Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ш. Цагарейшвили, Абсолютная сходимость рядов Фурье функций из класса $Lip 1$ и функций ограниченной вариации, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 2, 215–224

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4568>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:45:47

УДК 517.521

В. Ш. Цагарейшвили

Абсолютная сходимость рядов Фурье функций из класса $\text{Lip } 1$ и функций ограниченной вариации

Изучены вопросы абсолютной сходимости рядов Фурье функций из некоторых классов относительно общих ортонормированных систем.

Библиография: 6 наименований.

Ключевые слова: ряд Фурье, коэффициенты Фурье, функция конечной вариации, ортонормированная система.

Введение

С. Банах [1] доказал, что если $f(x) \in L_2(0, 1)$ – произвольная функция ($f(x) \not\approx 0$, $x \in [0, 1]$), то существует ортонормированная на $[0, 1]$ система $(\varphi_n(x))$ (ОНС) такая, что ряд Фурье функции $f(x)$ расходится п. в. на $[0, 1]$ относительно системы $(\varphi_n(x))$.

Пусть $(\varphi_n(x))$ – ОНС на $[0, 1]$ и $f(x) \in \text{Lip } 1$. Тогда согласно изложенному выше абсолютная сходимость ряда Фурье функции $f(x)$, вообще говоря, не имеет места, хотя, как известно, относительно тригонометрической системы (см., например, [2, с. 26]), системы Хаара (см., например, [2, с. 54]) или Уолша (см., например, [2, с. 59], [3]) ряд Фурье любой функции из класса $\text{Lip } 1$ сходится абсолютно (см., например, [4]–[6]).

В настоящей статье мы из класса всех ОНС выделим такие системы, относительно которых ряд Фурье любой функции $f(x) \in \text{Lip } 1$ абсолютно сходится.

§ 1. Вспомогательные обозначения и теоремы

Через $\text{Lip } 1$ обозначим класс всех функций, которые удовлетворяют условию $\omega(\delta, f) = O(\delta)$, где $\omega(\delta, f)$ – модуль непрерывности функции $f(x) \in C(0, 1)$.

Пусть $V(0, 1)$ – класс всех функций с конечным изменением на $[0, 1]$, $\bigvee_0^1(f)$ – полная вариация функции $f(x)$ на $[0, 1]$.

Если $(\varphi_n(x))$ – ОНС на $[0, 1]$, то последовательность

$$\widehat{\varphi}_n(f) = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx \quad (1)$$

представляет коэффициенты Фурье функции $f(x) \in L(0, 1)$.

Введем следующие обозначения:

$$V_n(t) = \max_{1 \leq i < n} \left| \int_0^{\frac{i}{n}} \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) r_k(t) dx \right|, \quad (2)$$

$$B_n^{(\gamma)}(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \left| \int_0^{\frac{i}{n}} \sum_{k=1}^n k^\gamma \varphi_k(x) r_k(t) dx \right|, \quad (3)$$

где $(\varphi_n(x))$ – заданная ОНС, $(r_k(t))$ – система Радемахера (см. [2, с. 59]), а γ – некоторое число.

Далее, пусть

$$F(x) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \left| \int_0^x \varphi_m(t) dt \right|.$$

Справедливы следующие теоремы.

ТЕОРЕМА А [4]. Если (φ_n) – ОНС на $[0, 1]$, то для того, чтобы ряд Фурье любой абсолютно непрерывной функции абсолютно сходилась, необходимо и достаточно, чтобы $F(x) \in L^\infty(0, 1)$.

