что существует собственный плоский морфизм конечного типа $\pi : X \rightarrow \text{Spec } A$, где A – кольцо целых в k , X – регулярная схема, обший слой морфизма π изоморфен V . Для любой замкнутой точки $v \in \text{Spec } A$ обозначим через $\mathcal{O}_{\bar{v}}$ строгую гензелизацию локального кольца $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{\text{Spec } A, v}$. Если $\pi_* G_m = G_m$ для этальной топологии, то группа

$$\text{Ker} \left[\text{Br}'(X) \rightarrow \prod_{v \text{ неархимедова}} \text{Br}'(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) \right]$$

конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Слой $R^2 \pi_* G_m$ над геометрической точкой $\bar{v} \rightarrow v \in \text{Spec } A$ есть

$$(R^2 \pi_* G_m)_{\bar{v}} = H^2(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}, G_m) = \text{Br}'(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}})$$

(см. [11, гл. III, § 1, теорема 1.15, замечание 1.17(a)]). В силу (4.7) имеется каноническое вложение

$$H^0(X, R^2 \pi_* G_m) \hookrightarrow \prod_{v \text{ неархимедова}} (R^2 \pi_* G_m)_{\bar{v}} = \prod_{v \text{ неархимедова}} \text{Br}'(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}).$$

Следовательно, можно преобразовать точную последовательность (4.3) в точную последовательность

$$0 \rightarrow H^1(\text{Spec } A, R^1 \pi_* G_m) \rightarrow \text{Br}'(X)/\text{Br}(A) \rightarrow \prod_{v \text{ неархимедова}} \text{Br}'(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}).$$

По теореме из п. 4.3 $H^1(\operatorname{Spec} A, R^1\pi_* G_m)$ – конечная группа. В силу глобальной теории полей классов группа $\operatorname{Br}(A)$ конечна. Более точно, $\operatorname{Br}(A) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$, где $r = \max(0, s - 1)$, s – число вещественных точек поля k [9, предложение 2.4]. Поэтому группа

$$\operatorname{Ker} \left[\operatorname{Br}'(X) \rightarrow \prod_{v \text{ неархимедова}} \operatorname{Br}'(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) \right]$$

конечна. Теорема доказана.

4.5. СЛЕДСТВИЕ. Пусть V – гладкое проективное многообразие над числовым полем k , $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, $V(k) \neq \emptyset$, $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$, $\operatorname{NS}(V \otimes \bar{k}) = \operatorname{NS}(V)$. Предположим, что существует собственный плоский морфизм конечного типа $\pi : X \rightarrow \operatorname{Spec} A$, где A – кольцо целых в k , X – регулярная схема, общий слой морфизма π изоморфен V . Для любой замкнутой точки $v \in \operatorname{Spec} A$ обозначим через $\mathcal{O}_v^h$ гензелизацию локального кольца $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, v}$.

Если $\pi_* G_m = G_m$ для этальной топологии, то группы

$$B = \operatorname{Ker} \left[\operatorname{Br}'(X) \rightarrow \prod_{v \text{ неархимедова}} \operatorname{Br}'(X \otimes_A \mathcal{O}_v) \right],$$

$$B^h = \operatorname{Ker} \left[\operatorname{Br}'(X) \rightarrow \prod_{v \text{ неархимедова}} \operatorname{Br}'(X \otimes_A \mathcal{O}_v^h) \right]$$

конечны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Br}'(X) & \rightarrow & \operatorname{Br}'(X \otimes_A \mathcal{O}_v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Br}'(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) & \leftarrow & \operatorname{Br}'(X \otimes_A \mathcal{O}_v^h) \end{array}$$

получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} [\operatorname{Br}'(X) \rightarrow \operatorname{Br}'(X \otimes_A \mathcal{O}_v)] &\hookrightarrow \operatorname{Ker} [\operatorname{Br}'(X) \rightarrow \operatorname{Br}'(X \otimes_A \mathcal{O}_v^h)] \\ &\hookrightarrow \operatorname{Ker} [\operatorname{Br}'(X) \rightarrow \operatorname{Br}'(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}})]. \end{aligned}$$

Поэтому B, B^h – подгруппы конечной группы

$$\operatorname{Ker} \left[\operatorname{Br}'(X) \rightarrow \prod_{v \text{ неархимедова}} \operatorname{Br}'(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) \right].$$

Следствие доказано.

