Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. И. Сазонов, Трехмерная стационарная задача обтекания при малых числах Рейнольдса, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 6, 99–128

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4562>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 16:53:44

УДК 517.95

Л. И. Сазонов

Трехмерная стационарная задача обтекания при малых числах Рейнольдса

Исследуется вопрос о представлении в виде сходящихся рядов решений внешних задач для стационарной системы Навье–Стокса при малых числах Рейнольдса Re . Предлагаемый подход позволяет рассмотреть некоторые случаи растущих граничных условий при $Re \rightarrow 0$.

Библиография: 20 наименований.

Ключевые слова: стационарная система Навье–Стокса, внешняя область, гидродинамические потенциалы, сила сопротивления.

§ 1. Введение

Задача трехмерного стационарного обтекания системы тел потоком вязкой несжимаемой жидкости состоит в определении решения системы Навье–Стокса

$$\begin{aligned}\Delta u - \nabla p &= Re(u, \nabla)u, \\ \operatorname{div} u &= 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, являющейся внешностью системы ограниченных тел B_i , $i = 1, 2, \dots, N$, с граничным условием

$$u|_{\partial\Omega} = 0\tag{1.2}$$

и условием на бесконечности

$$u|_{\infty} = e^1 = (1, 0, 0).\tag{1.3}$$

Здесь u – поле скорости жидкости, p – функция давления, Re – число Рейнольдса.

Для дальнейшего удобно перейти к системе Озеена

$$\begin{aligned}\Delta u - 2\varepsilon\partial_1 u - \nabla p &= 2\varepsilon(u, \nabla)u, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_{\partial\Omega} = a, \quad u|_{\infty} = 0,\end{aligned}\tag{1.4}$$

которая получается из (1.1) после замен $u \doteq u + e^1$, $Re = 2\varepsilon$.

Собственно для задачи обтекания имеем $a = -e_1$, но в дальнейшем рассматриваются общие граничные условия. Например, неоднородные граничные условия возникают при протекании жидкости через поверхность обтекаемых тел или при вращении этих тел (в стационарном случае границы тел должны быть поверхностями вращения).

Работа выполнена при финансовой поддержке Аналитической ведомственной целевой программы развития научного потенциала высшей школы (грант № 211/6095).

Существование решения задачи обтекания установлено Ж. Лере [1]. Другие варианты доказательства принадлежат ряду авторов (см., например, [2], [3]).

При малых числах Рейнольдса несмотря на наличие малого параметра лишь при младших производных задача не является регулярной в том смысле, что ее решение нельзя представить в виде степенного ряда по параметру Re (парадокс Уайтхеда). В случае обтекания шара и цилиндра при малых числах Рейнольдса построение асимптотики выполнено в работе [4] (см. также [5]) методом сращиваемых асимптотических разложений: внутреннее и внешнее разложения сращиваются в области перекрытия, где пригодны оба разложения. В дальнейшем появилось большое количество работ (эти исследования продолжают-ся и в настоящее время), в которых с помощью методики Праудмена–Пирсона изучались различные задачи гидродинамики при малых числах Рейнольдса. В частности, были рассмотрены задачи стационарного обтекания канонических тел: эллиптических цилиндров, ограниченных тел вращения, систем шаров, вращающихся шаров и т. д. Вопросам обоснования получаемых асимптотик, на наш взгляд, не уделялось должного внимания. Отметим в связи с этим работу [6], в которой выполнено обоснование метода сращиваемых асимптотических разложений для обтекания произвольного тела в трехмерном и двумерном случаях. Заметим также, что на необходимость продолжения исследования задач гидродинамики при малых числах Рейнольдса указывалось в [7].

Иной подход к задачам обтекания развивался в работах [8]–[11]. Основная идея, использованная в этих работах, состоит в том, что внешнее разложение строится из решений системы Озеена во всем пространстве, имеющих особенность в нуле типа особенности фундаментального решения; такие решения зависят от двух ($n = 2$) или трех ($n = 3$) свободных параметров, для выполнения граничных условий к каждому члену внешнего разложения добавляется член внутреннего разложения – решение системы Стокса, из условий разрешимости (условий существования решений системы Стокса с нулевым условием на бесконечности при $n = 2$ или существования решения, имеющего порядок убывания $O(1/|x|^2)$ при $n = 3$) определяется зависимость свободных параметров от числа Рейнольдса. Таким образом, сращивание внешнего и внутреннего разложений осуществляется на границе обтекаемого тела.

В настоящей работе исследуется вопрос о представлении решения трехмерной задачи обтекания в виде сходящегося ряда из решений линеаризованной системы Озеена. Вместе с системой (1.4) рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \Delta u - 2\varepsilon \partial_1 u - \nabla p &= 2\delta(u, \nabla)u, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_{\partial\Omega} = a, \quad u|_{\infty} = 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

с некоторым вспомогательным малым параметром δ . Решение данной системы будем находить в виде

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)} \delta^n, \quad p = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} \delta^n. \quad (1.6)$$

Тогда для определения $u^{(n)}$, $p^{(n)}$ получаем следующие краевые задачи:

$$\begin{aligned} \Delta u^{(0)} - 2\varepsilon \partial_1 u^{(0)} - \nabla p^{(0)} &= 0, \\ \operatorname{div} u^{(0)} &= 0, \quad u^{(0)}|_{\partial\Omega} = a, \quad u^{(0)}|_{\infty} = 0; \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \Delta u^{(n)} - 2\varepsilon \partial_1 u^{(n)} - \nabla p^{(n)} &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} (u^{(k)}, \nabla) u^{(n-1-k)}, \\ \operatorname{div} u^{(n)} &= 0, \quad u^{(n)}|_{\partial\Omega} = 0, \quad u^{(n)}|_{\infty} = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Далее устанавливается существование решений систем (1.7), (1.8) в подходящем банаховом пространстве и выполнение оценок

$$\|u^{(n)}\| \leq c(\varepsilon) \sum_{k=0}^{n-1} \|u^{(k)}\| \|u^{(n-1-k)}\|, \quad (1.9)$$

где $c(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ (более точная оценка приведена ниже). Применение метода мажорант позволяет установить сходимость рядов (1.6) при достаточно малых δ , $\delta < \delta(\varepsilon)$. Оценка для $\delta(\varepsilon)$ такова, что неравенство $\varepsilon < \delta(\varepsilon)$ выполняется для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Поэтому ряды (1.6) при $\delta = \varepsilon < \varepsilon_0$ сходятся и определяют решение задачи обтекания.

Заметим, что данный подход позволяет рассмотреть случай растущих при $\varepsilon \rightarrow 0$ граничных условий.

§ 2. Гидродинамические потенциалы для системы Озеена

2.1. Фундаментальное решение. Рассмотрим систему Озеена

$$\begin{aligned} \Delta u - 2\varepsilon \partial_1 u - \nabla p &= f, \\ \operatorname{div} u &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

которая получается при линеаризации системы Навье–Стокса на постоянном решении $u = (1, 0, 0)$. Пусть $\{H_\varepsilon^i = (H_\varepsilon^{i1}, H_\varepsilon^{i2}, H_\varepsilon^{i3}), q^i; i = 1, 2, 3\}$ – ее фундаментальный тензор, т. е. набор распределений, являющийся решением системы

$$\begin{aligned} \Delta H_\varepsilon^i - 2\varepsilon \partial_1 H_\varepsilon^i - \nabla q^i &= e^i \delta(x), \\ \operatorname{div} H_\varepsilon^i &= 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\delta(x)$ – δ -распределение Дирака, e^i – единичный орт оси ox_i . Для фундаментального тензора справедливы представления

$$\begin{aligned} q^i &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{|x|} \right), \\ H_\varepsilon^{ij} &= D_{ij} \Phi_\varepsilon \equiv (\delta^{ij} \Delta - \partial_i \partial_j) \Phi_\varepsilon, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\Phi_\varepsilon(x) = -\frac{1}{8\pi\varepsilon} \int_0^{\varepsilon s} \frac{1 - e^{-t}}{t} dt, \quad s = |x| - x_1. \quad (2.4)$$

Далее через $H^{ij}(x)$ будем обозначать фундаментальное решение $H_\varepsilon^{ij}(x)$ при $\varepsilon = 1$. Отметим очевидное соотношение $H_\varepsilon^{ij}(x) = \varepsilon H^{ij}(\varepsilon x)$. Осуществляя разложение функции $\Phi_\varepsilon(x)$ в ряд, получаем представление

$$H_\varepsilon^{ij}(x) = -\frac{1}{8\pi} \left(\frac{\delta^{ij}}{|x|} + \frac{x_i x_j}{|x|^3} \right) + \frac{1}{8\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n D_{ij} s^n \varepsilon^{n-1}}{n! n}. \quad (2.5)$$

Первый член этого разложения является фундаментальным решением системы Стокса. Следовательно, $H_\varepsilon^{ij}(x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно на любом компакте $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ сходится к фундаментальному решению системы Стокса.

Предположим, что для векторного распределения $f = (f_1, f_2, f_3)$ определены свертки

$$u_i = H_\varepsilon^{ij} * f_j, \quad p = q^j * f_j.$$

(Здесь и всюду ниже по повторяющимся индексам всегда выполняется суммирование от 1 до 3.)

Тогда (u, p) является решением системы Озеена в смысле распределений. Далее мы будем использовать L_q -оценки свертки

$$\|\partial^\alpha(q^j * f)\|_{L_q(\mathbb{R}^3)} \leq c_q \|f\|_{L_r(\mathbb{R}^3)}, \quad (2.6)$$

где $|\alpha| = 0, 1$, а показатели q и r удовлетворяют условиям

$$1 < r \leq q < \infty, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{r} - \frac{1 - |\alpha|}{3},$$

и L_q -оценки

$$\|\partial^\alpha(H^{ij} * f)\|_{L_q(\mathbb{R}^3)} \leq c_{q,r} \|f\|_{L_r(\mathbb{R}^3)}, \quad (2.7)$$

где $|\alpha| = 0, 1, 2$, а показатели q и r удовлетворяют условиям

$$1 < r \leq q < \infty, \quad \frac{1}{2(|\alpha| + 1)} \leq \frac{1}{r} - \frac{1}{q} \leq \frac{2}{3(|\alpha| + 1)}$$

при $|\alpha| = 0, 1$ и $r = q$ при $|\alpha| = 2$.

Неравенства (2.6) – известные оценки для ньютоновского потенциала [12], оценки (2.7) являются следствием теорем о мультипликаторах преобразования Фурье [13], [14].

