Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Седых, О топологии волновых фронтов в пространствах небольших размерностей, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2012, том 76, выпуск 2, 171–214

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4572>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 09:28:03

УДК 515.16

В. Д. Седых

О топологии волновых фронтов в пространствах небольших размерностей

Вычислены индексы примыкания особенностей волновых фронтов общего положения в пространствах размерности $n \leq 6$. В качестве следствия найдены новые условия сосуществования особенностей волновых фронтов.

Библиография: 13 наименований.

Ключевые слова: лежандровы отображения, волновые фронты, особенности (мультиособенности), индекс примыкания, эйлерова характеристика.

§ 1. Введение

Волновой фронт представляет собой гиперповерхность с особенностями некоторого специального вида. Простейшим примером волнового фронта является эквидистанта гладкой замкнутой гиперповерхности в $\mathbb{R}^n$ (здесь и далее термин “гладкий” означает “ C^∞ -гладкий”).

Рис. 1. Эквидистанта эллипса на плоскости

Волновой фронт общего положения на плоскости может иметь лишь точки возврата и трансверсальные пересечения двух гладких ветвей. Точки возврата называются *особенностями типа A_2* , двойные самопересечения – *особенностями типа A_1^2* (неособые точки фронта называются *особенностями типа A_1*). Например, эквидистанта эллипса может иметь четыре особенности типа A_2 и две особенности типа A_1^2 (рис. 1).

Волновой фронт общего положения в трехмерном пространстве может иметь особенности типов A_2 (ребра возврата), A_1^2 (трансверсальные пересечения двух гладких ветвей), A_3 (ласточки хвосты), A_2A_1 (трансверсальные пересечения

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 08-01-00388).

ребер возврата и гладких ветвей) и A_1^3 (трансверсальные пересечения трех гладких ветвей). Ростки соответствующих поверхностей представлены на рис. 2.

Рис. 2. Особенности волновых фронтов в трехмерном пространстве

Волновой фронт $\mathcal{F}$ общего положения в $\mathbb{R}^n$, где $n \leq 6$, может иметь лишь конечное число типов особенностей относительно диффеоморфизмов объемлющего пространства. Множество $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ точек $x \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\mathcal{F}$ имеет особенность данного типа $\mathcal{A}$ в x , является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^n$ (незамкнутым, вообще говоря).

Предположим, что фронт $\mathcal{F}$ имеет особенность типа $\mathcal{B}$ в точке y . Пусть $c = n - \dim \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ и H – аффинное c -мерное подпространство в $\mathbb{R}^n$ такое, что $y \in H$ и H трансверсально $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ в y . Рассмотрим $(c - 1)$ -мерную сферу $S_{\varepsilon} \subset H$ с радиусом $\varepsilon > 0$ и центром в y .

Если ε достаточно мало, то для любого типа $\mathcal{A}$ особенностей фронта $\mathcal{F}$ все связные компоненты пересечения $S_{\varepsilon} \cap \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ стягиваемы. Количество этих компонент зависит только от типов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ особенностей, обозначается через $J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ и называется *индексом примыкания* особенностей типа $\mathcal{B}$ к особенностям типа $\mathcal{A}$. Например, из рис. 1, 2 видно, что

$$J_{A_1}(A_2) = J_{A_2}(A_3) = 2, \quad J_{A_1}(A_3) = 4, \quad J_{A_1^2}(A_3) = 1.$$

В настоящей работе вычисляются индексы примыкания всех особенностей волновых фронтов общего положения в пространствах размерности $n \leq 6$. Используя эти вычисления, мы находим все линейные соотношения с вещественными коэффициентами между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей компактного фронта общего положения в любом гладком n -мерном многообразии.

§ 2. Основные результаты

Сначала мы напомним основные понятия и факты из теории особенностей лежандровых отображений и волновых фронтов (подробности см. в [1]).

Пусть E – гладкое многообразие. *Контактными элементами на E* называются пары вида (π, x) , где $x \in E$, а $\pi \subset T_x E$ – касательная гиперплоскость в точке x .

Рассмотрим гладкое поле контактных элементов на многообразии E . Локально такое поле задается гладкой 1-формой ω , как поле ее нулей. Поле контактных элементов называется *контактной структурой*, если дифференциал $d\omega$ формы ω является невырожденной 2-формой на каждой гиперплоскости поля. Это условие не зависит от выбора формы ω .

Контактные структуры могут быть только на нечетномерных многообразиях. Предположим, что $\dim E = 2n - 1$. Тогда поле $\omega = 0$ контактных элементов на E является контактной структурой, если и только если $\omega \wedge (d\omega)^{n-1} \neq 0$. Интегральные многообразия контактной структуры на E , имеющие наивысшую размерность (равную $n - 1$), называются *лежандровыми многообразиями*.

Зафиксируем контактную структуру на многообразии E . Гладкое расслоение

$$\rho: E \rightarrow V$$

над гладким многообразием V называется *лежандровым*, если все его слои являются лежандровыми подмногообразиями в E . Размерность базы V такого расслоения есть $(\dim E + 1)/2 = n$.

Пусть ρ – лежандрово расслоение и L – гладкое лежандрово подмногообразие в E . Тогда отображение

$$f: L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\rho} V,$$

где $i: L \hookrightarrow E$ – тождественное вложение, называется *лежандровым*. Мы будем рассматривать лишь собственные лежандровы отображения. Образ $\mathcal{F} = f(L)$ лежандрова отображения f называется (*волновым*) *фронтом* этого отображения.

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^{2n-1}$ с координатами $(y, \mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q})$, где

$$\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_k), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k), \quad \mathbf{p} = (p_{k+1}, \dots, p_{n-1}), \quad \mathbf{q} = (q_{k+1}, \dots, q_{n-1}).$$

Форма $dy + \mathbf{t}d\mathbf{x} + \mathbf{p}d\mathbf{q}$ определяет контактную структуру в $\mathbb{R}^{2n-1}$. Отображение

$$\rho: \mathbb{R}^{2n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \rho: (y, \mathbf{t}, \mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{q}) \mapsto (y, \mathbf{x}, \mathbf{q})$$

является лежандровым расслоением над пространством $\mathbb{R}^n = \{(y, \mathbf{x}, \mathbf{q})\}$.

Пусть $S = S(\mathbf{t}, \mathbf{q})$ – семейство гладких функций от $\mathbf{t}$, гладко зависящих от $\mathbf{q}$. Тогда система уравнений

$$y = -S(\mathbf{t}, \mathbf{q}) + \mathbf{t} \frac{\partial S(\mathbf{t}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{t}}, \quad \mathbf{x} = -\frac{\partial S(\mathbf{t}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{t}}, \quad \mathbf{p} = \frac{\partial S(\mathbf{t}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$$

определяет гладкое лежандрово подмногообразие $\mathbb{R}^{n-1} = \{(\mathbf{t}, \mathbf{q})\} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^{2n-1}$. Лежандрово отображение $f: \mathbb{R}^{n-1} \xrightarrow{i} \mathbb{R}^{2n-1} \xrightarrow{\rho} \mathbb{R}^n$ задается формулой

$$\mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\mathbf{t}, \mathbf{q}) \mapsto \left(-S(\mathbf{t}, \mathbf{q}) + \mathbf{t} \frac{\partial S(\mathbf{t}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{t}}, -\frac{\partial S(\mathbf{t}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{t}}, \mathbf{q} \right). \quad (2.1)$$

Два лежандровых отображения

$$f_1: L_1 \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{\rho_1} V_1, \quad f_2: L_2 \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{\rho_2} V_2$$

называются *лежандрово эквивалентными*, если существуют диффеоморфизмы $\Phi: E_1 \rightarrow E_2$, $\varphi: V_1 \rightarrow V_2$ и $\varepsilon: L_1 \rightarrow L_2$ такие, что Φ переводит контактную структуру на E_1 в контактную структуру на E_2 , а диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} L_1 & \xrightarrow{i_1} & E_1 & \xrightarrow{\rho_1} & V_1 \\ \downarrow \varepsilon & & \downarrow \Phi & & \downarrow \varphi \\ L_2 & \xrightarrow{i_2} & E_2 & \xrightarrow{\rho_2} & V_2 \end{array}$$

коммутативна. Фронты эквивалентных лежандровых отображений диффеоморфны.

Класс эквивалентности ростка лежандрова отображения относительно лежандровой эквивалентности называется (*лежандровой*) *особенностью*. *Мультиособенностью* лежандрова отображения $f: L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\rho} V$ в точке $y \in V$ называется неупорядоченный набор особенностей f в попарно различных точках $x \in f^{-1}(y)$. *Особенностью фронта* называется класс эквивалентности ростка фронта относительно группы диффеоморфизмов объемлющего пространства.

Снабдим пространство W всех вложений $i: L \rightarrow E$ тонкой C^∞ -топологией Уитни. Мы говорим, что утверждение, касающееся лежандровых отображений, справедливо для отображения $f = \rho \circ i$ *общего положения* (или для фронта $\mathcal{F} = f(L)$ *общего положения*), если существует открытое всюду плотное подмножество $U \subset W$ такое, что это утверждение имеет место для любого $i \in U$.

Лежандрово отображение f называется *лежандрово устойчивым*, если всякое лежандрово отображение, близкое к f , лежандрово эквивалентно f . Фронт устойчивого лежандрова отображения называется *устойчивым*. Очевидно, что устойчивые лежандровы отображения образуют открытое подмножество в пространстве всех лежандровых отображений.

ТЕОРЕМА 2.2 [1]. *Лежандрово устойчивые отображения всюду плотны в пространстве лежандровых отображений в гладкое многообразие размерности $n \leq 6$. Их особенности лежандрово эквивалентны особенностям отображения (2.1) в нуле, где $S = S(\mathbf{t}, \mathbf{q})$ – квазиоднородная функция одного из следующих типов (μ – целое положительное число):*

$$\begin{aligned} A_\mu: S &= t_1^{\mu+1} + q_{\mu-1} t_1^{\mu-1} + \cdots + q_2 t_1^2, & 1 \leq \mu \leq n, \\ D_\mu^\pm: S &= t_1^2 t_2 \pm t_2^{\mu-1} + q_{\mu-1} t_2^{\mu-2} + \cdots + q_3 t_2^2, & 4 \leq \mu \leq n, \\ E_6: S &= t_1^3 + t_2^4 + q_5 t_1 t_2^2 + q_4 t_1 t_2 + q_3 t_2^2, & \mu = 6 \leq n. \end{aligned}$$

Число μ называется *коразмерностью* особенности. Если μ нечетное, то особенности типов D_μ^+ и D_μ^- лежандрово эквивалентны (они обозначаются через D_μ). В остальных случаях особенности перечисленных типов попарно лежандрово не эквивалентны.

