Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Баннаи, Т. Миезаки, В. А. Юдин, Элементарный подход для игровых моделей гипотезы Лемера, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 6, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4556>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 12:59:12

УДК 515.5

Е. Баннаи, Т. Миезаки, В. А. Юдин

Элементарный подход для игровых моделей гипотезы Лемера

Используя теорию алгебраических полей, устанавливаем, что ни одна из оболочек решеток $\mathbb{Z}^2$ и A_2 не является 4-дизайном и 6-дизайном соответственно. Разбирается связь сферических дизайнов с мнимым квадратичным полем.

Библиография: 10 наименований.

Ключевые слова: тета-функции, сферические t -дизайны, решетки.

§ 1. Введение

Е. Баннаи и Т. Миезаки [1] показали, что ни одна из непустых оболочек целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$ в $\mathbb{R}^2$ не является сферическим 4-дизайном, а также, что ни одна из непустых оболочек шестиугольной решетки A_2 не является сферическим 6-дизайном. Мы назвали эти результаты игровыми моделями для гипотезы Лемера, поскольку оригинальная гипотеза Лемера о том, что значение тау-функции Рамануджана $\tau(m)$ никогда не равно нулю для любого положительного целого числа m , эквивалентна утверждению о том, что никакая оболочка решетки E_8 (решетка Коркина–Золотарева) не является сферическим 8-дизайном, как было отмечено в работах [2]–[5]. В [1], [6], где последующие игровые модели (гипотезы Лемера) были получены для решеток, связанных с алгебраическими целыми числами мнимых квадратичных числовых полей, количество классов в которых равно 1 или 2, а также в работах [2]–[5] важную роль играет теория модулярных форм. Третий автор настоящей статьи нашел элементарное доказательство того, что ни одна из непустых оболочек целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$ не является сферическим 4-дизайном. Он не применял теорию модулярных форм, а просто использовал язык гауссовых целых чисел $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$. В его доказательстве вместо модулярных форм в некоторых ключевых моментах используются последние результаты Калькуты [7] для гауссовых целых чисел $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$. В настоящей статье изложен элементарный подход и последующие обсуждения, которые вели между собой три автора по данному вопросу и связанным с ним темам.

В настоящей статье мы получаем следующие результаты:

- (i) приводится элементарное доказательство для решетки $\mathbb{Z}^2$ с использованием результатов Калькуты;
- (ii) доказано, что результаты Калькуты по существу эквивалентны мультипликативному свойству чисел неэквивалентных целочисленных идеалов некоторого мнимого квадратичного числового поля, что хорошо известно и также доказано элементарным путем;

Работа второго автора выполнена при поддержке Японского Сообщества по развитию науки. Работа третьего автора выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 11-01-00417, 11-01-00735).

(iii) используя данный элементарный подход (т. е. без применения модулярных форм), приводим альтернативное доказательство для решетки, связанной с алгебраическими целыми числами любого мнимого квадратичного числового поля, количество классов которого равно 1 (здесь также возможно избежать применения результатов Калькуты [7]);

(iv) формулируем и доказываем обобщение результатов Калькуты [7] для $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ и мнимых квадратичных числовых полей с количеством классов, равным 1.

Таким образом, мы можем получить игровые модели для решетки алгебраических целых чисел мнимых квадратичных полей с количеством классов, равным 1, при помощи элементарного подхода, т. е. без использования модулярных форм и результатов Калькуты [7].

Настоящая статья организована следующим образом. В § 2 сделаем обзор понятий сферических дизайнов и теории мнимых квадратичных полей, а также приведем результаты Калькуты [7]. В § 3 разберем вопрос отсутствия сферических дизайнов в оболочках решеток. В пп. 3.1.1, 3.1.2 покажем, что справедлива

ТЕОРЕМА 1.1. *Оболочки $\mathbb{Z}^2$ -решетки не являются сферическими 4-дизайнами.*

В п. 3.2 мы покажем, что результаты Калькуты по существу эквивалентны мультипликативному свойству чисел неэквивалентных целочисленных идеалов определенного мнимого квадратичного числового поля. В пп. 3.3.1 докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1.2. *Оболочки в A_2 -решетке не являются сферическими 6-дизайнами.*

В пп. 3.3.2 покажем, что справедлива

ТЕОРЕМА 1.3. *Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ – мнимое квадратичное поле, количество классов в котором равно 1, и $d \neq 1, 3$, т. е. d – одно из следующих чисел: 2, 7, 11, 19, 43, 67, 163. Тогда оболочки в решетке, связанной с K , не являются сферическими 2-дизайнами.*

В § 4 обобщим результаты Калькуты.

§ 2. Предварительные сведения

2.1. Сферические дизайны. Понятие сферического t -дизайна было введено в [8]. Для любого положительного целого числа t конечное непустое множество X на единичной сфере

$$S^{n-1} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

называется *сферическим t -дизайном* в S^{n-1} , если выполняется условие

$$\frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} f(x) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{S^{n-1}} f(x) d\sigma(x) \quad (2.1)$$

для всех многочленов $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, степень которых не более t . Правая часть равенства (2.1) означает нормированный поверхностный интеграл на сфере, а $|S^{n-1}|$ – поверхностный объем сферы S^{n-1} . Суть сферического t -дизайна состоит в том, что среднее значение интеграла любого многочлена со

степенью не больше t на сфере заменяется средним значением на конечном множестве из сферы. Любое конечное подмножество X из $S^{n-1}(r)$ – сферы с радиусом r – также называют сферическим t -дизайном, если $\frac{1}{r}X$ – сферический t -дизайн на единичной сфере S^{n-1} .

Обозначим через $\text{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$ совокупность однородных гармонических многочленов степени j на $\mathbb{R}^n$. Хорошо известно, что X – сферический t -дизайн тогда и только тогда, когда условие

$$\sum_{x \in X} P(x) = 0$$

верно для всех $P \in \text{Harm}_j(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq j \leq t$. Более того, если $X \subset S^1(r)$, то при $\text{Harm}_k(S^1) = \langle \text{Re}(z^k), \text{Im}(z^k) \rangle$ справедливо следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть $X = \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \subset S^1$, где S^1 – множество комплексных чисел с модулем, равным единице, а именно $S^1 \simeq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Тогда X – сферический t -дизайн, если и только если

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^k = 0$$

для всех $k \in \{1, \dots, t\}$.