ТЕОРЕМА В [4]. Пусть (φ_m) – ОНС на $[0, 1]$ и $\int_0^x \varphi_m(t) dt \geq 0$ ($\int_0^x \varphi_m(t) dt \leq 0$) при $x \in [0, 1]$, $m = 1, 2, \dots$, и пусть $\sum_{m=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \varphi_m(t) dt \right| < +\infty$. Тогда для того, чтобы ряд $\sum_{m=1}^{\infty} |\hat{\varphi}_m(f)|$ сходилась для любой абсолютно непрерывной функции такой, что $f'(x) \in L_p(0, 1)$, необходимо и достаточно, чтобы $F(x) \in L_q(0, 1)$ при $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

ЛЕММА 1. Если $\Phi(x) \in L_2(0, 1)$ и функция $f(x)$ принимает лишь конечные значения в каждой точке из $[0, 1]$, то

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \Phi(x) dx &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i+1}{n}\right) \right) \int_0^{\frac{i}{n}} \Phi(x) dx \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right) \Phi(x) dx + f(1) \int_0^1 \Phi(x) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что

$$\int_0^1 f(x) \Phi(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) \Phi(x) dx. \quad (5)$$

Используя преобразование Абеля, получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \Phi(x) dx \\ = \sum_{i=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i+1}{n}\right) \right) \int_0^{\frac{i}{n}} \Phi(x) dx + f(1) \int_0^1 \Phi(x) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Из равенств (5) и (6) легко получается (4). Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Пусть E_n – множество тех i , $i = 1, 2, \dots, n-1$, для каждого из которых существует число $x \in \left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right)$ такое, что выполняется условие

$$\text{sign} \int_0^x \Phi(t) dt \neq \text{sign} \int_0^{\frac{i}{n}} \Phi(t) dt. \quad (7)$$

Тогда

$$\sum_{i \in E_n} \left| \int_0^{\frac{i}{n}} \Phi(x) dx \right| \leq \left(\int_0^1 \Phi^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (7) вытекает, что для некоторой точки $x_i \in (\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n})$

$$\int_0^{x_i} \Phi(x) dx = 0.$$

Следовательно ($i \in E_n$),

$$\int_0^{\frac{i}{n}} \Phi(x) dx = \int_0^{x_i} \Phi(x) dx + \int_{x_i}^{\frac{i}{n}} \Phi(x) dx = \int_{x_i}^{\frac{i}{n}} \Phi(x) dx.$$

Отсюда имеем

$$\sum_{i \in E_n} \left| \int_0^{\frac{i}{n}} \Phi(x) dx \right| \leq \sum_{i \in E_n} \int_{x_i}^{\frac{i}{n}} |\Phi(x)| dx \leq \int_0^1 |\Phi(x)| dx \leq \left(\int_0^1 \Phi^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма доказана.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1 (см., например, [5] и [6]). Положим, что $(\varphi_n(x))$ – система Уолша, или система Хаара, или тригонометрическая система. Тогда выполнены следующие соотношения:

- а) $\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{\chi}_n(f)| < +\infty$ при $f(x) \in V(0, 1)$ и $\hat{\chi}_n(f) = \int_0^1 f(x) \chi_n(x) dx$;
- б) $\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{\varphi}_n(f)| n^{\gamma} < +\infty$, где $\gamma < \frac{1}{2}$, $f(x) \in \text{Lip } 1$ и $(\chi_n(x))$ – система Хаара.

§ 2. Основные результаты

В настоящем параграфе мы из всех ОНС будем выделять те системы, для которых справедливы пп. а), б) теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. Допустим, что $(\varphi_n(x))$ – ОНС на $[0, 1]$ и $\int_0^1 \varphi_n(x) dx = 0$ при $n = 1, 2, \dots$. Тогда для того, чтобы соблюдалось условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{\varphi}_n(f)| n^{\gamma} < +\infty \quad (9)$$

для любой функции $f(x) \in \text{Lip } 1$ при $\gamma < \frac{1}{2}$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $t \in [0, 1]$ имело место соотношение

$$\frac{1}{n} B_n^{(\gamma)}(t) \leq M, \quad (10)$$

где M не зависит от n и t .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность. Предположим, что для некоторого $t_0 \in [0, 1]$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\hat{\varphi}_k(f)| k^{\gamma} = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{\varphi}_k(f) k^{\gamma} r_k(t_0).$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^n |\hat{\varphi}_k(f)| k^{\gamma} = \int_0^1 f(x) \Phi_n(x, t_0) dt, \quad (11)$$