Особенности типов A_μ , $D_\mu^\pm$, E_6 лежандрово устойчивы у лежандровых отображений в гладкое многообразие любой размерности n . Это означает, что если лежандрово отображение f имеет особенность одного из этих типов в точке x , то любое отображение, близкое к f , имеет особенность того же типа в некоторой точке, близкой к x .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Лежандрово отображение общего положения в пространство размерности $n \geq 7$ может быть неустойчивым. Например, рассмотрим лежандрово отображение (2.1) в $\mathbb{R}^7$, заданное функцией $S = S(\mathbf{t}, \mathbf{q})$ вида

$$P_8: S = t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 + at_1t_2t_3 + q_6t_2t_3 + q_5t_1t_3 + q_4t_1t_2,$$

где a – вещественное число, $a \neq -3$. Лежандровы отображения, отвечающие разным значениям параметра a , лежандрово не эквивалентны. В то же время любое близкое отображение имеет особенность типа P_8 в некоторой точке, близкой к нулю.

Пусть $\mathbb{S}$ – свободная абелева мультипликативная полугруппа, образующими которой являются символы A_μ , $\mu = 1, 2, \dots$, D_{2+2k}^- , D_{2+2k}^+ , D_{3+2k} , $k = 1, 2, \dots$, E_6 . Рассмотрим произвольный неединичный элемент $\mathcal{A} = X_1 \cdots X_p \in \mathbb{S}$, где X_j , $j = 1, \dots, p$, – любая образующая полугруппы $\mathbb{S}$. Лежандрово отображение $f: L \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\rho} V$ имеет *мультиособенность типа $\mathcal{A}$* в точке $y \in V$, если:

- 1) $f^{-1}(y)$ состоит из p попарно различных точек;
- 2) существует порядок точек $x_1, \dots, x_p$ из $f^{-1}(y)$ такой, что f имеет в этих точках особенности типов $X_1, \dots, X_p$ соответственно.

Число p точек в прообразе $f^{-1}(y)$ обозначается через $\#(\cdot | \mathcal{A})$. Сумма коразмерностей особенностей типов $X_1, \dots, X_p$ называется *коразмерностью мультиособенности типа $\mathcal{A}$* и обозначается $\text{codim } \mathcal{A}$. Мультиособенности лежандровых отображений общего положения в пространство размерности $n \leq 6$ являются мультиособенностями типов $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$ таких, что $\text{codim } \mathcal{A} \leq n$.

По определению отображение f имеет мультиособенность типа $1_{\mathbb{S}}$ (единица полугруппы $\mathbb{S}$) в точках дополнения к фронту $\mathcal{F} = f(L)$ в V . Фронт $\mathcal{F}$ имеет особенность типа $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$ в точке $y \in V$, если f имеет мультиособенность типа $\mathcal{A}$ в точке y . Все особенности данного типа $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$ фронта общего положения диффеоморфны.

Пусть $\mathcal{A}_f$ – множество точек $y \in V$ таких, что f имеет мультиособенность типа $\mathcal{A}$ в y . Для лежандрова отображения f общего положения множество $\mathcal{A}_f$ является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim } \mathcal{A}$ в V . Это многообразие называется *многообразием особенностей типа $\mathcal{A}$ фронта $\mathcal{F}$* . Ниже это многообразие обозначается также через $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$.

Рассмотрим множество $\mathcal{A}^f = f^{-1}(\mathcal{A}_f)$. Для лежандрова отображения f общего положения множество $\mathcal{A}^f$ является гладким подмногообразием коразмерности $\text{codim } \mathcal{A} - 1$ в L . Сужение отображения f на $\mathcal{A}^f$ является конечным накрытием над многообразием $\mathcal{A}_f$. Кратность этого накрытия равна $\#(\cdot | \mathcal{A})$.

Пусть $\mathcal{B} \in \mathbb{S}$ и $\text{codim } \mathcal{B} = c$. Предположим, что отображение f имеет мультиособенность типа $\mathcal{B} \in \mathbb{S}$ в точке $y \in V$. Выберем окрестность U начала координат 0 в $\mathbb{R}^c$ и рассмотрим гладкое вложение $h: U \rightarrow V$ такое, что $h(0) = y$ и подмногообразие $h(U) \subset V$ трансверсально многообразию $\mathcal{B}_f$ в y . Через $S_\varepsilon \subset \mathbb{R}^c$ обозначим $(c-1)$ -мерную сферу с радиусом $\varepsilon > 0$ и центром в нуле.

Для лежандрова отображения f общего положения существует $\varepsilon_0(f, y, h) > 0$ такое, что для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$ все связные компоненты пересечения $h(S_\varepsilon) \cap \mathcal{A}_f$ стягиваемы, а число $\pi_0(h(S_\varepsilon) \cap \mathcal{A}_f)$ этих компонент не зависит от f, y, h и ε , если $\varepsilon < \varepsilon_0(f, y, h)$ (см. [1], [2]). Число $\pi_0(h(S_\varepsilon) \cap \mathcal{A}_f)$ называется *индексом примыкания* мультиособенностей типа $\mathcal{B}$ к мультиособенностям типа $\mathcal{A}$ и обозначается через $J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$. По определению мультиособенности типа $\mathcal{B}$ примыкают к мультиособенностям типа $\mathcal{A}$, если $J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \neq 0$.

ПРИМЕР 2.4. Пусть $\mathcal{B}$ – образующая полугруппы $\mathbb{S}$ и $f: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – квази-однородное лежандрово отображение (2.1), имеющее особенность типа $\mathcal{B}$ в нуле. Тогда для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$

$$J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \frac{\pi_0(\mathcal{A}^f)}{\#(\cdot | \mathcal{A})}. \quad (2.2)$$

Все возможные примыкания мультиособенностей типов $\mathbb{S}$ могут быть найдены методами из [3], [4]. Однако индексы многих из них не были вычислены. Например, в [5] указаны лишь четности индексов примыкания мультиособенностей, имеющих соседние коразмерности. Формулы, приведенные ниже (см. предложение 2.5, следствие 2.7 и теоремы 2.8, 2.9) позволяют вычислить индексы примыкания всех лежандровых мультиособенностей коразмерности не выше 6.

Пусть

$$\tilde{J}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \begin{cases} J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}), & \text{если } \mathcal{A} \neq \mathcal{B}, \\ 1, & \text{если } \mathcal{A} = \mathcal{B}. \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbb{S}$

$$\tilde{J}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = \sum_{(X, Y) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}: X \cdot Y = \mathcal{A}} \tilde{J}_X(\mathcal{B}) \tilde{J}_Y(\mathcal{C}).$$

Предложение 2.5 будет доказано в следующем параграфе.

ТЕОРЕМА 2.6. Пусть $\mathcal{A} = A_{\mu_1}^{k_1} \cdots A_{\mu_p}^{k_p} \in \mathbb{S}$, где $\mu_1, \dots, \mu_p$ – попарно различные целые положительные числа. Тогда для любого целого положительного μ

$$\tilde{J}_{\mathcal{A}}(A_{\mu}) = \sum_{\substack{0 \leq k_0 \leq N \\ k_0 \equiv N \pmod{2}}} \frac{(k_0 + k_1 + \cdots + k_p)!}{k_0! k_1! \cdots k_p!}, \quad N = \mu + 1 - \sum_{i=1}^p k_i(\mu_i + 1).$$

Теорема 2.6 будет доказана в § 4.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Ненулевые индексы $J_{\mathcal{A}}(A_\mu)$, $4 \leq \mu \leq 6$, указаны в следующих таблицах:

$\mathcal{A}$	$1_{\mathbb{S}}$	A_1	A_2	A_1^2	A_3	A_2A_1								
$J_{\mathcal{A}}(A_4)$	3	6	4	3	2	2								
$\mathcal{A}$	$1_{\mathbb{S}}$	A_1	A_2	A_1^2	A_3	A_2A_1	A_1^3	A_4	A_3A_1	A_2^2				
$J_{\mathcal{A}}(A_5)$	4	9	6	7	4	6	1	2	2	1				
$\mathcal{A}$	$1_{\mathbb{S}}$	A_1	A_2	A_1^2	A_3	A_2A_1	A_1^3	A_4	A_3A_1	A_2^2	$A_2A_1^2$	A_5	A_4A_1	A_3A_2
$J_{\mathcal{A}}(A_6)$	4	12	9	13	6	14	4	4	6	3	3	2	2	2

ТЕОРЕМА 2.8. Ненулевые индексы $J_{\mathcal{A}}(D_\mu^\pm)$, $\mu \leq 6$, указаны в следующих таблицах:

$\mathcal{A}$	$1_{\mathbb{S}}$	A_1	A_2	A_1^2	A_3									
$J_{\mathcal{A}}(D_4^+)$	3	4	2	1	2									
$\mathcal{A}$	$1_{\mathbb{S}}$	A_1	A_2	A_1^2	A_3	A_2A_1	A_1^3	D_4^+	D_4^-	A_4	A_3A_1	$A_2A_1^2$		
$J_{\mathcal{A}}(D_5)$	6	15	9	12	8	6	3	1	1	2	2	1		
$\mathcal{A}$	$1_{\mathbb{S}}$	A_1	A_2	A_1^2	A_3	A_2A_1	A_1^3	D_4^+	D_4^-	A_4	A_3A_1	A_2^2	$A_2A_1^2$	
$J_{\mathcal{A}}(D_6^+)$	6	16	10	14	10	10	4	3	1	2	6	2	2	
$\mathcal{A}$	D_5	$D_4^+A_1$	A_3A_2											
$J_{\mathcal{A}}(D_6^+)$	2	2	2											
$\mathcal{A}$	$1_{\mathbb{S}}$	A_1	A_2	A_1^2	A_3	A_2A_1	A_1^3	D_4^+	D_4^-	A_4	A_3A_1	A_2^2	$A_2A_1^2$	A_1^4
$J_{\mathcal{A}}(D_6^-)$	11	34	20	40	20	26	18	1	3	6	18	4	4	3
$\mathcal{A}$	D_5	$D_4^-A_1$	A_5	A_3A_2	$A_3A_1^2$									
$J_{\mathcal{A}}(D_6^-)$	2	2	4	2	2									

Теорема 2.8 будет доказана в § 5.