Для решетки Λ и любого положительного действительного числа $m > 0$ оболочка нормы m решетки Λ определяется следующим образом:

$$\Lambda_m := \{x \in \Lambda \mid (x, x) = m\} = \Lambda \cap S^{n-1}(m),$$

где (x, y) – скалярное произведение. Тета-ряд $\Theta_\Lambda(q)$ решетки Λ – это формальный степенной ряд

$$\Theta_\Lambda(q) = \sum_{x \in \Lambda} q^{(x, x)} = \sum_{m=0}^{\infty} |\Lambda_m| q^m.$$

Например, когда Λ – это $\mathbb{Z}^2$ -решетка, то

$$\Theta_\Lambda(q) = \theta_3^2(q) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} r_2(m) q^m = 1 + 4q + 4q^2 + 4q^4 + 8q^5 + 4q^8 + \dots,$$

где $\theta_3(q) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} 2q^{i^2}$, а коэффициент $r_2(m)$ – число представлений m в виде суммы двух квадратов.

2.2. Мнимые квадратичные поля. В этом пункте мы сделаем обзор теории мнимого квадратичного поля. Пусть $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ – мнимое квадратичное поле, а $\mathcal{O}_K$ – кольцо алгебраических целых чисел данного поля. Пусть Cl_K – классы идеалов. В настоящей статье рассмотрим только тот случай, когда $|\text{Cl}_K| = 1$. Итак, обозначим через $\mathfrak{o}$ класс главных идеалов, а через d_K – дискриминант K :

$$d_K = \begin{cases} -4d, & \text{если } -d \equiv 2, 3 \pmod{4}, \\ -d, & \text{если } -d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2.1 [9, с. 87]. Пусть d – положительное свободное от квадратов целое число, а $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Тогда

$$\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta_d,$$

где

$$\theta_d = \begin{cases} \sqrt{-d}, & \text{если } -d \equiv 2, 3 \pmod{4}, \\ \frac{1 + \sqrt{-d}}{2}, & \text{если } -d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Как следствие теоремы 2.1, получаем, что кольцо $\mathcal{O}_K$ можно считать решеткой в $\mathbb{R}^2$ с базисом

$$L_o = \begin{cases} (1, 0), (1, \sqrt{-d}), & \text{если } -d \equiv 2, 3 \pmod{4}, \\ (1, 0), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{-d}}{2}\right), & \text{если } -d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Хорошо известно, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством приведенных квадратичных форм $f(x, y)$ с фундаментальным дискриминантом $d_K < 0$ и классами дробных идеалов мнимого квадратичного поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ [9, с. 94]. А именно, для дробного идеала $\mathfrak{a} = \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$ имеем квадратичную форму $ax^2 + bxy + cy^2$, где $a = \alpha\bar{\alpha}/N(\mathfrak{a})$, $b = (\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta)/N(\mathfrak{a})$ и $c = \beta\bar{\beta}/N(\mathfrak{a})$. И наоборот, для квадратичной формы $ax^2 + bxy + cy^2$ имеем дробный идеал $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}(b + \sqrt{d_K})/(2a)$. Отметим, что $N(\mathfrak{a})$ – норма $\mathfrak{a}$, а $\bar{\alpha}$ – комплексное сопряжение α . Например, $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-1}$ является главным идеалом $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, который соответствует квадратичной форме $x^2 + y^2$ решетки $\mathbb{Z}^2$.

Определим группу автоморфизмов квадратичной формы $f(x, y)$ следующим образом:

$$U_f = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid f(\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y) = f(x, y) \right\}.$$

Тогда для $n \geq 1$ число неэквивалентных решений уравнения $f(x, y) = n$ при действии U_f будет равно числу целых идеалов нормы n [9].

Через $\sharp U_f$ обозначим количество элементов из U_f .

ТЕОРЕМА 2.2 [9, с. 63]. Пусть $f(x, y)$ – приведенная квадратичная форма с фундаментальным дискриминантом $D < 0$ и U_f – группа автоморфизмов $f(x, y)$. Тогда

$$\sharp U_f = \begin{cases} 6, & \text{если } D = -3, \\ 4, & \text{если } D = -4, \\ 2, & \text{если } D < -4. \end{cases}$$

Данные классические результаты были предложены Гауссом, Дирихле и др. Пусть $\mathfrak{a}$ – класс идеала, а $f_{\mathfrak{a}}(x, y)$ – приведенная квадратичная форма, соответствующая $\mathfrak{a}$. Кроме того, пусть $L_{\mathfrak{a}}$ – решетка, соответствующая $f(x, y)$. Обозначим через $N(A)$ норму идеала A . Тогда, используя теорему 2.2, имеем

$$\sum_{x \in L_{\mathfrak{a}}} q^{(x, x)} = 1 + \sharp U_f \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n q^n,$$

где $\Theta_n = \sharp\{A \mid A \text{ – целый идеал дробного идеала } \mathfrak{a}, N(A) = n\}$. Более того, пусть $\{\mathfrak{a}_i\}_{i=1}^s$ – полное множество классов идеала мнимого квадратичного поля,

количество классов которого равно s , и пусть $\{L_{a_i}\}_{i=1}^s$ – множество решеток, соответствующих $\{a_i\}_{i=1}^s$. Пусть $a(m)$ – m -й коэффициент суммы тета-функций

$$\sum_{x \in L_{a_1}} q^{(x,x)} + \dots + \sum_{x \in L_{a_s}} q^{(x,x)} = \sum_{m=0}^{\infty} a(m) q^m.$$

Тогда, поскольку разложение идеала на простые множители единственно, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2 [9, с. 101]. Числа $a'(m) := a(m)/\#U_{f_{a_i}}$ обладают мультипликативным свойством. А именно, $a'(mn) = a'(m)a'(n)$, если $(m, n) = 1$.

Пусть, например, $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ – единственный класс идеала $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$. Тогда $L_{\mathfrak{o}}$ – это $\mathbb{Z}^2$ -решетка и

$$\Theta_{\mathbb{Z}^2}(q) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} q^{(x,x)} = \theta_3^2(q) = \sum_{m=0}^{\infty} a(m) q^m,$$

где $\theta_3(q) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} 2q^{i^2}$. Следовательно, коэффициенты $\frac{a(m)}{4}$ имеют мультипликативное свойство.