4.6. ЛЕММА. Пусть $\pi : X \rightarrow \operatorname{Spec} A$ – собственный плоский морфизм конечного типа, где X – приведенная и неприводимая схема, A – дискретно нормированное кольцо смешанной характеристики с алгебраически замкнутым полем вычетов, общий слой морфизма π приведен и неприводим.

Если все геометрические слои морфизма π приведены и связны, то канонический морфизм $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X$ является изоморфизмом и $\pi_* G_m = G_m$ для топологии Зариского.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку морфизм π плоский, то для любых аффинных открытых подмножеств $U \hookrightarrow \operatorname{Spec} A$, $W \hookrightarrow \pi^{-1}(U)$ модуль $H^0(W, \mathcal{O}_X)$ является плоским над $H^0(U, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ [12, лекция 6, разд. 3°]. С другой стороны, любой идеал кольца $H^0(U, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ главный. Поэтому плоские $H^0(U, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ -модули – это в точности модули без кручения [3, гл. I, §2, разд. 4, предложение 3]. В частности, $H^0(W, \mathcal{O}_X)$ и $H^0(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_X) \hookrightarrow H^0(W, \mathcal{O}_X)$ – свободные от кручения $H^0(U, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ -модули. Поэтому $\pi_* \mathcal{O}_X$ является плоским $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ -модулем. Поскольку π – собственный морфизм, то $\pi_* \mathcal{O}_X$ – когерентный пучок [6, п. 3.2.1] без кручения над регулярной 1-мерной схемой $\operatorname{Spec} A$. Следовательно, $\pi_* \mathcal{O}_X$ – локально свободный пучок конечного ранга над $\operatorname{Spec} A$.

Канонический морфизм $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X$ инъективен в общей точке схемы $\operatorname{Spec} A$. С другой стороны, для любого открытого аффинного подмножества $U \hookrightarrow \operatorname{Spec} A$ канонический морфизм $H^0(U, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}) \rightarrow H^0(U, \pi_* \mathcal{O}_X) = H^0(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ является морфизмом колец. Поэтому $\operatorname{Ker}[\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X]$ – пучок идеалов в $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$, и он имеет тривиальный слой в общей точке схемы $\operatorname{Spec} A$. Следовательно, $\operatorname{Ker}[\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X]$ тривиально, потому что для любого открытого аффинного подмножества $U \hookrightarrow \operatorname{Spec} A$ имеем $\operatorname{Pic}(U) = 0$ и любой идеал кольца $H^0(U, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ главный. В частности, имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X.$$

Утверждаем, что для любой точки $v \in \operatorname{Spec} A$ выполнено равенство $H^0(\pi^{-1}(v), \mathcal{O}_{\pi^{-1}(v)}) = k(v)$, где $k(v)$ – поле вычетов точки v .

Имеем $H^0(\pi^{-1}(v) \otimes \overline{k(v)}, \mathcal{O}_{\pi^{-1}(v) \otimes \overline{k(v)}}) = \overline{k(v)}$, потому что слой $\pi^{-1}(v)$ геометрически приведен и геометрически связан. Поскольку $k(v)$ – совершенное поле, то каноническое действие группы $\operatorname{Gal}(\overline{k(v)}/k(v))$ на кольце $k(v)(\pi^{-1}(v))$ рациональных функций на $\pi^{-1}(v) \otimes \overline{k(v)}$ определяется формулой

$$({}^\sigma f)(x) = \sigma(f(\sigma^{-1}x))$$

(см. [2, гл. АГ, §14.3]). Если f – регулярная функция на $\pi^{-1}(v) \otimes \overline{k(v)}$, то она постоянна и

$$({}^\sigma f)(x) = \sigma(f(\sigma^{-1}x)) = \sigma(f(x)).$$

Поэтому утверждение следует из соотношений

$$\begin{aligned} k(v) &\hookrightarrow H^0(\pi^{-1}(v), \mathcal{O}_{\pi^{-1}(v)}) \\ &\hookrightarrow [H^0(\pi^{-1}(v) \otimes \overline{k(v)}, \mathcal{O}_{\pi^{-1}(v) \otimes \overline{k(v)}})]^{\operatorname{Gal}(\overline{k(v)}/k(v))} \\ &= [\overline{k(v)}]^{\operatorname{Gal}(\overline{k(v)}/k(v))} = k(v). \end{aligned}$$