ТЕОРЕМА 2.9. Ненулевые индексы $J_{\mathcal{A}}(E_6)$ указаны в таблице

$\mathcal{A}$	$1_{\mathbb{S}}$	A_1	A_2	A_1^2	A_3	A_2A_1	A_1^3	D_4^+	D_4^-	A_4	A_3A_1	A_2^2	$A_2A_1^2$	
$J_{\mathcal{A}}(E_6)$	5	15	11	17	10	16	6	1	1	6	6	2	5	
$\mathcal{A}$	D_5	A_5	A_4A_1	$A_2^2A_1$										
$J_{\mathcal{A}}(E_6)$	2	2	2	1										

Теорема 2.9 будет доказана в § 6.

Пусть $\mathcal{F}$ – устойчивый фронт в гладком многообразии V размерности $n \leq 6$. Рассмотрим замыкание $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} \subset V$ многообразия $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ особенностей типа $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$ фронта $\mathcal{F}$. Это множество является объединением многообразий вида $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$, где $\mathcal{B} \in \mathbb{S}$. Разбиение множества $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}}$ на связные компоненты этих многообразий является C^∞ -стратификацией Уитни (см. [6]).

Если фронт $\mathcal{F}$ компактен, то эта стратификация конечна. Для любого $\mathcal{B}$ определена эйлерова характеристика $\chi(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$ многообразия $\mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ (альтернированная сумма чисел Бетти групп гомологий с компактными носителями). Далее число $\chi(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$ обозначается также через $\chi(\mathcal{B})$.

ТЕОРЕМА 2.10. Пусть $\mathcal{F}$ – устойчивый компактный фронт в гладком многообразии размерности $n \leq 6$. Тогда:

1) для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{S} \setminus \{1_{\mathbb{S}}\}$ такого, что $\text{codim } \mathcal{A} < n$ и $\text{codim } \mathcal{A} \equiv n - 1 \pmod{2}$, имеем

$$\chi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}) = \sum_{\mathcal{B}} K_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \chi(\mathcal{B}_{\mathcal{F}}), \quad (2.3)$$

где сумма берется по всем $\mathcal{B} \in \mathbb{S}$ таким, что $\text{codim } \mathcal{B} \in [\text{codim } \mathcal{A} + 1, n]$, $\text{codim } \mathcal{B} \equiv n \pmod{2}$; коэффициенты $K_{\mathcal{A}}(\mathcal{B})$ – рациональные числа, зависящие только от $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$;

2) если n нечетное, то (2.3) приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \chi(A_2) &= \chi(A_3) + \chi(A_2 A_1) - \frac{5}{2} \chi(D_5) - \chi(D_4^+ A_1) - 3\chi(D_4^- A_1) - 2\chi(A_5) \\ &\quad - 2\chi(A_4 A_1) - \frac{3}{2} \chi(A_3 A_2) - 2\chi(A_3 A_1^2) - 2\chi(A_2^2 A_1) - 2\chi(A_2 A_1^3), \\ \chi(A_1^2) &= \frac{1}{2} \chi(A_3) + \chi(A_2 A_1) + 3\chi(A_1^3) - \frac{7}{2} \chi(D_5) - \frac{1}{2} \chi(D_4^+ A_1) \\ &\quad - \frac{19}{2} \chi(D_4^- A_1) - 2\chi(A_5) - \frac{7}{2} \chi(A_4 A_1) - \frac{5}{2} \chi(A_3 A_2) - \frac{11}{2} \chi(A_3 A_1^2) \\ &\quad - 4\chi(A_2^2 A_1) - 9\chi(A_2 A_1^3) - 20\chi(A_1^5), \\ \chi(D_4^+) &= \frac{1}{2} \chi(D_5) + \chi(D_4^+ A_1), \\ \chi(D_4^-) &= \frac{1}{2} \chi(D_5) + \chi(D_4^- A_1), \\ \chi(A_4) &= \chi(D_5) + \chi(A_5) + \chi(A_4 A_1), \\ \chi(A_3 A_1) &= \chi(D_5) + \chi(D_4^+ A_1) + 3\chi(D_4^- A_1) + \chi(A_5) + \chi(A_4 A_1) + \chi(A_3 A_2) \\ &\quad + 2\chi(A_3 A_1^2), \\ \chi(A_2^2) &= \frac{1}{2} \chi(A_5) + \chi(A_3 A_2) + \chi(A_2^2 A_1), \\ \chi(A_2 A_1^2) &= \frac{1}{2} \chi(D_5) + \chi(A_4 A_1) + \frac{1}{2} \chi(A_3 A_2) + \chi(A_3 A_1^2) + 2\chi(A_2^2 A_1) + 3\chi(A_2 A_1^3), \\ \chi(A_1^4) &= \chi(D_4^- A_1) + \frac{1}{2} \chi(A_3 A_1^2) + \chi(A_2 A_1^3) + 5\chi(A_1^5); \end{aligned}$$

эйлерова характеристика фронта $\mathcal{F}$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{F}) &= \chi(A_1) - \frac{1}{2} [\chi(A_3) + 2\chi(A_2 A_1) + 4\chi(A_1^3)] + \frac{1}{2} [7\chi(D_5) + \chi(D_4^+ A_1) \\ &\quad + 17\chi(D_4^- A_1) + 5\chi(A_5) + 7\chi(A_4 A_1) + 5\chi(A_3 A_2) \\ &\quad + 10\chi(A_3 A_1^2) + 8\chi(A_2^2 A_1) + 16\chi(A_2 A_1^3) + 32\chi(A_1^5)]; \end{aligned}$$

3) если n четное, то (2.3) приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \chi(A_1) &= \chi(A_2) + 2\chi(A_1^2) - 5\chi(D_4^-) - 2\chi(A_4) - \frac{5}{2} \chi(A_3 A_1) - 2\chi(A_2^2) \\ &\quad - 4\chi(A_2 A_1^2) - 8\chi(A_1^4) + 13\chi(E_6) + 7\chi(D_6^+) + 27\chi(D_6^-) \\ &\quad + 22\chi(D_5 A_1) + \frac{5}{2} \chi(D_4^+ A_2) + \frac{51}{2} \chi(D_4^- A_2) + 5\chi(D_4^+ A_2^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 51\chi(D_4^- A_1^2) + 9\chi(A_6) + 14\chi(A_5 A_1) + \frac{21}{2}\chi(A_4 A_2) + 21\chi(A_4 A_1^2) \\
& + 10\chi(A_3^2) + \frac{31}{2}\chi(A_3 A_2 A_1) + 31\chi(A_3 A_1^3) + 12\chi(A_2^3) + 24\chi(A_2^2 A_1^2) \\
& + 48\chi(A_2 A_1^4) + 96\chi(A_1^6), \\
\chi(A_3) &= \chi(D_4^+) + 3\chi(D_4^-) + \chi(A_4) + \chi(A_3 A_1) - 3\chi(E_6) - 2\chi(D_6^+) \\
& - 7\chi(D_6^-) - 4\chi(D_5 A_1) - \chi(D_4^+ A_2) - 3\chi(D_4^- A_2) - 2\chi(D_4^+ A_1^2) \\
& - 6\chi(D_4^- A_1^2) - 2\chi(A_6) - 2\chi(A_5 A_1) - \chi(A_4 A_2) - 2\chi(A_4 A_1^2) \\
& - \chi(A_3^2) - \chi(A_3 A_2 A_1) - 2\chi(A_3 A_1^3), \\
\chi(A_2 A_1) &= \chi(A_4) + \chi(A_3 A_1) + 2\chi(A_2^2) + 2\chi(A_2 A_1^2) - 5\chi(E_6) - 3\chi(D_6^+) \\
& - 7\chi(D_6^-) - \frac{11}{2}\chi(D_5 A_1) - \chi(D_4^+ A_2) - 8\chi(D_4^- A_2) - 2\chi(D_4^+ A_1^2) \\
& - 6\chi(D_4^- A_1^2) - 4\chi(A_6) - 5\chi(A_5 A_1) - 5\chi(A_4 A_2) - 6\chi(A_4 A_1^2) \\
& - 4\chi(A_3^2) - \frac{11}{2}\chi(A_3 A_2 A_1) - 6\chi(A_3 A_1^3) - 6\chi(A_2^3) \\
& - 8\chi(A_2^2 A_1^2) - 8\chi(A_2 A_1^4), \\
\chi(A_1^3) &= \chi(D_4^-) + \frac{1}{2}\chi(A_3 A_1) + \chi(A_2 A_1^2) + 4\chi(A_1^4) - \frac{3}{2}\chi(E_6) - \chi(D_6^+) \\
& - 5\chi(D_6^-) - 5\chi(D_5 A_1) - \frac{1}{2}\chi(D_4^+ A_2) - \frac{11}{2}\chi(D_4^- A_2) - \chi(D_4^+ A_1^2) \\
& - 16\chi(D_4^- A_1^2) - \chi(A_6) - \frac{5}{2}\chi(A_5 A_1) - \frac{3}{2}\chi(A_4 A_2) \\
& - 5\chi(A_4 A_1^2) - 2\chi(A_3^2) - \frac{7}{2}\chi(A_3 A_2 A_1) - \frac{19}{2}\chi(A_3 A_1^3) - 2\chi(A_2^3) \\
& - 6\chi(A_2^2 A_1^2) - 16\chi(A_2 A_1^4) - 40\chi(A_1^6), \\
\chi(D_5) &= \chi(E_6) + \chi(D_6^+) + \chi(D_6^-) + \chi(D_5 A_1), \\
\chi(D_4^+ A_1) &= \chi(D_6^+) + \frac{1}{2}\chi(D_5 A_1) + \chi(D_4^+ A_2) + 2\chi(D_4^+ A_1^2), \\
\chi(D_4^- A_1) &= \chi(D_6^-) + \frac{1}{2}\chi(D_5 A_1) + \chi(D_4^- A_2) + 2\chi(D_4^- A_1^2), \\
\chi(A_5) &= \chi(E_6) + 2\chi(D_6^-) + \chi(A_6) + \chi(A_5 A_1), \\
\chi(A_4 A_1) &= \chi(E_6) + \chi(D_5 A_1) + \chi(A_6) + \chi(A_5 A_1) + \chi(A_4 A_2) + 2\chi(A_4 A_1^2), \\
\chi(A_3 A_2) &= \chi(D_6^+) + \chi(D_6^-) + \chi(D_4^+ A_2) + 3\chi(D_4^- A_2) + \chi(A_6) + \chi(A_4 A_2) \\
& + 2\chi(A_3^2) + \chi(A_3 A_2 A_1), \\
\chi(A_3 A_1^2) &= \chi(D_6^-) + \chi(D_5 A_1) + \chi(D_4^+ A_1^2) + 3\chi(D_4^- A_1^2) + \chi(A_5 A_1) + \chi(A_4 A_1^2) \\
& + \chi(A_3^2) + \chi(A_3 A_2 A_1) + 3\chi(A_3 A_1^3), \\
\chi(A_2^2 A_1) &= \frac{1}{2}\chi(E_6) + \frac{1}{2}\chi(A_5 A_1) + \chi(A_4 A_2) + \chi(A_3 A_2 A_1) + 3\chi(A_2^3) + 2\chi(A_2^2 A_1^2), \\
\chi(A_2 A_1^3) &= \frac{1}{2}\chi(D_5 A_1) + \chi(D_4^- A_2) + \chi(A_4 A_1^2) + \frac{1}{2}\chi(A_3 A_2 A_1) + \chi(A_3 A_1^3) \\
& + 2\chi(A_2^2 A_1^2) + 4\chi(A_2 A_1^4), \\
\chi(A_1^5) &= \chi(D_4^- A_1^2) + \frac{1}{2}\chi(A_3 A_1^3) + \chi(A_2 A_1^4) + 6\chi(A_1^6);
\end{aligned}$$