Наконец приведем классические теоремы, которые нам понадобятся далее.

Через (a/b) обозначим символ Лежандра.

ТЕОРЕМА 2.3 [10, предложение 5.16]. Классифицируем простые идеалы квадратичного поля следующим образом:

1) если p – нечетное простое число и $(d_K/p) = 1$ (соответственно, $d_K \equiv 1 \pmod{8}$), то $(p) = P\bar{P}$ (соответственно, $(2) = P\bar{P}$), где P и $\bar{P}$ – простые идеалы, $P \neq \bar{P}$, $N(P) = N(\bar{P}) = p$ (соответственно, $N(P) = 2$);

2) если p – нечетное простое число и $(d_K/p) = -1$ (соответственно, $d_K \equiv 5 \pmod{8}$), то $(p) = P$ (соответственно, $(2) = P$), где P – простой идеал с $N(P) = p^2$ (соответственно, $N(P) = 4$);

3) если $p \mid d_K$, то $(p) = P^2$, где P – простой идеал с $N(P) = p$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $F(m)$ – число целых идеалов нормы m поля K . Пусть p – простое число. Тогда если $p \neq 2$, то

$$F(p^e) = \begin{cases} e+1 & \text{при } (d_K/p) = 1, \\ \frac{1+(-1)^e}{2} & \text{при } (d_K/p) = -1, \\ 1 & \text{при } p \mid d_K, \end{cases}$$

и если $p = 2$, то

$$F(2^e) = \begin{cases} e+1 & \text{при } d_K \equiv 1 \pmod{8}, \\ \frac{1+(-1)^e}{2} & \text{при } d_K \equiv 5 \pmod{8}, \\ 1 & \text{при } 2 \mid d_K. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $(d_K/p) = 1$, т. е. $(p) = P\bar{P}$ и $P \neq \bar{P}$, то, поскольку $P, \bar{P}$ – единственные целые идеалы нормы p , имеем $F(p) = 2$. Более того, целыми идеалами нормы p^e являются $P^e, P^{e-1}\bar{P}, \dots, (\bar{P})^e$. Таким образом, имеем $F(p^e) = e+1$. Другие случаи могут быть доказаны аналогично.

2.3. Результаты Калькуты. Приведем результаты Калькуты, которые понадобятся нам далее.

ЛЕММА 2.1 [7]. Пусть $z \neq 0$ – гауссово целое число. Число z^n является действительным для некоторого натурального n тогда и только тогда, когда $\arg z$ кратно $\frac{\pi}{4}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.1 [7]. Единственными рациональными значениями $\operatorname{tg} \frac{k\pi}{n}$ являются 0 и ± 1 .

СЛЕДСТВИЕ 2.2 [7]. Пусть $z_i = a_i + b_i\sqrt{-1} \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$. Если верно

$$\frac{k\pi}{n} = \sum_{j=1}^l m_j \operatorname{arctg} \frac{b_j}{a_j},$$

где все переменные являются рациональными целыми числами, то $\frac{k\pi}{n} = \frac{s\pi}{4}$ для некоторого целого s .

В [7] показано, что из леммы 2.1 вытекают следствия 2.1, 2.2. Здесь мы покажем, что из следствия 2.1 вытекает лемма 2.1 и из следствия 2.2 также вытекает лемма 2.1. Таким образом, три данных утверждения эквивалентны друг другу.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1. Из следствия 2.1 вытекает лемма 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z = a + b\sqrt{-1}$. Если z^n действительное, то

$$(a + b\sqrt{-1})^n \in \mathbb{R} \Rightarrow n \arg(a + b\sqrt{-1}) = k\pi \Rightarrow \arg(a + b\sqrt{-1}) = \frac{k\pi}{n}.$$

По следствию 2.1 рациональными значениями $\operatorname{tg} \frac{k\pi}{n}$ являются 0 и ± 1 . Следовательно, $\arg z$ кратно $\frac{\pi}{4}$. Если $\arg z$ кратно $\frac{\pi}{4}$, то $z^4 \in \mathbb{R}$. Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.2. Из следствия 2.2 вытекает лемма 2.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие 2.1 является специальным случаем следствия 2.2.

§ 3. Несуществование сферических дизайнов

В настоящем параграфе мы разберем вопрос об отсутствии сферических дизайнов. Сначала введем обозначения. Пусть K – мнимое квадратичное поле, а L – решетка, соответствующая $\mathcal{O}_K$. Тогда для

$$m = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s} q_{s+1}^{a_{s+1}} \cdots q_u^{a_u} r_{u+1}^{a_{u+1}} \cdots r_v^{a_v},$$

где $(d_K/p_i) = 1$, $(d_K/q_i) = -1$ и $r_i | d_K$, определим следующие множества:

$$\begin{aligned} X(L_m) &:= \left\{ \frac{a + b\theta_d}{\sqrt{m}} \mid (a + b\theta_d) \in \mathcal{O}_K, N(a + b\theta_d) = m \right\} \\ &\simeq \left\{ \frac{x}{\sqrt{m}} \mid x \in L, (x, x) = m \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X(L_m)_{p_k} &:= \left\{ \frac{a + b\theta_d}{\sqrt{p_k^{a_k}}} \mid (a + b\theta_d) \in \mathcal{O}_K, N(a + b\theta_d) = p_k^{a_k} \right\} \\
&\simeq \left\{ \frac{x}{\sqrt{p_k^{a_k}}} \mid x \in L, (x, x) = p_k^{a_k} \right\}, \tag{3.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W(L_m) &:= \{ \arg(a + b\theta_d) \mid (a + b\theta_d) \in \mathcal{O}_K, N(a + b\theta_d) = m \}, \\
W(L_m)_{p_k} &:= \{ \arg(a + b\theta_d) \mid (a + b\theta_d) \in \mathcal{O}_K, N(a + b\theta_d) = p_k^{a_k} \}.
\end{aligned}$$

Для решетки L определим следующие функции:

$$I_{L_m}(t) := \frac{1}{|X(L_m)|} \sum_{x \in X(L_m)} x^t, \quad I_{L_m, p_k}(t) := \frac{1}{|X(L_m)_{p_k}|} \sum_{x \in X(L_m)_{p_k}} x^t. \tag{3.2}$$

Из предложения 2.1 следует, что L_m – сферический t -дизайн тогда и только тогда, когда $I_{L_m}(k) = 0$ для всех $k \in \{1, \dots, t\}$. Следующая теорема хорошо известна.