где $\Phi_n(x, t_0) = \sum_{k=1}^n k^\gamma \varphi_k(x) r_k(t_0)$. В равенстве (4) положим, что $\Phi_n(x) = \Phi_n(x, t_0)$. Получим ($\int_0^1 \varphi_n(x) dx = 0$)

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \Phi_n(x, t_0) dx &= \sum_{i=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i+1}{n}\right) \right) \int_0^{\frac{i}{n}} \Phi_n(x, t_0) dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right) \Phi_n(x, t_0) dx. \end{aligned} \quad (12)$$

Учитывая то, что $f(x) \in \text{Lip } 1$, и соотношение (10), оценим первое слагаемое в (12). Получим (см. (3))

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f\left(\frac{i+1}{n}\right) \right) \int_0^{\frac{i}{n}} \Phi_n(x, t_0) dx \right| = O\left(\frac{1}{n}\right) B_n^{(\gamma)}(t_0) = O(1). \quad (13)$$

Для второго слагаемого из (12) при $\gamma < \frac{1}{2}$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right) \Phi_n(x, t_0) dx \right| &\leq O\left(\frac{1}{n}\right) \int_0^1 |\Phi_n(x, t_0)| dx \\ &\leq O\left(\frac{1}{n}\right) \left(\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n k^\gamma \varphi_k(x) r_k(t_0) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = O\left(n^{-1} n^{\gamma+\frac{1}{2}}\right) = O(1). \end{aligned} \quad (14)$$

Учитывая соотношения (13) и (14), из (12) получаем

$$\left| \int_0^1 f(x) \Phi_n(x, t_0) dx \right| < c,$$

где $c > 0$ не зависит от n . Отсюда в силу (11) заключаем, что

$$\sum_{k=1}^n |\widehat{\varphi}_k(f)| k^\gamma < c,$$

т.е. выполняется (9). Достаточность условия теоремы доказана.

Необходимость. Предположим, что для некоторых точек $t_n \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \dots$, выполняется условие $\overline{\lim}_n \frac{1}{n} B_n^{(\gamma)}(t_n) = +\infty$, где $\gamma < \frac{1}{2}$ – некоторое число. Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \int_0^x \text{sign} \int_0^y \Phi_n(s, t_n) ds dy. \quad (15)$$

Предположим, что $F_n = \{1; 2; \dots; n-1\} \setminus E_n$. Тогда из определения E_n и из равенства (15) получим (см. лемму 2)

$$\sum_{i \in F_n} \left(f_n\left(\frac{i}{n}\right) - f_n\left(\frac{i+1}{n}\right) \right) \int_0^{\frac{i}{n}} \Phi_n(x, t_n) dx = -\frac{1}{n} \sum_{i \in F_n} \left| \int_0^{\frac{i}{n}} \Phi_n(x, t_n) dx \right|. \quad (16)$$

Поскольку для любого $i = 1, 2, \dots, n-1$ при $x, y \in [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ из (15) имеем

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{1}{n},$$

то

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} \left(f_n(x) - f_n\left(\frac{i}{n}\right) \right) \Phi_n(x, t_n) dx \right| \\ \leq \frac{1}{n} \left(\int_0^1 \Phi_n^2(x, t_n) dx \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n k^{2\gamma} \right)^{\frac{1}{2}} = O(1). \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь из равенства (12), учитывая $f(x) = f_n(x)$ и соотношения (16) и (17), получим

$$\left| \int_0^1 f_n(x) \Phi_n(x, t_n) dx \right| \geq \frac{1}{n} \sum_{i \in F_n} \left| \int_0^{\frac{i}{n}} \Phi_n(x, t_n) dx \right| - O(1).$$

Отсюда, используя утверждение леммы 2, будем иметь

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 f_n(x) \Phi_n(x, t_n) dx \right| \\ & \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left| \int_0^{\frac{i}{n}} \Phi_n(x, t_n) dx \right| - O(1) - \frac{1}{n} \left(\int_0^1 \Phi_n^2(x, t_n) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \geq \frac{1}{n} B_n^{(\gamma)}(t_n) - O(1). \end{aligned}$$

