Общероссийский математический портал

А. А. Толстоногов, Теорема Боголюбова при ограничениях, порожденных эволюционной управляемой системой второго порядка, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 5, 177–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/im456>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 13:17:37

УДК 517.998

А. А. Толстоногов

Теорема Боголюбова при ограничениях, порожденных эволюционной управляемой системой второго порядка

Доказан аналог теоремы Н. Н. Боголюбова с ограничениями в виде управляемой эволюционной системы второго порядка. Основное содержание этой теоремы составляют взаимосвязи между значениями невыпуклого по управлению интегрального функционала на решениях управляемой системы с невыпуклыми ограничениями на управление и значениями выпукленного по управлению функционала на решениях управляемой системы с выпукленными ограничениями. Наряду с этим теорема также устанавливает взаимосвязи между самими решениями невыпуклой и выпукленной управляемыми системами. В качестве приложения рассмотрена задача минимизации невыпуклого интегрального функционала на решениях невыпуклой управляемой системы. Подробно рассмотрен пример нелинейной гиперболической системы.

Библиография: 19 наименований.

§ 1. Введение и постановка задачи

В 1930 г. Н. Н. Боголюбов доказал следующую теорему [1], [2].

Пусть $T = [0, 1]$, $f: T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Тогда для любой функции $x(\cdot) \in W_{\infty,1}(T, \mathbb{R}^n)$ найдется последовательность функций $x_m(\cdot) \in C_1(T, \mathbb{R}^n)$, $m \geq 1$, такая, что $x_m(0) = x(0)$, $x_m(1) = x(1)$, $x_m(\cdot)$, $m \geq 1$, стремится к $x(\cdot)$ равномерно на T и, кроме того,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_T f(t, x_m(t), \dot{x}_m(t)) dt \leq \int_T f^{**}(t, x(t), \dot{x}(t)) dt. \quad (1.1)$$

Здесь $f^{**}(t, x, u)$ – биполяра (вторая сопряженная) [2], [3] функции $u \rightarrow f(t, x, u)$, $W_{\infty,1}(T, \mathbb{R}^n)$ – пространство абсолютно непрерывных функций из T в $\mathbb{R}^n$, у которых производные являются элементами пространства $L^\infty(T, \mathbb{R}^n)$.

Позднее [4] теорема Н. Н. Боголюбова была доказана при ограничениях, описываемых дифференциальным включением

$$\dot{x} \in F(t, x), \quad x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1,$$

где $F: T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ – непрерывное в метрике Хаусдорфа многозначное отображение, значениями которого являются строго выпуклые, компактные множества из $\mathbb{R}^n$ с непустой внутренностью.

В настоящей работе рассматривается следующая задача.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта INTAS 2000-15 и гранта фонда Cariplo 2000 (Centro Volta).

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство, V – сепарабельное рефлексивное банахово пространство, которое плотно, непрерывно и компактно вложено в H . Отождествляя H с его топологически сопряженным, имеем вложения $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V^*$, где V^* – топологически сопряженное к V . При этом все вложения являются непрерывными, плотными и компактными. Такая тройка пространств обычно называется *эволюционной* или *тройкой Гельфанда*.

Пусть Y – сепарабельное рефлексивное банахово пространство, моделирующее пространство управлений. Рассмотрим следующую управляемую систему, описываемую нелинейным эволюционным уравнением второго порядка

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + A(t, \dot{x}(t)) + Bx(t) &= f(t, x(t), \dot{x}(t))u(t), \\ x(0) = x_0 \in V, \quad \dot{x}(0) &= y_0 \in H, \end{aligned} \quad (1.2)$$

со смешанными ограничениями на управление

$$u(t) \in U(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad (1.3)$$

где $A: T \times V \rightarrow V^*$ – нелинейный оператор, $B: V \rightarrow V^*$ – линейный оператор, $U: T \times H \times H \rightarrow Y$ – многозначное отображение с невыпуклыми, замкнутыми значениями, $f: T \times H \times H \rightarrow \mathcal{L}(Y, H)$ – нелинейное отображение. Здесь $\mathcal{L}(Y, H)$ – пространство непрерывных линейных операторов из Y в H .

Наряду с ограничениями (1.3) мы рассмотрим ограничения

$$u(t) \in \overline{\text{co}} U(t, x(t), \dot{x}(t)), \quad (1.4)$$

где $\overline{\text{co}}$ обозначает замкнутую выпуклую оболочку множества.

Решение управляемой системы (1.2), (1.3) – это пара $\{(x, \dot{x}), u\}$, состоящая из траектории $(x, \dot{x})$ и управления u , почти всюду удовлетворяющая (1.2), (1.3).

Для числовой функции $g: T \times H \times H \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ рассмотрим функцию

$$g_U(t, x, y, u) = \begin{cases} g(t, x, y, u), & u \in U(t, x, y), \\ +\infty, & u \notin U(t, x, y). \end{cases} \quad (1.5)$$

Пусть $g_U^{**}(t, x, y, u)$ – биполярная функция $u \rightarrow g_U(t, x, y, u)$.

Цель настоящей работы – установить взаимосвязь между решениями управляемых систем (1.2), (1.3) и (1.2), (1.4) и значениями интегралов

$$\int_T g(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) dt, \quad \int_T g_U^{**}(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) dt, \quad (1.6)$$

определенных на решениях этих систем.

При определенных предположениях докажем аналог теоремы Боголюбова при ограничениях, порожденных управляемой системой.

Работа состоит из семи параграфов: §1 является введением, где приведена постановка задачи; в §2 вводятся основные обозначения, определения и предположения; в §3 доказывается ряд вспомогательных результатов; в §4 рассматриваются вопросы существования решений управляемой системы; в §5 дано доказательство теоремы Боголюбова; §6 представляет собой приложение теоремы Боголюбова к изучению невыпуклой оптимизационной задачи; в §7 рассматривается пример нелинейной управляемой гиперболической системы, для которого дается интерпретация полученных абстрактных результатов.

§ 2. Основные определения, обозначения и предположения

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – сепарабельное банахово пространство, $T = [0, 1]$ – отрезок числовой прямой с мерой Лебега μ и с σ -алгеброй Σ μ -измеримых подмножеств. Далее мы используем следующие обозначения: 2^X – совокупность всех непустых подмножеств из X , cX – совокупность всех непустых замкнутых подмножеств из X и cbX – совокупность всех непустых, замкнутых, ограниченных подмножеств из X . Для множества $A \subset X$ через $co A$ обозначается выпуклая оболочка A , а через $\overline{co} A$ – замкнутая выпуклая оболочка A . На множестве cbX определим метрику Хаусдорфа

$$D(A, B) = \max \left\{ \sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A) \right\},$$

где $d(x, B)$ – расстояние от точки x до множества B .

Многозначное отображение $F: X \rightarrow 2^X$ называется *полунепрерывным снизу по Вьеторису в точке x_0* , если для любого открытого множества $E \subset X$, $F(x_0) \cap E \neq \emptyset$, существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что $F(x) \cap E \neq \emptyset$ для любого $x \in V(x_0)$.

Многозначное отображение $F: X \rightarrow 2^X$ называется *полунепрерывным сверху по Хаусдорфу в точке $x_0 \in X$* , если для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 такая, что $F(x) \subset F(x_0) + \varepsilon B$ для всех $x \in V(x_0)$, где B – единичный открытый шар в X с центром в нуле.

Многозначное отображение $F: E \rightarrow cX$ называется *измеримым*, если множество $F^{-1}(E) = \{t \in T; F(t) \cap E \neq \emptyset\}$ измеримо для любого замкнутого множества $E \subset X$. Если $F: T \times X \rightarrow cX$, то измеримость F (совместная измеримость) означает, что $F^{-1}(E) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}_X$, где $\Sigma \otimes \mathcal{B}_X$ – σ -алгебра подмножеств из $T \times X$, порожденная множествами $A \times B$, $A \in \Sigma$, $B \in \mathcal{B}_X$, и $\mathcal{B}_X$ – σ -алгебра борелевских множеств из X . Очевидно, что если $F: T \rightarrow cX$ измеримо ($F: T \times X \rightarrow cX$ совместно измеримо), то $F^{-1}(E) \in \Sigma$ ($F^{-1}(E) \in \Sigma \otimes \mathcal{B}_X$) для любого открытого множества $E \subset X$.

Функцию $g: T \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, где $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ – расширенная числовая прямая, назовем *нормальным интегрантом* [3], если:

- а) для почти всех $t \in T$ функция $x \rightarrow g(t, x)$ полунепрерывна снизу;
- б) существует борелевская функция $\tilde{g}: T \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ такая, что $g(t, \cdot) = \tilde{g}(t, \cdot)$ для почти всех $t \in T$.

Пусть (V, H, V^*) – эволюционная тройка пространств. Через $\|\cdot\|$ (соответственно, $|\cdot|_H$, $\|\cdot\|_*$) обозначим норму в пространстве V (соответственно, в H, V^*). Под $\langle x, x' \rangle$, $x \in V$, $x' \in V^*$, мы понимаем каноническую билинейную форму, устанавливающую двойственность между V и V^* , а $(\cdot, \cdot)$ означает скалярное произведение в H . Как это принято, будем считать, что форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и скалярное произведение согласованы, т.е. сужение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ на $V \times H$ совпадает с $(\cdot, \cdot)$.

Для p , $2 \leq p < \infty$, введем следующие пространства: $\mathcal{V} = L^p(T, V)$, $\mathcal{H} = L^p(T, H)$, $\mathcal{H}^* = L^q(T, H)$, $\mathcal{V}^* = L^q(T, V^*)$, $1/p + 1/q = 1$, и пространство $\mathcal{W} = \{\nu \in \mathcal{V}; \dot{\nu} \in \mathcal{V}^*\}$, где производная понимается в смысле векторных распределений. Пространство $\mathcal{W}$ с нормой $\|\nu\| = (\|\nu\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\dot{\nu}\|_{\mathcal{V}^*}^2)^{1/2}$ является сепарабельным, рефлексивным, банаховым и $\mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{V}^*$. Известно, что любой элемент $\nu \in \mathcal{W}$ после изменений его значений на множестве меры нуль можно отождествить с элементом пространства $C(T, H)$. При этом вложение $\mathcal{W} \hookrightarrow C(T, H)$ является непрерывным, а вложение $\mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{H}$ является компактным [5].

Для банахова пространства X через w - X обозначим то, что пространство X наделено слабой $\sigma(X, X^*)$ -топологией [6]. Такое же обозначение мы используем и для подмножеств из X . Во всех остальных случаях предполагаем, что пространство X и его подмножества наделены сильной (нормированной) топологией.

Решением управляемой системы (1.2), (1.3) мы называем пару $\{(x, \dot{x}), u\}$, состоящую из траектории $(x, \dot{x}) \in C(T, V) \times \mathcal{W} \hookrightarrow C(T, V) \times C(T, H) \hookrightarrow C(T, H) \times C(T, H)$ и управления $u \in L^q(T, Y)$, удовлетворяющих почти всюду (п.в.) уравнению (1.2) и включению (1.3). Аналогично определяется решение управляемой системы (1.2), (1.4). Через $\mathcal{R}_U(x_0, y_0) \subset C(T, V) \times \mathcal{W} \times L^q(T, Y) \hookrightarrow C(T, V) \times C(T, H) \times L^q(T, Y) \hookrightarrow C(T, H) \times C(T, H) \times L^q(T, Y)$ мы обозначаем множество всех решений управляемой системы (1.2), (1.3), а через $\mathcal{R}_{\overline{co}U}(x_0, y_0)$ – множество всех решений управляемой системы (1.2), (1.4). Обозначения $\mathcal{T}r_U(x_0, y_0)$ и $\mathcal{T}r_{\overline{co}U}(x_0, y_0)$ мы используем для множеств траекторий управляемых систем (1.2), (1.3) и (1.2), (1.4).

Введем следующие гипотезы.

1) Гипотеза $\Gamma(A)$, $A: T \times V \rightarrow V^*$ – оператор такой, что:

- а) отображение $t \rightarrow A(t, x)$ измеримо для каждого x ;
- б) отображение $x \rightarrow A(t, x)$ монотонно и хеминепрерывно, т.е. $\langle x - y, A(t, x) - A(t, y) \rangle \geq 0$ для любых $x, y \in V$ (монотонность) и для любых $x, y, z \in V$ отображение $\lambda \rightarrow \langle z, A(t, x + \lambda y) \rangle$ является непрерывным на отрезке $[0, 1]$ (хеминепрерывность);
- в) $\langle x, A(t, x) \rangle \geq c_1 \|x\|^p - d_1 |x|_H^2$ п.в., $c_1, d_1 > 0$;
- г) $\|A(t, x)\|_* \leq a(t) + b \|x\|^{p-1}$ п.в., $a(\cdot) \in L^q(T, \mathbb{R}^+)$, $b > 0$.

2) Гипотеза $\Gamma(B)$, $B: V \rightarrow V^*$ – линейный непрерывный симметрический и коэрцитивный оператор, т.е. $B \in \mathcal{L}(V, V^*)$, $\langle y, Bx \rangle = \langle x, By \rangle$, $x, y \in V$ (симметричность) и $\langle x, Bx \rangle \geq c_2 \|x\|^2$, $c_2 > 0$ (коэрцитивность).

3) Гипотеза $\Gamma(f)$, $f: T \times H \times H \rightarrow \mathcal{L}(Y, H)$ – отображение такое, что:

- а) отображение $t \rightarrow f(t, x, y)u$ измеримо для любых $x, y \in H$, $u \in Y$;
- б) отображение $(x, y) \rightarrow f(t, x, y)^* h$ непрерывно п.в. для любых $h \in H$, где $f(t, x, y)^*$ – оператор, сопряженный к $f(t, x, y)$;
- в) $\|f(t, x, y)\|_{\mathcal{L}(Y, H)} \leq m$ п.в., $m > 0$. (2.1)

4) Гипотеза $\Gamma(U)$, $U: T \times H \times H \rightarrow cY$ – многозначное отображение такое, что:

- а) отображение $t \rightarrow U(t, x, y)$ измеримо для любых $x, y \in H$;
- б) $D(U(t, x, y), U(t, x_1, y_1)) \leq k_1(t)(|x - x_1|_H + |y - y_1|_H)$, (2.2)
где $k_1(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$;
- в) $\|U(t, x, y)\|_Y = \sup\{\|u\|_Y; u \in U(t, x, y)\} \leq a_1(t) + b_1(|x|_H^2 + |y|_H^2)^{1/q}$ (2.3)
п.в., $a_1(\cdot) \in L^q(T, \mathbb{R}^+)$, $b_1 > 0$.