ТЕОРЕМА 3.1 [1], [4], [6]. Пусть L является 2-мерной евклидовой решеткой. Тогда L_m – сферический 1-дизайн для любого положительного целого числа m , если $L_m \neq \emptyset$. Более того, $(\mathbb{Z}^2)_m$ (соответственно, $(A_2)_m$) – сферический 3-дизайн (соответственно, 5-дизайн), если $(\mathbb{Z}^2)_m \neq \emptyset$ (соответственно, $(A_2)_m \neq \emptyset$).

3.1. Случай $\mathbb{Z}^2$ -решетки. Пусть $\varphi_k \in (0, 2\pi)$ – минимальный аргумент числа $z \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}$, норма которого есть p_k , где $(d_K/p_k) = 1$. Тогда верна следующая

ЛЕММА 3.1. Пусть мы имеем ту же систему обозначений. Тогда для любого простого числа p_k такого, что $(d_K/p_k) = 1$, множество аргументов имеет вид

$$W(\mathbb{Z}_m^2)_{p_k} = \begin{cases} \{0, \pm 2\varphi_k, \pm 4\varphi_k, \dots, \pm a_k \varphi_k\} \oplus \left\{ \frac{l\pi}{2}, 0 \leq l < 4 \right\}, & \text{если } a_k \text{ четное,} \\ \{\pm \varphi_k, \pm 3\varphi_k, \dots, \pm a_k \varphi_k\} \oplus \left\{ \frac{l\pi}{2}, 0 \leq l < 4 \right\}, & \text{если } a_k \text{ нечетное,} \end{cases}$$

где $X \oplus Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$ и $W(\mathbb{Z}_m^2)_{p_k}$ определено в (3.1). В частности, $|W((\mathbb{Z}^2)_m)_{p_k}| = 4(1 + a_k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если a_k четное, то значения аргументов $W(\mathbb{Z}_m^2)_{p_k}$ равны $\pm \varphi_k \pm \dots \pm \varphi_k \pmod{\frac{\pi}{2}}$, что является следующим множеством: $\{0, \pm 2\varphi_k, \pm 4\varphi_k, \dots, \pm a_k \varphi_k\} \pmod{\frac{\pi}{2}}$. Теперь утверждаем, что при $s \neq s'$ выполняется $s\varphi_k \not\equiv s'\varphi_k \pmod{\frac{\pi}{2}}$. Предположив противное, найдем $\varphi_k = \frac{n\pi}{2t}$, где $n, t \in \mathbb{N}$, значит, $z^{2t} \in \mathbb{R}$. Однако согласно лемме 2.1 аргумент φ_k кратен $\frac{\pi}{4}$. Тогда если $\varphi_k = \frac{\pi}{4}$, то $z = c(1 + \sqrt{-1})$ для некоторых $c \in \mathbb{R}$ и $p_k = 2c^2$. Получили противоречие, поскольку p_k – простое число, сравнимое с 1 по $\pmod{4}$. Если $\varphi_k = \frac{\pi}{2}$, то $z = c(\sqrt{-1})$ для некоторых $c \in \mathbb{R}$ и $p_k = c^2$. Получили противоречие, так как p_k – простое число. Для других случаев можем получить противоречие аналогично. Таким образом, имеем $|W((\mathbb{Z}^2)_m)_{p_k}| = 4(1 + a_k)$. В случае, если a_k нечетное, доказательство проводится аналогично.

3.1.1. Доказательство теоремы 1.1 с применением результатов Калькуты. Для $m = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s} q_{s+1}^{a_{s+1}} \dots q_u^{a_u}$, где $p_i \equiv 1 \pmod{4}$ и $q_i \equiv 3 \pmod{4}$, определим множества из (3.1). Обозначим через $(a + b\sqrt{-1})(a - b\sqrt{-1})$, где $b > 0$,

разложение идеала на простые множители (p_i) и через P_i (соответственно, $\overline{P_i}$) простой идеал $(a + b\sqrt{-1})$ (соответственно, $(a - b\sqrt{-1})$). Покажем, что

$$\frac{|W((\mathbb{Z}^2)_m)|}{4} = \frac{|W((\mathbb{Z}^2)_m)_{p_1}|}{4} \dots \frac{|W((\mathbb{Z}^2)_m)_{p_s}|}{4}. \quad (3.3)$$

Если равенство (3.3) неверно, то $m_1\varphi_1 + \dots + m_s\varphi_s \equiv m'_1\varphi_1 + \dots + m'_s\varphi_s \pmod{\frac{\pi}{2}}$, а именно $(m_1 - m'_1)\varphi_1 + \dots + (m_s - m'_s)\varphi_s \equiv 0 \pmod{\frac{\pi}{2}}$. Таким образом, существуют $a'_1, \dots, a'_s$ такие, что $(z) := P_1^{a'_1} \dots P_s^{a'_s}$ и $z^2 \in \mathbb{R}$. Тогда $\overline{P_i}$ равно P_j для некоторых j , потому что $z^2 \in \mathbb{R}$ и $p_i \equiv 1 \pmod{4}$. Получено противоречие, так как $\{P_i\}_{i=1}^s$ — множество простых идеалов с разными нормами.