Ниже будут использованы также следующие оценки фундаментального решения и некоторых интегралов, установленные в [15] (здесь и далее соотношение $A \ll B$ означает, что существует такое $C > 0$, что $A \leq CB$):

$$|\partial^\alpha H^{ij}(x)| \ll \begin{cases} |x|^{-(|\alpha| + \alpha_1)/2 - 1} (1 + s(x))^{-(|\alpha| - \alpha_1)/2 - 1}, & |x| > 2, \\ |x|^{-|\alpha| - 1}, & |x| < 2, \end{cases} \quad (2.8)$$

для интегралов

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{1 < |y| < |x|/2} \frac{|\partial_k H^{ij}(x - y)|}{(1 + s(y))^\gamma |y|^\delta} dy, \quad \gamma \geq 0, \quad \delta > 0, \\ J_2 &= \int_{|y| > 3|x|} \frac{|\partial_k H^{ij}(x - y)|}{(1 + s(y))^\gamma |y|^\delta} dy, \quad \gamma \geq 0, \quad \delta + \gamma - \frac{1}{2} > 0, \\ J_3 &= \int_{|x|/2 < |y| < 3|x|} \frac{|\partial_k H^{ij}(x - y)|}{(1 + s(y))^\gamma |y|^\delta} dy, \quad \gamma \geq 0, \quad \delta > 0, \end{aligned}$$

при $|x| > 2$ верны оценки

$$\begin{aligned} |J_1| &\ll \frac{\ln^m |x|}{|x|^{3/2} (1 + s(x))^{3/2}} (1 + |x|^{2-\delta} + |x|^{3-\gamma-\delta}) \\ &\quad + \frac{\ln^n |x|}{|x|^{3/2} (1 + s(x))} (((1 + s(x))|x|)^{(3-\gamma-\delta)/2} + (1 + s(x))^{1-\gamma} |x|^{2-\delta}), \quad (2.9) \end{aligned}$$

где $m = 0$, если среди чисел $2 - \delta$, $1 - \gamma$, $3 - \gamma - \delta$ нет равных нулю, $m = 1$, если среди них точно одно равно нулю, $m = 2$ в остальных случаях; $n = 0$, если $\gamma - \delta + 1 \neq 0$, и $n = 1$, если $\gamma - \delta + 1 = 0$;

$$|J_2| \ll (|x|^{-\delta-1} + |x|^{-\gamma-\delta+1/2}), \quad (2.10)$$

$$|J_3| \ll \frac{|x|^{-\delta+1/2}}{(1 + s(x))^{\min(3/2, \gamma)}}. \quad (2.11)$$

2.2. Формулы Грина и гидродинамические потенциалы системы Озеена. Далее для системы Озеена

$$\begin{aligned} \Delta u - 2\varepsilon \partial_1 u - \nabla p &= f, \\ \operatorname{div} u &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

аналогично [16] выводятся формулы Грина, интегральное представление для решений и аналоги гидродинамических потенциалов.

Пусть v , u – гладкие соленоидальные поля, p , q – гладкие функции,

$$T_{ij}(v, p) = -\delta^{ij}p + v_{ij}, \quad v_{ij} = \partial_i v_j + \partial_j v_i, \quad (2.13)$$

– тензор напряжений, соответствующий течению (v, p) . Справедлива формула

$$\partial_k [T_{ik}(v, p)u_i] = \frac{1}{2}v_{ij}u_{ij} + (\Delta v_i - \partial_i p)u_i. \quad (2.14)$$

(Напомним, что здесь и ниже по повторяющимся индексам ведется суммирование.)

Введем обозначения

$$L(v, p) = \Delta v - 2\varepsilon \partial_1 v - \nabla p, \quad (2.15)$$

$$L'(u, q) = \Delta u + 2\varepsilon \partial_1 u + \nabla q. \quad (2.16)$$

Пусть D – ограниченная область с гладкой границей, n – внешняя нормаль на ∂D . Умножая (2.15) скалярно на u , учитывая (2.14) и интегрируя по D с использованием формулы Остроградского–Гаусса, получаем формулу Грина

$$\int_D L(v, p)u \, dx = -2\varepsilon \int_D \partial_1 v u \, dx - \frac{1}{2} \int_D v_{ij}u_{ij} \, dx + \int_{\partial D} T_{ik}(v, p)n_k u_i \, ds. \quad (2.17)$$

Аналогично,

$$\int_D L'(u, q)v \, dx = 2\varepsilon \int_D \partial_1 u v \, dx - \frac{1}{2} \int_D v_{ij}u_{ij} \, dx + \int_{\partial D} T'_{ik}(u, q)n_k v_i \, ds, \quad (2.18)$$

где $T'_{ik}(u, q) = \delta^{ik}q + u_{ik}$.

Вычитая из (2.17) равенство (2.18), имеем

$$\begin{aligned} &\int_D (L(v, p)u - L'(u, q)v) \, dx \\ &= - \int_{\partial D} 2\varepsilon n_1 v u \, ds + \int_{\partial D} (T_{ij}(v, p)n_j u_i - T'_{ij}(u, q)v_i n_j) \, ds. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Пусть (v, p) – решение системы Озеена

$$\begin{aligned} L(v, p) &= f, \\ \operatorname{div} v &= 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Поскольку пара $H_\varepsilon^k(x - y), q^k(x - y)$ по переменным y удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} L'(H_\varepsilon^k(x - y), q^k(x - y)) &= \delta(x - y)e^k, \\ \operatorname{div} H_\varepsilon^k &= 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

то, подставляя $u = H_\varepsilon^k(x - y)$, $q = q^k(x - y)$ в (2.19), получаем

$$\begin{aligned} v_k(x) &= \int_D H_\varepsilon^{ki}(x - y)f_i(y) dy + \int_{\partial D} (M'_{ij}(H_\varepsilon^k(x - y), q^k(x - y))_y v_i(y)n_j(y) \\ &\quad - H_\varepsilon^{ki}(x - y)M_{ij}(v, p)_y n_j(y)) ds_y, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$M_{ij}(v) = T_{ij}(v, p) - \varepsilon \delta^{1j} v_i, \quad (2.23)$$

$$M'_{ij}(v) = T'_{ij}(v, p) + \varepsilon \delta^{1j} v_i, \quad (2.24)$$

причем индекс y в $M_{ij}(\cdot)_y$ и $M'_{ij}(\cdot)_y$ означает, что частные производные вычисляются по переменным y_j .

Найдем интегральную формулу для давления p . Используя тот факт, что объемные потенциалы

$$U_k(x) = \int_D H_\varepsilon^{kj}(x - y)f_j(y) dy, \quad (2.25)$$

$$P(x) = \int_D q^j(x - y)f_j(y) dy \quad (2.26)$$

являются решением системы Озеена (2.20), и применяя к формуле (2.22) оператор $L = \Delta - 2\varepsilon \partial_1$, получаем

$$\begin{aligned} \partial_k p(x) &= \partial_k P(x) - \int_{\partial D} (\partial_i q^k)(x - y)M_{ij}(v, p)_y n_j(y) ds_y \\ &\quad + \int_{\partial D} \varepsilon n_1(y)(\partial_i q^k)(x - y)v_i(y) ds_y - 2\varepsilon \int_{\partial D} (\partial_1 q^k)(x - y)(v(y), n(y)) ds_y \\ &\quad - 2 \int_{\partial D} (\partial_i \partial_j q^k)(x - y)v_i(y)n_j(y) ds_y. \end{aligned}$$

Следовательно, учитывая, что $\partial_i q^k = \partial_k q^i$, с точностью до константы имеем

$$\begin{aligned} p(x) &= P(x) - \int_{\partial D} q^i(x - y)M_{ij}(v, p)_y n_j(y) ds_y + \int_{\partial D} \varepsilon n_1(y)q^i(x - y)v_i(y) ds_y \\ &\quad - 2\varepsilon \int_{\partial D} q^1(x - y)(v(y), n(y)) ds_y - 2 \int_{\partial D} (\partial_j q^i)(x - y)v_i(y)n_j(y) ds_y. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Основываясь на формулах (2.22) и (2.27), введем гидродинамические потенциалы следующим образом:

1) объемный потенциал

$$\begin{aligned} U_k(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} H_\varepsilon^{kj}(x-y) f_j(y) dy, \\ P(x) &= \int_{\mathbb{R}^3} q^j(x-y) f_j(y) dy; \end{aligned} \quad (2.28)$$

2) потенциал двойного слоя

$$\begin{aligned} (Wv)_k(x) &= \int_S M'_{ij}(H_\varepsilon^k(x-y), q^k(x-y))_y v_i(y) n_j(y) ds_y, \\ (\Pi v)(x) &= - \int_S 2(\partial_j q^i)(x-y) v_i(y) n_j(y) ds_y \\ &+ \int_S \varepsilon n_1(y) q^i(x-y) v_i(y) ds_y - \int_S 2\varepsilon q^1(x-y)(v(y), n(y)) ds_y; \end{aligned} \quad (2.29)$$

3) потенциал простого слоя

$$\begin{aligned} (V\psi)_k(x) &= - \int_S H_\varepsilon^{ki}(x-y) \psi_i(y) ds_y, \\ (Q\psi)(x) &= - \int_S q^i(x-y) \psi_i(y) ds_y. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Заметим, что здесь и далее в поверхностных потенциалах S всегда является замкнутой ограниченной поверхностью и на ней всегда выбирается нормаль, внешняя по отношению к ее внутренности.

Согласно формулам (2.22), (2.27) решение (v, p) системы Озеена (2.20) имеет представление

$$\begin{aligned} v &= Uf + Wv + V(M(v)n), \\ p &= Pf + \Pi v + Q(M(v)n). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Как уже отмечалось, объемный потенциал определяет решение системы Озеена (2.20), поверхностные потенциалы являются решениями однородной системы Озеена при $f = 0$ в области $\mathbb{R}^3 \setminus S$.

Для введенных поверхностных потенциалов справедливы предельные соотношения, аналогичные соответствующим соотношениям для системы Стокса.

Справедлива следующая

ЛЕММА 2.1. Пусть S – замкнутая ограниченная поверхность класса C^2 , v – непрерывное поле на S . Тогда потенциал Vv непрерывен на $\mathbb{R}^3$. Для потенциалов Wv и Vv на S существуют непрерывные предельные значения $(Wv)_{(i)}(x)$ и $(M(Vv)n)_{(i)}(x)$ внутри S , $(Wv)_{(e)}(x)$ и $(M(Vv)n)_{(e)}(x)$ вне S , непрерывные прямые значения $(\overline{Wv})(x)$ и $(\overline{M}(Vv)n)(x)$ (т.е. значения потенциалов при $x \in S$) и справедливы предельные соотношения

$$(Wv)_{(i)} = \frac{1}{2}v + \overline{Wv}, \quad (Wv)_{(e)} = -\frac{1}{2}v + \overline{Wv}, \quad (2.32)$$

$$(M(Vv)n)_{(i)} = \frac{1}{2}v + (\overline{M}(Vv)n), \quad (M(Vv)n)_{(e)} = -\frac{1}{2}v + (\overline{M}(Vv)n). \quad (2.33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя разложение фундаментального решения в ряд, для потенциала двойного слоя имеем представление

$$Wv = W^s v + W^1 v,$$

где $W^s v$ – потенциал двойного слоя для системы Стокса, а оператор W^1 имеет ядро $w^1(x, y)$, допускающее оценки

$$|w^1(x, y)| \leq \frac{c}{|x - y|}, \quad |w^1(x', y) - w^1(x'', y)| \leq \frac{c|x' - x''|}{|x' - y||x'' - y|}.$$

Из этих неравенств следует, что $W^1 v$ – непрерывное поле на $\mathbb{R}^3$. Действительно, достаточно установить непрерывность в точках поверхности S , что имеет место ввиду следующего утверждения.

ЛЕММА 2.2. Пусть S – замкнутая поверхность типа Ляпунова. Тогда справедливо неравенство

$$\int_S \frac{ds_y}{|x' - y||x'' - y|} \leq c |\ln |x' - x''||$$

при $x' \in S$, $x'' \neq x'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для оценки интеграла введем локальную систему координат (ξ_1, ξ_2, ζ) с центром в точке x' . Ось ζ направлена по нормали в точке x' . Поверхность S в окрестности точки x' определяется уравнением $\zeta = \gamma(\xi)$, где $\gamma(0) = 0$, $d\gamma(0) = 0$ и $\partial\gamma$ удовлетворяет условию Гёльдера. Оценку достаточно проводить для интеграла, взятого по некоторой малой окрестности точки x' . Поскольку в такой окрестности $|x'' - y| \geq c(|\xi - \tilde{x}| + h)$, где $x = x'' - x'$, $\tilde{x} = (x_1, x_2)$, $h = |\gamma(\tilde{x}) - x_3|$, то достаточно оценить интеграл

$$J = \int_{|\xi| < \delta} \frac{d\xi}{|\xi|(|\xi - \tilde{x}| + h)};$$

здесь $\delta > 0$ мало, но фиксировано.