Таким образом, в силу условия теоремы 2

$$\overline{\lim}_n \left| \int_0^1 f_n(x) \Phi_n(x, t_n) dx \right| = \overline{\lim}_n \frac{1}{n} B_n^{(\gamma)}(t_n) = +\infty. \quad (18)$$

Поскольку (см. (15))

$$\|f_n\|_{\text{Lip } 1} = \sup_{x, y \in [0, 1]} \left| \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x - y} \right| + \|f_n(x)\|_C = 2,$$

то из (18) в силу теоремы Банаха–Штейнгауза вытекает существование функции $f_0(x) \in \text{Lip } 1$ такой, что

$$\overline{\lim}_n \left| \int_0^1 f_0(x) \Phi_n(x, t_n) dx \right| = +\infty.$$

Отсюда согласно (11) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{\varphi}_k(f_0)| k^\gamma = +\infty$$

при $\gamma < \frac{1}{2}$. Теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $(\varphi_n(x))$ – ОНС на $[0, 1]$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \varphi_n(x) dx \right| < +\infty$. Тогда для того, чтобы из условия $f(x) \in V(0, 1)$ следовало

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{\varphi}_n(f)| < +\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $t \in [0, 1]$ выполнялось условие

$$V_n(t) = O(1). \quad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Достаточность.* Пусть $f(x) \in V(0, 1)$. Выберем $t_0 \in [0, 1]$ таким, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{\varphi}_n(f)| = \sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_n(f) r_n(t_0),$$

где $r_n(t)$ – функции системы Радемахера. Имеет место равенство

$$\sum_{n=1}^m |\widehat{\varphi}_n(f)| = \sum_{n=1}^m \widehat{\varphi}_n(f) r_n(t_0) = \int_0^1 f(x) D_m(x, t_0) dx,$$

где $D_m(x, t_0) = \sum_{n=1}^m \widehat{\varphi}_n(f) r_n(t_0)$.

В равенстве (4) положим $\Phi(x) = D_m(x, t_0)$; тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) D_m(x, t_0) dx &= \sum_{i=1}^{m-1} \left(f\left(\frac{i}{m}\right) - f\left(\frac{i+1}{m}\right) \right) \int_0^{\frac{i}{m}} D_m(x, t_0) dx \\ &+ \sum_{i=1}^m \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} \left(f(x) - f\left(\frac{i}{m}\right) \right) D_m(x, t_0) dx + f(1) \int_0^1 D_m(x, t_0) dx. \end{aligned} \quad (20)$$

В силу $f(x) \in V(0, 1)$ и (19) имеем

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^{m-1} \left(f\left(\frac{i}{m}\right) - f\left(\frac{i+1}{m}\right) \right) \int_0^{\frac{i}{m}} D_m(x, t_0) dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m-1} \left| f\left(\frac{i}{m}\right) - f\left(\frac{i+1}{m}\right) \right| \max_{1 \leq i \leq m} \left| \int_0^{\frac{i}{m}} D_m(x, t_0) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{0}(f) \cdot V_m(t_0) = O(1), \end{aligned} \quad (21)$$

где $\frac{1}{0}(f)$ – вариация функции $f(x)$ на $[0, 1]$. Теперь

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^m \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} \left(f(x) - f\left(\frac{i}{m}\right) \right) D_m(x, t_0) dx \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sup_{x \in [\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]} \left| f(x) - f\left(\frac{i}{m}\right) \right| \max_{1 \leq i \leq m} \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} |D_m(x, t_0)| dx \\ &\leq \frac{1}{0}(f) \cdot \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\int_0^1 D_m^2(x, t_0) dx \right)^{\frac{1}{2}} = O(1). \end{aligned} \quad (22)$$

Далее, в силу условия теоремы получаем

$$\left| f(1) \int_0^1 D_m(x, t_0) dx \right| \leq |f(1)| \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \varphi_n(x) dx \right| = d < +\infty, \quad (23)$$

где $d > 0$ не зависит от m .