5) Гипотеза $\Gamma(g)$, $g: T \times H \times H \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ – отображение типа Каратеодори такое, что:

- а) $|g(t, x, y, u) - g(t, x_1, y_1, v)| \leq k_2(t)(|x - x_1|_H + |y - y_1|_H) + k_3 \|u - v\|_Y$ (2.4)
п.в., $k_2(\cdot) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$, $k_3 > 0$;
- б) $|g(t, x, y, u)| \leq a_2(t) + b_2(t)(|x|_H + |y|_H) + b_3 \|u\|_Y$ (2.5)
п.в., $a_2(\cdot), b_2(\cdot) \in L^q(T, \mathbb{R}^+)$, $b_3 > 0$.

6) Гипотеза $\Gamma_1(g)$, отображение $g(t, x, y, u)$ представимо в виде:

$$\text{а) } g(t, x, y, u) = g_1(t, x, y) + g_2(t, u), \quad (2.6)$$

где $g_1(t, x, y)$, $g_2(t, u)$ – функции типа Каратеодори;

$$\text{б) } |g_2(t, u) - g_2(t, v)| \leq k_3 \|u - v\|_Y \text{ п.в.}, k_3 > 0; \quad (2.7)$$

$$\text{в) } |g_1(t, x, y)| \leq a_2(t) + b_2(t)(|x|_H + |y|_H) \text{ п.в.}, \quad (2.8)$$

$$|g_2(t, u)| \leq a_2(t) + b_3 \|u\|_Y \text{ п.в.} \quad (2.9)$$

Всюду далее, если не оговорено противное, мы считаем, что гипотезы $\Gamma(A)$, $\Gamma(B)$, $\Gamma(f)$, $\Gamma(U)$, в) имеют место.

Пусть Z – сепарабельное рефлексивное банахово пространство. Кроме стандартной нормы на пространстве $L^q(T, Z)$, $1/p + 1/q = 1$, $2 \leq p < \infty$, будем рассматривать так называемую слабую норму

$$\|u\|_w = \sup_{0 \leq t' \leq t \leq 1} \left\| \int_{t'}^t u(s) ds \right\|_Z. \quad (2.10)$$

Пространство $L^q(T, Z)$ с нормой (2.10) будем обозначать через $L_w^q(T, Z)$. Очевидно, норма (2.10) эквивалентна норме

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} \left\| \int_0^t u(s) ds \right\|_Z. \quad (2.11)$$

§ 3. Вспомогательные результаты

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) + A(t, \dot{x}(t)) + Bx(t) &= \varphi(t) \quad \text{п.в.}, \\ x(0) = x_0 \in V, \quad \dot{x}(0) &= y_0 \in H. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Решение уравнения (3.1) при фиксированном $\varphi \in \mathcal{H}^*$ – это пара $(x, \dot{x}) \in C(T, V) \times \mathcal{W} \hookrightarrow C(T, V) \times C(T, H) \hookrightarrow C(T, H) \times C(T, H)$, удовлетворяющая почти всюду (3.1). Известно [5], что для каждого $\varphi \in \mathcal{H}^*$ уравнение (3.1) имеет единственное решение $(x = x(\varphi), \dot{x} = \dot{x}(\varphi))$.

Пусть $\lambda(\cdot) \in L^q(T, \mathbb{R}^+)$ и

$$S_\lambda = \{\varphi \in \mathcal{H}^*: |\varphi(t)|_H \leq \lambda(t) \text{ п.в.}\}.$$

Рассмотрим отображение $\varphi \rightarrow (x(\varphi), \dot{x}(\varphi))$, которое каждому $\varphi \in S_\lambda$ ставит в соответствие единственное решение $(x = x(\varphi), \dot{x} = \dot{x}(\varphi))$ уравнения (3.1).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Отображение $\varphi \rightarrow (x(\varphi), \dot{x}(\varphi))$ является непрерывным из множества $w\text{-}S_\lambda$ в множества $C(T, V) \times w\text{-}\mathcal{W}$, $C(T, V) \times C(T, H)$ и $C(T, H) \times C(T, H)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя хорошо известные априорные оценки (см., например, [7]), можно показать, что существует $M > 0$ такое, что

$$\|\dot{x}(\varphi)\|_{\mathcal{W}} \leq M \quad \text{для любого } \varphi \in S_\lambda. \quad (3.2)$$

Поскольку S_λ является метризуемым выпуклым компактом пространства $w\text{-}\mathcal{H}^*$, то нам достаточно показать секвенциальную непрерывность отображения $\varphi \rightarrow (x(\varphi), \dot{x}(\varphi))$. Пусть $\varphi_n, \varphi \in S_\lambda$ таковы, что

$$\varphi_n \rightarrow \varphi \quad \text{в } w\text{-}\mathcal{H}^* \quad (3.3)$$

и $(x_n = x(\varphi_n), \dot{x}_n = \dot{x}_n(\varphi_n))$ (соответственно, $(x = x(\varphi), \dot{x} = \dot{x}(\varphi))$) – решения уравнения (3.1). Используя (3.2) и рефлексивность пространства $\mathcal{W}$, переходя к подпоследовательности, если необходимо, можно считать, что

$$\dot{x}_n \rightarrow y \quad \text{в } w\text{-}\mathcal{W}^* \quad (3.4)$$

для некоторого $y \in \mathcal{W}$. Покажем, что $y = \dot{x}$. Воспользовавшись уравнением (3.1), получим

$$\begin{aligned} & \langle \dot{x}_n(t) - \dot{x}(t), \ddot{x}_n(t) - \ddot{x}(t) \rangle + \langle \dot{x}_n(t) - \dot{x}(t), A(t, \dot{x}(t)) - A(t, \dot{x}(t)) \rangle \\ & \quad + \langle \dot{x}_n(t) - \dot{x}(t), Bx_n(t) - Bx(t) \rangle \\ & = (\dot{x}_n(t) - \dot{x}(t), \varphi_n(t) - \varphi(t)) \quad \text{п. в.} \end{aligned}$$

Из монотонности оператора $A(t, \cdot)$ и симметричности оператора B вытекает

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\dot{x}_n(t) - \dot{x}(t)|_H^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle x_n(t) - x(t), B(x_n(t) - x(t)) \rangle \\ & \leq (\dot{x}_n(t) - \dot{x}(t), \varphi_n(t) - \varphi(t)) \quad \text{п. в.} \end{aligned}$$

Интегрируя последнее неравенство и учитывая коэрцитивность и симметричность оператора B , получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\dot{x}_n(t) - \dot{x}(t)|_H^2 + \frac{c_2}{2} \|x_n(t) - x(t)\|^2 \\ & \leq \int_0^t (\dot{x}_n(s) - \dot{x}(s), \varphi_n(s) - \varphi(s)) ds. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Поскольку вложение $\mathcal{W} \hookrightarrow \mathcal{H}$ компактно, то в соответствии с (3.4) мы получим

$$\dot{x}_n \rightarrow y \quad \text{в } \mathcal{H}. \quad (3.6)$$

Поэтому согласно (3.3) и (3.6) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^t (\dot{x}_n(s) - \dot{x}(s), \varphi_n(s) - \varphi(s)) ds = \int_0^t (\dot{x}_n(s) - y(s), \varphi_n(s) - \varphi(s)) ds \\ & \quad + \int_0^t (y(s) - \dot{x}(s), \varphi_n(s) - \varphi(s)) ds \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тогда в соответствии с (3.5)

$$x_n(t) \rightarrow x(t) \quad \text{в } V, \quad t \in T. \quad (3.7)$$

Поскольку $(x_n, \dot{x}_n), (x, \dot{x}) \in C(T, V) \times \mathcal{W}$, то, воспользовавшись теоремами 2.1, 2.2 из [8, гл. 1, § 2], получаем, что в пространстве V имеют место равенства

$$\begin{aligned} x_n(t) &= x_0 + \int_0^t \dot{x}_n(s) ds, \quad t \in T, \\ x(t) &= x_0 + \int_0^t \dot{x}(s) ds, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Для произвольного $\xi \in V^*$ из (3.4), (3.7) вытекает, что

$$\begin{aligned} \langle x_n(t), \xi \rangle &= \langle x_0, \xi \rangle + \int_0^t \langle \dot{x}_n(s), \xi \rangle ds \rightarrow \langle x(t), \xi \rangle \\ &= \langle x_0, \xi \rangle + \int_0^t \langle y(s), \xi \rangle ds, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Поскольку $\xi \in V^*$ – произвольный элемент, то в соответствии с (3.8), (3.9) получаем, что $\dot{x}(t) = y(t)$ п.в. Следовательно, $\dot{x} = y$ и согласно (3.6)

$$\dot{x}_n \rightarrow \dot{x} \quad \text{в } \mathcal{H}. \quad (3.10)$$

Воспользовавшись (3.5), мы приходим к неравенству

$$\frac{1}{2} |\dot{x}_n(t) - \dot{x}(t)|_H^2 + \frac{c_2}{2} \|x_n(t) - x(t)\|^2 \leq \|\dot{x}_n - \dot{x}\|_{\mathcal{H}} \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{H}^*}.$$

Так как $\varphi_n \in S_\lambda$, то $\|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{H}^*} \leq N$ для всех $n \geq 1$ при некотором $N > 0$. Поэтому из (3.10) вытекает неравенство

$$\frac{1}{2} |\dot{x}_n(t) - \dot{x}(t)|_H^2 + \frac{c_2}{2} \|x_n(t) - x(t)\|^2 \leq \|\dot{x}_n - \dot{x}\|_{\mathcal{H}} N \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, $x_n \rightarrow x$ в $C(T, V)$ и $\dot{x}_n \rightarrow \dot{x}$ в $C(T, H)$.

Из единственности решения уравнения (3.1) заключаем, что последовательность $(x_n, \dot{x}_n)$, $n \geq 1$, сходится к $(x, \dot{x})$ в $C(T, V) \times w\text{-}\mathcal{W}$ и в $C(T, V) \times C(T, H)$. Поскольку вложение $V \hookrightarrow H$ непрерывно, то последовательность $(x_n, \dot{x}_n)$, $n \geq 1$, сходится к $(x, \dot{x})$ и в $C(T, H) \times C(T, H)$. Утверждение доказано.

ЛЕММА 3.1. *Существуют $M_i > 0$, $i = 1, \dots, 4$, такие, что для любого решения $\{(x, \dot{x}), u\}$ системы (1.2), (1.4) (u , следовательно, системы (1.2), (1.3)) справедливы оценки*

$$|x(t)|_H \leq M_1, \quad |\dot{x}(t)|_H \leq M_2, \quad t \in T, \quad (3.11)$$

$$\|\dot{x}\|_{\mathcal{V}} \leq M_3, \quad \|\ddot{x}\|_{\mathcal{V}^*} \leq M_4. \quad (3.12)$$

Доказательство априорных оценок (3.11), (3.12) мы не проводим ввиду его громоздкости. Достаточно, например, воспользоваться рассуждениями, приведенными в работе [7].

Из гипотез $\Gamma(f)$ следует, что для каждого $h \in H$ функция $(h, f(t, x, y)u) = (f(t, x, y)^* h, u)$ измерима по t и непрерывна по (x, y, u) . Следовательно, для любых $x, y \in C(T, H)$, $u \in L^q(T, Y)$ функция $t \rightarrow f(t, x(t), y(t))u(t)$ скалярно измерима. Поскольку H – сепарабельное гильбертово пространство, то функция $t \rightarrow f(t, x(t), y(t))u(t)$ измерима. Воспользовавшись гипотезой $\Gamma(f)$, в), можно рассмотреть оператор $\tilde{f}: C(T, H) \times C(T, H) \rightarrow \mathcal{L}(L^q(T, Y), \mathcal{H}^*)$, определенный по правилу

$$(\tilde{f}(x, y)u)(t) = f(t, x(t), y(t))u(t), \quad (3.13)$$

$\mathcal{L}(L^q(T, Y), \mathcal{H}^*)$ – пространство непрерывных линейных операторов из $L^q(T, Y)$ в $\mathcal{H}^*$.

ЛЕММА 3.2. *Оператор $(x, y, u) \rightarrow \tilde{f}(x, y)u$ является секвенциально непрерывным из пространства $C(T, H) \times C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$ в пространство $w\text{-}\mathcal{H}^*$.*

Лемма доказывается так же, как лемма 2.1 в [9].

Рассмотрим пространство $\tilde{Y} = Y \times \mathbb{R}$. Элементы пространства $\tilde{Y}$ будем обозначать $\tilde{u} = (u, u^{\mathbb{R}})$, $u \in Y$, $u^{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$. Пространство $\tilde{Y}$ мы наделим нормой $\|\tilde{u}\|_{\tilde{Y}} = \max\{\|u\|_Y, |u^{\mathbb{R}}|\}$. Тогда $\tilde{Y}$ является сепарабельным рефлексивным банаховым пространством. Пространство $L^q(T, Y) \times L^q(T, \mathbb{R})$ наделим одной из эквивалентных норм прямого произведения. Поскольку пространства $L^q(T, Y) \times L^q(T, \mathbb{R})$ и $L^q(T, \tilde{Y})$ топологически изоморфны, то всюду в дальнейшем будем их отождествлять.

Исходя из нормы на пространстве $\tilde{Y}$, получим, что слабая норма (2.10) на пространстве $L^q(T, \tilde{Y})$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_w &= \sup_{0 \leq t \leq t' \leq 1} \left\| \int_t^{t'} \tilde{u}(s) ds \right\|_{\tilde{Y}} \\ &= \sup_{0 \leq t \leq t' \leq 1} \left\{ \max \left(\left\| \int_t^{t'} u(s) ds \right\|_Y, \left| \int_t^{t'} u^{\mathbb{R}}(s) ds \right| \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Рассмотрим многозначное отображение $F: T \times H \times H \rightarrow \tilde{Y}$, определенное следующим образом:

$$F(t, x, y) = \{(u, u^{\mathbb{R}}) \in \tilde{Y} : u \in U(t, x, y), u^{\mathbb{R}} = g(t, x, y, u)\}, \quad (3.15)$$

которое, очевидно, имеет замкнутые значения.