Разбивая область интегрирования на части $\{|\xi| < 2|\tilde{x}|\}$ и $\{2|\tilde{x}| < |\xi| < \delta\}$, выполняя интегрирование и учитывая неравенство $|\tilde{x}| + h > c|x' - x''|$, получаем нужную оценку.

Остается заметить, что (2.32) вытекает из соответствующих соотношений для системы Стокса. Аналогично устанавливается (2.33).

2.3. Интегральные уравнения для системы Озеена в многосвязной внешней области. Пусть $D = \bigcup_{i=1}^N D_i$ – объединение ограниченных областей класса C^2 , $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$. Рассмотрим следующие краевые задачи:

$$\begin{aligned} \Delta v - 2\varepsilon \partial_1 v - \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div} v &= 0, \quad v|_{\partial\Omega} = a, \quad x \in \Omega; \end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned} \Delta u + 2\varepsilon \partial_1 u - \nabla q &= 0, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad M_{ij}(u, q)n_j|_{\partial\Omega} = b, \quad x \in D. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Здесь и далее $M_{ij}(u, q) = -\delta^{ij}q + \partial_j u_i + \partial_i u_j + \varepsilon \delta^{1j} u_i$ согласно соотношению (2.23). Перед ε выбирается знак $+$, так как уравнение (2.35) получается из уравнения (2.34) заменой ε на $-\varepsilon$.

Будем предполагать, что поля a и b непрерывны. Решение задачи (2.34) будем искать в форме потенциала двойного слоя $v = W\varphi = W(\varepsilon, \varphi)$, $p = \Pi\varphi = \Pi(\varepsilon, \varphi)$, а решение задачи (2.35) – в форме потенциала простого слоя $u = V\psi = V(-\varepsilon, \psi)$, $q = Q\psi$. Используя предельные соотношения для потенциалов (2.32), (2.33), получаем, что плотности φ и ψ определяются из интегральных уравнений

$$\varphi - 2\overline{W}\varphi = -2a, \quad (2.36)$$

$$\psi + 2\overline{M}(V\psi)n = 2b. \quad (2.37)$$

В подробной координатной записи эти уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) - 2 \int_{\partial\Omega} M'_{ij}(H_{\varepsilon}^k(x-y), q^k(x-y), \varepsilon)_y \varphi_i(y) n_j(y) ds_y &= -2a_k(x), \\ \psi_i(x) - 2 \int_{\partial\Omega} M_{ij}(H_{-\varepsilon}^k(x-y), q^k(x-y), -\varepsilon)_x \psi_k(y) n_j(y) ds_y &= 2b_i(x). \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} n_j(y) M'_{ij}(H_{\varepsilon}^k(x-y), q^k(x-y), \varepsilon)_y &= \{\delta^{ij} q^k(x-y) - (\partial_j H_{\varepsilon}^{ki})(x-y) - (\partial_i H_{\varepsilon}^{kj})(x-y) + \varepsilon \delta^{1j} H_{\varepsilon}^{ki}(x-y)\} n_j(y), \\ n_j(x) M_{ij}(H_{-\varepsilon}^k(x-y), q^k(x-y), -\varepsilon)_x &= \{-\delta^{ij} q^k(x-y) + (\partial_j H_{-\varepsilon}^{ki})(x-y) - (\partial_i H_{-\varepsilon}^{kj})(x-y) + \varepsilon \delta^{1j} H_{-\varepsilon}^{ki}(x-y)\} n_j(x) \end{aligned}$$

и выполняются соотношения

$$\begin{aligned} H_{\varepsilon}^{ki}(-z) &= H_{-\varepsilon}^{ki}(z), \quad q^k(-z) = -q^k(z), \\ (\partial_j H_{\varepsilon}^{ki})(-z) &= -(\partial_j H_{-\varepsilon}^{ki})(z), \end{aligned}$$

то уравнения (2.36) и (2.37) взаимно сопряжены. Но тогда вследствие теории Фредгольма эти уравнения либо одновременно однозначно разрешимы при любой правой части, либо не являются таковыми. Этот факт используется далее для доказательства следующего результата.

ТЕОРЕМА 2.1. *Если $\varepsilon \neq 0$, то уравнение (2.36) однозначно разрешимо в пространстве $C(\partial\Omega)$ при любой правой части $a \in C(\partial\Omega)$.*

Доказательству теоремы 2.1 предпошлем лемму об оценках потенциала простого слоя.

ЛЕММА 2.3. *Для потенциала простого слоя с непрерывной плотностью в окрестности поверхности S , $x \notin S$, справедливы оценки*

$$|\partial_j V\psi(x)| \leq c |\ln h|, \quad (2.38)$$

$$|Q\psi(x)| \leq c |\ln h|, \quad (2.39)$$

$$|V\psi(x) - V\psi(x_0)| \leq ch |\ln h|, \quad (2.40)$$

где $h = \varrho(x, S)$ и $x_0 \in S$ – точка, для которой $\varrho(x, x_0) = \varrho(x, S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство (2.40) следует из неравенства (2.38). Неравенства (2.38) и (2.39) доказываются аналогично. Имеем

$$|\partial_j V\psi(x)| \leq c \int_S \frac{ds_y}{|x-y|^2}.$$

Для оценки интеграла введем локальную систему координат (ξ_1, ξ_2, ζ) с центром в точке x_0 . Ось ζ направлена по нормали x_0x . Поверхность S в окрестности точки x_0 определяется уравнением $\zeta = \gamma(\xi)$, где $\gamma \in C^2$, $\gamma(0) = 0$, $d\gamma(0) = 0$. Оценку достаточно проводить для интеграла, взятого по некоторой малой окрестности точки x_0 . Поскольку в такой окрестности $|x-y| \geq c\sqrt{|\xi|^2 + h^2}$, где $y = (\xi_1, \xi_2, \gamma(\xi))$, то

$$|\partial_j V\psi(x)| \leq c \left(1 + \int_{|\xi| < \delta} \frac{d\xi}{|\xi|^2 + h^2} \right) \leq c |\ln h|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Пусть ψ – решение однородного уравнения (2.37) при $b = 0$. Рассмотрим потенциал простого слоя $u = V(\psi, -\varepsilon)$, $q = Q\psi$. Тогда (u, q) – решение однородной задачи (2.35), $b = 0$. Пусть D^δ – подобласть в D , состоящая из точек $x \in D$, для которых $\varrho(x, \partial D) > \delta > 0$. При достаточно малом $\delta > 0$ имеем включение $\partial D^\delta \in C^1$. Применяя к D^δ формулу Грина (2.17) и заменяя в ней ε на $-\varepsilon$, получаем

$$\int_{\partial D^\delta} M_{ik}(u, q) u_i n_k ds = \frac{1}{2} \int_{D^\delta} u_{ik} u_{ik} dx.$$

Ввиду установленных в лемме 2.1 предельных соотношений для потенциала простого слоя предел интеграла в левой части последнего равенства при $\delta \rightarrow 0$ равен нулю. Следовательно, в области D выполняется соотношение

$$u_{ik} = \partial_i u_k + \partial_k u_i = 0,$$

но тогда, как известно [16], в каждой области D_i

$$u = A^i + C^i \times x,$$

где A^i , C^i – некоторые произвольные векторы. Поскольку u – решение однородной системы Озеена (2.35), для соответствующего давления имеем в D_i

$$\nabla q = 2\varepsilon \partial_1 u = 2\varepsilon C^i \times e^1.$$

Поэтому в D_i

$$q = 2\varepsilon(C^i \times e^1, x) + q^i,$$

где q^i – некоторая константа.

С другой стороны, обращаясь к граничному условию, получаем, что на ∂D выполнено равенство $qn = \varepsilon n_1 u$, и, следовательно, во всех точках границы, в которых $n_1 \neq 0$, имеем $q = \varepsilon u_1$. Тогда на множестве таких точек, принадлежащих ∂D_i , справедливо равенство

$$2\varepsilon(C^i \times e^1, x) + q^i = \varepsilon(A^i + C^i \times x, e^1),$$

из которого следует, что на указанном множестве $(C^i \times e^1, x) = \text{const}$. Поскольку граница ∂D_i не является плоской, то $C^i \times e^1 = 0$, но тогда $q = q^i = \varepsilon(A^i, e^1)$ в области D_i . Возвращаясь к граничному условию, получаем на ∂D_i

$$\varepsilon(A^i, e^1)n = \varepsilon n_1(A^i + C^i \times x).$$

Поскольку существуют точки границы, в которых $n_1 = 0$, то $(A^i, e^1) = 0$. Поэтому $A^i + C^i \times x = 0$ на ∂D_i при $n_1 \neq 0$, что влечет $A^i = 0$, $C^i = 0$. Таким образом, из предыдущих рассуждений следует, что $u = V(\psi, -\varepsilon) \equiv 0$, $q \equiv 0$ в D .

В области Ω пара (u, q) , $u = V(\psi, -\varepsilon)$, $q = Q\psi$, удовлетворяет системе Озеена (2.35) и ввиду непрерывности потенциала простого слоя – граничному условию $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Пусть $\Omega_{\delta,R} = \{x \in \Omega; \varrho(x, \partial\Omega) > \delta, |x| < R\}$. Умножая уравнение (2.35) на u и интегрируя по области $\Omega_{\delta,R}$, приходим к соотношению

$$-\int_{\Omega_{\delta,R}} |\nabla u|^2 dx = \int_{\partial\Omega_{\delta,R}} \left((n, u)q - \varepsilon n_1 |u|^2 - \frac{\partial u}{\partial n} u \right) ds. \quad (2.41)$$

Из оценок фундаментального решения следует, что

$$\int_{|x|=R} \left(|qu| + \left| \frac{\partial u}{\partial n} u \right| + |u|^2 \right) ds \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow \infty$. Вследствие этого и оценок потенциала простого слоя вблизи границы из леммы 2.3 предельный переход в равенстве (2.41) приводит к соотношению

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = 0,$$

из которого следует, что $u \equiv 0$, $q \equiv 0$ в области Ω .

Таким образом, установлено, что $u = V(\psi, -\varepsilon) \equiv 0$, $q = Q\psi \equiv 0$ во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, поэтому из предельных соотношений для потенциала простого слоя вытекает, что $\psi \equiv 0$. Теорема доказана.

Отдельно рассмотрим случай малых $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon = 0$ краевые задачи (2.34), (2.35) и интегральные уравнения (2.36), (2.37) переходят в соответствующие краевые задачи и интегральные уравнения для системы Стокса. Как известно [16], эти интегральные уравнения имеют нетривиальные ядра и разрешимы лишь при выполнении условий разрешимости. В то же время задача Дирихле (задача типа (2.34)) для системы Стокса во внешней области однозначно разрешима при любых непрерывных граничных условиях. Поэтому возникает задача об изменении интегрального уравнения так, чтобы оно было однозначно разрешимо и приводило к решению внешней задачи Дирихле для системы Стокса.

Будем разыскивать решение задачи (2.34) при $\varepsilon = 0$ в виде линейной комбинации потенциалов двойного и простого слоев при $\varepsilon = 0$:

$$v = W\varphi + \alpha V\varphi. \quad (2.42)$$

Тогда для определения плотности φ получаем интегральное уравнение

$$-\frac{1}{2}\varphi + \overline{W}\varphi + \alpha V\varphi = a. \quad (2.43)$$

Вместе с ним рассмотрим сопряженное уравнение

$$\frac{1}{2}\psi + \bar{T}(V\psi)n - \alpha V\psi = b. \quad (2.44)$$

Чтобы исследовать его разрешимость, воспользуемся методом, применявшимся в [17] при исследовании интегральных уравнений для оператора Лапласа.