Наконец, учитывая соотношения (21)–(23), из (20) имеем

$$\left| \int_0^1 f(x) D_m(x, t_0) dx \right| = O(1).$$

Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{\varphi}_n(f)|$ сходится. Достаточность теоремы доказана.

Необходимость. Предположим, что для некоторого $t_m \in [0, 1]$, $m = 1, 2, \dots$, выполнено

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} V_m(t_m) = +\infty.$$

Пусть

$$V_m(t_m) = \max_{1 \leq i \leq m} \left| \int_0^{\frac{i}{m}} D_m(x, t_m) dx \right| = \left| \int_0^{\frac{i_m}{m}} D_m(x, t_m) dx \right|.$$

Теперь рассмотрим последовательность функций

$$f_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in \left[0, \frac{i_m}{m}\right], \\ 1 & \text{при } x \in \left[\frac{i_m+1}{m}, 1\right], \\ \text{линейна и непрерывна на } \left[\frac{i_m}{m}, \frac{i_m+1}{m}\right]. \end{cases} \quad (24)$$

В равенстве (20) положим $f(x) = f_n(x)$ и $D_m(x, t_0) = D_m(x, t_m)$. Затем, учитывая (24), будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{m-1} \left(f_m\left(\frac{i}{m}\right) - f_m\left(\frac{i+1}{m}\right) \right) \int_0^{\frac{i}{m}} D_m(x, t_m) dx \right| \\ = \left| \int_0^{\frac{i_m}{m}} D_m(x, t_m) dx \right| = V_m(t_m). \end{aligned} \quad (25)$$

Поскольку (см. (24)) при $x \in \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right]$ имеем $|f_m(x) - f_m(\frac{i}{m})| \leq 1$, то

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^m \int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}} \left(f_m(x) - f_m\left(\frac{i}{m}\right) \right) D_m(x, t_m) dx \right| \\ \leq \int_{\frac{i_m-1}{m}}^{\frac{i_m+1}{m}} |D_m(x, t_m)| dx \leq \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\int_0^1 D_m^2(x, t_m) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1. \end{aligned} \quad (26)$$

Далее, левая часть равенства (20) в силу (23), (25) и (26) при $f(x) = f_m(x)$ и $D_m(x, t_0) = D_m(x, t_m)$ оценивается следующим образом:

$$\left| \int_0^1 f_m(x) D_m(x, t_m) dx \right| \geq V_m(t_m) - d - 1.$$

Следовательно, в силу условия теоремы имеем

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 f_m(x) D_m(x, t_m) dx \right| = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} V_m(t_m) = +\infty. \quad (27)$$

Ясно, что

$$\int_0^1 f(x) D_m(x, t_m) dx$$

есть последовательность линейных функционалов на $V(0, 1)$ и

$$\|f_m(x)\|_V = \int_0^1 |f'_m(x)| dx = \frac{1}{m} \cdot m = 1.$$

Таким образом, из (27) следует, что в силу теоремы Банаха–Штейнгауза существует функция $f_0(x) \in V(0, 1)$ такая, что

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left| \int_0^1 f_0(x) D_m(x, t_m) dx \right| = +\infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{\varphi}_n(f_0)| = +\infty.$$

Теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 4. Из любой ОНС $(\varphi_n(x))$ при $\int_0^1 \varphi_n(x) dx = 0$, $n = 1, 2, \dots$, можно выделить подсистему $(\varphi_{n_k}(x))$, $\varphi_{n_k}(x) = \psi_k(x)$, такую, что для любой функции $f(x) \in V(0, 1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n(f)| < +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$T_i(m) = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{i}{2^m}} \varphi_s(x) dx \right)^2,$$

где $i = 1, 2, \dots, 2^m$. Поскольку $T_i(m) \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, 2^m$, $m = 1, 2, \dots$, то можно выбрать число $s_i(m)$ такое, что

$$\sum_{s=s_i(m)}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{i}{2^m}} \varphi_s(x) dx \right)^2 \leq 2^{-2m}.$$