ЛЕММА 3.3. *Пусть выполнены гипотеза $\Gamma(U)$ и либо гипотеза $\Gamma(g)$, либо гипотеза $\Gamma_1(g)$. Тогда:*

- 1) *отображение $t \rightarrow F(t, x, y)$ измеримо для любых $x, y \in H$;*
- 2) *отображение $(x, y) \rightarrow F(t, x, y)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа на пространстве $\text{cb}\tilde{Y}$ при почти всех $t \in T$;*
- 3) *для любого $(u, u^{\mathbb{R}}) \in F(t, x, y)$ справедливы неравенства*

$$\|u\|_Y \leq a_1(t) + b_1(|x|_H^2 + |y|_H^2)^{1/q}, \quad (3.16)$$

$$|u^{\mathbb{R}}| \leq a_2(t) + b_2(t)(|x|_H + |y|_H) + b_3(a_1(t) + b_1(|x|_H^2 + |y|_H^2)^{1/q}). \quad (3.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in H$ фиксированы. Воспользовавшись леммой 1.3 из [10] и теоремой Скорца–Драгони, получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $T_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon$, такое, что сужение отображения $t \rightarrow U(t, x, y)$ на T_ε полунепрерывно снизу по Вьеторису, а сужение отображения $(t, u) \rightarrow g(t, x, y, u)$ на $T_\varepsilon \times Y$ является непрерывным. Отсюда непосредственно вытекает, что сужение отображения $t \rightarrow F(t, x, y)$ на T_ε является полунепрерывным снизу по Вьеторису. Следовательно, отображение $t \rightarrow F(t, x, y)$ измеримо.

Пусть t_* , x_* , y_* фиксированы. Воспользовавшись неравенством (2.2) и либо неравенством (2.4), либо (2.7), получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta > 0$, $\delta < \varepsilon$, и окрестность $V(x_*, y_*)$ точки (x_*, y_*) такие, что

$$D(U(t_*, x_*, y_*), U(t_*, x, y)) < \delta, \quad (3.18)$$

$$|g(t_*, x_*, y_*, u) - g(t_*, x, y, v)| < \varepsilon \quad (3.19)$$

для любых $x, y \in V(x_*, y_*)$ и $u, v \in Y$, удовлетворяющих неравенству $\|u - v\|_Y < \delta$. В силу неравенств (3.18), (3.19) получим, что отображение $(x, y) \rightarrow F(t_*, x, y)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа на пространстве $\text{cb}\tilde{Y}$ в точке (x_*, y_*) .

Неравенства (3.16), (3.17) вытекают из (3.15) и (2.3), (2.5). Лемма доказана.

Пусть $g_U^{**}(t, x, y, u)$ – биполярная функции $u \rightarrow g_U(t, x, y, u)$ (см. (1.5)). Обозначим через $\text{dom } g_U^{**}(t, x, y)$ эффективное множество и через $\text{epi } g_U^{**}(t, x, y)$ – надграфик функции $u \rightarrow g_U^{**}(t, x, y, u)$, т.е.

$$\begin{aligned} \text{dom } g_U^{**}(t, x, y) &= \{u \in Y; g_U^{**}(t, x, y, u) < \infty\}, \\ \text{epi } g_U^{**}(t, x, y) &= \{(u, u^{\mathbb{R}}) \in Y \times \mathbb{R}; g_U^{**}(t, x, y, u) \leq u^{\mathbb{R}}\}. \end{aligned}$$

В следующей лемме приведем свойства функции $g_U^{**}(t, x, y, u)$.

ЛЕММА 3.4. Пусть выполнены гипотеза $\Gamma(U)$ и либо гипотеза $\Gamma(g)$, либо гипотеза $\Gamma_1(g)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) $\text{dom } g_U^{**}(t, x, y) = \overline{\text{co}} U(t, x, y);$ (3.20)
- 2) для любого $u \in \text{dom } g_U^{**}(t, x, y)$

$$g_U^{**}(t, x, y, u) = \min\{a \in \mathbb{R}; (u, a) \in \overline{\text{co}} F(t, x, y)\}; \quad (3.21)$$

- 3) функция $g_U^{**}(t, x, y, u)$ является нормальным интегралом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [3, гл. 1, § 4.2, предложение 4.1 и § 3.2, предложение 3.2], что

$$\text{epi } g_U^{**}(t, x, y) = \overline{\text{co}} \text{epi } g_U(t, x, y). \quad (3.22)$$

Теперь равенства (3.20), (3.21) следуют из (3.22) и (3.15).

Согласно лемме 3.3, не нарушая общности, можно полагать, что отображение $(x, y) \rightarrow F(t, x, y)$ непрерывно при каждом $t \in T$. Следовательно, отображение $t \rightarrow \overline{\text{co}} F(t, x, y)$ является измеримым, а отображение $(x, y) \rightarrow \overline{\text{co}} F(t, x, y)$ является непрерывным в метрике Хаусдорфа на $\text{cb}\tilde{Y}$ для всех $t \in T$. В этом случае хорошо известно, что отображение $\overline{\text{co}} F(t, x, y)$ является $\Sigma \otimes \mathcal{B}_{H \times H}$ -измеримым. Используя следствие 2.1 из [10], получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $T_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon$, такое, что сужение отображения $\overline{\text{co}} F(t, x, y)$ на $T_\varepsilon \times H \times H$ имеет замкнутый график в $T \times H \times H \times \tilde{Y}$.

Покажем, что функция $(t, x, y, u) \rightarrow g_U^{**}(t, x, y, u)$ полунепрерывна снизу на $T_\varepsilon \times H \times H \times Y$. Пусть $(t_n, x_n, y_n, u_n) \rightarrow (t, x, y, u)$, $t_n \in T_\varepsilon$, $x_n, y_n \in H$, $u_n \in Y$.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} g_U^{**}(t_n, x_n, y_n, u_n) = +\infty$, то функция $g_U^{**}(t, x, y, u)$ полунепрерывна снизу в точке (t, x, y, u) согласно определению. Пусть

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} g_U^{**}(t_n, x_n, y_n, u_n) \neq +\infty.$$

Воспользовавшись (3.17) и (3.21), получим, что $a \neq -\infty$. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что $g_U^{**}(t_n, x_n, y_n, u_n) < \infty$, $n \geq 1$. Тогда, учитывая (3.20), (3.21), получим

$$(u_n, g_U^{**}(t_n, x_n, y_n, u_n)) \in \overline{\text{co}} F(t_n, x_n, y_n). \quad (3.23)$$

Поскольку сужение отображения $\overline{\text{co}} F(t, x, y)$ на $T_\varepsilon \times H \times H$ имеет замкнутый график в $T \times H \times H \times \tilde{Y}$, то из (3.23) следует, что $(u, a) \in \overline{\text{co}} F(t, x, y)$. Воспользовавшись (3.21), получим

$$g_U^{**}(t, x, y, u) \leq a = \lim_{n \rightarrow \infty} g_U^{**}(t_n, x_n, y_n, u_n).$$

Следовательно, сужение функции $(t, x, y, u) \rightarrow g_U^{**}(t, x, y, u)$ на $T_\varepsilon \times H \times H$ непрерывно снизу.

Пусть $T_k \subset T_{k+1} \subset T$, $k \geq 1$, — последовательность компактных множеств такая, что $\mu(T) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k)$, и сужение функции $g_U^{**}(t, x, y, u)$ на каждое из множеств $T_k \times H \times H \times Y$ полунепрерывно снизу. Пусть $\tilde{g}(t, x, y, u) = g_U^{**}(t, x, y, u)$, $t \in \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$, $x, y \in H$, $u \in Y$, $\tilde{g}(t, x, y, u) = 0$, $t \in T \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$, $x, y \in H$, $u \in Y$. Поскольку множество $\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k \times H \times H \times Y$ является борелевским, то функция $\tilde{g}(t, x, y, u)$ является борелевской на $T \times H \times H \times Y$ и $\tilde{g}(t, \cdot, \cdot, \cdot) = g_U^{**}(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ при почти всех $t \in T$. Следовательно, функция $g_U^{**}(t, x, y, u)$ является нормальным интегралом. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.5. Пусть выполнены гипотеза $\Gamma(U)$ и либо гипотеза $\Gamma(g)$, либо гипотеза $\Gamma_1(g)$. Тогда для любых $x_*(\cdot)$, $y_*(\cdot) \in C(T, H)$ и любого измеримого селектора $u_*(t)$ отображения $t \rightarrow \overline{\text{co}} U(t, x_*(t), y_*(t))$ существует последовательность $u_n(t)$, $n \geq 1$, измеримых селекторов отображения $t \rightarrow U(t, x(t), y(t))$ такая, что

$$\sup_{0 \leq t' \leq t \leq 1} \left\| \int_{t'}^t (u_*(s) - u_n(s)) ds \right\|_Y \leq \frac{1}{n}, \quad (3.24)$$

$$\sup_{0 \leq t' \leq t \leq 1} \left| \int_{t'}^t (g_U^{**}(s, x_*(s), y_*(s), u_*(s)) - g(s, x_*(s), y_*(s), u_n(s))) ds \right| \leq \frac{1}{n}. \quad (3.25)$$

При этом последовательность $u_n(\cdot)$, $n \geq 1$, сходится к $u_*(\cdot)$ в топологии пространства $w\text{-}L^q(T, Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 3.4 функция

$$\tilde{u}_*(t) = (u_*(t), g_U^{**}(t, x_*(t), y_*(t), u_*(t)))$$

является измеримым селектором отображения $t \rightarrow \overline{\text{co}} F(t, x_*(t), y_*(t))$. Воспользовавшись неравенствами (3.16), (3.17) и следствием 2.5 из [11], получим, что существует селектор $\tilde{u}_n(t)$ отображения $t \rightarrow F(t, x_*(t), y_*(t))$, $\tilde{u}_n(t) \in L^q(T, \tilde{Y})$, такой, что

$$\sup_{0 \leq t' \leq t \leq 1} \left\| \int_{t'}^t (\tilde{u}_*(s) - \tilde{u}_n(s)) ds \right\|_{\tilde{Y}} \leq \frac{1}{n}. \quad (3.26)$$

Тогда согласно (3.15)

$$\begin{aligned}\tilde{u}_n(t) &= (u_n(t), g(t, x_*(t), y_*(t), u_n(t))), \\ u_n(t) &\in U(t, x_*(t), y_*(t)).\end{aligned}\tag{3.27}$$

Теперь неравенства (3.24), (3.25) вытекают из (3.14), (3.26) и (3.27). Учитывая неравенства (3.16), (3.17), (3.26), в соответствии с леммой 2.3 из [9] имеем, что последовательность $\tilde{u}_n(\cdot)$, $n \geq 1$, сходится к $u_*(\cdot)$ в пространстве $w-L^q(T, \tilde{Y})$. Поэтому последовательность $u_n(\cdot)$, $n \geq 1$, сходится к $u_*(\cdot)$ в пространстве $w-L^q(T, Y)$. Лемма доказана.

§ 4. Существование решений управляемой системы

В этом параграфе рассмотрим вопросы существования решений управляемой системы (1.2), (1.3) и, следовательно, системы (1.2), (1.4).

Рассмотрим многозначное отображение $S_U: C(T, H) \times C(T, H) \rightarrow L^q(T, Y)$, определенное следующим образом:

$$S_U(x, y) = \{\varphi \in L^q(T, Y); \varphi(t) \in U(t, x(t), y(t)) \text{ п.в.}\},\tag{4.1}$$

$x, y \in C(T, H)$.

ЛЕММА 4.1. Пусть $U: T \times H \times H \rightarrow \text{cb}Y$ – многозначное отображение такое, что:

- 1) отображение $U(t, x, y)$ является $\Sigma \otimes \mathcal{B}_{H \times H}$ -измеримым;
- 2) отображение $(x, y) \rightarrow U(t, x, y)$ при почти каждом t полунепрерывно снизу по Вьеторису;
- 3) для отображения $U(t, x, y)$ имеет место неравенство (2.3).

Тогда отображение $S_U(x, y)$, определяемое формулой (4.1), является полунепрерывным снизу по Вьеторису из $C(T, H) \times C(T, H)$ в $\text{cb}L^q(T, Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предположений 1), 3) настоящей леммы следует, что для любых $x, y \in C(T, H)$ множество $S_U(x, y)$ является непустым замкнутым ограниченным подмножеством пространства $L^q(T, Y)$.

Пусть $x_*, y_* \in C(T, H)$. Для доказательства полунепрерывности снизу по Вьеторису отображения $S_U(x, y)$ в точке x_*, y_* достаточно показать, что для любой точки $\varphi_* \in S_U(x_*, y_*)$ и любых последовательностей $x_n, y_n \in C(T, H)$, $n \geq 1$, сходящихся к x_*, y_* , существует последовательность $\varphi_n \in S_U(x_n, y_n)$, сходящаяся к φ_* в $L^q(T, Y)$.

Рассмотрим функцию $d_Y(\varphi_*(t), U(t, x, y))$, где $d_Y(\varphi_*(t), U(t, x, y))$ означает расстояние от $\varphi_*(t)$ до множества $U(t, x, y)$ в пространстве Y . Согласно [10, лемма 1.2] функция $(x, y) \rightarrow d_Y(\varphi_*(t), U(t, x, y))$ полунепрерывна сверху при почти каждом t , а функции $t \rightarrow d_Y(\varphi_*(t), U(t, x_n(t), y_n(t)))$, $n \geq 1$, измеримы.

Из свойств измеримых многозначных отображений с замкнутыми значениями следует, что существует последовательность $\varphi_n(t)$, $n \geq 1$, измеримых селекторов отображений $t \rightarrow U(t, x_n(t), y_n(t))$ такая, что

$$\|\varphi_*(t) - \varphi_n(t)\|_Y \leq \frac{1}{n} + d(\varphi_*(t), U(t, x_n(t), y_n(t))) \quad \text{п.в.} \tag{4.2}$$

Используя неравенство (4.2), получим

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_*(t) - \varphi_n(t)\|_Y &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} d_Y(\varphi_*(t), U(t, x_n(t), y_n(t))) \\ &\leq d_Y(\varphi_*(t), U(t, x_*(t), y_*(t))) = 0 \quad \text{п. в.} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Теперь из (2.3), (4.3) и теоремы Лебега об ограниченной сходимости следует, что $\varphi_n \in S_U(x_n, y_n)$ и φ_n , $n \geq 1$, сходятся к φ_* в $L^q(T, Y)$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Лемма 4.1 сохраняет свою силу, если вместо предположений 1) и 2) отображение $U(t, x, y)$ обладает следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $T_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon$, такое, что сужение отображения $U(t, x, y)$ на $T_\varepsilon \times H \times H$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису. Согласно [10, теорема 2.4] последнее свойство является следствием предположений 1) и 2).