Рассмотрим интегральное уравнение с комплексным параметром

$$\psi + 2\lambda(\bar{T}(V\psi)n - \alpha V\psi) = f. \quad (2.45)$$

Решение этого уравнения является аналитической вектор-функцией от λ во всей комплексной плоскости, за исключением не более чем счетного числа полюсов. Выясним условия для α , при которых $\lambda = 1$ не является полюсом функции $\psi(\lambda)$ при любой правой части f уравнения (2.45). Предположим противное. Тогда в некоторой окрестности $\lambda = 1$ функция $\psi(\lambda)$ представима в виде ряда Лорана:

$$\psi(\lambda) = (\lambda - 1)^{-k}\psi_0 + (\lambda - 1)^{-k+1}\psi_1 + \dots. \quad (2.46)$$

Подставляя ряд (2.46) в уравнение (2.45), для ψ_0 получаем соотношение

$$\psi_0 + 2(\bar{T}(V\psi_0)n - \alpha V\psi_0) = 0. \quad (2.47)$$

Используя предельные соотношения для потенциала простого слоя $u = V\psi_0$

$$\begin{aligned} \psi_0 &= (Tu)_{(i)}n - (Tu)_{(e)}n, \\ (\bar{T}u)n &= \frac{1}{2}((Tu)_{(i)}n + (Tu)_{(e)}n), \end{aligned}$$

приведем (2.47) к виду

$$(Tu)_{(i)}n = 2\alpha u. \quad (2.48)$$

Умножим (2.48) на u , проинтегрируем на $\partial\Omega$ и используем формулу Грина (2.17) при $\varepsilon = 0$. В результате получаем соотношение

$$\frac{1}{2} \int_D |u_{ij}|^2 dx = 2\alpha \int_{\partial D} |u|^2 ds. \quad (2.49)$$

Если оба интеграла в (2.49) отличны от нуля, то при $\alpha < 0$ приходим к заключению, что $\lambda = 1$ не может быть полюсом. Остается показать, что равенство нулю интегралов невозможно. Если они равны нулю, то $u = V\psi_0 \equiv 0$ в D . Но тогда $u = V\psi_0$, $p = Q\psi_0$ являются решением задачи Дирихле в области Ω для системы Стокса с нулевым граничным условием. Аналогично доказательству теоремы 2.1 устанавливается, что $u = V\psi_0 \equiv 0$, $p = Q\psi_0 \equiv 0$ в Ω . Следовательно, $\psi_0 = 0$, что невозможно ввиду предположения о наличии полюса. Таким образом, установлена

ТЕОРЕМА 2.2. *При $\alpha < 0$ интегральное уравнение (2.43) внешней задачи Дирихле для системы Стокса однозначно разрешимо при любой непрерывной правой части.*

§ 3. Оценки решений линеаризованной системы Озеена

Рассмотрим в области Ω систему Озеена

$$\begin{aligned} \Delta u - 2\varepsilon \partial_1 u - \nabla p &= f, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_{\partial\Omega} = a, \quad u|_{\infty} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для стационарной системы Навье–Стокса хорошо известны результаты о существовании и регулярности решений [16], [18], [19]. В данном случае нас, в первую очередь, интересуют равномерные по $\varepsilon > 0$ оценки при больших $|x|$. Однако мы начнем с обсуждения вопроса о существовании и единственности обобщенного решения.

3.1. Обобщенное решение: существование и единственность. Пусть $\mathcal{V}(\Omega)$ – множество всех соленоидальных полей класса $C_0^\infty(\Omega)$. Билинейная форма

$$[u, v] = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx$$

определяет скалярное произведение на $\mathcal{V}(\Omega)$, его пополнение по этому скалярному произведению обозначим через $H(\Omega)$. Известно, что $H(\Omega)$ непрерывно вложено в пространство $L_6(\Omega)$. Обобщенным решением системы Озеена (3.1) при $a = 0$ будем называть элемент $u \in H(\Omega)$ такой, что для всех $\varphi \in \mathcal{V}(\Omega)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + 2\varepsilon \partial_1 u \varphi) \, dx = - \int_{\Omega} f \varphi \, dx. \quad (3.2)$$

Заметим, что в отличие от системы Стокса здесь нельзя требовать выполнения тождества для всех φ из $H(\Omega)$ ввиду возможной расходимости интеграла $\int_{\Omega} \partial_1 u \varphi \, dx$. Справедлива

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть f – такая обобщенная функция, что отображение $v \rightarrow \int_{\Omega} f v \, dx$ определяет линейный ограниченный функционал на $H(\Omega)$. Тогда существует единственное обобщенное решение $u \in H(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО существования повторяет доказательство из [16, с. 117] для стационарной системы Навье–Стокса. Кратко приведем соответствующие рассуждения.

Пусть сначала Ω – ограниченная область. Тогда в силу теоремы Рисса существует линейный ограниченный оператор $T: H(\Omega) \rightarrow H(\Omega)$ такой, что

$$\int_{\Omega} (\partial_1 u) \varphi \, dx = [Tu, \varphi].$$

Интегрируя по частям, убеждаемся в его кососимметричности:

$$[Tu, \varphi] = -[u, T\varphi].$$

Далее, существует единственный элемент $F \in H(\Omega)$ такой, что

$$- \int_{\Omega} f \varphi \, dx = [F, \varphi].$$

Поэтому интегральное тождество принимает вид $[u + 2\varepsilon Tu, \varphi] = [F, \varphi]$ и, следовательно, обобщенное решение определяется из уравнения

$$u + 2\varepsilon Tu = F.$$

Ввиду кососимметричности оператора T последнее уравнение имеет единственное решение для любого $F \in H(\Omega)$. Действительно, если $u + 2\varepsilon Tu = 0$, то $0 = [u + 2\varepsilon Tu, u] = [u, u]$; если $\overline{\text{Im}}(I + 2\varepsilon T) \neq H(\Omega)$, то существует v такой, что $[u + 2\varepsilon Tu, v] = 0$ для всех u , но тогда $v - 2\varepsilon Tv = 0$, что влечет $v = 0$. Поэтому $\text{Im}(I + 2\varepsilon T)$ плотен в $H(\Omega)$, тогда для любого $v \in H(\Omega)$ существует последовательность $v_n = (I + 2\varepsilon T)u_n \rightarrow v$ и из равенства $[u_n - u_m, u_n - u_m] = [v_n - v_m, u_n - u_m]$ следует фундаментальность последовательности u_n и включение $v \in \text{Im}(I + 2\varepsilon T)$. Кроме того, для обобщенного решения верна оценка

$$\|u\|_{H(\Omega)} \leq \|F\|_{H(\Omega)}. \quad (3.3)$$

Пусть теперь Ω – неограниченная область и $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots \subset \Omega$ – последовательность ограниченных областей, исчерпывающих Ω . Пусть u_n – обобщенное решение системы Озеена в области Ω_n . Продолжив u_n нулем на $\Omega \setminus \Omega_n$, получаем последовательность элементов $\tilde{u}_n \in H(\Omega)$, ограниченную в $H(\Omega)$. В силу теоремы о слабой компактности ограниченных множеств в гильбертовом пространстве можно считать, что $\tilde{u}_n$ слабо сходится в $H(\Omega)$ и, следовательно [16, с. 118], сильно в любом пространстве $L_4(\Omega_j)$ к некоторому элементу $u \in H(\Omega)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{V}(\Omega)$; тогда начиная с некоторого n

$$\int_{\Omega} (\nabla u_n \nabla \varphi + 2\varepsilon \partial_1 u_n \varphi) dx = - \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

Переходя к пределу, получаем, что u является обобщенным решением.

При доказательстве единственности обобщенного решения необходимо установить, что для $u \in H(\Omega)$ при выполнении интегрального тождества

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla \varphi + 2\varepsilon \partial_1 u \varphi) dx = 0 \quad (3.4)$$

при любом $\varphi \in \mathcal{V}(\Omega)$ вытекает равенство $u = 0$. Сначала заметим, что аналогично доказательству регулярности обобщенного решения системы Стокса [16, с. 51] можно показать, что для u , удовлетворяющего (3.4), и $\partial\Omega \in C^2$ выполняются соотношения $u \in W_{2,\text{loc}}^2(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ и существует функция $p \in W_{2,\text{loc}}^1(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$ такая, что

$$\Delta u - 2\varepsilon \partial_1 u - \nabla p = 0 \quad (3.5)$$

в области Ω .

Предварительно установим характер поведения u и p в окрестности бесконечности. Далее считаем, что Ω – внешняя область. Сведем рассматриваемую задачу к некоторой задаче для всего пространства $\mathbb{R}^3$. Пусть D – некоторый шаровой слой, $D = \{x; a/2 < |x| < 2a\}$, такой, что $\partial\Omega \subset \{x; |x| < a/2\}$. Пусть $B \in C^\infty(\overline{D})$ – векторный потенциал для поля u , т.е. $\text{rot } B = u$ в $\overline{D}$ и $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ – срезающая функция такая, что $\chi = 0$ при $|x| < a$ и $\chi = 1$

при $|x| > 3/(2a)$. Рассмотрим соленоидальное поле $v \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \cap H(\mathbb{R}^3)$, определяемое соотношением

$$v(x) = \begin{cases} \operatorname{rot}(\chi B), & |x| < 2a, \\ u, & |x| > 2a. \end{cases}$$

Имеем

$$\Delta v - 2\varepsilon \partial_1 v - \nabla q = f, \quad (3.6)$$

где $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ – поле с носителем в D , имеющее на своем носителе вид

$$f = \Delta(\nabla \chi \times B) + (\Delta \chi)u + 2(\nabla \chi, \nabla)u + \chi \nabla p - (\nabla \chi)p, \quad q = \chi p.$$

Однородная система (3.6) (при $f = 0$) имеет лишь тривиальное решение $v = 0$ в классе $H(\mathbb{R}^3)$. Действительно, v и q можно рассматривать как распределения класса $S'(\mathbb{R}^3)$. Применение преобразования Фурье к системе (3.6) приводит к соотношениям

$$-\xi^2 \hat{v} - 2i\varepsilon \xi_1 \hat{v} - i\xi \hat{q} = 0, \quad \xi \hat{v} = 0. \quad (3.7)$$

Далее, $v \in H(\mathbb{R}^3)$ влечет $\xi_j \hat{v} \in L_2(\mathbb{R}^3)$, $(\xi^2 + 2i\varepsilon \xi_1) \hat{v} \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$, $i\xi \hat{q} \in L_{2,\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$. Умножая первое уравнение в (3.7) скалярно на ξ , получаем $\xi^2 \hat{q} = 0$. Поэтому $\xi \hat{q} = 0$, $(\xi^2 + 2i\varepsilon \xi_1) \hat{v} = 0$. Умножая последнее соотношение в (3.7) на ξ_j , получаем $(\xi^2 + 2i\varepsilon \xi_1) \xi_j \hat{v} = 0$. Ввиду включения $\xi_j \hat{v} \in L_2(\mathbb{R}^3)$ устанавливаем, что $\xi_j \hat{v} = 0$ и, следовательно, $v = 0$. Поэтому v и q , определяемые свертками f с фундаментальным решением

$$v_i(x) = \int_{\mathbb{R}^3} H_\varepsilon^{ij}(x-y) f_j(y) dy, \\ q(x) = \int_{\mathbb{R}^3} q^i(x-y) f_i(y) dy,$$

являются единственным решением системы (3.5) в классе $H(\mathbb{R}^3)$ (причем q – с точностью до константы). Однако тогда v и q ведут себя на бесконечности как фундаментальное решение, т.е. для v и q верны оценки

$$|v(x)| \ll \frac{1}{|x|(1+s(\varepsilon x))}, \quad |\partial_j v(x)| \ll \frac{1}{(|x|(1+s(\varepsilon x)))^{3/2}}, \quad |q(x)| \ll \frac{1}{|x|^2}. \quad (3.8)$$

Очевидно, таким же образом ведут себя u и p .