эйлерова характеристика фронта $\mathcal{F}$ вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{F}) = & -\chi(A_1^2) + 2\chi(D_4^-) + \chi(A_4) + \chi(A_3A_1) + \chi(A_2^2) + 2\chi(A_2A_1^2) + 5\chi(A_1^4) \\ & - 6\chi(E_6) - 3\chi(D_6^+) - 13\chi(D_6^-) - 11\chi(D_5A_1) - \chi(D_4^+A_2) \\ & - 13\chi(D_4^-A_2) - 2\chi(D_4^+A_1^2) - 28\chi(D_4^-A_1^2) - 4\chi(A_6) - 7\chi(A_5A_1) \\ & - 5\chi(A_4A_2) - 11\chi(A_4A_1^2) - 5\chi(A_3^2) - 8\chi(A_3A_2A_1) - 17\chi(A_3A_1^3) \\ & - 6\chi(A_2^3) - 13\chi(A_2^2A_1^2) - 28\chi(A_2A_1^4) - 61\chi(A_1^6).\end{aligned}$$

Теорема 2.10 будет доказана в § 7.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.11. В случае фронтов, имеющих лишь особенности типов $A_{\mu_1} \cdots A_{\mu_p}$ (особенности коранга 1), теорема 2.10 приводит к формулам, найденным в [7].

СЛЕДСТВИЕ 2.12. Числа изолированных особенностей типов D_5 , A_5 , A_3A_2 и $A_3A_1^2$ на любом компактном фронте общего положения в 5-мерном пространстве являются четными. Числа изолированных особенностей типов D_5A_1 , $A_3A_2A_1$ и $A_3A_1^3$ на любом компактном фронте общего положения в 6-мерном пространстве являются четными; числа особенностей типов E_6 и A_5A_1 имеют одинаковую четность.

Условия сосуществования особенностей волновых фронтов, указанные в следствии 2.12, вытекают также из свойств комплекса лежандровых мультиособенностей, построенного в [5].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.13. Аналогично [8] можно доказать, что если линейное соотношение с вещественными коэффициентами между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей волнового фронта справедливо для всех компактных фронтов общего положения во всех пространствах размерности $n \leq 6$, то это соотношение является вещественной линейной комбинацией соотношений из теоремы 2.10.

§ 3. Соотношения между индексами примыкания

Пусть Σ – компактное подмножество гладкого многообразия. Предположим, что это множество допускает конечную C^∞ -стратификацию Уитни $\Sigma = \Sigma_1 \cup \cdots \cup \Sigma_k$. Тогда определены эйлеровы характеристики $\chi(\Sigma)$, $\chi(\Sigma_i)$ множества Σ и каждого его страта Σ_i , $i = 1, \dots, k$. Более того,

$$\chi(\Sigma) = \sum_{i=1}^k (-1)^{\dim \Sigma_i} \chi(\Sigma_i) \quad (3.1)$$

в силу аддитивности эйлеровой характеристики (см., например, [9]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Для любого $\mathcal{B} \in \mathbb{S}$

$$\sum_{\mathcal{A} \in \mathbb{S}} (-1)^{\text{codim } \mathcal{A}} \tilde{J}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = 1, \quad (3.2)$$

$$\sum_{\mathcal{A} \in \mathbb{S} \setminus \{1_S\}} (-1)^{\text{codim } \mathcal{A}} \#(\cdot | \mathcal{A}) \tilde{J}_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = -\#(\cdot | \mathcal{B}). \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{codim } \mathcal{B} = c > 1$ (случаи $c = 0$ и $c = 1$ очевидны). Выберем устойчивое лежандрово отображение $f: \mathbb{R}^{c-1} \rightarrow \mathbb{R}^c$ с мультиособенностью типа $\mathcal{B}$ в нуле. Рассмотрим $(c-1)$ -мерную сферу $S_\varepsilon \subset \mathbb{R}^c$ с радиусом $\varepsilon > 0$ и центром в нуле.

Эйлерова характеристика сферы S_ε есть $\chi(S_\varepsilon) = 1 - (-1)^c$. С другой стороны, если ε достаточно мало, то

$$\chi(S_\varepsilon) = \sum_{\mathcal{A} \in \mathbb{S}} (-1)^{\dim(S_\varepsilon \cap \mathcal{A}_f)} \chi(S_\varepsilon \cap \mathcal{A}_f)$$

по формуле (3.1), где

$$\dim(S_\varepsilon \cap \mathcal{A}_f) = c - 1 - \text{codim } \mathcal{A}, \quad \chi(S_\varepsilon \cap \mathcal{A}_f) = \pi_0(S_\varepsilon \cap \mathcal{A}_f) = J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}).$$

Отсюда следует соотношение (3.2).

Далее, если ε достаточно мало, то множество $f^{-1}(S_\varepsilon)$ является объединением $\#(\cdot | \mathcal{B})$ попарно непересекающихся гладких $(c-2)$ -мерных сфер. Эйлерова характеристика этого множества вычисляется по формуле

$$\chi(f^{-1}(S_\varepsilon)) = \#(\cdot | \mathcal{B})(1 + (-1)^c).$$

С другой стороны,

$$\chi(f^{-1}(S_\varepsilon)) = \sum_{\mathcal{A} \in \mathbb{S} \setminus \{1_{\mathbb{S}}\}} (-1)^{\dim(f^{-1}(S_\varepsilon \cap \mathcal{A}_f))} \chi(f^{-1}(S_\varepsilon \cap \mathcal{A}_f))$$

по формуле (3.1), где

$$\begin{aligned} \dim(f^{-1}(S_\varepsilon \cap \mathcal{A}_f)) &= c - 1 - \text{codim } \mathcal{A}, \\ \chi(f^{-1}(S_\varepsilon \cap \mathcal{A}_f)) &= \pi_0(f^{-1}(S_\varepsilon \cap \mathcal{A}_f)) = \#(\cdot | \mathcal{A}) J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

Отсюда следует соотношение (3.3).

Следующее утверждение неявно содержится в [10].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $\mathcal{F}$ – устойчивый компактный фронт с особенностями типов $\mathbb{S}$ в гладком n -мерном многообразии V . Тогда для любого $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$

$$\begin{aligned} \sum_{X \in \mathbb{S}} (-1)^{\text{codim } X} J_{\mathcal{A}}(X) \chi(X_{\mathcal{F}}) \\ = \begin{cases} 2(-1)^n \chi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}), & \text{если } \text{codim } \mathcal{A} \equiv n-1 \pmod{2}, \\ 0, & \text{если } \text{codim } \mathcal{A} \equiv n \pmod{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$ и возьмем C^∞ -стратификацию замыкания $\overline{\mathcal{A}_{\mathcal{F}}} \subset V$ на связные компоненты многообразий $X_{\mathcal{F}}$, $X \in \mathbb{S}$. Рассмотрим страты, которые не являются связными компонентами многообразия $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$. Согласно [6] существует система трубчатых окрестностей этих стратов в V такая, что объединение $\mathcal{O}$ этих окрестностей удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{O}$ является компактным C^0 -многообразием с краем $\partial(\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{O})$;
 - 2) $\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{O}$ гомотопно $\mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ и гомеоморфно гладкому многообразию (с краем).
- Следовательно,

$$\chi(\partial(\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{O})) = \sum_{X \in \mathbb{S}} (-1)^{n - \text{codim } X} J_{\mathcal{A}}(X) \chi(X_{\mathcal{F}})$$

в силу (3.1). Теперь предложение следует из формулы

$$\chi(\partial(\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{O})) = \begin{cases} 2\chi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}} \setminus \mathcal{O}), & \text{если } \dim \mathcal{A}_{\mathcal{F}} \text{ нечетно,} \\ 0, & \text{если } \dim \mathcal{A}_{\mathcal{F}} \text{ четно.} \end{cases}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{S}$

$$\begin{aligned} & \sum_{X \in \mathbb{S}} (-1)^{\text{codim } X} J_{\mathcal{A}}(X) J_X(\mathcal{B}) \\ &= \begin{cases} 2(-1)^{\text{codim } \mathcal{B}-1} J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}), & \text{если } \text{codim } \mathcal{B} \equiv \text{codim } \mathcal{A} \pmod{2}, \\ 0, & \text{если } \text{codim } \mathcal{B} \equiv \text{codim } \mathcal{A} + 1 \pmod{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{codim } \mathcal{B} = c$ и $\mathcal{F}$ – устойчивый фронт в $\mathbb{R}^c$, имеющий особенность типа $\mathcal{B}$ в нуле. Рассмотрим $(c-1)$ -мерную сферу $S_{\varepsilon} \subset \mathbb{R}^c$ с радиусом $\varepsilon > 0$ и центром в нуле.