Тогда имеем

$$\begin{aligned} I_{(\mathbb{Z}^2)_m}(t) &= \frac{1}{|X((\mathbb{Z}^2)_m)|} \sum_{x \in X((\mathbb{Z}^2)_m)} x^t = \frac{1}{|X((\mathbb{Z}^2)_m)|} \sum_{x \in X((\mathbb{Z}^2)_m)} e^{it \arg(x)} \\ &= \prod_{k=1}^s \frac{1}{|X((\mathbb{Z}^2)_m)_{p_k}|} \sum_{x \in X((\mathbb{Z}^2)_m)_{p_k}} e^{it \arg(x)} = \prod_{k=1}^s I_{(\mathbb{Z}^2)_m, p_k}(t). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Пусть $\varphi_k \in (0, 2\pi)$ — минимальный аргумент числа $z \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}$, норма которого равна p_k . Тогда

$$I_{(\mathbb{Z}^2)_m, p_k}(4) = \frac{\sin(4(1 + a_k)\varphi_k)}{(1 + a_k)\sin(4\varphi_k)}, \quad (3.5)$$

поскольку справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} 1 + 2\cos(2x) + 2\cos(4x) + \dots + 2\cos(2kx) &= \frac{\sin((2k+1)x)}{\sin x}, \\ \cos x + \cos(3x) + \cos(5x) + \dots + \cos((2k-1)x) &= \frac{\sin(2kx)}{2\sin x}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Если $I_{(\mathbb{Z}^2)_m, p_k}(4) = 0$, а именно $4\varphi_k = \frac{n\pi}{1+a_k}$ для некоторых $n \in \mathbb{Z}$, то по следствию 2.1 имеем $\operatorname{tg}(4\varphi_k) = \pm 1$, а именно $\varphi_k = \frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}, \frac{5\pi}{16}, \frac{7\pi}{16}$. Тогда $\operatorname{tg} \varphi_k$ — иррациональное число. С другой стороны, φ_k — аргумент $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$, следовательно, $\operatorname{tg} \varphi_k$ является рациональным числом. Противоречие. Таким образом, $(\mathbb{Z}^2)_m$ не является сферическим 4-дизайном.

3.1.2. Доказательство теоремы 1.1 с использованием мультипликативного свойства. Здесь мы еще раз докажем теорему 1.1 с использованием мультипликативного свойства из предложения 2.2. Пусть $a(m)$ — m -й коэффициент тета-ряда $\mathbb{Z}^2$ -решетки:

$$\Theta_{\mathbb{Z}^2}(q) = \sum_{i=0}^{\infty} a(i)q^i,$$

и пусть $a'(m) := \frac{a(m)}{4}$. Тогда в силу предложений 2.2, 2.3 функция $a'(m)$ мультипликативна и $a'(p^e) = F(p^e)$, когда m — степень простого числа. Следовательно, для $m = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s} q_{s+1}^{a_{s+1}} \dots q_u^{a_u} 2^c$, где $p_i \equiv 1 \pmod{4}$ и $q_i \equiv 3 \pmod{4}$, имеем

$$a(m) = 4(1 + a_1) \dots (1 + a_s). \quad (3.7)$$

Для $m = p_1^{a_1} \dots p_s^{a_s} q_{s+1}^{a_{s+1}} \dots q_u^{a_u}$, где $p_i \equiv 1 \pmod{4}$ и $q_i \equiv 3 \pmod{4}$, определим множества из (3.1). В силу (3.7) справедливо равенство (3.3). Следовательно,

из (3.4) имеем

$$I_{(\mathbb{Z}^2)_m}(t) = \prod_{k=1}^s I_{(\mathbb{Z}^2)_{m,p_k}}(t).$$

Пусть $\varphi_k \in (0, 2\pi)$ – минимальный аргумент числа $z \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-1})}$, норма которого равна p_k . Тогда из второго равенства в (3.6) вытекает

$$I_{(\mathbb{Z}^2)_{m,p_k}}(4) = \frac{\sin(4(1+a_k)\varphi_k)}{(1+a_k)\sin(4\varphi_k)}.$$

Пусть α – минимальное значение a_k , для которого $I_{(\mathbb{Z}^2)_{m,p_k}}(4) = 0$. Если предположить, что $\alpha > 1$, то

$$\frac{\sin(4(1+\alpha)\varphi_k)}{(1+\alpha)\sin(4\varphi_k)} = 0,$$

откуда $4\varphi_k = \frac{n\pi}{1+\alpha}$ для некоторых $n \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, для $a_k = 1$

$$\frac{\sin(8\varphi_k)}{2\sin(4\varphi_k)} = \cos(4\varphi_k) = 8\cos^4\varphi_k - 8\cos^2\varphi_k + 1. \quad (3.8)$$

Здесь положим $z := 2\cos(4\varphi_k)$. Число z , будучи удвоенным косинусом рационального кратного 2π , является алгебраически целым числом. Более того, если мы положим $e^{i(\varphi_k)} := a + b\sqrt{-1}$, то $\cos\varphi_k = \frac{a}{\sqrt{p_k}}$ и в силу равенства (3.8) получаем, что z – рациональное число, а именно рациональное целое число. Следовательно, $z = \pm 1$ или $z = \pm 2$.

Если $z = \pm 1$, то $\varphi_k = \frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{12}, \frac{4\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$. Однако $\operatorname{tg}\varphi_k$ – иррациональное число, а $\frac{b}{a}$ – рациональное число. Противоречие.

Если $z = \pm 2$, то $\varphi_k = 0, \frac{\pi}{4}$, откуда следует, что $|X((\mathbb{Z}^2)_m)_{p_k}| = 4$. Однако $|X((\mathbb{Z}^2)_m)_{p_k}| = 8$, поскольку $p_k \equiv 1 \pmod{4}$. Снова получено противоречие.

Теперь достаточно показать, что $I_{(\mathbb{Z}^2)_{m,p_k}}(4) \neq 0$ при $\alpha = 1$. Если

$$I_{(\mathbb{Z}^2)_{m,p_k}}(4) = \cos(4\varphi_k) = 0,$$

то $\varphi_k = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}$, однако $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ и $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}$ – иррациональные числа и $\frac{b}{a}$ – рациональное число. Противоречие. Следовательно, $(\mathbb{Z}^2)_m$ не является сферическим 4-дизайном. При $m' = 2^c m$ доказательство получается в результате поворота $W((\mathbb{Z}^2)_{m'})$ на угол $\frac{k\pi}{4}$ при некотором $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Таким образом, $(\mathbb{Z}^2)_{m'}$ не является сферическим 4-дизайном.

3.2. Результаты Калькуты и мультипликативное свойство. Ранее в пп. 3.1.1, 3.1.2 случай решетки $\mathbb{Z}^2$ был разобран как с использованием результата Калькуты, так и с помощью мультипликативного свойства коэффициентов Фурье тета-ряда. В настоящем пункте покажем, что результат Калькуты в сущности эквивалентен мультипликативному свойству (3.3) тета-ряда

$$\Theta_{\mathbb{Z}^2}(q) = \sum_{m=0}^{\infty} |W((\mathbb{Z}^2)_m)| q^m.$$

В лемме 3.1 и пп. 3.1.1 мы показали, что из результатов Калькуты следует мультипликативное свойство (3.3).