Допустим, что $s(m) = \max_{1 \leq i \leq 2^m} s_i(m)$. Тогда

$$\sum_{s=s(m)}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{i}{2^m}} \varphi_s(x) dx \right)^2 \leq 2^{-2m}$$

для любого $i = 1, 2, \dots, 2^m$. Следовательно, для произвольных $i < 2^m$ и $s \geq s(m)$ имеем

$$\left| \int_0^{\frac{i}{2^m}} \varphi_s(x) dx \right| \leq 2^{-m}.$$

Пусть последовательность чисел $(s_p)_{p=N_m}^{N_{m+1}}$ выбрана так, чтобы $s_{p+1} > s_p \geq s(m)$ и

$$\left| \int_0^{\frac{i}{2^m}} \varphi_{s_p}(x) dx \right| < 2^{-m}, \quad (28)$$

где $N_m = [2^{\frac{m}{2}}]$. Далее, если $\psi_p(x) = \varphi_{s_p}(x)$, то из (28) следует

$$\left| \int_0^{\frac{i}{2^m}} \psi_p(x) dx \right| < 2^{-m} \quad (29)$$

при $N_m \leq p < N_{m+1}$.

Для любого фиксированного $i < n$ и любого $t \in [0, 1]$ рассмотрим выражение

$$H_n^{(i)}(t) = \left| \int_0^{\frac{i}{n}} \sum_{s=1}^n \psi_s(x) r_s(t) dx \right|, \quad (30)$$

где $r_s(t)$ – функции Радемахера.

Допустим, что $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Из (30) получаем

$$H_n^{(i)}(t) \leq \left| \int_0^{\frac{j}{2^k}} \sum_{s=1}^{2^k} \psi_s(x) r_s(t) dx \right| + \left| \int_0^{\frac{j}{2^k}} \sum_{s=2^{k+1}}^n \psi_s(x) r_s(t) dx \right| + \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{j}{n}} \left| \sum_{s=1}^n \psi_s(x) r_s(t) \right| dx. \quad (31)$$

Если $\left| \frac{i}{n} - \frac{j}{2^k} \right| < 2^{-k}$ ($2^k \leq n < 2^{k+1}$), то

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{j}{2^k}} \left| \sum_{s=1}^n \psi_s(x) r_s(t) \right| dx \\ & \leq 2^{-\frac{k}{2}} \left(\int_0^1 \left(\sum_{s=1}^n \psi_s(x) r_s(t) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{k}{2}} n^{\frac{1}{2}} \leq 2^{-\frac{k}{2}} \cdot 2^{\frac{k+1}{2}} < 2. \end{aligned} \quad (32)$$

Пусть натуральное число $p_m < 2^m$ выбрано так, чтобы $|p_m \cdot 2^{-m} - j \cdot 2^{-k}| < 2^{-m}$. Тогда из (29) следует, что $(N_m = \lfloor 2^{\frac{m}{2}} \rfloor)$

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{\frac{j}{2^k}} \sum_{s=1}^{2^k} \psi_s(x) r_s(t) dx \right| \\ & \leq \sum_{m=0}^{2k} \left| \sum_{s=N_m}^{N_{m+1}-1} \int_0^{p_m \cdot 2^{-m}} \psi_s(x) r_s(t) dx \right| + \sum_{m=0}^{2k} \left| \int_{p_m \cdot 2^{-m}}^{\frac{j}{2^k}} \sum_{s=N_m}^{N_{m+1}-1} \psi_s(x) r_s(t) dx \right| \\ & \leq \sum_{m=0}^{2k} N_m \cdot 2^{-m} + \sum_{m=0}^{2k} \left| 2^{-\frac{m}{2}} \left(\int_0^1 \left(\sum_{s=N_m}^{N_{m+1}} \psi_s(x) r_s(t) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right| \\ & < 2 + \sum_{m=0}^{2k} 2^{-\frac{m}{2}} N_m^{\frac{1}{2}} < 4. \end{aligned} \quad (33)$$

Аналогично можно доказать, что

$$\left| \int_0^{\frac{i}{2^k}} \sum_{s=2^k}^n \psi_s(x) r_s(t) dx \right| < 2. \quad (34)$$

Следовательно, из (31), учитывая (32)–(34), получаем $|H_n^{(i)}(t)| < 8$ для любых $i < n$ и $t \in [0, 1]$. Отсюда имеем

$$V_n(t) = \max_{1 \leq i < n} H_n^{(i)}(t) \leq 8.$$

Наконец из теоремы 3 следует справедливость теоремы 4.