Если ε достаточно мало, то $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cap S_{\varepsilon}$ является устойчивым компактным фронтом с особенностями типов $\mathbb{S}$ в S_{ε} . При этом $\chi(X_{\tilde{\mathcal{F}}}) = J_X(\mathcal{B})$ для любых $X \in \mathbb{S}$. Остается применить предложение 3.2 к фронту $\tilde{\mathcal{F}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 2.5. Пусть $\text{codim}(\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}) = n$ и $f: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ – устойчивое лежандрово отображение с мультиособенностью типа $\mathcal{B} \cdot \mathcal{C}$ в нуле. Рассмотрим открытый n -мерный шар $D_{\varepsilon} \subset \mathbb{R}^n$ с радиусом $\varepsilon > 0$ и центром в нуле.

Если ε достаточно мало, то $f^{-1}(D_{\varepsilon})$ является объединением непересекающихся открытых областей $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ в $\mathbb{R}^{n-1}$ таких, что:

- 1) лежандровы отображения $\varphi = f|_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \rightarrow D_{\varepsilon}$ и $\psi = f|_{\mathcal{V}}: \mathcal{V} \rightarrow D_{\varepsilon}$ имеют мультиособенности типов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ в нуле соответственно;
- 2) подмногообразия $\mathcal{B}_{\varphi}, \mathcal{C}_{\psi} \subseteq D_{\varepsilon}$ трансверсальны;
- 3) для любых $X, Y \in \mathbb{S}$ пересечение каждой связной компоненты многообразия X_{φ} с любой связной компонентой многообразия Y_{ψ} стягиваемо и является связной компонентой пересечения $(XY)_f \cap D_{\varepsilon}$.

Предложение следует теперь из того, что $\bigcup_{(X,Y) \in \mathbb{S} \times \mathbb{S}} ((XY)_f \cap D_{\varepsilon}) = D_{\varepsilon}$.

§ 4. Лежандровы особенности типов A_{μ}

Пусть $\mathbb{R}^{\mu+1} = \{(q_0, q_1, \dots, q_{\mu})\}$ – пространство многочленов вида

$$P(t) = t^{\mu+1} + q_{\mu}t^{\mu} + \dots + q_1t + q_0$$

от одной вещественной переменной t . Зафиксируем целые неотрицательные $k_1, \dots, k_p$ и $\mu_1, \dots, \mu_p$ такие, что числа $\mu_1, \dots, \mu_p$ попарно различны и

$$N = \mu + 1 - \sum_{i=1}^p k_i(\mu_i + 1) \geq 0.$$

Через $\Pi_\mu(k_1, \dots, k_p)$ обозначим подмножество в $\mathbb{R}^{\mu+1}$, состоящее из многочленов P таких, что:

1) для каждого $i = 1, \dots, p$ многочлен P имеет k_i геометрически различных вещественных корней, кратности которых одинаковы и равны $\mu_i + 1$;

2) число всех геометрически различных вещественных корней многочлена P равно k , где $k = k_1 + \dots + k_p$.

Пусть $\Pi_\mu^0(k_1, \dots, k_p) = \Pi_\mu(k_1, \dots, k_p) \cap \{q_\mu = 0\}$ – множество многочленов $P \in \Pi_\mu(k_1, \dots, k_p)$ таких, что сумма всех корней (вещественных и комплексных) многочлена P равна нулю. Тогда $\Pi_\mu(k_1, \dots, k_p)$ диффеоморфно прямому произведению $\Pi_\mu^0(k_1, \dots, k_p) \times \mathbb{R}$. В частности, множества $\Pi_\mu^0(k_1, \dots, k_p)$ и $\Pi_\mu(k_1, \dots, k_p)$ имеют одинаковое количество связных компонент.

ЛЕММА 4.1. Число связных компонент множества $\Pi_\mu^0(k_1, \dots, k_p)$ равно

$$\frac{(k_1 + \dots + k_p)!}{k_1! \dots k_p!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой многочлен $P \in \Pi_\mu(k_1, \dots, k_p)$ единственным образом представляется в виде

$$P(t) = (t - t_1)^{\alpha_1} \dots (t - t_k)^{\alpha_k} Q(t),$$

где $t_1 < \dots < t_k$ – все его вещественные корни, $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ – кратности этих корней, а многочлен Q положителен для любого t . При этом два многочлена $P_1, P_2 \in \Pi_\mu(k_1, \dots, k_p)$,

$$P_i = (t - t_{1,i})^{\alpha_1} \dots (t - t_{k,i})^{\alpha_k} Q_i(t), \quad i = 1, 2,$$

с одинаковым порядком следования кратностей $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ своих вещественных корней соединяются кривой $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{\mu+1}$,

$$\gamma: s \mapsto [t - t_{1,1} - s(t_{1,2} - t_{1,1})]^{\alpha_1} \dots [t - t_{k,1} - s(t_{k,2} - t_{k,1})]^{\alpha_k} [Q_1(t) + s(Q_2(t) - Q_1(t))],$$

целиком лежащей в $\Pi_\mu(k_1, \dots, k_p)$.

Следовательно, связные компоненты множества $\Pi_\mu(k_1, \dots, k_p)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями конечного множества из k элементов на p попарно непересекающихся подмножеств, состоящих из $k_1, \dots, k_p$ элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.6. Индекс $\tilde{\mathcal{J}}_{\mathcal{A}}(A_\mu)$ равен числу связных компонент множества

$$\bigcup_{\substack{0 \leq k_0 \leq N \\ k_0 \equiv N \pmod{2}}} \Pi_\mu^0(k_0, k_1, \dots, k_p).$$

Поэтому теорема следует из леммы 4.1.

§ 5. Лежандровы особенности типов $D_\mu^\pm$

Пусть $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_3, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-3}$, $n \geq 4$, и

$$S(\mathbf{t}, \mathbf{q}) = t_1^2 t_2 + \varepsilon t_2^{n-1} + q_{n-1} t_2^{n-2} + \dots + q_3 t_2^2,$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

ЛЕММА 5.1. *Лежандрово отображение*

$$f: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\mathbf{t}, \mathbf{q}) \mapsto \left(-S + \mathbf{t} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{t}}, -\frac{\partial S}{\partial \mathbf{t}}, \mathbf{q} \right),$$

имеет в точках $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \neq 0$ особенности следующих типов:

- 1) A_k , $1 \leq k \leq n-1$, если $t_2^{-1} \frac{\partial^i S}{\partial t_2^i} = (-1)^i i! t_1^2$, $i = 2, \dots, k$, и $t_2^k \frac{\partial^{k+1} S}{\partial t_2^{k+1}} \neq (-1)^{k+1} (k+1)! t_1^2$;
- 2) A_3 , если $t_1 = t_2 = 0$ и $q_3 \neq 0$;
- 3) D_k^+ , $4 \leq k \leq n-1$, если $t_1 = t_2 = q_3 = \dots = q_{k-1} = 0$ и $q_k > 0$;
- 4) D_k^- , $4 \leq k \leq n-1$, если $t_1 = t_2 = q_3 = \dots = q_{k-1} = 0$ и $q_k < 0$.

В частности, для каждого $4 \leq k \leq n-1$ подмножество $(A_k)^f \subset \mathbb{R}^{n-1}$ задается уравнениями

$$t_2 \frac{\partial^2 S}{\partial t_2^2} = 2t_1^2, \quad \frac{\partial^i S}{\partial t_2^i} = (-1)^{k-i} \frac{i!}{k!} t_2^{k-i} \frac{\partial^k S}{\partial t_2^k}, \quad i = 2, \dots, k-1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гиперповерхность $(A_2)^f \subset \mathbb{R}^{n-1}$ задается уравнением

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial t_1^2} & \frac{\partial^2 S}{\partial t_1 \partial t_2} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial t_1 \partial t_2} & \frac{\partial^2 S}{\partial t_2^2} \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t_2 \frac{\partial^2 S}{\partial t_2^2} = 2t_1^2.$$

Эта гиперповерхность совпадает с графиком гладкой функции $q_3 = q_3(t_1, t_2, q_4, \dots, q_{n-1})$ в окрестности любой точки $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in (A_2)^f$ такой, что $t_2 \neq 0$. Сужение отображения f на $(A_2)^f$ не является иммерсией в такой точке, если и только если

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial t_1^2} & \frac{\partial^2 S}{\partial t_1 \partial t_2} \\ \frac{\partial q_3}{\partial t_1} & \frac{\partial q_3}{\partial t_2} \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t_2^2 \frac{\partial^3 S}{\partial t_2^3} = -6t_1^2.$$

Поверхность $(A_3)^f \subset \mathbb{R}^{n-1}$ задается гладкими функциями

$$q_3 = q_3(t_1, t_2, q_5, \dots, q_{n-1}), \quad q_4 = q_4(t_1, t_2, q_5, \dots, q_{n-1})$$

в окрестности любой точки $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in (A_3)^f$ такой, что $t_2 \neq 0$. Сужение отображения f на гладкую часть поверхности $(A_3)^f$ не является иммерсией в такой точке, если и только если

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial t_1^2} & \frac{\partial^2 S}{\partial t_1 \partial t_2} \\ \frac{\partial q_4}{\partial t_1} & \frac{\partial q_4}{\partial t_2} \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t_2^3 \frac{\partial^4 S}{\partial t_2^4} = 24t_1^2.$$

Продолжая эти вычисления, найдем (по индукции) типы особенностей отображения f во всех точках $(\mathbf{t}, \mathbf{q})$ таких, что $t_2 \neq 0$. Типы особенностей отображения f в точках $(\mathbf{t}, \mathbf{q})$ таких, что $t_1 = t_2 = 0$, следуют из классификации лежандровых особенностей (см. [11], [12]). Лемма доказана.