Умножая уравнение (3.5) на u и интегрируя по области $\Omega_R = \Omega \cap \{x; |x| < R\}$, получаем после интегрирования по частям соотношение

$$\int_{\Omega_R} (\nabla u)^2 dx = - \int_{|x|=R} \left(\varepsilon n_1 u^2 + n u p - \frac{\partial u}{\partial n} u \right) ds.$$

Учитывая оценки (3.8), имеем

$$\left| \varepsilon n_1 u^2 + n u p - \frac{\partial u}{\partial n} u \right| \ll \frac{1}{(|x|(1+s(\varepsilon x)))^2}.$$

Поэтому интеграл в правой части при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю и, следовательно, $u = 0$. Этим завершается доказательство теоремы.

3.2. Оценки однородной системы Озеена ($f = 0$). Как было установлено выше, при $a \in C(\partial\Omega)$ решение системы (2.34) можно представить в виде потенциала двойного слоя

$$u = W^\varepsilon \varphi, \quad p = \Pi^\varepsilon \varphi, \quad (3.9)$$

где индекс ε означает зависимость потенциалов от ε . Однако при $\varepsilon \rightarrow 0$ плотность φ , вообще говоря, имеет степенной рост. Поэтому в данном случае более удобно воспользоваться представлением

$$u = W^\varepsilon \varphi - \alpha V^\varepsilon \varphi, \quad p = \Pi^\varepsilon \varphi - \alpha Q \varphi. \quad (3.10)$$

Здесь плотность φ определяется из интегрального уравнения

$$-\frac{1}{2}\varphi + \overline{W}^\varepsilon \varphi - \alpha V^\varepsilon \varphi = a. \quad (3.11)$$

Оператор A^ε ,

$$A^\varepsilon \varphi = -\frac{1}{2}\varphi + \overline{W}^\varepsilon \varphi - \alpha V^\varepsilon \varphi, \quad (3.12)$$

аналитически зависит от ε и при $\varepsilon = 0$, $\alpha > 0$ обратим в пространстве $C(\partial\Omega)$. Следовательно, существует $\delta > 0$ такое, что при $0 \leq \varepsilon < \delta$ оператор A^ε обратим в пространстве $C(\partial\Omega)$ и справедлива равномерная по ε оценка

$$\|(A^\varepsilon)^{-1}\| \leq 2\|(A^0)^{-1}\|. \quad (3.13)$$

При $\delta \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ используем для решения системы (2.34) представление (3.9). Как в первом ($0 \leq \varepsilon < \delta$), так и во втором ($\delta \leq \varepsilon < \varepsilon_0$) случаях плотность φ оценивается равномерно относительно ε :

$$\|\varphi\|_{C(\partial\Omega)} \leq c\|a\|_{C(\partial\Omega)}. \quad (3.14)$$

Отметим, что интегральное уравнение (3.11) однозначно разрешимо в пространствах Соболева–Слободецкого. В частности, при $a \in W_q^{2-1/q}(\partial\Omega)$, $1 < q < \infty$, равномерно по ε

$$\|\varphi\|_{W_q^{2-1/q}(\partial\Omega)} \leq c\|a\|_{W_q^{2-1/q}(\partial\Omega)}. \quad (3.15)$$

В фиксированной ограниченной окрестности D границы $\partial\Omega$ оценки получают аналогично оценкам для системы Стокса [16]. Именно, если $a \in C(\partial\Omega)$, то

$$\|u\|_{C(\overline{D})} \leq c\|a\|_{C(\partial\Omega)}, \quad (3.16)$$

а если $a \in W_q^{2-1/q}(\partial\Omega)$, то

$$\|u\|_{W_q^2(D)} \leq c_q\|a\|_{W_q^{2-1/q}(\partial\Omega)}, \quad (3.17)$$

где константы c , c_q не зависят от a и ε .

Действительно, например, для оценки (3.16) достаточно установить неравенство

$$\|u\|_{C(\overline{D})} \leq c \|\varphi\|_{C(\partial\Omega)}.$$

Для системы Стокса это следует из оценки [16, с. 67]

$$\sup_{x \in D} \int_S |K_{i,j}(x, \eta)| dS_\eta \leq c < \infty$$

для ядра потенциала двойного слоя системы Стокса. Аналогичное неравенство для ядра потенциала двойного слоя системы Озеена вытекает из оценок леммы 2.1.

Внутри области Ω решение (u, p) бесконечно дифференцируемо. Оценки, определяющие его поведение на бесконечности, получаются из оценок фундаментального решения (2.8). При малых $\varepsilon > 0$ имеем:

а) при $|x| > 1/\varepsilon$

$$|\partial^\alpha u(x)| \leq c \frac{\varepsilon^{|\alpha|/2}}{((1 + s(\varepsilon x))|x|)^{1+|\alpha|/2}} \|a\|_{C(\partial\Omega)}; \quad (3.18)$$

б) при $r < |x| < 1/\varepsilon$

$$|\partial^\alpha u(x)| \leq c |x|^{-|\alpha|-1} \|a\|_{C(\partial\Omega)}, \quad (3.19)$$

где r таково, что $\partial\Omega \subset \{x; |x| < r/2\}$.

Напомним, что при $q > 3$ имеет место вложение $W_q^2(\Omega) \subset C^1(\overline{\Omega})$. Поэтому, считая, что $a \in W_q^{2-1/q}(\partial\Omega)$ при некотором $q > 3$, получаем $u \in C^1(\overline{\Omega})$.

Введем весовые функции

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= (1 + |x|)(1 + s(\varepsilon x)), \\ \gamma_2(x) &= \begin{cases} (1 + |x|^2), & |x| < \frac{1}{\varepsilon}, \\ \varepsilon^{-1/2}(|x|(1 + s(\varepsilon x)))^{3/2}, & |x| > \frac{1}{\varepsilon}, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.20)$$

и нормы

$$\begin{aligned} \|u\|_1 &= \sup_{x \in \Omega} |\gamma_1(x)u(x)|, \\ \|u\|_2 &= \sup_{x \in \Omega} |\gamma_2(x)u(x)|. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Обозначим через X_ε пространство векторных полей u , для которых конечна норма

$$\|u\|_{X_\varepsilon} = \|u\|_1 + \|\partial u\|_2 + \|u\|_{W_q^2(\Omega)}.$$

Сформулируем установленные факты в виде следующего утверждения.

ЛЕММА 3.1. Пусть $a \in W_q^{2-1/q}(\partial\Omega)$ при некотором $q > 3$. Тогда решение (u, p) однородной системы Озеена, $u \in C^\infty(\Omega)$, $p \in C^\infty(\Omega)$, удовлетворяет равномерно по ε оценке

$$\|u\|_{X_\varepsilon} \leq c \|a\|_{W_q^{2-1/q}(\partial\Omega)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если $\partial\Omega \in C^\infty$, $a \in C^\infty(\partial\Omega)$, то решение однородной системы Озеена (u, p) принадлежит классу $C^\infty(\overline{\Omega})$, причем плотности в его представлениях (3.9), (3.10) также принадлежат классу $C^\infty(\partial\Omega)$.

3.3. Оценки неоднородной системы Озеена. Перейдем к оценкам неоднородной системы Озеена, предполагая, что $f = (v, \nabla)w$, где $v, w \in X_\varepsilon \cap C^\infty(\Omega)$. Продолжив v и w нулем на все пространство $\mathbb{R}^3$, рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\Delta u - 2\varepsilon \partial_1 u - \nabla p &= (v, \nabla)w, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_\infty = 0,\end{aligned}$$

на всем $\mathbb{R}^3$. Тогда распределения

$$\tilde{u}_i = H_\varepsilon^{ij} * f_j, \quad \tilde{p} = q^j * f_j \quad (3.22)$$

являются решением системы Озеена в смысле распределений. Применяя теорему о сингулярном носителе свертки [19], устанавливаем, что $\tilde{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)$, $\tilde{p} \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega)$. Более того, если $\partial\Omega \in C^\infty$, $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$, то $\tilde{u}, \tilde{p}$ принадлежат классу $C^\infty(\bar{\Omega})$.

Учитывая равномерную по ε оценку $|H_\varepsilon^{ij}(x)| \leq c/|x|$ и применяя оценки для ньютоновского потенциала (2.6), получаем

$$\|\tilde{u}\|_{L_q} \leq c_q \|f\|_{L_r}, \quad (3.23)$$

где $1 < r < q < \infty$, $1/q = 1/r - 2/3$,

$$\|\partial^\alpha \tilde{p}\|_{L_q} \leq c_q \|f\|_{L_s}; \quad (3.24)$$

здесь $1 < s \leq q < \infty$, $1/q = 1/s - (1 - |\alpha|)/3$, $|\alpha| = 0, 1$.

Далее, также равномерно по ε в силу оценок (2.7) имеем

$$\|\partial^\alpha \tilde{u}\|_{L_q} \leq c_q \|f\|_{L_q} \quad (3.25)$$

при $1 < q < \infty$, $|\alpha| = 2$. Для $f = (v, \nabla)w$ имеем

$$\|f\|_{L_r}^r \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\gamma_1^{-1} \gamma_2^{-1}|^r dx \|v\|_1^r \|\partial w\|_2^r, \quad (3.26)$$

где нормы $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2$, определены в (3.21).

Ввиду определений (3.20) интеграл равномерно ограничен по $\varepsilon > 0$ при всех $r > 1$. Действительно, разложив его в сумму $J_1 + J_2$ интегралов, распространенных на области $\{x; |x| < 1/\varepsilon\}$ и $\{x; |x| > 1/\varepsilon\}$, имеем

$$J_1 \leq \int_{|x| < 1/\varepsilon} \frac{dx}{(1 + |x|)^{3r}} \leq c_r, \quad J_2 \leq \int_{|x| > 1/\varepsilon} \frac{\varepsilon^{r/2} dx}{(|x|(1 + s(\varepsilon x)))^{5r/2}} \leq c_r \varepsilon^{3r-3}.$$

Таким образом, равномерно по $\varepsilon > 0$ получаем

$$\|\tilde{u}\|_{W_q^2(\mathbb{R}^3)} \leq c_q \|v\|_{X_\varepsilon} \|w\|_{X_\varepsilon} \quad (3.27)$$

при всех $q > 3$ и

$$\|\tilde{p}\|_{W_q^1(\mathbb{R}^3)} \leq c_q \|v\|_{X_\varepsilon} \|w\|_{X_\varepsilon} \quad (3.28)$$

при всех $q > 3/2$.

Теперь найдем оценки для свертки (3.22) в норме пространства X_ε . Начнем с оценок для $\partial\tilde{u}$. Имеем

$$\begin{aligned}\partial_k \tilde{u}_i(x) &= \int_{\Omega} \partial_k H_\varepsilon^{ij}(x-y)((v, \nabla)w_j)(y) dy \\ &= \varepsilon^2 \int_{\Omega} (\partial_k H^{ij})(\varepsilon(x-y))((v, \nabla)w_j)(y) dy.\end{aligned}$$

Поэтому

$$|\partial_k \tilde{u}_i(x)| \leq J \|v\|_{X_\varepsilon} \|w\|_{X_\varepsilon},$$

где

$$J = \varepsilon^2 \int_{\Omega} |(\partial_k H^{ij})(\varepsilon(x-y))| \gamma_1^{-1}(y) \gamma_2^{-1}(y) dy.$$

Предположим, что $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Представим J в виде суммы двух интегралов J_1 и J_2 , распространенных соответственно на области $\Omega \cap \{|y| < 1/\varepsilon\}$ и $\Omega \cap \{|y| > 1/\varepsilon\}$. Не нарушая общности, будем считать, что $|y| > 1$ для всех $y \in \Omega$.