С другой стороны, предположим справедливость мультипликативного свойства, а именно равенства (3.3). Пусть $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ – гауссово целое число такое, что $\arg z \notin \{0, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{4}, \pi\}$, пусть $N((z)) = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s} q_{s+1}^{a_{s+1}} \cdots q_u^{a_u} 2^{a_{u+1}}$,

где $(d_K/p_i) = 1$ и $(d_K/q_i) = -1$, и пусть $(z) = P_1^{a_1} \cdots P_s^{a_s} Q_{s+1}^{a_{s+1}} \cdots Q_u^{a_u} (1 + \sqrt{-1})^{a_{u+1}}$ – разложение идеала на простые множители, где $N(P_i) = p_i$ и $N(Q_i) = q_i^2$. Тогда $(z)^n$ и $(\overline{z})^n$ – идеалы нормы $N(z)^n$, потому что P_i и $\overline{P_i}$ – простые идеалы нормы p_i . Предположим, что $z^n \in \mathbb{R}$. Тогда имеем $(z)^n = (\overline{z})^n$. Следовательно, количество неэквивалентных идеалов нормы $N(z)^n$ меньше, чем $(1+a_1) \cdots (1+a_s)$. Это противоречит мультипликативному свойству, по которому количество неэквивалентных идеалов нормы $N(z)^n$ равно $(1+a_1) \cdots (1+a_s)$. Отсюда следует, что мультипликативное свойство эквивалентно результату Калькуты, а именно лемме 2.1.

3.3. Общие случаи для количества классов, равного 1. В настоящем пункте мы докажем теоремы 1.2, 1.3, не применяя результат Калькуты.

3.3.1. *Случай решетки A_2 .* Пусть $a(m)$ – m -й коэффициент тета-ряда

$$\Theta_{A_2}(q) = \sum_{i=0}^{\infty} a(i)q^i,$$

и пусть $a'(m) := \frac{a(m)}{6}$. Тогда функция $a'(m)$ является мультипликативной и $a'(p^e) = F(p^e)$, когда m – степень простого числа. Следовательно, для $m = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s} q_{s+1}^{a_{s+1}} \cdots q_u^{a_u} 3^c$, где $p_i \equiv 1 \pmod{3}$ и $q_i \equiv 2 \pmod{3}$, имеем

$$a(m) = 6(1+a_1) \cdots (1+a_s). \quad (3.9)$$

Для $m = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s} q_{s+1}^{a_{s+1}} \cdots q_u^{a_u}$, где $p_i \equiv 1 \pmod{3}$ и $q_i \equiv 2 \pmod{3}$, определим множества из (3.1). Пусть $I_{(A_2)_m}(t)$ и $I_{(A_2)_m, p_k}(t)$ – функции, определенные в (3.2). В силу равенства (3.9) верно следующее равенство:

$$\frac{|W((A_2)_m)|}{6} = \frac{|W((A_2)_m)_{p_1}|}{6} \cdots \frac{|W((A_2)_m)_{p_s}|}{6}.$$

Тогда, ввиду (3.4) имеем

$$I_{(A_2)_m}(t) = \prod_{k=1}^s I_{(A_2)_m, p_k}(t).$$

Пусть $\varphi_k \in (0, 2\pi)$ – минимальный аргумент числа $z \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-3})}$ с нормой p_k . Тогда

$$I_{(A_2)_m, p_k}(6) = \frac{\sin(6(1+a_k)\varphi_k)}{(1+a_k)\sin(6\varphi_k)} \quad (3.10)$$

в силу второго равенства из (3.6). Пусть α – наименьшее значение чисел a_k , для которых $I_{(A_2)_m, p_k}(6) = 0$. Если $\alpha > 1$, то

$$\frac{\sin(6(1+\alpha)\varphi_k)}{(1+\alpha)\sin(6\varphi_k)} = 0,$$

т. е. $6\varphi_k = \frac{n\pi}{1+\alpha}$ для некоторых $n \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, для $a_k = 1$

$$\frac{\sin(12\varphi_k)}{2\sin(6\varphi_k)} = \cos(6\varphi_k) = 32 \cos^6 \varphi_k - 48 \cos^4 \varphi_k + 18 \cos^2 \varphi_k - 1. \quad (3.11)$$

Здесь положим $z := 2 \cos(6\varphi_k)$. Число z , будучи удвоенным косинусом рационального кратного 2π , является алгебраическим целым числом. Более того,

если мы положим $e^{i(\varphi_k)} = a + b\theta_d$, где θ_d определено в (2.2), то $\cos \varphi_k = \frac{a+b/2}{\sqrt{p_k}}$ и вследствие равенства (3.11) имеем, что z – рациональное число, а именно рациональное целое число. Следовательно, $z = \pm 1$ или $z = \pm 2$.

Если $z = \pm 1$, то $\varphi_k = \frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{18}, \frac{4\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}$. Однако если $\varphi_k = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}$, то

$$\frac{1}{2} = \sin(3\varphi_k) = 3 \sin \varphi_k - 4 \sin^3 \varphi_k = \frac{3\sqrt{3}b(p_k - b^2)}{2p_k\sqrt{p_k}}.$$

Получили противоречие. Если $\varphi_k = \frac{2\pi}{18}, \frac{4\pi}{18}$, то

$$\pm \frac{1}{2} = \cos(3\varphi_k) = 4 \cos^3 \varphi_k - 3 \cos \varphi_k = \frac{((2a+b)^2 - 3p_k)(2a+b)}{2p_k\sqrt{p_k}}.$$

Снова получили противоречие.

Если $z = \pm 2$, то $\varphi_k = 0, \frac{\pi}{6}$. Если $\varphi_k = 0$, то $|X((A_2)_m)_{p_k}| = 6$, однако $|X((A_2)_m)_{p_k}| = 12$, так как $p_k \equiv 1 \pmod{3}$. Противоречие. Если $\varphi_k = \frac{\pi}{6}$, то $\sin \varphi_k = \frac{1}{2}$ – рациональное число, а $\frac{\sqrt{3}b}{2\sqrt{p_k}}$ – иррациональное число, так как $p_k \equiv 1 \pmod{3}$. Противоречие.