Рассмотрим семейство функций

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{t}, \mathbf{q}) = S(\mathbf{u}, \mathbf{q}) - S(\mathbf{t}, \mathbf{q}) - (\mathbf{u} - \mathbf{t}) \frac{\partial S(\mathbf{t}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{t}}$$

от $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, зависящих от параметров $\mathbf{t}, \mathbf{q}$, где $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

ЛЕММА 5.2. Пусть

$$\Sigma = \left\{ (\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \exists \mathbf{u} \neq \mathbf{t}: F(\mathbf{u}, \mathbf{t}, \mathbf{q}) = 0, \frac{\partial F(\mathbf{u}, \mathbf{t}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{u}} = 0 \right\}.$$

Тогда замыкание $\bar{\Sigma} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ множества Σ является объединением гиперплоскости $t_2 = 0$ и бифуркационной диаграммы Γ нулей семейства вещественных функций

$$(u, v) \mapsto v^2 u + \varepsilon u^{n-3} + \sum_{i=0}^{n-4} P_i(t_2, \mathbf{q}) u^i + 2t_1 v,$$

зависящих от параметров $\mathbf{t}, \mathbf{q}$, где

$$P_i(t_2, \mathbf{q}) = \sum_{j=i}^{n-3} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \frac{t_2^{j-i}}{(j+2)!} \frac{\partial^{j+2} S(\mathbf{t}, \mathbf{q})}{\partial t_2^{j+2}}.$$

В частности, Γ – волновой фронт, имеющий в нуле особенность следующего типа:

- 1) D_{n-2}^+ , если $n \geq 6$ и $\varepsilon = +1$;
- 2) D_{n-2}^- , если $n \geq 6$ и $\varepsilon = -1$;
- 3) A_3 , если $n = 5$;
- 4) A_1^2 , если $n = 4$ и $\varepsilon = -1$.

Если $n = 4$ и $\varepsilon = +1$, то Γ – пустое множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{u} - \mathbf{t} = \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Тогда Σ – множество точек $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ таких, что для каждого $(\mathbf{t}, \mathbf{q})$ существует $\mathbf{v} \neq 0$, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{aligned} v_1^2 u_2 + 2t_1 v_1 v_2 + v_2^2 G(u_2, t_2, \mathbf{q}) &= 0, \\ v_1 u_2 + t_1 v_2 &= 0, \\ v_1^2 + 2t_1 v_1 + 2v_2 G(u_2, t_2, \mathbf{q}) + v_2^2 \frac{\partial G(u_2, t_2, \mathbf{q})}{\partial u_2} &= 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где

$$G(u_2, t_2, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^{n-3} \frac{1}{(i+2)!} \frac{\partial^{i+2} S(\mathbf{t}, \mathbf{q})}{\partial t_2^{i+2}} (u_2 - t_2)^i = \varepsilon u_2^{n-3} + \sum_{i=0}^{n-4} P_i(t_2, \mathbf{q}) u_2^i.$$

Из первого и второго уравнений системы (5.1) следует

$$v_2(t_1v_1 + v_2G(u_2, t_2, \mathbf{q})) = 0.$$

Поэтому возможны два случая:

- 1) $v_2 = 0$; тогда $u_2 = 0$, поскольку $\mathbf{v} \neq 0$, следовательно, $t_2 = 0$;
- 2) $t_1v_1 + v_2G(u_2, t_2, \mathbf{q}) = 0$; тогда из третьего уравнения системы (5.1) и условия $\mathbf{v} \neq 0$ следует $v_2 \neq 0$.

Пусть $v_1 = vv_2$, где $v \in \mathbb{R}$. Тогда система (5.1) примет вид

$$\begin{aligned} v^2u_2 + 2t_1v + G(u_2, t_2, \mathbf{q}) &= 0, \\ vu_2 + t_1 &= 0, \\ v^2 + \frac{\partial G(u_2, t_2, \mathbf{q})}{\partial u_2} &= 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следующее утверждение легко проверяется непосредственным вычислением.

ЛЕММА 5.3. Пусть $(t_1, t_2, S_3, \dots, S_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $n \geq 4$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$ и

$$P_i = \sum_{j=i}^{n-4} (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \frac{t_2^{j-i}}{(j+2)!} S_{j+3} + \varepsilon (-1)^{n-3-i} \binom{n-3}{i} t_2^{n-3-i},$$

где $i = 0, 1, \dots, n-4$. Тогда

$$S_{j+3} = (j+2)! \left(\sum_{i=j}^{n-4} \binom{i}{j} t_2^{i-j} P_i + \varepsilon t_2^{n-3-j} \binom{n-3}{j} \right), \quad j = 0, 1, \dots, n-4.$$

Пусть $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{P} = (P_0, \dots, P_{n-4}) \in \mathbb{R}^{n-3}$, $n \geq 5$, и Γ – бифуркационная диаграмма нулей семейства вещественных функций

$$(u, v) \mapsto v^2u + G(u, \mathbf{P}) + 2t_1v,$$

зависящих от параметров $\mathbf{t}$, $\mathbf{P}$, $(\mathbf{t}, \mathbf{P}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, где

$$G(u, \mathbf{P}) = \varepsilon u^{n-3} + \sum_{i=0}^{n-4} P_i u^i, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Рассмотрим лежандрово отображение

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^{n-2} &\rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, & \varphi: (t_2, u, v, P_2, \dots, P_{n-4}) &\mapsto (\mathbf{t}, \mathbf{P}), \\ t_1 &= -uv, & P_1 &= -(n-3)\varepsilon u^{n-4} - \sum_{i=2}^{n-4} i P_i u^{i-1} - v^2, \\ P_0 &= (n-4)\varepsilon u^{n-3} + \sum_{i=2}^{n-4} (i-1) P_i u^i + 2uv^2. \end{aligned}$$

Фронтом этого отображения является Γ .

ЛЕММА 5.4. Пусть Σ – гиперповерхность $t_2G(t_2, \mathbf{P}) = t_1^2$ в $\mathbb{R}^{n-1} = \{(t, \mathbf{P})\}$. Тогда множество $\varphi^{-1}(\Gamma \cap \Sigma)$ задается уравнением

$$(t_2 - u)^2 \left(t_2 \sum_{k=2}^{n-3} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k G(u, \mathbf{P})}{\partial u^k} (t_2 - u)^{k-2} - v^2 \right) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле Тейлора имеем

$$t_2G(t_2, \mathbf{P}) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k (uG(u, \mathbf{P}))}{\partial u^k} (t_2 - u)^k.$$

Если $(t, \mathbf{P}) = \varphi(t_2, u, v, P_2, \dots, P_{n-4})$, то

$$uG(u) = t_1^2, \quad \frac{\partial(uG(u, \mathbf{P}))}{\partial u} = 0,$$

поскольку отображение φ определяется решением (t_1, P_0, P_1) системы уравнений

$$t_1 = -uv, \quad \frac{\partial G(u, \mathbf{P})}{\partial u} = -v^2, \quad G(u, \mathbf{P}) = uv^2.$$

Следовательно,

$$(t_2 - u)^2 \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k [uG(u)]}{\partial u^k} (t_2 - u)^{k-2} = 0$$

во всех точках $(t_2, u, v, P_2, \dots, P_{n-4}) \in \varphi^{-1}(\Gamma \cap \Sigma)$. Здесь

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k [uG(u)]}{\partial u^k} (t_2 - u)^{k-2} &= \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{k!} \left(u \frac{\partial^k G(u)}{\partial u^k} + \frac{\partial^{k-1} G(u)}{\partial u^{k-1}} \right) (t_2 - u)^{k-2} \\ &= u \sum_{k=2}^{n-3} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k G(u)}{\partial u^k} (t_2 - u)^{k-2} + \sum_{k=1}^{n-3} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k G(u)}{\partial u^k} (t_2 - u)^{k-1} \\ &= t_2 \sum_{k=2}^{n-3} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k G(u)}{\partial u^k} (t_2 - u)^{k-2} - v^2. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.8. Разберем отдельно каждый из случаев $\mu = 4, 5, 6$.

Случай $\mu = 4$. Рассмотрим лежандрово отображение

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4, \quad (t_1, t_2, q_3) \mapsto \left(-S + t_1 \frac{\partial S}{\partial t_1} + t_2 \frac{\partial S}{\partial t_2}, -\frac{\partial S}{\partial t_1}, -\frac{\partial S}{\partial t_2}, q_3 \right), \\ S &= S(t_1, t_2, q_3) = t_1^2 t_2 + \varepsilon t_2^3 + q_3 t_2^2, \quad \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}$$

Его особенность в нуле имеет тип D_4^+ , если $\varepsilon = +1$, и тип D_4^- , если $\varepsilon = -1$.

Пусть t_1, t_2, S_3 – новая система координат в прообразе $\mathbb{R}^3$ отображения f , где $S_3 = \frac{\partial^2 S}{\partial t_2^2}$. Тогда по лемме 5.1 поверхность $\overline{(A_2)^f} \subset \mathbb{R}^3$ задается уравнением $t_2 S_3 = 2t_1^2$,

$$\overline{(A_3)^f}: \quad t_2 S_3 = 2t_1^2, \quad \varepsilon t_2^2 + t_1^2 = 0.$$

По лемме 5.2 поверхность $\overline{(A_1^2)^f} \subset \mathbb{R}^3$ состоит из плоскости $t_2 = 0$, если $\varepsilon = +1$, и трех плоскостей $t_2 = 0, \pm 4t_1 + 2t_2 + S_3 = 0$, если $\varepsilon = -1$. Эти плоскости касаются конуса $\overline{(A_2)^f}$ по прямым из множества $\overline{(A_3)^f}$. Линии пересечения этих плоскостей образуют множество $\overline{(A_1^3)^f}$.