Пусть $Q = \{h \in H; |h|_H \leq M_1\}$, $Q_1 = \{h \in H; |h|_H \leq M_2\}$, где M_1 и M_2 – константы, фигурирующие в оценках (3.11). Рассмотрим оператор проектирования $p_r: H \rightarrow Q$, который каждой точке $h \in H$ ставит в соответствие единственную точку $p_r h \in Q$ такую, что $|p_r h - h|_H = \min\{|y - h|_H; y \in Q\}$. Хорошо известно, что

$$|p_r u - p_r v|_H \leq |u - v|_H, \quad u, v \in H. \quad (4.4)$$

Аналогично, пусть p_{r_1} – оператор проектирования H на Q_1 .

Рассмотрим многозначное отображение $\tilde{U}: T \times H \times H \rightarrow \text{cb}Y$, определенное по правилу $\tilde{U}(t, x, y) = U(t, p_r x, p_{r_1} y)$. Тогда из (2.3) вытекает, что

$$\|\tilde{U}(t, x, y)\|_Y \leq a_1(t) + b_1(M_1^2 + M_2^2)^{1/q} \quad \text{п. в.}, \quad (4.5)$$

$$\|\tilde{U}(t, x, y)\|_Y \leq a_1(t) + b(|x|_H^2 + |y|_H^2)^{1/q} \quad \text{п. в.} \quad (4.6)$$

для всех $x, y \in H$.

Более того, согласно (4.4) гипотеза $\Gamma(U)$, а) и неравенство (2.2) имеют место и для отображения $\tilde{U}(t, x, y)$. Таким образом, все гипотезы $\Gamma(U)$ имеют место и для отображения $\tilde{U}(t, x, y)$. Если мы рассмотрим систему (1.2), (1.3) с $U(t, x, y)$, замененным на $\tilde{U}(t, x, y)$, то из (4.6) следует, что оценки (3.11), (3.12) останутся такими же и для решений системы (1.2), (1.3) с $\tilde{U}(t, x, y)$. Поэтому множества решений системы (1.2), (1.3) с ограничениями $U(t, x, y)$ и $\tilde{U}(t, x, y)$ совпадают. То же самое справедливо и для решений системы (1.2), (1.4). Поэтому далее, не нарушая общности и не оговаривая специально, будем считать, что для отображения $U(t, x, y)$ п. в. для любых $x, y \in H$ имеет место неравенство (4.5).

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполняются гипотезы $\Gamma(U)$. Тогда множество $\mathcal{R}_U(x_0, y_0)$ непусто, а множество $\mathcal{R}_{\text{co}U}(x_0, y_0)$ является компактным подмножеством пространств

$$C(T, V) \times w\text{-}\mathcal{W} \times w\text{-}L^q(T, Y), \quad (4.7)$$

$$C(T, V) \times C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y), \quad (4.8)$$

$$C(T, H) \times w\text{-}\mathcal{W} \times w\text{-}L^q(T, Y). \quad (4.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество

$$S_\lambda = \{\varphi \in \mathcal{H}^*; |\varphi(t)| \leq \lambda(t) \text{ п.в.}\}, \quad (4.10)$$

где $\lambda(t) = m(a_1(t) + b_1(M_1^2 + M_2^2)^{1/q})$ и m – константа, фигурирующая в неравенстве (2.1). Пусть $P = (P_1, P_2)$, $P: S_\lambda \rightarrow C(T, V) \times \mathcal{W} \hookrightarrow C(T, V) \times C(T, H) \hookrightarrow C(T, H) \times C(T, H)$, – отображение, определенное по правилу $P(\varphi) = (P_1(\varphi), P_2(\varphi))$, $P_1(\varphi) = x$, $P_2(\varphi) = \dot{x}$, где $(x, \dot{x})$ – единственное решение уравнения (3.1), $\varphi \in S_\lambda$.

Пусть

$$\mathcal{R}(x_0, y_0) = \{P\varphi; \varphi \in S_\lambda\}. \quad (4.11)$$

Тогда согласно утверждению 3.1 $\mathcal{R}(x_0, y_0)$ является компактным подмножеством пространства $C(T, H) \times C(T, H)$. Рассмотрим многозначное отображение

$$S_U: \mathcal{R}(x_0, y_0) \rightarrow \text{cb}L^q(T, Y), \\ S_U(x, \dot{x}) = \{\varphi \in L^q(T, Y); \varphi(t) \in U(t, x(t), \dot{x}(t))\}.$$

Не нарушая общности, можно считать, что отображение $(x, y) \rightarrow U(t, x, y)$ является непрерывным в метрике Хаусдорфа при каждом $t \in T$. Тогда это отображение является $\Sigma \otimes \mathcal{B}_{H \times H}$ -измеримым. Используя лемму 4.1, получим, что отображение $(x, \dot{x}) \rightarrow S_U(x, \dot{x})$ полунепрерывно снизу по Вьеторису. Тогда согласно [12, утверждение 2.2] существует непрерывная функция $q: \mathcal{R}(x_0, y_0) \hookrightarrow C(T, H) \times C(T, H) \rightarrow L^q(T, Y)$ такая, что

$$q(x, \dot{x})(t) \in U(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{п.в.} \quad (4.12)$$

Пусть $\mathcal{A}: S_\lambda \rightarrow \mathcal{H}^*$ – оператор, определенный по правилу

$$\mathcal{A}(\varphi) = \tilde{f}(P\varphi)q(P\varphi),$$

где $\tilde{f}$ – оператор (3.13).

Из утверждения 3.1 и леммы 3.2 следует, что оператор $\mathcal{A}$ является непрерывным из пространства $w\text{-}S_\lambda$ в пространство $w\text{-}\mathcal{H}^*$. Используя (4.5), получим, что $\mathcal{A}(\varphi) \in S_\lambda$, $\varphi \in S_\lambda$. Тогда из теоремы Шаудера о неподвижной точке следует, что существует элемент $\varphi_* \in S_\lambda$ такой, что

$$\varphi_* = \mathcal{A}(\varphi_*) = \tilde{f}(P\varphi_*)q(P\varphi_*).$$

Следовательно, для $(x_*, \dot{x}_*) = P\varphi_*$ в соответствии с (4.12) имеем

$$u_*(t) = q(x_*, \dot{x}_*)(t) \in U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)) \quad \text{п.в.} \quad (4.13)$$

и $(x_*, \dot{x}_*)$ является решением уравнения (3.1) с $\varphi_*(t) = f(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))u_*(t)$. Учитывая (4.13), получаем, что $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\} \in \mathcal{R}_U(x_0, y_0)$. Тем самым существование решения управляемой системы (1.2), (1.3) и, следовательно, системы (1.2), (1.4) доказано.

Покажем, что $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}} U(x_0, y_0)$ является компактным подмножеством пространств (4.7)–(4.9).

Пусть

$$S_\mu^U = \{\varphi \in L^q(T, Y); \|\varphi(t)\|_Y \leq \mu(t) \text{ п.в.}\}, \quad (4.14)$$

где $\mu(t) = a_1(t) + b_1(M_1^2 + M_2^2)^{1/q}$. Воспользовавшись формулами (4.10), (4.11), (4.14), получим, что $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}} U(x_0, y_0) \subset \mathcal{R}(x_0, y_0) \times S_\mu^U$. Следовательно, $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}} U(x_0, y_0)$ является относительно компактным подмножеством пространств (4.7)–(4.9). Покажем, что множество $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}} U(x_0, y_0)$ является замкнутым в рассматриваемых выше пространствах. Пусть $\{(x_n, \dot{x}), u_n\} \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}}} U(x_0, y_0), n \geq 1$, сходится к $\{(x, \dot{x}), u\}$ в $C(T, V) \times w\text{-}\mathcal{W} \times w\text{-}L^q(T, Y)$. Тогда $(x_n, \dot{x}) \rightarrow (x, \dot{x})$ в $C(T, H) \times C(T, H)$. Из леммы 3.2 следует, что $\varphi_n, \varphi_n(t) = f(t, x_n(t), \dot{x}(t))u_n(t), n \geq 1$, сходится в пространстве $w\text{-}\mathcal{H}^*$ к $\varphi_0, \varphi_0(t) = f(t, x(t), \dot{x}(t))u(t)$. Так как $(x_n, \dot{x}_n)$ является решением уравнения (3.1) при $\varphi = \varphi_n$, то согласно утверждению 3.1 $(x, \dot{x})$ является решением уравнения (3.1) при $\varphi = \varphi_0$. Поскольку $u_n \rightarrow u$ в $w\text{-}L^q(T, Y)$, то согласно теореме Мазура

$$u(t) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} u_k(t) \right) \quad \text{п.в.}, \quad (4.15)$$

а так как отображение $(x, y) \rightarrow \overline{\text{co}} U(t, x, y)$ является непрерывным в метрике Хаусдорфа, то

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \overline{\text{co}} U(t, x_k(t), \dot{x}_k(t)) \right) \subset \overline{\text{co}} U(t, x(t), \dot{x}(t)) \quad \text{п.в.} \quad (4.16)$$

Используя (4.15), (4.16), получим $u(t) \in \overline{\text{co}} U(t, x(t), \dot{x}(t))$ п.в. Следовательно, $\{(x, \dot{x}), u\} \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}}} U(x_0, y_0)$. Это означает, что $\mathcal{R}_{\overline{\text{co}}} U(x_0, y_0)$ является компактом в пространстве (4.7) и пространствах (4.8) и (4.9). Теорема доказана.

§5. Теорема Н.Н. Боголюбова

Для доказательства теоремы Боголюбова нам понадобится гипотеза $\Gamma_1(f)$: для любых $x, y \in C(T, H)$ и любого $u(t) \in \overline{\text{co}} U(t, x(t), y(t))$ существует функция $k(u) \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что для любых $x_1, y_1 \in H$

$$\begin{aligned} & |(f(t, x(t), y(t)) - f(t, x_1, y_1))u(t)|_H \\ & \leq k(u)(t)(|x(t) - x_1|_H + |y(t) - y_1|_H). \end{aligned} \quad (5.1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Неравенство (5.1) выполнено, если

$$\begin{aligned} \|f(t, x, y) - f(t, x_1, y_1)\|_{\mathcal{L}(Y, H)} & \leq k(t)(|x - x_1|_H + |y - y_1|_H), \\ k & \in L^p(T, \mathbb{R}^+). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Однако это неравенство не имеет места для конкретных примеров управляемых гиперболических систем.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполнены гипотезы $\Gamma(U)$, $\Gamma(g)$ и $\Gamma_1(f)$. Тогда для любого решения $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\}$ управляемой системы (1.2), (1.4) существует последовательность $\{(x_n, \dot{x}_n), u_n\}, n \geq 1$, решений системы (1.2), (1.3), сходящаяся к $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\}$ в пространствах

$$C(T, V) \times w\text{-}\mathcal{W} \times L_w^q(T, Y), \quad (5.3)$$

$$C(T, V) \times C(T, H) \times L_w^q(T, Y), \quad (5.4)$$

$$C(T, H) \times C(T, H) \times L_w^q(T, Y), \quad (5.5)$$

такая, что выполнено равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t' \leq t \leq 1} \left| \int_{t'}^t (g_U^{**}(s, x_*(s), \dot{x}_*(s), u_*(s)) - g(s, x_n(s), \dot{x}_n(s), u_n(s))) ds \right| = 0. \quad (5.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\}$ – решение управляемой системы (1.2), (1.4). Тогда согласно лемме 3.5 для любого $n \geq 1$ существует измеримый селектор $v_n(t)$ отображения $U(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))$ такой, что

$$\sup_{0 \leq t' \leq t \leq 1} \left\| \int_{t'}^t (u_*(s) - v_n(s)) ds \right\|_Y \leq \frac{1}{n}, \quad (5.7)$$

$$\sup_{0 \leq t' \leq t \leq 1} \left| \int_{t'}^t (g_U^{**}(s, x_*(s), \dot{x}_*(s), u_*(s)) - g(s, x_*(s), \dot{x}_*(s), v_n(s))) ds \right| \leq \frac{1}{n}. \quad (5.8)$$

При этом последовательность v_n , $n \geq 1$, сходится к u_* в пространстве $w\text{-}L^q(T, Y)$. Зафиксируем $n \geq 1$. Используя неравенство (2.1), получим, что почти всюду на T для любых $x, y \in H$ существует $v \in U(t, x, y)$ такое, что

$$\|v_n(t) - v\|_Y < \frac{1}{n} + k_1(t)(|x_*(t) - x|_H + |\dot{x}_*(t) - y|_H). \quad (5.9)$$

Рассмотрим отображение $F_n: T \times H \times H \rightarrow Y$, определенное по правилу

$$F_n(t, x, y) = \{v \in Y; v \text{ удовлетворяет неравенству (5.9)}\}. \quad (5.10)$$

Из (5.9) следует, что отображение $F_n(t, x, y)$ определено при почти всех $t \in T$ для любых $x, y \in H$ и его значениями являются открытые множества. Как уже отмечалось, например при доказательстве теоремы 5.1, отображение $U(t, x, y)$ можно полагать $\Sigma \otimes \mathcal{B}_{H \times H}$ -измеримым. Тогда, воспользовавшись [10, следствие 2.1], получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $T_\varepsilon \subset T$, $\mu(T \setminus T_\varepsilon) \leq \varepsilon$, такое, что сужение $U(t, x, y)$ на $T_\varepsilon \times H \times H$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису, а сужения функций $u_n(t)$ и $k_1(t)$ на T_ε являются непрерывными. Теперь из (5.9), (5.10) вытекает, что график сужения отображения $F_n(t, x, y)$ на $T_\varepsilon \times H \times H$ является открытым множеством в $T_\varepsilon \times H \times H \times Y$.