В частности, $h^0(v, \mathcal{O}_X) = \dim_{k(v)} H^0(\pi^{-1}(v), \mathcal{O}_{\pi^{-1}(v)})$ – постоянная функция на целой схеме $\operatorname{Spec} A$. По теореме Грауэрта канонический морфизм

$$\pi_* \mathcal{O}_X \otimes k(v) \rightarrow H^0(\pi^{-1}(v), \mathcal{O}_{\pi^{-1}(v)})$$

является изоморфизмом для всех $v \in \operatorname{Spec} A$ [10, гл. III, §12, следствие 12.9]. Следовательно, образ $1 \in H^0(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ при каноническом морфизме $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A} \rightarrow \pi_* \mathcal{O}_X$ порождает слой $\pi_* \mathcal{O}_X$ в любой точке $v \in \operatorname{Spec} A$. Значит, $\pi_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$. Поэтому $\pi_* G_m = G_m$ для топологии Зариского. Лемма доказана.

4.7. ЛЕММА. Пусть V – гладкое проективное многообразие над числовым полем k , $[k : \mathbb{Q}] < \infty$. Предположим, что существует собственный плоский морфизм конечного типа $\pi : X \rightarrow \operatorname{Spec} A$, где A – кольцо целых в k , X – регулярная схема, общий слой морфизма π изоморфен V .

Если все геометрические слои морфизма π приведены и связны, то $\pi_* G_m = G_m$ для этальной топологии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Канонический морфизм $G_m \rightarrow \pi_* G_m$ является изоморфизмом для этальной топологии, если и только если для любой геометрической точки $\bar{v} \rightarrow v \in \operatorname{Spec} A$ канонический морфизм

$$G_{m\bar{v}} \rightarrow (\pi_* G_m)_{\bar{v}}$$

является изоморфизмом [11, гл. II, §2, теорема 2.15(b,c)].

С другой стороны, G_m – групповая схема локально конечного типа над X , поэтому слой $\pi_* G_m$ в геометрической точке $\bar{v} \rightarrow v$ изоморфен

$$H^0(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}, G_m),$$

где $\mathcal{O}_{\bar{v}}$ – строгая гензелизация локального кольца $\mathcal{O}_v = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, v}$ [11, гл. III, §1, теорема 1.15, замечание 1.17(a)].

Предположим, что $v \in \operatorname{Spec} A$ – замкнутая точка. По лемме из п. 4.2 $\mathcal{O}_{\bar{v}}$ – дискретно нормированное кольцо и

$$X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}} \rightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\bar{v}}$$

– регулярная модель гладкого многообразия $X \otimes_A K_{\bar{v}}$ над полем $K_{\bar{v}}$ дробей кольца $\mathcal{O}_{\bar{v}}$. В частности, $\mathcal{O}_{\bar{v}}$ – дискретно нормированное кольцо с алгебраически замкнутым полем вычетов положительной характеристики. Условия леммы из п. 4.6 выполняются для канонического плоского собственного морфизма конечного типа $\pi_{\bar{v}} : X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}} \rightarrow \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\bar{v}}$. По лемме из п. 4.6 имеем $\pi_{\bar{v}*} G_m = G_m$ для топологии Зариского. Следовательно, имеется канонический изоморфизм

$$\begin{aligned} G_{m\bar{v}} &= H^0(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\bar{v}}, G_m) \xrightarrow{\sim} H^0(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\bar{v}}, \pi_{\bar{v}*} G_m) \\ &= H^0(\pi_{\bar{v}}^{-1}(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\bar{v}}), G_m) = H^0(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}, G_m) = (\pi_* G_m)_{\bar{v}}. \end{aligned}$$