Рассмотрим разбиение $\mathbb{S}_f$ прообраза $\mathbb{R}^3$ отображения f на связные компоненты подмногообразий вида $\mathcal{A}^f$, где $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$. Это разбиение является полуалгебраической стратификацией. Трехмерные страты этой стратификации имеют тип A_1 . Остов коразмерности 1 представляет собой двумерную поверхность

$$\text{St}(A_1) = \overline{(A_2)^f} \cup \overline{(A_1^2)^f}.$$

Росток поверхности $\text{St}(A_1)$ в нуле изображен на рис. 3, 4. Плоскость $t_2 = 0$ закрашена. Все одномерные страты стратификации $\mathbb{S}_f$, а также один из двумерных стратов каждой неприводимой компоненты поверхности $\text{St}(A_1)$ помечены типами соответствующих мультиособенностей.

Рис. 3. Росток поверхности $\text{St}(A_1)$ для лежандровых особенностей типа D_4^+

Теперь мы можем вычислить все ненулевые индексы $J_X(D_4^\pm)$. Действительно, индексы $J_X(D_4^\pm)$ для $X \in \mathbb{S}$ таких, что $\text{codim } X = 3$, легко найти из рис. 3, 4, используя формулу (2.2).

Например, число стратов типа A_1^3 на рис. 4 равно 6. Поэтому

$$J_{A_1^3}(D_4^-) = \frac{6}{3} = 2.$$

Индексы $J_{A_2}(D_4^\pm)$ и $J_{A_1^2}(D_4^\pm)$ можно вычислить при помощи предложения 3.3. Индексы $J_{A_1}(D_4^\pm)$ и $J_{1_S}(D_4^\pm)$ следуют из предложения 3.1.

Рис. 4. Росток поверхности $\text{St}(A_1)$ для лежандровых особенностей типа D_4^-

Случай $\mu = 5$. Рассмотрим лежандрово отображение

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad (t_1, t_2, q_3, q_4) \mapsto \left(-S + t_1 \frac{\partial S}{\partial t_1} + t_2 \frac{\partial S}{\partial t_2}, -\frac{\partial S}{\partial t_1}, -\frac{\partial S}{\partial t_2}, q_3, q_4 \right),$$

$$S = S(t_1, t_2, q_3, q_4) = t_1^2 t_2 + t_2^4 + q_4 t_2^3 + q_3 t_2^2.$$

Оно имеет особенность типа D_5 в нуле.

Пусть t_1, t_2, S_3, S_4 – новая система координат в прообразе $\mathbb{R}^4$ отображения f , где $S_{k+1} = \frac{\partial^k S}{\partial t_2^k}$. Тогда по лемме 5.1 имеем:

i) гиперповерхность $\overline{(A_2)^f} \subset \mathbb{R}^4$ задается уравнением $t_2 S_3 = 2t_1^2$; ее особые точки образуют кривую

$$\overline{(D_4)^f} = \overline{(D_4^+)^f} \cup \overline{(D_4^-)^f} = \{t_1 = t_2 = S_3 = 0\};$$

ii) отображение f имеет особенности типа D_4^+ (D_4^-) в точках $(t_1, t_2, S_3, S_4) \in \overline{(D_4)^f}$ таких, что $S_4 > 0$ (соответственно, $S_4 < 0$);

iii) $\overline{(A_3)^f} = \{t_1 = t_2 = 0\} \cup \{t_2 S_3 = 2t_1^2, S_3 = -\frac{1}{3}t_2 S_4\}$;

iv) $\overline{(A_4)^f}$: $t_1^2 = t_2^3, S_3 = 2t_2^2, S_4 = -6t_2$.

Введем еще одну систему координат t_1, t_2, P_0, P_1 в $\mathbb{R}^4$, где

$$P_0 = \frac{1}{2}S_3 - \frac{1}{6}t_2 S_4 + t_2^2, \quad P_1 = \frac{1}{6}S_4 - 2t_2.$$

По лемме 5.2 гиперповерхность $\overline{(A_1^2)^f} \subset \mathbb{R}^4$ является объединением гиперплоскости $t_2 = 0$ и фронта Γ лежандрова отображения

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4, & \varphi: (t_2, v, P_1) &\mapsto (t_1, t_2, P_0, P_1), \\ t_1 &= \frac{1}{2}v(v^2 + P_1), & P_0 &= \frac{1}{4}P_1^2 - \frac{1}{4}v^2(3v^2 + 2P_1). \end{aligned}$$

При этом:

- i) φ имеет особенности типа A_3 в точках кривой $\overline{(A_3)^\varphi} = \{v = P_1 = 0\}$;
- ii) $\overline{(A_2)^\varphi}: P_1 = -3v^2$;
- iii) $\overline{(A_1^2)^\varphi}: P_1 = -v^2$;
- iv) $\varphi(\{t_2 = 0\} \cup \overline{(A_1^2)^\varphi}) = \overline{(A_1^3)^f}$;
- v) $\varphi(\overline{(A_2)^\varphi})$ – замыкание множества точек $x \in (A_2A_1)^f$ таких, что отображение f неособо в x .

Рассмотрим пересечение гиперповерхностей $\overline{(A_2)^f}$ и Γ . Согласно лемме 5.3 и лемме 5.4 подмножество $\varphi^{-1}(\overline{(A_2)^f} \cap \Gamma) \subset \mathbb{R}^3$ состоит из двух поверхностей

$$\Pi_1: t_2 = v^2, \quad \Pi_2: P_1 + 2t_2 + v^2 = 0.$$

Эти поверхности обладают следующими свойствами:

- i) $\varphi(\Pi_1)$ – замыкание множества точек трансверсального пересечения множеств $(A_2)^f$ и Γ ;
- ii) $\varphi(\Pi_2)$ – замыкание множества точек касания $(A_2)^f$ и Γ ;
- iii) $\varphi(\Pi_1)$ – замыкание множества точек $x \in (A_2A_1)^f$ таких, что f имеет особенность типа A_2 в x ;
- iv) $\{t_1 = t_2 = 0\} \cup \varphi(\Pi_2) = \overline{(A_3)^f}$;
- v) $\varphi^{-1}(\overline{(D_4)^f}) = \{t_2 = 0\} \cap \overline{(A_1^2)^\varphi} \cap \Pi_2$.

Опишем C^∞ -стратификации гиперповерхностей $t_2 = 0$ и $\overline{(A_2)^f}$ в прообразе $\mathbb{R}^4$ отображения f , а также C^∞ -стратификацию прообраза $\mathbb{R}^3$ отображения φ по типам мультиособенностей отображения f .

1) Гиперповерхность $t_2 = 0$ в $\mathbb{R}^4 = \{(t_1, t_2, P_0, P_1)\}$ является гладким подмногообразием $\alpha(\mathbb{R}^3)$, где

$$\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \alpha: (t_1, P_0, P_1) \mapsto (t_1, t_2, P_0, P_1), \quad t_2 = 0.$$

Разбиение $\mathbb{S}_\alpha$ прообраза $\mathbb{R}^3$ отображения α на связные компоненты подмногообразий вида $\alpha^{-1}(\mathcal{A}^f)$, где $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$, является полуалгебраической стратификацией.

Трехмерные страты этой стратификации имеют тип A_1^2 . Остов коразмерности 1 представляет собой двумерную поверхность

$$\text{St}(A_1^2)_1 = \alpha^{-1}(\overline{(A_2)^f} \cup \Gamma),$$

где

$$\alpha^{-1}(\overline{(A_2)^f}) = \{t_1^2 = 0\},$$

а $\alpha^{-1}(\Gamma)$ – фронт Δ лежандрова отображения

$$\begin{aligned} \varphi_0: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & \varphi_0: (v, P_1) &\mapsto (t_1, P_0, P_1), \\ t_1 &= \frac{1}{2}v(v^2 + P_1), & P_0 &= \frac{1}{4}P_1^2 - \frac{1}{4}v^2(3v^2 + 2P_1). \end{aligned}$$

При этом:

- i) $\alpha(\{t_1 = 0\})$ – замыкание множества $(A_3)^f \cap \{t_2 = 0\}$;
- ii) $\alpha(\{t_1 = 0, P_0 = 0, P_1 \geq 0\}) = \overline{(D_4^+)^f}$;
- iii) $\alpha(\{t_1 = 0, P_0 = 0, P_1 \leq 0\}) = \overline{(D_4^-)^f}$;
- iv) $\alpha(\Delta)$ – замыкание множества $(A_1^3)^f \cap \{t_2 = 0\}$;
- v) $\alpha(\overline{(A_2)_\Delta})$ – замыкание множества точек $x \in (A_2 A_1^2)^f$ таких, что отображение f неособо в x ;
- vi) $\alpha(\{t_1 = 0, P_1^2 = 4P_0\})$ – замыкание множества точек $x \in (A_3 A_1)^f$ таких, что f имеет особенность типа A_3 в x .

Росток поверхности $\text{St}(A_1^2)_1$ в нуле изображен на рис. 5 (в координатах $t_1, P_1^2 - 4P_0, P_1$). Все одномерные страты стратификации $\mathbb{S}_\alpha$, а также один из двумерных стратов каждой неприводимой компоненты поверхности $\text{St}(A_1^2)_1$ помечены типами соответствующих мультиособенностей.

Рис. 5. Росток поверхности $\text{St}(A_1^2)_1$ для лежандровых особенностей типа D_5

2) Рассмотрим прообраз $\mathbb{R}^3 = \{(t_2, v, P_1)\}$ отображения φ . Разбиение $\mathbb{S}_\varphi$ этого пространства на связные компоненты подмногообразий вида $\varphi^{-1}(\mathcal{A}^f)$, где $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$, является полуалгебраической стратификацией.