Рассмотрим многозначное отображение $F: T \times H \times H \rightarrow Y$,

$$F(t, x, y) = U(t, x, y) \cap F_n(t, x, y). \quad (5.11)$$

Из (5.9) следует, что отображение $F(t, x, y)$ определено при почти всех $t \in T$. Поскольку сужение отображения $U(t, x, y)$ на $T_\varepsilon \times H \times H$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису, а график сужения отображения $F_n(t, x, y)$ на $T_\varepsilon \times H \times H$ является открытым множеством в $T_\varepsilon \times H \times H \times Y$, то сужение отображения $F(t, x, y)$ на $T_\varepsilon \times H \times H$ является полунепрерывным снизу по Вьеторису. Тогда этим свойством обладает и отображение $\overline{F}(t, x, y) = \overline{F(t, x, y)}$, где черта означает замыкание множества в пространстве Y .

Рассмотрим управляемую систему (1.2) с ограничениями $\overline{F}(t, x, y)$ на управление. Поскольку $\overline{F}(t, x, y) \subset U(t, x, y)$, то для отображения $\overline{F}(t, x, y)$ справедливы

те же априорные оценки, что и для отображения $U(t, x, y)$. Воспользовавшись замечанием 4.1, леммой 4.1, утверждением 2.2 из [12] и дословно повторив доказательство теоремы 4.1, получим, что существует решение $\{(x_n, \dot{x}_n), u_n\}$ управляемой системы (1.2) с ограничениями $\bar{F}(t, x, y)$ на управление. Тогда из (5.9)–(5.11) вытекает, что $\{(x_n, \dot{x}_n), u_n\} \in \mathcal{R}_U(x_0, u_0)$, $n \geq 1$, и

$$\|v_n(t) - u_n(t)\|_Y \leq \frac{1}{n} + k_1(t)(|x_*(t) - x_n(t)|_H + |\dot{x}_*(t) - \dot{x}_n(t)|_H). \quad (5.12)$$

Аналогично неравенству (3.5) получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\dot{x}_n(t) - \dot{x}_*(t)|_H^2 + \frac{c_2}{2} \|x_n(t) - x_*(t)\|^2 \\ & \leq \int_0^t (\dot{x}_n(s) - \dot{x}_*(s), f(s, x_n(s), \dot{x}_n(s))(u_n(s) - v_n(s))) ds \\ & \quad + \int_0^t (\dot{x}_n(s) - \dot{x}_*(s), f(s, x_n(s), \dot{x}_n(s))(v_n(s) - u_*(s))) ds \\ & \quad + \int_0^t (\dot{x}_n(s) - \dot{x}_*(s), (f(s, x_n(s), \dot{x}_n(s)) - f(s, x_*(s), \dot{x}_*(s)))u_*(s)) ds. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Поскольку $\{(x_n, \dot{x}_n), u_n\} \in \mathcal{R}_U(x_0, u_0)$, $n \geq 1$, то в соответствии с теоремой 4.1, не нарушая общности, можно считать, что последовательность $\{(x_n, \dot{x}_n), u_n\}$ сходится к некоторому элементу $\{(z, \dot{z}), v\} \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0, u_0)$ в топологии любого из пространств (4.7)–(4.9). Воспользовавшись (5.7) и леммой 3.2, получим, что последовательность $f(s, x_n(s), \dot{x}_n(s))(v_n(s) - u_*(s))$ сходится в пространстве $w\text{-}\mathcal{H}^*$ к нулевому элементу этого пространства. Так как последовательность $\dot{x}_n$, $n \geq 1$, сходится в пространстве $\mathcal{H}$ к $\dot{z}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t (\dot{x}_n(s) - \dot{x}_*(s), f(s, x_n(s), \dot{x}_n(s))(v_n(s) - u_*(s))) ds = 0, \quad t \in T. \quad (5.14)$$

Учитывая (2.1), (5.1) и (5.12), получим следующие оценки:

$$\begin{aligned} & \int_0^t (\dot{x}_n(s) - \dot{x}_*(s), f(s, x_n(s), \dot{x}_n(s))(u_n(s) - v_n(s))) ds \\ & \leq \frac{1}{n} m \int_0^t |\dot{x}_n(s) - \dot{x}_*(s)|_H ds + m \int_0^t |\dot{x}_n(s) - \dot{x}_*(s)|_H \\ & \quad \times k_1(s)(|x_n(s) - x_*(s)|_H + |\dot{x}_n(s) - \dot{x}_*(s)|_H) ds, \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^t (\dot{x}_n(s) - \dot{x}_*(s), (f(s, x_n(s), \dot{x}_n(s)) - f(s, x_*(s), \dot{x}_*(s)))u_*(s)) ds \\ & \leq \int_0^t |\dot{x}_n(s) - \dot{x}_*(s)|_H k(u_*)(s)(|x_n(s) - x_*(s)|_H \\ & \quad + |\dot{x}_n(s) - \dot{x}_*(s)|_H) ds. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Переходя к пределу в (5.13) и учитывая (5.14)–(5.16), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\dot{z}(t) - \dot{x}_*(t)|_H^2 + \frac{c_2}{2} \|z(t) - x_*(t)\|^2 \\ & \leq \int_0^t M(s)|\dot{z}(s) - \dot{x}_*(s)|_H (\beta \|z(s) - x_*(s)\| + |\dot{z}(s) - \dot{x}_*(s)|_H) ds, \end{aligned} \quad (5.17)$$

где $M(s) = \max\{mk_1(s), k(u_*)(s)\}$ и $\beta > 0$ – константа вложения V в H .

Пусть $d = \min(1, c_2)$ и $l(t) = (\beta + 2)M(t)$. Используя неравенства $2|a||b| \leq |a|^2 + |b|^2$ и (5.17), придем к неравенству

$$\begin{aligned} & d(|\dot{z}(t) - \dot{x}_*(t)|_H^2 + \|z(t) - x_*(t)\|^2) \\ & \leq \int_0^t l(s)(|\dot{z}(s) - \dot{x}_*(s)|_H^2 + \|z(s) - x_*(s)\|^2) ds. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Из неравенств Беллмана–Гронволла и (5.18) следует, что $x_*(t) = z(t)$, $\dot{x}(t) = \dot{z}(t)$, $t \in T$.

Теперь, используя неравенства (5.7), (5.12), получим, что последовательность $\{(x_n, \dot{x}_n), u_n\} \in \mathcal{R}_U(x_0, u_0)$, $n \geq 1$, сходится к $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\}$ в пространствах (5.3)–(5.5).

Из (2.4), (5.12) вытекает, что

$$\begin{aligned} & |g(t, x_*(t), \dot{x}_*(t), v_n(t)) - g(t, x_n(t), \dot{x}_n(t), u_n(t))| \\ & \leq k_3 \frac{1}{n} + (k_1(t) + k_2(t))(|x_*(t) - x_n(t)|_H + |\dot{x}_*(t) - \dot{x}_n(t)|_H). \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и (5.8) следует, что справедливо равенство (5.6). Теорема доказана.

В следующей теореме ослабим требование липшицевости функции $g(t, x, y, u)$ по переменным x, y .

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть выполнены гипотезы $\Gamma(U)$, $\Gamma_1(g)$ и $\Gamma_1(f)$. Тогда справедливы все утверждения теоремы 5.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 4.1 множество $\mathcal{T}r_{\overline{CO}U}(x_0, y_0)$ является компактом в $C(T, H) \times C(T, H)$. Поэтому существуют выпуклые компактные множества $C, D \subset H$ такие, что для любых $(x, \dot{x}) \in \mathcal{T}r_{\overline{CO}U}(x_0, y_0)$ имеют место включения $x(t) \in C$, $\dot{x}(t) \in D$, $t \in T$. Воспользовавшись неравенством (2.8) и теоремой Скорца–Драгоны, получим, что для любого $n \geq 1$ существует компактное множество $T_n \subset T$ такое, что для любых $(x, \dot{x}) \in \mathcal{T}r_{\overline{CO}U}(x_0, y_0)$ имеет место неравенство

$$\int_{T \setminus T_n} |g_1(t, x(t), \dot{x}(t))| dt \leq \frac{1}{5n} \quad (5.19)$$

и сужение функции $g_1(t, x, y)$ на $T_n \times H \times H$ непрерывно.

Пусть $n \geq 1$. Продолжим по непрерывности функцию $g_1(t, x, y)$ с $T_n \times H \times H$ на все пространство $T \times H \times H$. Это продолжение обозначим так же $g_1(t, x, y)$.

Хорошо известно (см., например, [13, гл. II, теорема 4.3]), что для непрерывной функции $g_1: T \times H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ существует локально липшицева функция $q: T \times H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что

$$|q(t, x, y) - g(t, x, y)| \leq \frac{1}{5n}, \quad t \in T, \quad x, y \in H. \quad (5.20)$$

Используя теорему 8 из [14, гл. 5, § 46], легко показать, что сужение $q(t, x, y)$ на выпуклое компактное множество $T \times C \times D$ является липшицевой функцией. Поэтому существуют $L > 0$, $M > 0$ такие, что

$$|q(t, x, y) - q(t_1, x_1, y_1)| \leq L(|t - t_1| + |x - x_1|_H + |y - y_1|_H), \quad (5.21)$$

$$t, t_1 \in T, \quad x, x_1 \in C, \quad y, y_1 \in D,$$

$$|q(t, x, y)| \leq M, \quad t \in T, \quad x \in C, \quad y \in D. \quad (5.22)$$

Пусть

$$q_1(t, x, y) = q(t, p_{r_C}x, p_{r_D}y), \quad t \in T, \quad x, y \in H, \quad (5.23)$$

где p_{r_C} и p_{r_D} – операторы проектирования на множества C и D . Рассмотрим функцию $q_2(t, x, y)$, определенную следующим образом:

$$q_2(t, x, y) = 0, \quad t \in T \setminus T_n, \quad x, y \in H, \quad (5.24)$$

$$q_2(t, x, y) = q_1(t, x, y), \quad t \in T_n, \quad x, y \in H. \quad (5.25)$$

Из (5.21)–(5.25) следует, что функция $t \rightarrow q_2(t, x, y)$ измерима для любых $x, y \in H$ и

$$|q_2(t, x, y) - q_2(t, x_1, y_1)| \leq L(|x - x_1|_H + |y - y_1|_H), \quad (5.26)$$

$$t \in T, \quad x, x_1, y, y_1 \in H,$$

$$|q_2(t, x, y)| \leq M, \quad t \in T, \quad x, y \in H. \quad (5.27)$$

Рассмотрим функцию

$$s(t, x, y, u) = q_2(t, x, y) + g_2(t, u). \quad (5.28)$$

Тогда из (2.7), (2.9), (5.26)–(5.28) следует, что $s(t, x, y, u)$ является функцией типа Каратеодори и удовлетворяет неравенствам, аналогичным неравенствам (2.4), (2.5). Из соотношений (2.6) и (5.28) получаем

$$g_U^{**}(t, x, y, u) = g_1(t, x, y) + g_{2,U}^{**}(t, x, y, u), \quad (5.29)$$

$$s_U^{**}(t, x, y, u) = q_2(t, x, y) + g_{2,U}^{**}(t, x, y, u), \quad (5.30)$$

где $g_{2,U}^{**}(t, x, y, u)$ – биполярная функция $u \rightarrow g_{2,U}(t, x, y, u)$,

$$g_{2,U}(t, x, y, u) = \begin{cases} g_2(t, u), & u \in U(t, x, y), \\ +\infty, & u \notin U(t, x, y). \end{cases}$$

Воспользовавшись (5.20), (5.23)–(5.25), (5.28)–(5.30), получим, что для любых $\{(x, \dot{x}), u\} \in \mathcal{R}_{\text{co } U}(x_0, y_0)$ и $\{(z, \dot{z}), v\} \in \mathcal{R}_U(x_0, y_0)$ имеют место неравенства

$$|g_U^{**}(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) - s_U^{**}(t, x(t), \dot{x}(t), u(t))| \leq \frac{1}{5n}, \quad t \in T_n, \quad (5.31)$$

$$|g(t, z(t), \dot{z}(t), v(t)) - s(t, z(t), \dot{z}(t), v(t))| \leq \frac{1}{5n}, \quad t \in T_n, \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} |g_U^{**}(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) - s_U^{**}(t, x(t), \dot{x}(t), u(t))| &= |g_1(t, x(t), \dot{x}(t))|, \\ t &\in T \setminus T_n, \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned} |g(t, z(t), \dot{z}(t), v(t)) - s(t, z(t), \dot{z}(t), v(t))| &= |g_1(t, z(t), \dot{z}(t))|, \\ t &\in T \setminus T_n. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Пусть $\mathcal{W}_{\overline{co}U} = \{\dot{x} \in \mathcal{W}; \{(x, \dot{x}), u\} \in \mathcal{R}_{\overline{co}U}(x_0, y_0)\}$. Согласно теореме 4.1 множество $\mathcal{W}_{\overline{co}U}$ является компактным подмножеством пространства $w\text{-}\mathcal{W}$. Поскольку $\mathcal{W}$ является сепарабельным рефлексивным банаховым пространством, то множество $w\text{-}\mathcal{W}_{\overline{co}U}$ метризуемо. Пусть $d_{\mathcal{W}}(\cdot, \cdot)$ – метрика на множестве $w\text{-}\mathcal{W}_{\overline{co}U}$, согласующаяся с топологией пространства $w\text{-}\mathcal{W}$. Применив теорему 5.1 к функции $s(t, x, y, u)$, имеем, что для любого решения $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\} \in \mathcal{R}_{\overline{co}U}(x_0, y_0)$ существует решение $\{(x_n, \dot{x}_n), u_n\} \in \mathcal{R}_U(x_0, y_0)$ такое, что

$$\sup_{t \in T} \|x_*(t) - x_n(t)\|_V \leq \frac{1}{5n}, \quad (5.35)$$

$$\sup_{t \in T} |\dot{x}_*(t) - \dot{x}_n(t)|_H \leq \frac{1}{5n}, \quad (5.36)$$

$$\sup_{t \in T} d_{\mathcal{W}}(\dot{x}_*(t), \dot{x}_n(t)) \leq \frac{1}{5n}, \quad (5.37)$$

$$\sup_{0 \leq t' \leq t \leq 1} \left\| \int_{t'}^t (u_*(\tau) - u_n(\tau)) d\tau \right\|_Y \leq \frac{1}{5n}, \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \sup_{t \in T} \left| \int_0^t (s_U^{**}(\tau, x_*(\tau), \dot{x}_*(\tau), u_*(\tau)) \right. \\ \left. - s(\tau, x_n(\tau), \dot{x}_n(\tau), u_n(\tau))) d\tau \right| \leq \frac{1}{5n}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Воспользовавшись неравенством

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t (g_U^{**}(\tau, x_*(\tau), \dot{x}_*(\tau), u_*(\tau)) - g(\tau, x_n(\tau), \dot{x}_n(\tau), u_n(\tau))) d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_0^t (g_U^{**}(\tau, x_*(\tau), \dot{x}_*(\tau), u_*(\tau)) - s_U^{**}(\tau, x_*(\tau), \dot{x}_*(\tau), u_*(\tau))) d\tau \right| \\ &+ \left| \int_0^t (s_U^{**}(\tau, x_*(\tau), \dot{x}_*(\tau), u_*(\tau)) - s(\tau, x_n(\tau), \dot{x}_n(\tau), u_n(\tau))) d\tau \right| \\ &+ \left| \int_0^t (s(\tau, x_n(\tau), \dot{x}_n(\tau), u_n(\tau)) - g(\tau, x_n(\tau), \dot{x}_n(\tau), u_n(\tau))) d\tau \right| \end{aligned}$$

и неравенствами (5.19), (5.31)–(5.34), получим

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t (g_U^{**}(\tau, x_*(\tau), \dot{x}_*(\tau), u_*(\tau)) - g(\tau, x_n(\tau), \dot{x}_n(\tau), u_n(\tau))) d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n} + \frac{1}{5n} = \frac{1}{n}, \quad t \in T. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Из неравенства (5.40) следует, что

$$\sup_{0 \leq t' \leq t \leq 1} \left| \int_{t'}^t (g_U^{**}(\tau, x_*(\tau), \dot{x}_*(\tau), u_*(\tau)) - g(\tau, x_n(\tau), \dot{x}_n(\tau), u_n(\tau))) d\tau \right| \leq \frac{2}{n}. \quad (5.41)$$

Теперь все утверждения теоремы вытекают из неравенств (5.35)–(5.38), (5.41). Теорема доказана.