Если $v = \eta$ – общая точка схемы $\operatorname{Spec} A$, то $\mathcal{O}_{\bar{\eta}} = \bar{k}$. Поэтому канонический морфизм

$$\bar{k}^\times = H^0(\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{\bar{\eta}}, G_m) \rightarrow H^0(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{\eta}}, G_m) = [H^0(V \otimes \bar{k}, \mathcal{O}_{V \otimes \bar{k}})]^\times = \bar{k}^\times$$

является изоморфизмом.

Следовательно, для любой геометрической точки $\bar{v} \rightarrow v \in \operatorname{Spec} A$ канонический морфизм $G_{m\bar{v}} \rightarrow (\pi_* G_m)_{\bar{v}}$ является изоморфизмом, и $\pi_* G_m = G_m$ для этальной топологии. Лемма доказана.

4.8. ТЕОРЕМА. Пусть V – гладкое проективное многообразие над числовым полем k , $[k : \mathbb{Q}] < \infty$, $V(k) \neq \emptyset$, $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$, $\text{NS}(V \otimes \bar{k}) = \text{NS}(V)$. Предположим, что существует собственный плоский морфизм конечного типа $\pi: X \rightarrow \text{Spec } A$, где A – кольцо целых в k , X – регулярная схема, общий слой морфизма π изоморфен V .

Если все геометрические слои морфизма π приведены и связны, то группы $H^1(\text{Spec } A, R^1\pi_* G_m)$ и

$$\text{Ker} \left[\text{Br}'(X) \rightarrow \prod_{v \text{ неархимедова}} \text{Br}'(X \otimes_A \mathcal{O}_{\bar{v}}) \right]$$

конечны.

Это следует из теорем пп. 4.3, 4.4 и леммы п. 4.7.

Список литературы

1. Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972.
2. Борель А. Линейные алгебраические группы. М.: Мир, 1972.
3. Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. М.: Мир, 1971.
4. Касселс Дж., Фрелих А. Алгебраическая теория чисел. М.: Мир, 1969.
5. Grothendieck A. Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. V. Les schémas de Picard: théorèmes d'existence // Séminaire Bourbaki, 1961–1962. Exposé 232. P. 1–19.
6. Grothendieck A. Eléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents // Publ. Math. IHES. 1963. V. 17.
7. Grothendieck A. Eléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes des schémas // Publ. Math. IHES. 1965. V. 24.
8. Grothendieck A. Eléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes des schémas // Publ. Math. IHES. 1967. V. 32.
9. Grothendieck A. Le groupe de Brauer. III // Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas. Amsterdam: North-Holland, 1968. P. 88–188.
10. Хартсгорн Р. Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.
11. Милн Дж. Этальные когомологии. М.: Мир, 1983.
12. Мамфорд Д. Лекции о кривых на алгебраической поверхности. М.: Мир, 1968.
13. Raynaud M. Spécialisation du foncteur de Picard // Publ. Math. IHES. 1970. V. 39. P. 27–76.
14. Серр Ж.-П. Алгебраические группы и поля классов. М.: Мир, 1968.
15. Танкеев С. Г. Об алгебраических циклах на поверхностях и абелевых многообразиях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1981. Т. 45. № 2. С. 398–434.
16. Танкеев С. Г. Поверхности типа КЗ над числовыми полями и l -адические представления // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 6. С. 1252–1271.
17. Танкеев С. Г. О группе Брауэра // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. № 4. С. 141–162.
18. Танкеев С. Г. О группе Брауэра арифметической схемы // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 2. С. 155–186.
19. Tate J. Algebraic cycles and poles of zeta functions // Arithmetical Algebraic Geometry. N.Y.: Harper and Row, 1965. P. 93–110.
20. Tate J. On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog // Séminaire Bourbaki, 1965–1966. Exposé 306. P. 1–26.
21. Вейль А. Основы теории чисел. М.: Мир, 1972.