Оценим J_1 при $1 < |x| < 2/\varepsilon$. Используя оценки фундаментального решения, имеем

$$J_1 \ll \int_{1 < |y| < 1/\varepsilon} \frac{dy}{|x-y|^2 |y|^3}.$$

Осуществляя замену $y = z|x|$, получаем

$$J_1 \ll \frac{1}{|x|^2} \int_{1/|x| < |z| < 1/(|x|\varepsilon)} \frac{dz}{|\omega - z|^2 |z|^3}, \quad \omega = \frac{x}{|x|}.$$

Следовательно,

$$J_1 \ll \frac{\ln(1/\varepsilon)}{|x|^2}. \quad (3.29)$$

Однако $J_1 \leq \text{const}$ в ограниченной окрестности $\partial\Omega$.

Оценим J_1 при $|x| > 2/\varepsilon$. Предварительно отметим неравенство

$$1 + s(x-y) \geq d(1 + s(x))$$

при $d \leq 1/(1 + 2|y|)$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned}1 + s(x-y) &= d(1 + |x-y| - (x_1 - y_1)) + (1-d)(1 + s(x-y)) \\ &\geq d(1 + s(x)) + 1 - d - 2d|y| \geq d(1 + s(x)).\end{aligned}$$

Поэтому при $|y| < 1/\varepsilon$

$$\begin{aligned}\varepsilon^2 |(\partial_k H^{ij})(\varepsilon(x-y))| &\ll \frac{\varepsilon^2}{((1 + s(\varepsilon(x-y)))|\varepsilon(x-y)|)^{3/2}} \\ &\ll \frac{\varepsilon^{1/2}(1 + 2\varepsilon|y|)^{3/2}}{((1 + s(\varepsilon x))|x|)^{3/2}} \ll \frac{\varepsilon^{1/2}}{((1 + s(\varepsilon x))|x|)^{3/2}}.\end{aligned}$$

Следовательно, при $|x| > 2/\varepsilon$

$$J_1 \ll \frac{\varepsilon^{1/2} \ln(1/\varepsilon)}{((1 + s(\varepsilon x))|x|)^{3/2}}. \quad (3.30)$$

Оценим J_2 . Осуществляя замену $y = \varepsilon t$, получаем

$$J_2 \ll \varepsilon^2 \int_{|t|>1} |(\partial_k H^{ij})(\varepsilon x - t)| \frac{dt}{((1+s(t))|t|)^{5/2}}.$$

Пусть $\varepsilon|x| < 2$; тогда

$$J_2 \ll \varepsilon^2 \ll \frac{1}{|x|^2}. \quad (3.31)$$

Если $\varepsilon|x| > 2$, то представляем J_2 в виде $J_2 = J_{21} + J_{22} + J_{23}$, где J_{21} , J_{22} , J_{23} — части интеграла J_2 , распространенные соответственно на области $\{1 < |t| < \varepsilon|x|/2\}$, $\{\varepsilon|x|/2 < |t| < 3\varepsilon|x|\}$, $\{|t| > 3\varepsilon|x|\}$.

Используя оценки интегралов (2.9)–(2.11), устанавливаем, что

$$J_{2j} \ll \frac{\varepsilon^{1/2}}{((1+s(\varepsilon x))|x|)^{3/2}}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.32)$$

Таким образом, из оценок (3.29)–(3.32) окончательно получаем

$$|\partial_k \tilde{u}(x)| \ll \gamma_2^{-1}(x) \|v\|_{X_\varepsilon} \|w\|_{X_\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon}. \quad (3.33)$$

Для оценки $\tilde{u}$ предварительно проинтегрируем по частям интеграл

$$\tilde{u}_i(x) = \int_{\partial\Omega} H_\varepsilon^{ij}(x-y)((v, n)w_j)(y) dy + \int_{\Omega} \partial_k H_\varepsilon^{ij}(x-y)v_k(y)w_j(y) dy. \quad (3.34)$$

Интеграл по $\partial\Omega$ равномерно по ε оценивается через $\gamma_1^{-1}(x) \|v\|_{C(\partial\Omega)} \|w\|_{C(\partial\Omega)}$. Второй интеграл аналогично предыдущему оценивается через $I \|v\|_{X_\varepsilon} \|w\|_{X_\varepsilon}$, где

$$I = \int_{\Omega} |\partial_k H_\varepsilon^{ij}(x-y)| \frac{dy}{((1+s(\varepsilon y))|y|)^2}. \quad (3.35)$$

Разбиваем интеграл I в сумму $I_1 + I_2$, где интегралы I_1 и I_2 имеют соответственно области интегрирования $\{1 < |y| < 1/\varepsilon\}$ и $\{|y| > 1/\varepsilon\}$. Тогда

$$I_1 \ll \varepsilon^2 \int_{1 < |y| < 1/\varepsilon} |(\partial_k H^{ij})(\varepsilon(x-y))| \frac{dy}{|y|^2}. \quad (3.36)$$

При $\varepsilon|x| < 2$ имеем

$$I_1 \ll \int_{1 < |y| < 1/\varepsilon} \frac{dy}{(|x-y||y|)^2} \ll \frac{1}{|x|}, \quad (3.37)$$

при $\varepsilon|x| > 2$ получаем

$$I_1 \ll \frac{\varepsilon}{((1+s(\varepsilon x))|\varepsilon x|)^{3/2}}. \quad (3.38)$$

Заметим, что оценка (3.38) более точная, чем вытекающая из нее оценка

$$I_1 \ll \gamma_1^{-1}(x).$$

Для I_2 после замены $t = \varepsilon y$ получаем

$$I_2 \ll \varepsilon \int_{|t|>1} |(\partial_k H^{ij})(\varepsilon x - t)| \frac{dt}{((1+s(t))|t|)^2}.$$

Если $\varepsilon|x| < 2$, то

$$I_2 \ll \varepsilon \ll \frac{1}{|x|}. \quad (3.39)$$

В случае $\varepsilon|x| > 2$, разбивая I_2 в сумму трех интегралов, как и в случае рассмотренного выше интеграла J_2 , устанавливаем, что

$$I_2 \ll \frac{\varepsilon \ln |\varepsilon x|}{((1 + s(\varepsilon x))\varepsilon|x|)^{3/2}}. \quad (3.40)$$

Это лучше нужной оценки

$$I_2 \ll \frac{1}{|x|(1 + s(\varepsilon x))}. \quad (3.41)$$

Таким образом, установлено, что

$$\|\tilde{u}\|_{X_\varepsilon} \leq \|v\|_{X_\varepsilon} \|w\|_{X_\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon}. \quad (3.42)$$

Отметим используемую в дальнейшем оценку

$$\left| \int_{\Omega} (\partial_k H^{ij})(\varepsilon(x - y)) v_k(y) w_j(y) dy \right| \leq c \frac{\varepsilon \ln |\varepsilon x|}{(\varepsilon|x|(1 + s(\varepsilon x)))^{3/2}}, \quad (3.43)$$

верную при $\varepsilon|x| > 2$ и следующую из неравенств (3.38), (3.40).

Теперь, чтобы получить решение системы Озеена (3.1), необходимо к $\tilde{u}$ прибавить решение $\tilde{v}$ однородной системы Озеена ($f = 0$) с граничным условием $\tilde{v}|_{\partial\Omega} = a - \tilde{u}|_{\partial\Omega}$, компенсирующее невязку в граничном условии для $\tilde{u}$. Отсюда вытекает

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $a \in W_q^{2-1/q}(\partial\Omega)$ при некотором $q > 3$, $f = (v, \nabla)w$, где $v, w \in X_\varepsilon \cap C^\infty(\Omega)$. Тогда решение (u, p) системы Озеена (3.1) удовлетворяет условиям $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $p \in C^\infty(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ и равномерным оценкам

$$\|u\|_{X_\varepsilon} \leq c \left(\|v\|_{X_\varepsilon} \|w\|_{X_\varepsilon} \ln \frac{1}{\varepsilon} + \|a\|_{W_q^{2-1/q}(\partial\Omega)} \right), \quad (3.44)$$

$$\|p\|_{W_q^1(\Omega)} \leq c (\|v\|_{X_\varepsilon} \|w\|_{X_\varepsilon} + \|a\|_{W_q^{2-1/q}(\partial\Omega)}). \quad (3.45)$$

§ 4. Сходимость рядов

4.1. Сходимость рядов задачи обтекания. Рассмотрим задачу обтекания

$$\begin{aligned} \Delta u - \nabla p &= \operatorname{Re}(u, \nabla)u, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_{\partial\Omega} = b, \quad u|_\infty = e^1, \end{aligned} \quad (4.1)$$

с граничным условием $b \in W_q^{2-1/q}(\partial\Omega)$ при некотором $q > 3$. Согласно изложенному в § 1 будем находить ее решение в виде рядов

$$u = e^1 + \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)} \varepsilon^n, \quad p = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} \varepsilon^n, \quad (4.2)$$

где $\varepsilon = \frac{1}{2} \operatorname{Re}$, а пары $(u^{(n)}, p^{(n)})$ являются решениями системы (1.7) при $n = 0$ и системы (1.8) при $n \geq 1$, причем в (1.7) следует положить $a = b - e^1$. Из результатов, полученных в § 3, следует, что $u^{(n)} \in X_\varepsilon$ при достаточно малых ε ($0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$), $p^{(n)} \in W_q^1(\Omega)$, причем справедливы оценки

$$\|u^{(0)}\|_{X_\varepsilon} \leq a_0, \quad \|p^{(0)}\|_{W_q^1(\Omega)} \leq a_0, \quad (4.3)$$

$$\|u^{(n)}\|_{X_\varepsilon} \leq c \ln \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{n-1} \|u^{(j)}\|_{X_\varepsilon} \|u^{(n-1-j)}\|_{X_\varepsilon}, \quad (4.4)$$

$$\|p^{(n)}\|_{W_q^1(\Omega)} \leq c \sum_{j=0}^{n-1} \|u^{(j)}\|_{X_\varepsilon} \|u^{(n-1-j)}\|_{X_\varepsilon},$$

где константы a_0, c не зависят от ε .

Исследование сходимости рядов (4.2) базируется на следующем утверждении.

ЛЕММА 4.1. *Пусть последовательность неотрицательных чисел $\{a_n, n = 0, 1, \dots\}$ удовлетворяет условиям*

$$a_n \leq c \sum_{j=0}^{n-1} a_j a_{n-1-j}, \quad n \geq k \geq 1. \quad (4.5)$$

Тогда существует $t_0 = t_0(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, c)$ такое, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ сходится при $|t| < t_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность b_n определяется соотношениями

$$b_0 = a_0, \quad \dots, \quad b_{k-1} = a_{k-1}, \quad b_n = c \sum_{j=0}^{n-1} b_j b_{n-1-j}, \quad n \geq k. \quad (4.6)$$

Тогда ряд $\sum_{j=0}^{\infty} b_n t^n$ мажорирует ряд $\sum_{j=0}^{\infty} a_n t^n$. Пусть радиус сходимости ряда $\sum_{j=0}^{\infty} b_n t^n$ равен R (причем $R > 0$) и $f(t)$ – его сумма. Умножая (4.6) на t^n и суммируя по n , получаем, что $f(t)$ удовлетворяет уравнению

$$f(t) = ct f^2(t) + P_k(t), \quad (4.7)$$

где

$$P_k(t) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n t^n - c \sum_{n=1}^{k-1} t^n \sum_{j=0}^{n-1} a_j a_{k-1-j},$$

в частности $P_1 = a_0$, $P_2(t) = a_0 + a_1 t - c t a_0^2$. Из уравнения (4.7) следует, что

$$f(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4ct P_k(t)}}{2ct}. \quad (4.8)$$

Особыми точками функции $f(t)$ являются точки ветвления, которые определяются из уравнения

$$1 - 4ct P_k(t) = 0. \quad (4.9)$$

Поэтому t_0 равно модулю ближайшего к нулю корня уравнения (4.9). В частности, $t_0 = 1/(4ca_0)$ при $k = 1$ и $t_0 = 1/(2(ca_0 + \sqrt{ca_1}))$ при $k = 2$.