§6. Приложение

В настоящем параграфе мы используем результаты предыдущего параграфа для изучения следующих задач:

$$\int_T g(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) dt \rightarrow \inf, \quad (P)$$

где $\inf$ берется на множестве решений управляемой системы (1.2), (1.3), и

$$\int_T g_U^{**}(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) dt \rightarrow \min, \quad (RP)$$

где $\min$ вычисляется на множестве решений управляемой системы (1.2), (1.4). Нас будут интересовать взаимосвязи между задачами (P) и задачами (RP).

Пусть

$$I(x, \dot{x}, u) = \int_T g(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) dt, \\ I^{**}(x, \dot{x}, u) = \int_T g_U^{**}(t, x(t), \dot{x}(t), u(t)) dt.$$

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть выполнены гипотезы $\Gamma(U)$, $\Gamma_1(f)$ и либо гипотеза $\Gamma(g)$, либо гипотеза $\Gamma_1(g)$. Тогда задача (RP) имеет решение и

$$\min_{\{(x, \dot{x}), u\} \in \mathcal{R}_{\overline{\text{co}} U}(x_0, y_0)} I^{**}(x, \dot{x}, u) = \inf_{\{(x, \dot{x}), u\} \in \mathcal{R}_U(x_0, y_0)} I(x, \dot{x}, u). \quad (6.1)$$

Для любого решения $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\}$ задачи (RP) существует минимизирующая последовательность $\{(x_n, \dot{x}_n), u_n\} \in \mathcal{R}_U(x_0, y_0)$, $n \geq 1$, сходящаяся к $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\}$ в пространствах (5.3)–(5.5), и имеет место равенство (5.6).

Обратно, если $\{(x_n, \dot{x}_n), u_n\}$, $n \geq 1$, – минимизирующая последовательность задачи (P), то существуют подпоследовательность $\{(x_{n_k}, \dot{x}_{n_k}), u_{n_k}\}$, $k \geq 1$, последовательности $\{(x_n, \dot{x}_n), u_n\}$, $n \geq 1$, и решение $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\}$ задачи (RP) такие, что подпоследовательность $\{(x_{n_k}, \dot{x}_{n_k}), u_{n_k}\}$, $k \geq 1$, сходится к $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\}$ в пространствах (4.7)–(4.9) и имеет место равенство (5.6). Если значениями отображения $U(t, x, u)$ являются компактные множества пространства Y , то подпоследовательность $\{(x_{n_k}, \dot{x}_{n_k}), u_{n_k}\}$, $k \geq 1$, сходится к $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\}$ в пространствах (5.3)–(5.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 4.1 множество $\mathcal{I}r_{\overline{CO}U}(x_0, y_0)$ является компактом в $C(T, H) \times C(T, H)$. Поэтому существует $M > 0$ такое, что для любого элемента $(x, \dot{x}) \in \mathcal{I}r_{\overline{CO}U}(x_0, y_0)$ будут иметь место неравенства

$$|x(t)|_H \leq M, \quad |\dot{x}(t)|_H \leq M, \quad t \in T.$$

Рассмотрим функцию $q: T \times H \times H \times Y \rightarrow \mathbb{R}$, определенную следующим образом:

$$q(t, x, y, u) = \begin{cases} g_U^{**}(t, x, y, u), & |x|_H \leq M, \quad |y|_H \leq M, \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Согласно утверждению 3) леммы 3.4 функция $g_U^{**}(t, x, y, u)$ является нормальным интегрантом. Поскольку множество $B_M = \{z \in H: |z|_H \leq M\}$ является замкнутым, то функция $q(t, x, y, u)$ является тоже нормальным интегрантом. Поэтому существует борелевская функция $\tilde{q}(t, x, y, u)$ такая, что $\tilde{q}(t, \cdot, \cdot, \cdot) = q(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ при почти всех $t \in T$. Поэтому, не нарушая общности, функцию $q(t, x, y, u)$ можно считать $\Sigma \otimes \mathcal{B}_{H \times H \times Y}$ -измеримой. Воспользовавшись неравенствами (3.21) и (3.17), получим

$$-a_2(t) - b_2(t) \cdot 2M - b_3 a_1(t) - b_1(2M^2)^{1/q} \leq q(t, x, y, u)$$

п. в. для любых $x, y \in H, u \in Y$.

Следовательно, функция $q(t, x, y, u)$ удовлетворяет всем предположениям теоремы 2.1 из [15]. Согласно этой теореме функция $(x, y, u) \rightarrow J(x, y, u)$, $J(x, y, u) = \int_T q(t, x(t), y(t), u(t)) dt$, является секвенциально полунепрерывной снизу на пространстве $C(T, H) \times C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$. Поскольку на множестве $\mathcal{R}_{\overline{CO}U}(x_0, y_0)$ функции $I^{**}(x, \dot{x}, u)$ и $J(x, \dot{x}, u)$ совпадают и множество $\mathcal{R}_{\overline{CO}U}(x_0, y_0)$ — метризуемый компакт в топологии пространства $C(T, H) \times C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$, то функция $I^{**}(x, \dot{x}, u)$ полунепрерывна снизу на $\mathcal{R}_{\overline{CO}U}(x_0, y_0)$ в топологии пространства $C(T, H) \times C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$. Поэтому задача (RP) имеет решение.

Пусть $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\} \in \mathcal{R}_{\overline{CO}U}(x_0, y_0)$ — решение задачи (RP). Воспользовавшись либо теоремой 5.1, либо теоремой 5.2, получим, что существует последовательность $\{(x_n, \dot{x}_n), u_n\} \in \mathcal{R}_U(x_0, y_0)$, $n \geq 1$, сходящаяся к $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\}$ в пространствах (5.3)–(5.5), и имеет место равенство (5.6), откуда вытекает, что

$$I^{**}(x_*, \dot{x}_*, u_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(x_n, \dot{x}_n, u_n). \quad (6.2)$$

Поскольку

$$I^{**}(x_*, \dot{x}_*, u_*) \leq I^{**}(x_n, \dot{x}_n, u_n) \leq I(x_n, \dot{x}_n, u_n), \quad (6.3)$$

то в соответствии с (6.2), (6.3) последовательность $\{(x_n, \dot{x}_n), u_n\}$, $n \geq 1$, является минимизирующей для задачи (P) и имеет место равенство (6.1). Тем самым первая часть утверждений теоремы доказана.

Пусть $\{(x_n, \dot{x}_n), u_n\}$, $n \geq 1$, — минимизирующая последовательность задачи (P). Тогда согласно равенству (6.1)

$$\min_{\{(x, \dot{x}), u\} \in \mathcal{R}_{\overline{CO}U}(x_0, y_0)} I^{**}(x, \dot{x}, u) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(x_n, \dot{x}_n, u_n). \quad (6.4)$$

Положим $v_n(t) = g(t, x_n(t), \dot{x}_n(t), u_n(t))$. Воспользовавшись соотношением (3.15), получим

$$(u_n(t), v_n(t)) \in F(t, x_n(t), \dot{x}_n(t)). \quad (6.5)$$

Поскольку множество $\mathcal{R}_{\overline{CO}U}(x_0, y_0)$ является компактным в пространстве $C(T, H) \times C(T, H) \times w\text{-}L^q(T, Y)$, то из неравенств (3.16), (3.17) и включения (6.5) следует, что последовательность (u_n, v_n) , $n \geq 1$, является относительно компактной в пространстве $w\text{-}L^q(T, \tilde{Y})$. Поэтому можно выбрать подпоследовательности $\{(x_{n_k}, \dot{x}_{n_k}), u_{n_k}\}$, (u_{n_k}, v_{n_k}) , $k \geq 1$, такие, что последовательность $\{(x_{n_k}, \dot{x}_{n_k}), u_{n_k}\}$, $k \geq 1$, сходится к некоторому элементу $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\} \in \mathcal{R}_{\overline{CO}U}(x_0, y_0)$ в пространствах (4.7)–(4.9), а последовательность (u_{n_k}, v_{n_k}) , $k \geq 1$, сходится к элементу (u_*, v_*) в пространстве $w\text{-}L^q(T, \tilde{Y})$. Из включения (6.5), утверждения 2) леммы 3.3 и теоремы Мазура вытекает, что

$$(u_*(t), v_*(t)) \in \overline{CO} F(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)). \quad (6.6)$$

Покажем, что $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\}$ является решением задачи (RP). Поскольку

$$\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\} \in \mathcal{R}_{\overline{CO}U}(x_0, y_0),$$

то

$$\min_{\{(x, \dot{x}), u\} \in \mathcal{R}_{\overline{CO}U}(x_0, y_0)} I^{**}(x, \dot{x}, u) \leq I^{**}(x_*, \dot{x}_*, u_*). \quad (6.7)$$

Из равенства (3.21) и включения (6.6) вытекает, что

$$g_U^{**}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t), u_*(t)) \leq v_*(t) \quad \text{п.в.} \quad (6.8)$$

Так как последовательность v_{n_k} , $k \geq 1$, сходится к v_* в пространстве $w\text{-}L^q(T, \mathbb{R})$, то, воспользовавшись неравенством (6.8), получим

$$I^{**}(x_*, \dot{x}_*, u_*) \leq \int_T v_*(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_T g(t, x_{n_k}(t), \dot{x}_{n_k}(t), u_{n_k}(t)) dt. \quad (6.9)$$

Теперь из (6.4), (6.7), (6.9) вытекает, что

$$\begin{aligned} \min_{\{(x, \dot{x}), u\}} I^{**}(x, \dot{x}, u) &= I^{**}(x_*, \dot{x}_*, u_*) \\ &= \int_T g_U^{**}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t), u_*(t)) dt = \int_T v_*(t) dt. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Сравнивая соотношения (6.8), (6.10), приходим к равенству

$$g_U^{**}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t), u_*(t)) = v_*(t). \quad (6.11)$$

Из включения (6.5) и неравенства (3.17) получаем, что существует функция $\lambda(\cdot) \in L^q(T, \mathbb{R}^+)$ такая, что

$$|g(t, x_{n_k}(t), \dot{x}_{n_k}(t), u_{n_k}(t))| \leq \lambda(t) \quad \text{п.в.} \quad (6.12)$$

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} r_k(t) &= \int_0^t g(\tau, x_{n_k}(\tau), \dot{x}_{n_k}(\tau), u_{n_k}(\tau)) d\tau, \quad t \in T, \\ r(t) &= \int_0^t g_U^{**}(\tau, x_*(\tau), \dot{x}_*(\tau), u_*(\tau)) d\tau, \quad t \in T. \end{aligned}$$

В соответствии с равенством (6.11) последовательность

$$v_{n_k}(t) = g(t, x_{n_k}(t), \dot{x}_{n_k}(t), u_{n_k}(t)), \quad k \geq 1,$$

сходится к $v_*(t) = g_U^*(t, x_*(t), \dot{x}_*(t), u_*(t))$ в пространстве $w-L^q(T, \mathbb{R})$. Воспользовавшись неравенством (6.12), получим, что последовательность функций $r_k(t)$, $k \geq 1$, сходится к функции $r(t)$ в пространстве $C(T, \mathbb{R})$. Поэтому имеет место равенство (5.6).

Мы показали, что последовательность $\{(x_{n_k}, \dot{x}_{n_k}), u_{n_k}\} \in \mathcal{R}_U(x_0, y_0)$, $k \geq 1$, сходится к $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\}$ в пространствах (4.7)–(4.9) и имеет место равенство (5.6). Воспользовавшись равенством (6.10), мы получаем, что элемент $\{(x_*, \dot{x}_*), u_*\} \in \mathcal{R}_{\overline{co} U}(x_0, y_0)$ является решением задачи (RP). Тем самым вторая часть теоремы доказана.