§ 3. Эффективность теорем 2, 3

Пусть $(\chi_n(x))$ – система Хаара. Тогда, так как $(1 \leq i \leq n)$

$$\left| \int_0^{\frac{i}{n}} \sum_{s=2^k}^{2^{k+1}} \chi_s(x) \varphi_s(t) dt \right| \leq 2^{-\frac{k}{2}},$$

при $2^k \leq n < 2^{k+1}$ имеем

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n}} \sum_{s=1}^n \chi_s(x) r_s(t) dx \right| \leq \left| \int_0^{\frac{1}{n}} \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{s=2^m}^{2^{m+1}-1} \chi_s(x) r_s(t) dx \right| + \left| \int_0^{\frac{1}{n}} \sum_{s=2^k}^n \chi_s(x) r_s(t) dt \right| \leq \sum_{m=0}^{k-1} 2^{-\frac{m}{2}} + 2^{-\frac{k}{2}} < 2.$$

Система Хаара удовлетворяет условию теоремы 3.

Аналогично можно показать, что условие теоремы 2 легко проверяется для системы Хаара.

Как доказывается в работе [6], для любой полной ОНС (φ_n) при $|\varphi_n(x)| < M$ (здесь M не зависит от n и x) существует абсолютно непрерывная функция $f_0(x)$, для которой выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{\varphi}_n(f)| = +\infty.$$

Следовательно, для тригонометрической системы и системы Уолша величина $V_n(t)$ не ограничена в каждой точке отрезка $[0, 1]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема 3 является обобщением теорем А, В, поскольку в ней не требуется условие $\int_0^x \varphi_m(t) dt \geq 0$ ($\int_0^x \varphi_m(t) dt \leq 0$) и она доказана для класса $V(0, 1)$, а теоремы А, В – для класса абсолютно непрерывных функций.

Условие $\sum_{n=1}^{\infty} |\int_0^1 \varphi_n(x) dx| < +\infty$ требуется и в теореме В, потому что если $\sum_{n=1}^{\infty} |\int_0^1 \varphi_n(x) dx| = +\infty$, то об абсолютной сходимости рядов Фурье из класса $V(0, 1)$ не может быть и речи.

Список литературы

1. S. Banach, “Sur la divergence des séries orthogonales”, *Studia Math.*, **9** (1940), 139–155.
2. Г. Алексич, *Проблемы сходимости ортогональных рядов*, ИЛ, М., 1963; пер. с англ.: G. Alexits, *Convergence problems of orthogonal series*, Pergamon Press, New York–Oxford–Paris, 1961.
3. П. Л. Ульянов, “О рядах по системе Хаара”, *Матем. сб.*, **63(105)**:3 (1964), 356–391.
4. J. R. McLaughlin, “Integrated orthonormal series”, *Pacific J. Math.*, **42** (1972), 469–475.
5. Б. И. Голубов, “О рядах Фурье непрерывных функций по системе Хаара”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **28**:6 (1964), 1271–1296.
6. С. Б. Бочкарев, “Метод усреднений в теории ортогональных рядов и некоторые вопросы теории базисов”, *Тр. МИАН СССР*, **146** (1978), 3–87; англ. пер.: S. V. Bochkarev, “A method of averaging in the theory of orthogonal series and some problems in the theory of bases”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **146** (1980), 1–92.

В. Ш. ЦАГАРЕЙШВИЛИ (V. SH. TSAGAREISHVILI)
Тбилисский государственный университет
им. Ив. Джавахишвили, Грузия
E-mail: cagare@ymail.com

Поступило в редакцию
30.04.2010
20.07.2011