Вследствие оценок (4.3), (4.4) и леммы 4.1 ряды (4.2) сходятся в норме пространств X_ε и $W_q^1(\Omega)$ соответственно и определяют решение задачи обтекания при выполнении условия $0 < \varepsilon < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$. Здесь ε_1 – такое число из интервала $(0, \varepsilon_0)$, что на интервале $(0, \varepsilon_1)$ выполняется неравенство

$$\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \leq \frac{1}{4ca_0}. \quad (4.10)$$

4.2. Случай растущих граничных условий. Аналогично может быть рассмотрен случай растущих при $\varepsilon \rightarrow 0$ граничных условий. Пусть граничное условие имеет вид

$$u|_{\partial\Omega} = \varepsilon^{-1/2}a + b. \quad (4.11)$$

Введем малый вспомогательный параметр δ и рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \Delta u - 2\varepsilon\partial_1 u - \nabla p &= 2\delta^2(u, \nabla)u, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_{\partial\Omega} = \delta^{-1}a + b, \quad u|_\infty = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ее решение будем искать в виде рядов

$$u = \delta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)} \delta^n, \quad p = \delta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} p^{(n)} \delta^n. \quad (4.13)$$

Тогда коэффициенты разложения определяются из систем краевых задач

$$\begin{aligned} \Delta u^{(0)} - 2\varepsilon\partial_1 u^{(0)} - \nabla p^{(0)} &= 0, \\ \operatorname{div} u^{(0)} &= 0, \quad u^{(0)}|_{\partial\Omega} = a, \quad u^{(0)}|_\infty = 0; \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \Delta u^{(1)} - 2\varepsilon\partial_1 u^{(1)} - \nabla p^{(1)} &= (u^{(0)}, \nabla)u^{(0)}, \\ \operatorname{div} u^{(1)} &= 0, \quad u^{(1)}|_{\partial\Omega} = b, \quad u^{(1)}|_\infty = 0; \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \Delta u^{(n)} - 2\varepsilon\partial_1 u^{(n)} - \nabla p^{(n)} &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} (u^{(k)}, \nabla)u^{(n-1-k)}, \\ \operatorname{div} u^{(n)} &= 0, \quad u^{(n)}|_{\partial\Omega} = 0, \quad u^{(n)}|_\infty = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Предположим, что $a, b \in W_q^{2-1/q}(\partial\Omega)$, $q > 3$. Тогда при достаточно малых ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|u^{(0)}\|_{X_\varepsilon} &\leq a_0, \quad \|u^{(1)}\|_{X_\varepsilon} \leq c \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right) a_0^2 + b_0, \\ \|u^{(n)}\|_{X_\varepsilon} &\leq c \ln \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j=0}^{n-1} \|u^{(j)}\|_{X_\varepsilon} \|u^{(n-1-j)}\|_{X_\varepsilon}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Поэтому ряды (4.13) сходятся при выполнении условия

$$|\delta| < \frac{1}{2ca_0 \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} \right) \left(1 + \sqrt{1 + b_0(ca_0^2 \ln \frac{1}{\varepsilon})^{-1}} \right)}. \quad (4.18)$$

Полагая $\delta = \varepsilon^{1/2}$, получаем, что ряд $u = \varepsilon^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} u^{(n)} \varepsilon^{n/2}$ сходится в пространстве X_ε и определяет решение задачи обтекания при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$. Здесь ε_1 – такое число из интервала $(0, \varepsilon_0)$, что на интервале $(0, \varepsilon_1)$ выполняется неравенство

$$\varepsilon^{1/2} \ln \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{2ca_0 \left(1 + \sqrt{1 + b_0(ca_0^2 \ln \frac{1}{\varepsilon})^{-1}}\right)}. \quad (4.19)$$

Рассмотрим еще один вариант граничных условий, предполагая, что

$$u|_{\partial\Omega} = \eta(\varepsilon)a + b, \quad (4.20)$$

где $\eta(\varepsilon) \rightarrow +\infty$, $\varepsilon\eta(\varepsilon) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Осуществляя в системе (1.4) замену $u = \eta(\varepsilon)w$, приходим к системе

$$\begin{aligned} \Delta w - 2\varepsilon\partial_1 w - \nabla q &= 2\varepsilon\eta(u, \nabla)u, \\ \operatorname{div} w &= 0, \quad w|_{\partial\Omega} = a + \eta^{-1}b, \quad w|_{\infty} = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Применяя к системе (4.21) результаты из п. 4.1, получаем, что ее решение можно представить в виде сходящихся рядов

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} w^{(n)} \sigma^n, \quad q = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n)} \sigma^n \quad (4.22)$$

при выполнении условий

$$\sigma(\varepsilon) \ln \frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{4ca_0}, \quad \sigma(\varepsilon) = \varepsilon\eta(\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Здесь $w^{(n)}$, $q^{(n)}$ – решения системы (1.7) при $n = 0$ с граничным условием $w^{(0)}|_{\partial\Omega} = a + \eta^{-1}b$ и системы (1.8) при $n \geq 1$.

§ 5. Сила сопротивления

Пусть (u, p) – решение задачи обтекания

$$\begin{aligned} \Delta u - \nabla p &= \operatorname{Re}(u, \nabla)u, \\ \operatorname{div} u &= 0, \quad u|_{\partial\Omega} = a, \quad u|_{\infty} = e^1. \end{aligned}$$

Как известно, сила сопротивления определяется интегралом

$$F = - \int_{\partial\Omega} T(u)n \, ds, \quad (5.1)$$

где

$$T(u) = \{T_{ij}(u)\} = \left\{ \frac{1}{\operatorname{Re}} (\partial_i u_j + \partial_j u_i - \delta^{ij} p) \right\}$$

– тензор напряжений, соответствующий течению (u, p) , n – нормаль на $\partial\Omega$, внешняя по отношению к внутренности поверхности $\partial\Omega$. Отметим, что это соглашение соблюдается и всюду далее, т. е. на любой замкнутой поверхности

нормаль всегда выбирается внешней по отношению к ее внутренности. Осуществляя замену $u \doteq u + e^1$ и разлагая u, p в ряды, получаем

$$F = - \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \int_{\partial\Omega} T(u^k) n \, ds, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \operatorname{Re}. \quad (5.2)$$

Преобразуем интегралы $\int_{\partial\Omega} T(u^k) n \, ds$ следующим образом: учитывая, что

$$\begin{aligned} & \partial_j \left[T_{ij}(u^{(k)}) - \frac{2}{\operatorname{Re}} \sum_{l=0}^{k-1} u_i^{(l)} u_j^{(k-1-l)} \right] - \partial_1 u_i^{(k)} \\ &= \frac{1}{\operatorname{Re}} \left(\Delta u^{(k)} - \operatorname{Re} \partial_1 u^{(k)} - \partial_i p^{(k)} - 2 \sum_{l=0}^{k-1} \partial_j u_i^{(l)} u_j^{(k-1-l)} \right) = 0, \end{aligned}$$

и применяя формулу Остроградского–Гаусса, получаем

$$\begin{aligned} - \int_{\partial\Omega} T_{ij}(u^{(k)}) n_j \, ds &= - \int_{\partial\Omega} \left(n_1 u_i^{(k)} + \frac{2}{\operatorname{Re}} \sum_{l=0}^{k-1} u_i^{(l)} u_j^{(k-1-l)} n_j \right) ds \\ &- \int_{S_R} \left(T_{ij}(u^{(k)}) n_j - n_1 u_i^{(k)} - \frac{2}{\operatorname{Re}} \sum_{l=0}^{k-1} u_i^{(l)} u_j^{(k-1-l)} n_j \right) ds, \quad (5.3) \end{aligned}$$

где S_R – сфера с центром в нуле и радиусом R . Заметим, что $\sum_{l=0}^{k-1} u_i^{(l)} u_j^{(k-1-l)}$ следует считать равной нулю при $k = 0$, при $k > 1$ эта сумма равна нулю на $\partial\Omega$, а при $k = 1$ она совпадает на $\partial\Omega$ с $(a_i - \delta^{1i})(a_j - \delta^{1j})$.

Поскольку поля $u^{(k)}$ принадлежат пространству X_ε , то справедливы оценки

$$\left| \partial_i u_j^{(k)} + \partial_j u_i^{(k)} - \sum_{l=0}^{k-1} u_i^{(l)} u_j^{(k-1-l)} \right| \ll \frac{1}{((1 + s(\varepsilon x))|x|)^{3/2}}$$

при всех достаточно больших $|x|$. Осуществляя в интеграле

$$I = \int_{S_R} \frac{ds}{((1 + s(\varepsilon x))|x|)^{3/2}} \quad (5.4)$$

переход к сферическим координатам, получаем

$$I = 2\pi \int_0^\pi \frac{R^{1/2} \sin \theta \, d\theta}{(1 + \varepsilon R \cos \theta)^{3/2}}.$$

Замена $R \cos \theta = t$ приводит последний интеграл к виду

$$I = 2\pi \int_{-R}^R \frac{R^{-1/2} dt}{(1 + \varepsilon t)^{3/2}}.$$

Поэтому $I \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$. Учитывая этот факт, формулу (5.3) и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$, получаем для силы сопротивления формулу

$$F = - \int_{\partial\Omega} (a, n)(a - e^1) \, ds + \frac{1}{\operatorname{Re}} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} (np^{(k)} + \operatorname{Re} n_1 u^{(k)}) \, ds. \quad (5.5)$$

Введем следующие обозначения: для произвольной функции f положим

$$\varrho_R(f) = \int_{S_R} f \, ds, \quad \varrho(f) = \lim_{R \rightarrow \infty} \varrho_R(f),$$

для течения (u, p) положим

$$G_R(u) = \varrho_R(2\varepsilon n_1 u + np), \quad G(u) = \varrho(2\varepsilon n_1 u + np).$$

Вычислим вектор $G(u)$ для течений, представимых в виде объемного потенциала и поверхностных потенциалов. Предварительно отметим следующие соотношения (точка y фиксирована):

$$\varrho(\partial_k H_\varepsilon^{ij}(x - y)) = 0, \quad \varrho(\partial_k q^j(x - y)) = 0. \quad (5.6)$$

Рассмотрим интеграл

$$J_R^i(y) = \int_{S_R} (\partial_k H_\varepsilon^i(x - y) n_k(x) - 2\varepsilon n_1(x) H_\varepsilon^i(x - y) - n(x) q^i(x - y)) \, ds_x. \quad (5.7)$$

При малых R и $y = 0$ имеем

$$J_R^i(0) = \frac{e^i}{3} + \int_{S_R} \partial_k H_\varepsilon^i(x) n_k(x) \, ds + O(R).$$

Используя разложение фундаментального решения в ряд, при $|x| = R$ получаем

$$\partial_k H_\varepsilon^i(x) n_k(x) = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{e^i}{R^2} + \frac{x_i x}{R^4} \right) + O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Интегрируя по S_R , устанавливаем, что

$$J_R^i(0) = e^i + O(R).$$

Далее, применяя к интегралу $J_R^i(y)$ формулу Остроградского–Гаусса, получаем, что $J_R^i(y) = 0$ при $|y| > R$ и $J_R^i(y) = J_\delta^i(y) + O(\delta)$ при $|y| < R$ для любого достаточно малого $\delta > 0$.