Если значениями отображения $U(t, x, y)$ являются компактные множества пространства Y , то из неравенств (2.2) и (3.16) следует, что многозначное отображение $Q: T \rightarrow Y$, $Q(t) = \overline{\bigcup_{k \geq 1} U(t, x_{n_k}(t), \dot{x}_{n_k}(t))}$, где черта означает замыкание в Y , имеет компактные значения и существует функция $\beta(\cdot) \in L^q(T, \mathbb{R})$ такая, что

$$\|Q(t)\|_Y \leq \beta(t) \quad \text{п. в.} \quad (6.13)$$

Рассмотрим функции

$$z_k(t) = \int_0^t u_{n_k}(\tau) d\tau, \quad k \geq 1, \quad z(t) = \int_0^t u_*(\tau) d\tau, \quad t \in T.$$

Поскольку

$$u_{n_k}(t) \in Q(t), \quad k \geq 1, \quad (6.14)$$

и последовательность u_{n_k} , $k \geq 1$, сходится к u_* в пространстве $w-L^q(T, Y)$, то из (6.13), (6.14) вытекает, что последовательность функций $z_k(t)$, $k \geq 1$, сходится к функции $z(t)$ в пространстве $C(T, Y)$. Отсюда следует, что последовательность u_{n_k} , $k \geq 1$, сходится к u_* в пространстве $L_w^q(T, Y)$. Теорема доказана.

§ 7. Пример

В этом параграфе рассмотрим пример управляемой гиперболической системы и дадим интерпретацию полученных выше абстрактных результатов. Пусть $T = [0, 1]$ и Z – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей Γ . Рассмотрим управляемую систему, описываемую гиперболическим уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \Delta x - \sum_{i,j=1}^N D_i(k_{ij}(t, |Dx|^{p-2}) D_j x_t) &= \tilde{f}(t, z, x(t, z), x_t(t, z)) u(t, z), \\ x|_{T \times \Gamma} &= 0, \quad x(0, z) = x_0(z), \quad x_t(0, z) = y_0(z), \end{aligned} \quad (7.1)$$

с ограничениями

$$u(t, z) \in \tilde{U}(t, z, x(t, z), x_t(t, z)) \quad \text{п. в. в } T \times \Omega. \quad (7.2)$$

Здесь $D_i = \partial/\partial z_i$, $i = 1, \dots, N$, $Dx = (D_1 x, \dots, D_N x)$ – градиент x , $Dx Dy = \sum_{i=1}^N D_i x D_i y$ и $|Dx|^2 = \sum_{i=1}^N |D_i x|^2$.

Наряду с ограничением (7.2) рассмотрим ограничение

$$u(t, z) \in \overline{\text{co}} \tilde{U}(t, z, x(t, z), x_t(t, z)) \quad \text{п.в. в } T \times \Omega. \quad (7.3)$$

Обозначим через $k(t, \alpha)$ матрицу размера $N \times N$, элементами которой являются числа $k_{ij}(t, \alpha)$, $i, j = 1, \dots, N$. При фиксированных (t, α) $k(t, \alpha)$ – линейный оператор из $\mathbb{R}^N$ в $\mathbb{R}^N$.

Введем следующие предположения, которые считаем выполненными всюду в дальнейшем.

1) *Гипотеза* $\Gamma(k)$, k – отображение из $T \times \mathbb{R}^+$ в $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ такое, что:

- а) отображение $t \rightarrow k(t, \alpha)$ измеримо;
- б) отображение $\alpha \rightarrow k(t, \alpha)$ непрерывно;
- в) $\xi \|k(t, \xi^{p-2})\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \leq \gamma + \beta \xi^{p-1}$, $\gamma, \beta > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^+$, $t \in T$;
- г) $\langle k(t, \|\xi\|^{p-2})\xi - k(t, \|\eta\|^{p-2})\eta, \xi - \eta \rangle_{\mathbb{R}^N} \geq 0$ для всех $t \in T$, $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$;
- д) $\langle k(t, \|\xi\|^{p-2})\xi, \xi \rangle_{\mathbb{R}^N} \geq \beta_1 \|\xi\|^p$, $\beta_1 > 0$, $t \in T$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^N}$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$.

2) *Гипотеза* $\Gamma(\tilde{f})$, $\tilde{f}: T \times Z \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция такая, что:

- а) функция $(t, z) \rightarrow \tilde{f}(t, z, x, y)$ измерима;
- б) $|\tilde{f}(t, z, x, y) - \tilde{f}(t, z, x_1, y_1)| \leq k_1(t)(|x - x_1| + |y - y_1|)$ п.в. в $T \times Z$, $k_1 \in L^p(T, \mathbb{R}^+)$;
- в) $|\tilde{f}(t, z, x, y)| \leq m$ п.в. в $T \times Z$, $m > 0$.

3) *Гипотеза* $\Gamma(\tilde{U})$, $\tilde{U}: T \times Z \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{cb}\mathbb{R}$ – многозначное отображение такое, что:

- а) отображение $(t, z) \rightarrow \tilde{U}(t, z, x, y)$ измеримо;
- б) $D(\tilde{U}(t, z, x, y), \tilde{U}(t, z, x_1, y_1)) \leq k_2(t)(|x - x_1| + |y - y_1|)$ п.в. в $T \times Z$, $k_2 \in L^1(T, \mathbb{R}^+)$;
- в) $|\tilde{U}(t, z, x, y)| \leq M(t)$, п.в. в $T \times Z$, $M \in L^q(T, \mathbb{R}^+)$.

4) *Гипотеза* $\Gamma(\tilde{g})$, $\tilde{g}: T \times Z \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция такая, что:

- а) функция $(t, z) \rightarrow \tilde{g}(t, z, x, y, u)$ измерима;
- б) $|\tilde{g}(t, z, x, y, u) - \tilde{g}(t, z, x_1, y_1, v)| \leq k_3(t)(|x - x_1| + |y - y_1|) + k_4|u - v|$ п.в. в $T \times Z$, $k_3 \in L^1(T, \mathbb{R}^3)$, $k_4 > 0$;
- в) $|\tilde{g}(t, z, x, y, u)| \leq a_2(t) + b_2(t)(|x| + |y|) + b_3|u|$ п.в. в $T \times Z$, $a_2, b_2 \in L^q(T, \mathbb{R})$, $b_3 > 0$.

5) *Гипотеза* $\Gamma_1(\tilde{g})$, функция $\tilde{g}(t, x, z, x, y, u)$ представима в виде:

- а) $\tilde{g}(t, x, z, x, y, u) = \tilde{g}_1(t, z, x, y) + \tilde{g}_2(t, z, u)$;
- б) функции $(t, z) \rightarrow \tilde{g}_1(t, z, x, y)$, $(t, z) \rightarrow \tilde{g}_2(t, z, u)$ измеримы;
- в) функция $(x, y) \rightarrow \tilde{g}_1(t, z, x, y)$ непрерывна;
- г) $|\tilde{g}_2(t, z, u) - \tilde{g}_2(t, z, v)| \leq k_4|u - v|$ п.в. в $T \times Z$, $k_4 > 0$;
- д) $|\tilde{g}_1(t, z, u)| \leq a_2(t) + b_3|u|$ п.в. в $T \times Z$.

Пусть $W_0^{1,p}(Z)$ – соболевское пространство. Тогда его топологически сопряженным является пространство $W^{-1,q}(Z)$. Из теорем вложения для соболевских пространств известно, что $W_0^{1,p}(Z) \hookrightarrow L^2(Z) \hookrightarrow W^{-1,q}(Z)$ и все вложения непрерывны, плотны и компактны.

Пусть $V = W_0^{1,p}(Z)$, $H = L^2(Z)$, $V^* = W^{-1,q}(Z)$, $Y = L^2(Z)$. Рассмотрим банахово пространство $L^{2,q}(T \times Z)$ [16] всех измеримых функций из $T \times Z$ в $\mathbb{R}$

с конечной нормой

$$\|u\|_{2,q} = \left(\int_T \left(\int_Z |u(t,z)|^2 dz \right)^{q/2} dt \right)^{1/q}.$$

Тогда

$$L^q(T, Y) = L^q(T, L^2(Z)) = L^{2,q}(T \times Z). \quad (7.4)$$

Далее предположим, что выполняется еще одна гипотеза Γ_0 : $x_0 \in W_0^{1,p}(Z)$, $y_0 \in L^2(Z)$.

Как обычно, решение управляемой системы (7.1), (7.2) мы понимаем в слабом смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Пара $\{(x, \partial x / \partial t), u\}$, $x \in C(T, W_0^{1,p}(Z)) \hookrightarrow C(T, L^2(Z))$, $\partial x / \partial t \in L^p(T, W_0^{1,p}(Z)) \hookrightarrow C(T, L^2(Z))$ при $\partial^2 x / \partial t^2 \in L^q(T, W^{-1,q}(Z))$, $u \in L^{2,q}(T \times Z) = L^q(T, L^2(Z))$, называется *решением управляемой системы* (7.1), (7.2), если для почти всех $t \in T$ и всех $v \in W_0^{1,p}(Z)$ выполняется равенство

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_Z x(t,z)v(z) dz + \int_Z \langle Dx, Dv \rangle_{\mathbb{R}^n} dz \\ + \int_Z \langle k(t, |Dx_t|^{p-2}) Dx_t, Dv \rangle_{\mathbb{R}^n} dz = \int_Z \tilde{f}(t, z, x, x_t) u(t, z) v(z) dz \end{aligned}$$

и включение

$$u(t, z) \in \tilde{U}(t, z, x(t, z), x_t(t, z)) \quad \text{п.в. в } T \times \Omega.$$

Аналогично определяется решение и управляемой системы (7.1), (7.3). Множества решений управляемых систем (7.1), (7.2) и (7.1), (7.3) будем обозначать $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0, y_0)$ и $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0, y_0)$ соответственно. Покажем, что решение управляемой системы (7.1), (7.2) является решением соответствующей эволюционной управляемой системы вида (1.2), (1.3).

Рассмотрим следующие формы Дирихле:

$$\begin{aligned} a_1(t, x, y) &= \int_Z \sum_{i,j=1}^N k_{ij}(t, \|Dx\|^{p-2}) D_i x D_j y dz \\ &= \int_{\Sigma} \langle k(t, \|Dx\|^{p-2}) Dx, Dy \rangle_{\mathbb{R}^N} dz, \\ a_2(t, x, y) &= \int_Z \langle Dx, Dy \rangle_{\mathbb{R}^N} dz, \quad x, y \in W_0^{1,p}(Z). \end{aligned}$$

Используя гипотезу $\Gamma(k, v)$, получим

$$|a_1(t, x, y)| \leq (a + b \|x\|_{W_0^{1,p}(Z)}^{p-1}) \|y\|_{W_0^{1,p}(Z)},$$

где $a, b > 0$ – некоторые константы.

Поэтому существует оператор $A: T \times W_0^{1,p}(Z) \rightarrow W^{-1,q}(Z)$ такой, что

$$\langle y, A(t, x) \rangle = a_1(t, x, y), \quad x, y \in W_0^{1,p}(Z), \quad (7.5)$$

и

$$\|A(t, x)\|_{W^{-1,q}(Z)} \leq a + b\|x\|_{W_0^{1,p}(Z)}^{p-1},$$

т.е. выполняется гипотеза $\Gamma(A, \Gamma)$. Справедливость всех остальных гипотез $\Gamma(A)$ для оператора $A(t, x)$, определяемого равенством (7.5), может быть доказана аналогично доказательству подобных гипотез из [9, § 6].

Воспользовавшись неравенством Коши–Шварца, получим

$$|a_2(t, x, y)| \leq c_1 \|x\|_{W_0^{1,p}(Z)} \|y\|_{W_0^{1,p}(Z)},$$

где $c_1 > 0$ – некоторая константа.

Следовательно, существует оператор $B \in \mathcal{L}(W_0^{1,p}(Z), W^{-1,q}(Z))$ такой, что

$$\langle y, Bx \rangle = a_2(t, x, y), \quad x, y \in W_0^{1,p}(Z). \quad (7.6)$$

Ясно, что оператор B , определяемый равенством (7.6), является симметричным. Из неравенства Пуанкаре следует, что

$$\langle x, Bx \rangle \geq c_2 \|x\|_{W_0^{1,p}(Z)}^2,$$

где $c_2 > 0$ – некоторая константа. Поэтому имеют место все гипотезы $\Gamma(B)$ для оператора B , определяемого равенством (7.6).

Рассмотрим многозначное отображение $U: T \times H \times H \rightarrow Y$, $H = L^2(Z)$, $Y = L^2(Z)$, определенное по правилу

$$U(t, x, y) = \{u \in Y; u(z) \in \tilde{U}(t, x(z), y(z)) \text{ п.в. в } Z\}. \quad (7.7)$$

Воспользовавшись гипотезами $\Gamma(\tilde{U})$, аналогично доказательствам подобных утверждений из [9, § 6] получим, что отображение $U: T \times H \times H \rightarrow Y$, определяемое формулой (7.7), удовлетворяет всем гипотезам $\Gamma(U)$.

Из [17, теорема 1.5] следует, что

$$\overline{\text{co}} U(t, x, y) = \{u \in Y; u(z) \in \overline{\text{co}} \tilde{U}(t, z, x(z), y(z)) \text{ п.в. в } Z\}. \quad (7.8)$$

Пусть $f(t, x, y)u$, $x, y \in H = L^2(Z)$, $u \in Y = L^2(Z)$, – функция, определенная следующим образом:

$$(f(t, x, y)u)(z) = \tilde{f}(t, z, x(z), y(z))u(z). \quad (7.9)$$

С помощью тех же аргументов, которые использовались в [9, § 6], можно показать, что из гипотез $\Gamma(\tilde{f})$ вытекают гипотезы $\Gamma(f)$ и $\Gamma_1(f)$ для отображения $f(t, x, y)$, определяемого равенством (7.9).

Таким образом, управляемую систему (7.1), (7.2) мы свели к управляемой системе (1.2), (1.3) с операторами A , B , f и ограничением $U(t, x, y)$, определяемыми соотношениями (7.5), (7.6), (7.9), (7.7).

Используя [18, гл. 9, § 8, следствие 3] и соотношение (7.7), получим, что для элемента $u \in L^q(T, L^2(Z)) = L^{2,q}(T \times Z)$ и элементов $x, y \in C(T, L^2(Z))$ включение $u(t) \in U(t, x(t), y(t))$ имеет место почти всюду на T тогда и только тогда, когда почти всюду на $T \times Z$ имеет место включение $u(t)(z) = u(t, z) \in \tilde{U}(t, z, x(t, z), y(t, z))$. Поэтому согласно определению 7.1 множество решений

$\mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0, y_0)$ управляемой системы (7.1), (7.2) совпадает с множеством решений $\mathcal{R}_U(x_0, y_0)$ управляемой системы (1.2), (1.3). Согласно (7.8) то же самое имеет место и для решений $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0, y_0)$, $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0, y_0)$ управляемых систем (7.1), (7.3) и (1.2), (1.4).