Осталось показать, что $I_{(A_2)_m, p_k}(6) \neq 0$ при $\alpha = 1$. Если

$$I_{(A_2)_m, p_k}(6) = \cos(6\varphi_k) = 0,$$

то $\varphi_k = \frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{12}$. Если $\varphi_k = \frac{\pi}{12}$, то

$$\frac{1}{2} = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{12}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}b(2a+b)}{2p_k}.$$

Если $\varphi_k = \frac{3\pi}{12}$, то

$$1 = \sin\left(2 \cdot \frac{3\pi}{12}\right) = 2 \sin \frac{3\pi}{12} \cos \frac{3\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}b(2a+b)}{2p_k}.$$

Это невозможно, поскольку $p_k \equiv 1 \pmod{3}$. Таким образом, $(A_2)_m$ не является сферическим 6-дизайном. При $m' = 3^c m$ доказательство получается в результате поворота $W((A_2)_{m'})$ на угол $\frac{k\pi}{3}$ при некотором $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$. Следовательно, $(A_2)_{m'}$ не является сферическим 6-дизайном.

3.3.2. Общие случаи для количества классов, равного 1. Пусть L – решетки, количество классов в которых равно 1, кроме случаев $\mathbb{Z}^2$ - и A_2 -решеток. Пусть $a(m)$ – m -й коэффициент тета-ряда

$$\Theta_L(q) = \sum_{i=0}^{\infty} a(i)q^i.$$

Положим $a'(m) := \frac{a(m)}{2}$. Тогда функция $a'(m)$ является мультипликативной и $a'(p^e) = F(p^e)$, когда m – степень простого. Следовательно, для $m = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s} q_{s+1}^{a_{s+1}} \cdots q_u^{a_u} r_{u+1} \cdots r_v^{a_v}$, где $(d_K/p_i) = 1$, $(d_K/q_i) = -1$ и $r_i \mid d_K$, имеем

$$a(m) = 2(1 + a_1) \cdots (1 + a_s). \quad (3.12)$$

Для $m = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s} q_{s+1}^{a_{s+1}} \cdots q_u^{a_u}$ определим множества из (3.1). Пусть $I_{L_m}(t)$ и $I_{L_m, p_k}(t)$ – функции, определенные в (3.2). На основании (3.12) верно равенство

$$\frac{|W(L_m)|}{2} = \frac{|W(L_m)_{p_1}|}{2} \cdots \frac{|W(L_m)_{p_s}|}{2}.$$

Следовательно, поскольку получено равенство (3.4), имеем

$$I_{L_m}(t) = \prod_{k=1}^s I_{L_m, p_k}(t).$$

Пусть $\varphi_k \in (0, 2\pi)$ – минимальный аргумент числа $z \in \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d})}$, норма которого равна p_k . Тогда

$$I_{L_m, p_k}(2) = \frac{\sin(2(1 + a_k)\varphi_k)}{(1 + a_k)\sin(2\varphi_k)}, \quad (3.13)$$

поскольку верно второе равенство в (3.6). Пусть α – наименьшее значение целых чисел a_k , для которых $I_{L_m, p_k}(2) = 0$. Если предположить, что $\alpha > 1$, то

$$\frac{\sin(2(1 + \alpha)\varphi_k)}{(1 + \alpha)\sin(2\varphi_k)} = 0,$$

т. е. $2\varphi_k = \frac{n\pi}{1+\alpha}$ для некоторых $n \in \mathbb{Z}$. С другой стороны, для $a_k = 1$

$$\frac{\sin(4\varphi_k)}{2\sin(2\varphi_k)} = \cos(2\varphi_k) = 2\cos^2\varphi_k - 1. \quad (3.14)$$

Здесь положим $z := 2\cos(2\varphi_k)$. Число z , будучи удвоенным косинусом рационального кратного 2π , является алгебраическим целым числом. Более того, если положим $e^{i(\varphi_k)} = a + b\theta_d$, то $\cos\varphi_k = \frac{\operatorname{Re}(a+b\theta_d)}{\sqrt{p_k}}$ и вследствие равенства (3.14) имеем, что z – рациональное число, а именно рациональное целое число. Следовательно, $z = \pm 1$ или $z = \pm 2$.

Если $z = \pm 1$, то $\varphi_k = \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ и $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \operatorname{tg} \frac{2\pi}{6} = \sqrt{3}, \operatorname{tg} \frac{4\pi}{6} = -\sqrt{3}$ или $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, однако

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}b}{a}, & \text{если } d = 2, \\ \frac{b\sqrt{d}}{2a + b} & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Это невозможно. Если $z = \pm 2$, то $\varphi_k = 0, \frac{\pi}{2}$, т. е. $a = 0$ или $b = 0$. Получено противоречие, поскольку $a^2 + b^2 = p_k$ и p_k – простое число.

Достаточно показать, что $I_{L_m, p_k}(2) \neq 0$ при $\alpha = 1$. Если

$$I_{L_m, p_k}(2) = \cos(2\varphi_k) = 0,$$

то $\varphi_k = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$, однако это невозможно, потому что $\operatorname{Re}(a + b\theta_d) \neq \pm \operatorname{Im}(a + b\theta_d)$. Значит, L_m не является сферическим 2-дизайном. Для $m' = r_{u+1}^{a_{u+1}} \cdots r_v^{a_v} m$, когда $r_i \mid d_K$, доказательство получается в результате поворота $W(L_{m'})$ на угол $k\pi$ для некоторого $k \in \{0, 1\}$. Следовательно, во всех вариантах L_m не является сферическим 2-дизайном.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Равенства (3.5), (3.10), (3.13) по существу аналогичны равенству (2) из [1, с. 3] и равенству (5) из [6, с. 5]. Однако способы получения равенств (3.5), (3.10), (3.13) и (2), (5) отличаются друг от друга. После подсчета правой части равенства (3.2) получаем равенства (3.5), (3.10), (3.13). С другой стороны, используя рекуррентное соотношение коэффициентов весовых тета-рядов, связанных с решеткой, которое является свойством нормализованной собственной формы Гекке, получим равенства (2), (5).