Поясним, что при $|y| < R$ формула Остроградского–Гаусса применяется к шару B_R с центром в нуле и радиусом R , из которого удален шар с центром в y и любым достаточно малым радиусом $\delta > 0$. В силу произвольности выбора δ имеем

$$J_R^i(y) = e^i.$$

Заметим, что формальное применение формулы Остроградского–Гаусса ко всему шару B_R сразу приводит к полученному результату

$$J_R^i(y) = \int_{B_R} e^i \delta(x - y) \, dx = \begin{cases} e^i, & |y| < R, \\ 0, & |y| > R. \end{cases} \quad (5.8)$$

Из вида интеграла $J_R^i(y)$ следует, что

$$G_R(H_\varepsilon^i(x - y)) = \int_{S_R} \partial_k H_\varepsilon^i(x - y) n_k(x) \, ds_x - J_R^i(y). \quad (5.9)$$

Поэтому вследствие (5.6) и (5.8) предельный переход в (5.9) приводит к формуле

$$G(H_\varepsilon^i(x - y)) = -e^i. \quad (5.10)$$

ЛЕММА 5.1. Пусть поле v является потенциалом простого слоя

$$v(x) = (V^\varepsilon \varphi)(x), \quad p(x) = (Q\varphi)(x).$$

Тогда

$$G(v) = \int_{\partial\Omega} \varphi(y) ds. \quad (5.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно получаем

$$G(v) = - \int_{\partial\Omega} G(H_\varepsilon^i(x-y)) \varphi_i(y) ds_y.$$

Применение формулы (5.10) приводит к формуле (5.11). Лемма доказана.

ЛЕММА 5.2. Пусть v является потенциалом двойного слоя,

$$v(x) = (W^\varepsilon \varphi)(x), \quad p(x) = (\Pi^\varepsilon \varphi)(x).$$

Тогда

$$G(v) = -\varepsilon \int_{\partial\Omega} \varphi(y) n_1(y) ds. \quad (5.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим потенциал двойного слоя в виде

$$\begin{aligned} (W^\varepsilon \varphi)(x) &= (\partial_j V^\varepsilon)(n_j \varphi)(x) + (\partial_j V^\varepsilon)(n \varphi_j)(x) - \varepsilon (V^\varepsilon)(n_1 \varphi)(x) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \nabla \frac{1}{4\pi|x-y|} (\varphi, n)(y) ds_y, \\ (\Pi^\varepsilon \varphi)(x) &= (\partial_j Q)(n_j \varphi)(x) + (\partial_j Q)(n \varphi_j)(x) \\ &\quad - \varepsilon (Q)(n_1 \varphi)(x) - 2\varepsilon \int_{\partial\Omega} q^1(x-y) (\varphi, n)(y) ds_y. \end{aligned}$$

В силу леммы 5.1 и соотношений (5.6) имеем (5.12), при этом использовано соотношение

$$\varrho \left(n_1(x) \nabla \frac{1}{4\pi|x-y|} - n(x) q^1(x-y) \right) = 0$$

при фиксированном y . Лемма доказана.

ЛЕММА 5.3. Пусть v является объемным потенциалом,

$$v(x) = \int_{\Omega} H_\varepsilon^j(x-y) f_j(y) dy, \quad p(x) = \int_{\Omega} q^j(x-y) f_j(y) dy,$$

где f – поле, имеющее вид $f = (u, \nabla)w$, причем $u, w \in X_\varepsilon$. Тогда

$$G(v) = \int_{\partial\Omega} (u, n)w ds. \quad (5.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для объемного потенциала интеграл $G_R(v)$ преобразуется к виду

$$G_R(v) = - \int_{\Omega} J_R^j(y) f_j(y) dy + \int_{S_R} n_k(x) \partial_k v(x) ds.$$

Поскольку $v \in X_\varepsilon$, то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} n_k(x) \partial_k v(x) ds = 0. \quad (5.14)$$

Далее, используя формулу (5.8), имеем

$$\int_{\Omega} J_R^j(y) f_j(y) dy = \int_{\Omega \cap \{|y| < R\}} (u, \nabla) w dy = - \int_{\partial\Omega} (u, n) w ds + \int_{S_R} (u, n) w dy. \quad (5.15)$$

Учитывая, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} (u, n) w ds = 0, \quad (5.16)$$

и переходя к пределу при $R \rightarrow \infty$ в (5.15), вследствие (5.14) и (5.16) окончательно получаем (5.13).

Возвращаясь к формуле (5.5), представим ее в виде

$$F = - \int_{\partial\Omega} (a, n) (a - e^1) ds + \frac{1}{\text{Re}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n G(u^{(n)}). \quad (5.17)$$

Напомним, что $u^{(n)}$ определяются как решения краевой задачи (1.7) при $n = 0$, причем a следует заменить на $a - e^1$, и задачи (1.8) при $n \geq 1$. Решения систем (1.8) представим в виде

$$u^{(k)} = w^{(k)} + v^{(k)},$$

где $w^{(k)}$ – объемный потенциал:

$$w^{(k)}(x) = 2 \int_{\Omega} H_{\varepsilon}^j(x - y) \sum_{l=0}^{k-1} ((u^{(l)}, \nabla) u^{(k-1-l)})(y) dy,$$

а $v^{(k)}$ – решение однородной системы Озеена вида (1.7), в которой следует положить $a = -w^{(k)}|_{\partial\Omega}$. Для единообразия обозначений полагаем $v^{(0)} = u^{(0)}$, $w^{(0)} = 0$. Ввиду леммы 5.3 имеем

$$G(w^{(1)}) = \int_{\partial\Omega} 2(a - e^1, n)(a - e^1) ds, \quad G(w^{(k)}) = 0, \quad k > 1.$$

Поэтому формула (5.17) принимает вид

$$F = - \int_{\partial\Omega} n_1 a ds + \frac{1}{\text{Re}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n G(v^{(n)}). \quad (5.18)$$

В свою очередь, $v^{(n)}$, являясь решением однородной системы Озеена, может быть представлено в форме поверхностных потенциалов. Согласно леммам 5.1, 5.2 характеристики $G(v^{(n)})$ могут быть вычислены через плотности этих потенциалов. В частности, в случае представления $v^{(n)} = W^{\varepsilon} \varphi^{(n)}$ для силы сопротивления имеем

$$F = - \int_{\partial\Omega} n_1 a ds - \frac{1}{\text{Re}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^{n+1} \int_{\partial\Omega} n_1 \varphi^{(n)} ds. \quad (5.19)$$

В случае регуляризованного представления $v^{(n)} = W^\varepsilon \varphi^{(n)} + \alpha V^\varepsilon \varphi^{(n)}$ имеем

$$F = - \int_{\partial\Omega} n_1 a \, ds - \frac{1}{\operatorname{Re}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \int_{\partial\Omega} (\varepsilon n_1 - \alpha) \varphi^{(n)} \, ds. \quad (5.20)$$

Таким образом, получены формулы (5.19) и (5.20), которые выражают силу сопротивления через плотности поверхностных потенциалов, представляющих компоненты решения $v^{(n)}$.

Список литературы

1. J. Leray, “Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l’hydrodynamique”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **12** (1933), 1–82.
2. О. А. Ладыженская, “Исследование уравнений Навье–Стокса в случае стационарного движения несжимаемой жидкости”, *УМН*, **14**:3 (1959), 75–97; англ. пер.: О. А. Ladyzhenskaya, “Investigation of the Navier–Stokes equation for a stationary flow of an incompressible fluid”, *Transl. Ser. 2. Amer. Math. Soc.*, **25** (1963), 173–197.
3. R. Finn, “On the steady-state solutions of the Navier–Stokes equations. III”, *Acta Math.*, **105**:3–4 (1961), 197–244.
4. И. Праудмен, Дж. Пирсон, “Разложения по малым числам Рейнольдса в задаче обтекания сферы и кругового цилиндра”, *Сб. Механика*, **48**:2 (1958), 3–28; пер. с англ.: I. Proudman, J. R. A. Pearson, “Expansions at small Reynolds numbers for the flow past a sphere and a circular cylinder”, *J. Fluid Mech.*, **2**:3 (1957), 237–262.
5. М. Ван-Дайк, *Методы возмущений в механике жидкости*, Мир, М., 1967; пер. с англ.: M. van Dyke, *Perturbation methods in fluid mechanics*, Academic Press, New York–London, 1964.
6. Т. М. Fischer, G. C. Hsiao, W. L. Wendland, “Singular perturbations for the exterior three-dimensional slow viscous flow problem”, *J. Math. Anal. Appl.*, **110**:2 (1985), 583–603.
7. В. И. Юдович, “О проблемах и перспективах современной математической гидродинамики”, *Успехи механики*, **1**:1 (2002), 61–102.
8. Л. И. Сазонов, “Обоснование асимптотического разложения решения двумерной задачи обтекания при малых числах Рейнольдса”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:5 (2003), 125–154; англ. пер.: L. I. Sazonov, “The justification of an asymptotic expansion for the solution of the two-dimensional flow problem at small Reynolds numbers”, *Izv. Math.*, **67**:5 (2003), 975–1006.
9. Д. А. Мальцев, Л. И. Сазонов, *Асимптотическое разложение решения трехмерной задачи обтекания при малых числах Рейнольдса*, деп. в ВИНТИ № 1356-B04.
10. Д. А. Мальцев, Л. И. Сазонов, “Построение асимптотического разложения решения трехмерной задачи обтекания при малых числах Рейнольдса”, *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Математика и механика сплошной среды. Спецвыпуск*, 2004, 164–169.
11. Д. А. Мальцев, Л. И. Сазонов, *Обоснование асимптотики решения трехмерной стационарной задачи обтекания при малых числах Рейнольдса*, деп. в ВИНТИ № 1560-B2005.
12. Д. Гилбарг, Н. С. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989; пер. с англ.: D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren Math. Wiss., **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

13. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, 2-е изд., Наука, М., 1977; англ. пер. 1-го изд.: S. M. Nikol'skiĭ, *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.
14. П. И. Лизоркин, “О мультипликаторах интегралов Фурье в пространствах $L_{p,\theta}$ ”, *Теоремы вложения и их приложения*, Труды симпозиума по теоремам вложения (Баку, 1966), Наука, М., 1970, 137–141.
15. Л. И. Сазонов, “Об асимптотике решения задачи трехмерного обтекания вдали от обтекаемых тел”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**:5 (1995), 173–196; англ. пер.: L. I. Sazonov, “On the asymptotics of the solution to the three-dimensional problem of flow far from streamlined bodies”, *Izv. Math.*, **59**:5 (1995), 1051–1075.
16. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Физматгиз, М., 1961; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York-London, 1963.
17. Н. М. Гюнтер, *Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики*, Гостехиздат, М., 1953; пер. с фр.: N. M. Gunther, *La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique*, Gauthier-Villars, Paris, 1934.
18. Р. Темам, *Уравнения Навье–Стокса*, Мир, М., 1981; пер. с англ.: R. Temam, *Navier–Stokes equations*, Stud. Math. Appl., **2**, North-Holland, Amsterdam-New York, 1979.
19. Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.
20. Л. Хёрмандер, *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*, т. 1, Мир, М., 1986; пер. с англ.: L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, v. 1, Grundlehren Math. Wiss., **256–257**, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

Л. И. САЗОНОВ (L. I. SAZONOV)
 Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону;
 Южный математический институт
 Владикавказского научного центра РАН
 и Правительства Республики Северная Осетия-Алания
 E-mail: sazonov@math.rsu.ru

Поступило в редакцию
 28.03.2010