Пусть

$$\tilde{g}_{\tilde{U}}(t, z, x, y, u) = \begin{cases} \tilde{g}(t, z, x, y, u), & u \in \tilde{U}(t, z, x, y, u), \\ +\infty, & u \notin \tilde{U}(t, z, x, y, u), \end{cases}$$

и $\tilde{g}_{\tilde{U}}^{**}(t, z, x, y, u)$ – биполярная функции $u \rightarrow \tilde{g}_{\tilde{U}}(t, z, x, y, u)$. На пространстве $H \times H \times Y$, $H = L^2(Z)$, $Y = L^2(Z)$, рассмотрим функции

$$g(t, x, y, u) = \int_Z \tilde{g}(t, z, x(z), y(z), u(z)) dz \quad (7.10)$$

и

$$g_U(t, x, y, u) = \begin{cases} g(t, x, y, u), & u \in U(t, x, y), \\ +\infty, & u \notin U(t, x, y), \end{cases}$$

где $U(t, x, y)$ – отображение, определенное по формуле (7.7). Пусть $g_U^{**}(t, x, y, u)$ – биполярная функции $u \rightarrow g_U(t, x, y, u)$. При выполнении либо гипотезы $\Gamma(\tilde{g})$, либо гипотезы $\Gamma_1(g)$ с помощью тех же рассуждений, которые использовались в [9, §6], получим, что функция $g(t, x, y, u)$, определенная по формуле (7.10), обладает всеми свойствами либо гипотезы $\Gamma(\tilde{g})$, либо гипотезы $\Gamma_1(g)$ и

$$g_U^{**}(t, x, y, u) = \int_Z \tilde{g}_{\tilde{U}}^{**}(t, z, x(z), y(z), u(z)) dz. \quad (7.11)$$

На пространстве $C(T, L^2(Z)) \times C(T, L^2(Z)) \times L^{2,q}(T \times Z)$ рассмотрим функционалы

$$I(x, y, u) = \int_T \int_Z \tilde{g}(t, z, x(t)(z), y(t)(z), u(t, z)) dz dt, \quad (7.12)$$

$$I^{**}(x, y, u) = \int_T \int_Z \tilde{g}_{\tilde{U}}^{**}(t, z, x(t)(z), y(t)(z), u(t, z)) dz dt. \quad (7.13)$$

Тогда согласно (7.10), (7.11) имеем

$$I(x, y, u) = \int_T g(t, x(t), y(t), u(t)) dt, \quad (7.14)$$

$$I^{**}(x, y, u) = \int_T g_U^{**}(t, x(t), y(t), u(t)) dt. \quad (7.15)$$

В формулах (7.14), (7.15) элемент $u \in L^{2,q}(T \times Z)$ отождествим с элементом $u \in L^q(T, L^2(Z))$.

Для формулировки основных результатов этого параграфа нам понадобится следующий результат.

Пусть D – совокупность всех множеств из $T \times \mathbb{R}^N$, представимых в виде $E = [t_1, t_2] \times [a_1, b_1] \times \dots \times [a_N, b_N]$, $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$, $a_i \leq b_i$, $i = 1, \dots, N$. На пространстве $L^{2,q}(T \times Z)$ введем норму [11]

$$\|u\|_w = \sup_{E \in D} \left| \int \int_{E \cap (T \times Z)} u(t, z) dz dt \right|. \quad (7.16)$$

Пространство $L^{2,q}(T \times Z)$ с нормой (7.16) будем обозначать $L_w^{2,q}(T \times Z)$.

Пусть $\varphi \in L^{2,q}(T \times Z, \mathbb{R}^+)$ и

$$S = \{u \in L^{2,q}(T \times Z); |u(t, z)| \leq \varphi(t, z) \text{ п.в. в } T \times Z\}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.1 (см. [9]). На множестве S топологии пространств $w\text{-}L^{2,q}(T \times Z)$ и $L_w^{2,q}(T \times Z)$ совпадают и топология пространства $L_w^{2,q}(T \times Z)$ не сильнее топологии пространства $L_w^q(T, L^2(Z))$ (см. (2.10)).

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть выполнены гипотезы $\Gamma(k)$, $\Gamma(\tilde{f})$, $\Gamma(\tilde{U})$ и либо гипотеза $\Gamma(\tilde{g})$, либо гипотеза $\Gamma_1(\tilde{g})$. Тогда множество $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0, y_0)$ решений системы (7.1), (7.2) непусто и для любого решения $\{(x^*, x_t^*), u^*\}$ системы (7.1), (7.3) существует последовательность $\{(x^n, x_t^n), u^n\}$, $n \geq 1$, решений системы (7.1), (7.2) такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in T} \left(\int_Z |x^*(t, z) - x^n(t, z)|^2 dz \right)^{1/2} = 0, \quad (7.17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in T} \left(\int_Z |x_t^*(t, z) - x_t^n(t, z)|^2 dz \right)^{1/2} = 0, \quad (7.18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq t' \leq t \leq 1} \left| \int_{t'}^t \int_Z (\tilde{g}_{\tilde{U}}^{**}(t, z, x^*(t, z), x_t^*(t, z), u^*(t, z)) - \tilde{g}(t, z, x^n(t, z), x_t^n(t, z), u^n(t, z))) dz dt \right| = 0, \quad (7.19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{E \in D} \left| \iint_{E \cap (T \times Z)} (u^*(t, z) - u^n(t, z)) dz dt \right| = 0. \quad (7.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рамках предположений теоремы, как это было показано выше, управляемые системы (7.1), (7.2) и (7.1), (7.3) порождают эквивалентные, с точки зрения понятия решения, управляемые системы (1.2), (1.3) и (1.2), (1.4). Тогда согласно теореме 4.1 множество $\mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0, y_0)$ непусто. Воспользовавшись либо теоремой 5.1, либо теоремой 5.2, получим, что для любого решения $\{(x^*, x_t^*), u^*\}$ системы (7.1), (7.3) существует последовательность $\{(x^n, x_t^n), u^n\}$, $n \geq 1$, решений системы (7.1), (7.2) такая, что

$$\{(x^n, x_t^n), u^n\} \rightarrow \{(x^*, x_t^*), u^*\}$$

в

$$C(T, L^2(Z)) \times C(T, L^2(Z)) \times L_w^q(T, L^2(Z)) \quad (7.21)$$

и справедливо равенство (5.6), где в качестве функций g и $g_{\tilde{U}}^{**}$ взяты функции, определенные равенствами (7.10) и (7.11). Воспользовавшись гипотезой $\Gamma(\tilde{U})$, в), получим, что для любого $u^n \in L^q(T, L^2(Z)) = L^{2,q}(T \times Z)$ имеет место неравенство $|u^n(t, z)| \leq M(t)$ п.в. в $T \times Z$, где $M \in L^q(T, \mathbb{R}^+)$. Поскольку $u^n \rightarrow u^*$ в $L_w^q(T, L^2(Z))$, то в соответствии с утверждением 7.1

$$u^n \rightarrow u^* \quad \text{в } L_w^{2,q}(T \times Z). \quad (7.22)$$

Теперь соотношения (7.18)–(7.20) следуют из (7.21), (5.6), (7.10), (7.11), (7.22) и (7.16). Теорема доказана.

Рассмотрим задачу

$$I(x, x_t, u) \rightarrow \inf, \quad (\text{P}')$$

где $\inf$ берется на множестве решений системы (7.1), (7.2), и задачу

$$I^{**}(x, x_t, u) \rightarrow \min, \quad (\text{RP}')$$

где $\min$ вычисляется на множестве решений системы (7.1), (7.3). Здесь $I(x, y, u)$ и $I^{**}(x, x_t, u)$ – функционалы (7.12) и (7.13) соответственно.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть выполнены гипотезы $\Gamma(k)$, $\Gamma(\tilde{f})$, $\Gamma(\tilde{U})$ и либо гипотеза $\Gamma(\tilde{g})$, либо гипотеза $\Gamma_1(\tilde{g})$. Тогда задача (RP') имеет решение и

$$\min_{\{(x, x_t), u\} \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0, y_0)} I^{**}(x, x_t, u) = \inf_{\{(x, x_t), u\} \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0, y_0)} I(x, x_t, u). \quad (7.23)$$

Для любого решения $\{(x^*, x_t^*), u^*\}$ задачи (RP') существует минимизирующая последовательность $\{(x^n, x_t^n), u^n\} \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0, y_0)$ задачи (P') такая, что справедливы равенства (7.17)–(7.20).

Обратно, если $\{(x^n, x_t^n), u^n\} \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0, y_0)$ – минимизирующая последовательность задачи (P'), то существуют подпоследовательность $\{(x^{n_k}, x_t^{n_k}), u^{n_k}\}$, $k \geq 1$, последовательности $\{(x^n, x_t^n), u^n\}$ и решение $\{(x^*, x_t^*), u^*\}$ задачи (RP') такие, что для подпоследовательности $\{(x^{n_k}, x_t^{n_k}), u^{n_k}\}$, $k \geq 1$, имеют место равенства (7.17)–(7.20).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование решения задачи (RP') и равенство (7.23) следуют из теоремы 6.1 и равенств (7.14), (7.15) и (7.10), (7.11). Остальные утверждения первой части теоремы вытекают из теоремы 7.1.

Пусть $\{(x^n, x_t^n), u^n\} \in \mathcal{R}_{\tilde{U}}(x_0, y_0)$ – минимизирующая последовательность задачи (P'). Тогда согласно второй части теоремы 6.1 существуют подпоследовательность $\{(x^{n_k}, x_t^{n_k}), u^{n_k}\}$, $k \geq 1$, последовательности $\{(x^n, x_t^n), u^n\}$ и решение $\{(x^*, x_t^*), u^*\}$ задачи (RP') такие, что

$$\{(x^{n_k}, x_t^{n_k}), u^{n_k}\} \rightarrow \{(x^*, x_t^*), u^*\}$$

в

$$C(T, L^2(Z)) \times C(T, L^2(Z)) \times w\text{-}L^q(T, L^2(Z)) \quad (7.24)$$

и справедливо равенство (5.6). Поскольку $u^{n_k} \in L^q(T, L^2(Z)) = L^{2,q}(T \times Z)$, $k \geq 1$, сходится к u^* в пространстве $w\text{-}L^q(T, L^2(Z))$, то, воспользовавшись гипотезой $\Gamma(\tilde{U})$, в) и утверждением 7.1, получим, что

$$u^{n_k} \rightarrow u^* \quad \text{в } L_w^q(T \times Z). \quad (7.25)$$

Теперь вторая часть утверждений теоремы следует из (7.24), (5.6), (7.14), (7.15), (7.12), (7.13), (7.25) и (7.16). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. На первый взгляд в гипотезе $\Gamma_1(f)$ вместо неравенства (5.1) можно использовать неравенство (5.2), которое является более простым. Если мы рассмотрим оператор $f(t, x, y)$, определяемый по формуле (7.9), то при фиксированных $t, x, y \in L^2(Z)$ он является непрерывным линейным оператором из $L^2(Z)$ в $L^2(Z)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|f(t, x, y) - f(t, x_1, y_1)\|_{\mathcal{L}(L^2(Z))} &= \sup_{\|u\|_{L^2(Z)} \leq 1} \left(\int_Z |(\tilde{f}(t, z, x(z), y(z)) - \tilde{f}(t, z, x_1(z), y_1(z)))u(z)|^2 dz \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Легко видеть, что из (7.26) и гипотез $\Gamma(\tilde{f})$ не следует неравенство (5.2). Однако если воспользоваться гипотезами $\Gamma(\tilde{f})$ и $\Gamma(\tilde{U})$, в), то получим, что для оператора $f(t, x, y)$ справедливо неравенство (5.1).

В заключение отметим, что кроме работы [4] автору не известны другие аналоги теоремы Н. Н. Боголюбова при ограничениях. Частные случаи теоремы 6.1 с ограничениями в виде обыкновенного дифференциального включения с невыпуклыми компактными значениями в банаховом пространстве и в виде эволюционной управляемой системы первого порядка доказаны в [19] и [9]. Теорема 6.1 является полным аналогом теорем 3.1 и 4.1 из [3, гл. 9], где рассматривалась задача минимизации невыпуклого интегранта с линейными связями и без ограничений на управление.

Список литературы

1. *Bogolyubov N. N.* Sur quelques method nonvelles dans le calculas des variations // Ann. Math. Pura Appl. Ser. 4. 1930. V. 7. P. 249–271.
2. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
3. *Эккланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
4. *Суслов С. И.* Теорема Боголюбова с ограничением в виде дифференциального включения // Сиб. матем. журн. 1994. Т. 35. № 4. С. 902–914.
5. *Zeidler E.* Nonlinear functional analysis and its applications. II. N. Y.: Springer, 1990.
6. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.
7. *Ahmed N. U., Kerbal S.* Optimal control of nonlinear second order evolution equations // J. Appl. Math. and Stochastic Anal. 1993. V. 6. P. 123–136.
8. *Barbu V.* Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. Leyden: Noordhoff International Publishing, 1976.
9. *Толстоногов А. А.* Релаксация в невыпуклых задачах оптимального управления, описываемых эволюционными уравнениями первого порядка // Матем. сб. 1999. Т. 190. № 11. С. 135–160.
10. *Толстоногов А. А.* К теореме Скорца–Драгони для многозначных отображений с переменной областью определения // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 109–120.
11. *Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A.* L_p -continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: relaxation theorems // Set-valued Anal. 1996. V. 4. P. 237–269.
12. *Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A.* L_p -continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: existence theorems // Set-valued Anal. 1996. V. 4. P. 173–203.
13. *Kisielewicz M.* Differential inclusions and optimal control. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 1991.
14. *Куратовский К.* Топология. Т. II. М.: Мир, 1969.
15. *Balder E. J.* Necessary and sufficient condition for L_1 -strong-weak lower semicontinuity of integral functionals // Nonlinear Anal. Theory. Meth. Appl. 1987. V. 11. № 12. P. 1399–1404.
16. *Ладженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
17. *Hiai F., Umegaki H.* Integrals, conditional expectations and martingales of multivalued functions // J. Multivariate Anal. 1997. V. 7. P. 149–182.
18. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
19. *Tolstonogov A. A.* Differential inclusions in a Banach space. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publishers, 2000.