§ 4. Обобщение результатов Калькуты

Здесь мы приведем и обобщим результаты Калькуты. Пусть K – мнимое квадратичное поле, количество классов в котором равно 1.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $z \neq 0$ – элемент из $\mathcal{O}_K$. Число z^n является действительным для некоторого натурального n тогда и только тогда, когда $\arg z$ кратно $\frac{\pi}{4}$, если $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$, кратно $\frac{\pi}{6}$, если $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, и кратно $\frac{\pi}{2}$ в других случаях.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [7] разобран случай $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$. Разберем случай $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, другие случаи могут быть доказаны аналогично.

Если $\arg z$ кратно $\frac{\pi}{6}$, то z^6 – действительное число. Предположим, что $z^n = m$, где $z = a + b\theta_d$, $\theta_d = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ и $m \in \mathbb{R}$. Можно считать, что z не единица и примитивно, т.е. $\gcd(a, b) = 1$. Пусть $(z) = P_1^{a_1} \cdots Q_1^{b_1} \cdots \left(\frac{3+\sqrt{-3}}{2}\right)^c$, где $(d_K/N(P_i)) = 1$, $N(Q_i) = q_i^2$, $(d_K/q_i) = -1$, – разложение на простые идеалы. Поскольку z примитивно, имеем $b_i = 0$. Более того, условие $z^n = m$ означает, что $\bar{P}_i \mid (z)$, т.е. $P_i \bar{P}_i \mid (z)$. Следовательно, $a_i = 0$, поскольку z примитивно. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta_d$ – целочисленное кольцо мнимого квадратичного поля, количество классов в котором равно 1.

- 1) Если $\operatorname{tg} \frac{k\pi}{n} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \frac{b}{a}$ для некоторых $z \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-1}$, то $\operatorname{tg} \frac{k\pi}{n} = 0, \pm 1$.
- 2) Если $\operatorname{tg} \frac{k\pi}{n} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \frac{\sqrt{3}b}{2a+b}$ для некоторых $z \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\mathbb{Z}(-1 + \sqrt{-3})$, то $\operatorname{tg} \frac{k\pi}{n} = 0, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \sqrt{3}$.
- 3) Если $\operatorname{tg} \frac{k\pi}{n} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}$ для некоторых $z \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta_d$, $d \neq 1, 3$, то $\operatorname{tg} \frac{k\pi}{n} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что $z^n \in \mathbb{R}$. Теперь в силу теоремы 4.1 следствие доказано.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Пусть мы имеем ту же систему обозначений, и пусть $z_i = a_i + b_i\theta_d \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta_d$. Если равенство

$$\frac{k\pi}{n} = \sum_{j=1}^l m_j \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(z_j)}{\operatorname{Re}(z_j)}$$

верно, то

$$\frac{k\pi}{n} = \begin{cases} \frac{s\pi}{4}, & \text{если } K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1}), \\ \frac{s\pi}{6}, & \text{если } K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3}), \\ \frac{s\pi}{2} & \text{в других случаях} \end{cases}$$

для некоторого $s \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\frac{k\pi}{n} = \sum_{j=1}^l m_j \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(z_j)}{\operatorname{Re}(z_j)} = \sum_{j=1}^l m_j \arg(a_j + b_j\theta_d) = \arg \prod_{j=1}^l (a_j + b_j\theta_d)^{m_j} \pmod{2\pi}.$$

Положим

$$z := \prod_{j=1}^l (a_j + b_j \theta_d)^{m_j}.$$

Отметим, что $z^n \in \mathbb{R}$. Тогда, используя теорему 4.1, получаем доказательство следствия.

Авторы выражают благодарность С. В. Конягину за участие в обсуждении. Он ставит интересный вопрос: существует ли окружность, центр которой не принадлежит $\mathbb{Z}^2$, такая, что точки решетки $\mathbb{Z}^2$, расположенные на ней, образуют 4-дизайн?

Список литературы

1. E. Bannai, T. Miezaki, “Toy models for D. H. Lehmer’s conjecture”, *J. Math. Soc. Japan*, **62**:3 (2010), 687–705.
2. P. de la Harpe, C. Pache, “Cubature formulas, geometrical designs, reproducing kernels, and Markov operators”, *Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects* (Gaeta, Italy, 2003), Progr. Math., **248**, Birkhäuser, Basel, 2005, 219–267.
3. P. de la Harpe, C. Pache, B. Venkov, “Construction of spherical cubature formulas using lattices”, *Алгебра и анализ*, **18**:1 (2006), 162–186; англ. пер.: P. de la Harpe, C. Pache, B. Venkov, “Construction of spherical cubature formulas using lattices”, *St. Petersburg Math. J.*, **18**:1 (2007), 119–139.
4. C. Pache, “Shells of selfdual lattices viewed as spherical designs”, *Internat. J. Algebra Comput.*, **5**:5–6 (2005), 1085–1127.
5. Б. В. Венков, “О четных унимодулярных экстремальных решетках”, *Алгебраическая геометрия и ее приложения*, Тр. МИАН СССР, **165**, Наука, М., 1984, 43–48; англ. пер.: B. V. Venkov, “On even unimodular extremal lattices”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **165** (1985), 47–52.
6. E. Bannai, T. Miezaki, *Toy models for D. H. Lehmer’s conjecture*. II, arXiv: abs/1004.1520.
7. J. S. Calcut, “Gaussian integers and arctangent identities for π ”, *Amer. Math. Monthly*, **116**:6 (2009), 515–530.
8. P. Delsarte, J. M. Goethals, J. J. Seidel, “Spherical codes and designs”, *Geometriae Dedicata*, **6**:3 (1977), 363–388.
9. D. B. Zagier, *Zetafunktionen und quadratische Körper. Eine Einführung in die höhere Zahlentheorie*, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1981.
10. D. A. Cox, *Primes of the form $x^2 + ny^2$. Fermat, class field theory and complex multiplication*, Wiley-Intersci. Publ., Wiley, New York, 1989.

Е. БАННАИ (E. BANNAI)
Department of Mathematics,
Shanghai Jiao Tong University, China
E-mail: bannai@sjtu.edu.cn

Поступило в редакцию
23.03.2010

Т. МИЕЗАКИ (T. MIEZAKI)
Department of Mathematics,
Oita National College of Technology, Japan
E-mail: miezaki@oita-ct.ac.jp

В. А. ЮДИН (V. A. YUDIN)
Московский энергетический институт
(технический университет)
E-mail: vlayudin@mtu-net.ru