Трехмерные страты этой стратификации имеют тип A_1^2 . Остов коразмерности 1 представляет собой двумерную поверхность

$$\text{St}(A_1^2)_2 = \overline{(A_2)^\varphi} \cup \overline{(A_1^2)^\varphi} \cup \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \{t_2 = 0\}.$$

При этом:

- i) $\varphi(\overline{(A_2)^\varphi} \cap \overline{(A_1^2)^\varphi})$ – замыкание множества точек $x \in (A_3 A_1)^f$ таких, что f неособо в x ;
- ii) $\varphi(\overline{(A_2)^\varphi} \cap \Pi_1) = \varphi(\overline{(A_2)^\varphi} \cap \Pi_2) = \varphi(\Pi_1 \cap \Pi_2) = \overline{(A_4)^f}$;
- iii) $\varphi(\overline{(A_2)^\varphi} \cap \{t_2 = 0\}) = \alpha(\overline{(A_2)_\Delta})$;

- iv) $\varphi(\overline{(A_1^2)^\varphi} \cap \Pi_1)$ – замыкание множества точек $x \in (A_2 A_1^2)^f$ таких, что f имеет особенность типа A_2 в x ;
- v) $\varphi(\overline{(A_1^2)^\varphi} \cap \Pi_2) = \varphi(\overline{(A_1^2)^\varphi} \cap \{t_2 = 0\}) = \varphi(\Pi_2 \cap \{t_2 = 0\}) = \overline{(D_4^-)^f}$;
- vi) $\varphi(\Pi_1 \cap \{t_2 = 0\}) = \alpha(\{t_1 = 0, P_1^2 = 4P_0\})$.

Росток поверхности $\text{St}(A_1^2)_2$ в нуле изображен на рис. 6 (в координатах $t_2, v, P_1 + v^2$). Поверхность $\overline{(A_1^2)^\varphi}$ представлена вертикальной плоскостью, Π_2 – закрашенная плоскость. Все одномерные страты стратификации $\mathbb{S}_\varphi$, а также один из двумерных стратов каждой неприводимой компоненты поверхности $\text{St}(A_1^2)_2$ помечены типами соответствующих мультиособенностей.

Рис. 6. Росток поверхности $\text{St}(A_1^2)_2$ для лежандровых особенностей типа D_5

3) Подмножество $\overline{(A_2)^f} \setminus \{t_2 = 0\}$ в $\mathbb{R}^4 = \{(t_1, t_2, P_0, P_1)\}$ является гладким подмногообразием $\sigma(M)$, где

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^4, & \sigma: (w, t_2, P_1) &\mapsto (t_1, t_2, P_0, P_1), \\ t_1 &= wt_2, & P_0 &= w^2 t_2 - t_2 P_1 - t_2^2, \end{aligned}$$

и $M = \{(w, t_2, P_1) \in \mathbb{R}^3 | t_2 \neq 0\}$. Разбиение $\mathbb{S}_\sigma$ прообраза $\mathbb{R}^3$ отображения σ на связные компоненты подмногообразий вида $\sigma^{-1}(\mathcal{A}^f \setminus \{t_2 = 0\})$, где $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$, и связные компоненты подмножеств

$$\begin{aligned} \{t_2 = 0, P_1(P_1 + w^2) \neq 0\}, & \quad \{w \neq 0, t_2 = P_1 = 0\}, \\ \{w \neq 0, t_2 = 0, P_1 = -w^2\}, & \quad \{w = t_2 = P_1 = 0\} \end{aligned}$$

является полуалгебраической стратификацией.

Трехмерные страты этой стратификации имеют тип A_2 . Остов коразмерности 1 представляет собой двумерную поверхность

$$\text{St}(A_2) = \sigma^{-1}(\varphi(\Pi_1 \cup \Pi_2) \setminus \{t_2 = 0\}) \cup \{t_2 = 0\},$$

где:

- i) $\sigma^{-1}(\varphi(\Pi_1) \setminus \{t_2 = 0\}) = \psi(\mathbb{R}^2 \setminus \{v = 0\})$ и отображение $\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ задается формулами $(w, v) \mapsto (w, t_2, P_1)$, $t_2 = v^2$, $P_1 = 2wv - v^2$;
- ii) $\sigma^{-1}(\varphi(\Pi_2) \setminus \{t_2 = 0\}) = \{P_1 + 2t_2 + w^2 = 0, t_2 \neq 0\}$.

Заметим, что отображение ψ имеет особенность типа зонтик Уитни в нуле (см. [12]), а

$$\sigma(\overline{(A_1^2)_\psi}) = \varphi(\overline{(A_1^2)^\varphi} \cap \Pi_1),$$

где $\overline{(A_1^2)_\psi}$ – замыкание множества точек трансверсального пересечения двух гладких ветвей поверхности $\psi(\mathbb{R}^2)$.

Росток поверхности $\text{St}(A_2)$ в нуле изображен на рис. 7. Плоскость $t_2 = 0$ закрашена. Все одномерные страты стратификации $\mathbb{S}_\sigma$, не лежащие в плоскости $t_2 = 0$, а также один из двумерных стратов каждой неприводимой компоненты поверхности $\text{St}(A_2)$, кроме $t_2 = 0$, помечены типами соответствующих мультиособенностей.

Рис. 7. Росток поверхности $\text{St}(A_2)$ для лежандровых особенностей типа D_5

Теперь мы можем вычислить все ненулевые индексы $J_X(D_5)$. Действительно, индексы $J_X(D_5)$ для $X \in \mathbb{S}$ таких, что $\text{codim } X$ равно 4 или 2, легко найти из рис. 5–7 при помощи формулы (2.2).

Например, число связных компонент дополнения к поверхности, представленной на рис. 5, равно 6. Число связных компонент дополнения к поверхности, изображенной на рис. 6, равно 18. Поэтому

$$J_{A_1^2}(D_5) = \frac{6 + 18}{2} = 12.$$

Индексы $J_X(D_5)$ для $X \in \mathbb{S}$ таких, что $\text{codim } X = 3$, вычисляются при помощи предложения 3.3. Индексы $J_{A_1}(D_5)$ и $J_{1_S}(D_5)$ следуют из предложения 3.1.

Случай $\mu = 6$. Рассмотрим лежандрово отображение

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^5 &\rightarrow \mathbb{R}^6, \\ (t_1, t_2, q_3, q_4, q_5) &\mapsto \left(-S + t_1 \frac{\partial S}{\partial t_1} + t_2 \frac{\partial S}{\partial t_2}, -\frac{\partial S}{\partial t_1}, -\frac{\partial S}{\partial t_2}, q_3, q_4, q_5 \right), \\ S = S(t_1, t_2, q_3, q_4, q_5) &= t_1^2 t_2 + \varepsilon t_2^5 + q_5 t_2^4 + q_4 t_2^3 + q_3 t_2^2, \quad \varepsilon = \pm 1. \end{aligned}$$

Его особенность в нуле имеет тип D_6^+ , если $\varepsilon = +1$, и тип D_6^- , если $\varepsilon = -1$.

Пусть t_1, t_2, S_3, S_4, S_5 – новая система координат в прообразе $\mathbb{R}^5$ отображения f , где $S_{k+1} = \frac{\partial^k S}{\partial t_2^k}$. Тогда по лемме 5.1 имеем:

i) гиперповерхность $\overline{(A_2)^f} \subset \mathbb{R}^5$ задается уравнением $t_2 S_3 = 2t_1^2$; ее особые точки образуют двумерную поверхность

$$\overline{(D_4)^f} = \overline{(D_4^+)^f} \cup \overline{(D_4^-)^f} = \{t_1 = t_2 = S_3 = 0\};$$

ii) отображение f имеет особенности типа D_4^+ (D_4^-) в точках $(t_1, t_2, S_3, S_4, S_5) \in \overline{(D_4)^f}$ таких, что $S_4 > 0$ (соответственно, $S_4 < 0$);

iii) $\overline{(D_5)^f}$: $t_1 = t_2 = S_3 = S_4 = 0$;

iv) $\overline{(A_3)^f} = \{t_1 = t_2 = 0\} \cup \{t_2 S_3 = 2t_1^2, S_3 = -\frac{1}{3}t_2 S_4\}$;

v) $\overline{(A_4)^f}$: $t_2 S_3 = 2t_1^2, S_3 = \frac{1}{12}t_2^2 S_5, S_4 = -\frac{1}{4}t_2 S_5$;

vi) $\overline{(A_5)^f}$ пусто, если $\varepsilon = +1$, и является множеством $\{t_1^2 = t_2^4, S_3 = 2t_2^3, S_4 = -6t_2^2, S_5 = 24t_2\}$, если $\varepsilon = -1$.

Введем еще одну систему координат t_1, t_2, P_0, P_1, P_2 в $\mathbb{R}^5$, где

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{2}S_3 - \frac{1}{6}t_2 S_4 + \frac{1}{24}t_2^2 S_5 - \varepsilon t_2^3, & P_1 &= \frac{1}{6}S_4 - \frac{1}{12}t_2 S_5 + 3\varepsilon t_2^2, \\ P_2 &= \frac{1}{24}S_5 - 3\varepsilon t_2. \end{aligned}$$

По лемме 5.2 гиперповерхность $\overline{(A_1^2)^f} \subset \mathbb{R}^5$ является объединением гиперплоскости $t_2 = 0$ и фронта Γ лежандрова отображения

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^5, & \varphi: (t_2, u, v, P_2) &\mapsto (t_1, t_2, P_0, P_1, P_2), \\ t_1 &= -uv, & P_1 &= -3\varepsilon u^2 - 2P_2 u - v^2, & P_0 &= 2\varepsilon u^3 + P_2 u^2 + 2uv^2. \end{aligned}$$

При этом:

i) φ имеет особенности типа D_4^+ , если $\varepsilon = +1$, и типа D_4^- , если $\varepsilon = -1$, в точках кривой $\overline{(D_4)^\varphi} = \{u = v = P_2 = 0\}$;

ii) гиперповерхность $\overline{(A_2)^\varphi} \subset \mathbb{R}^4$ задается уравнением $u(P_2 + 3\varepsilon u) = v^2$; ее особые точки образуют кривую $\overline{(D_4)^\varphi}$;

iii) гиперповерхность $\overline{(A_1^2)^\varphi}$ состоит из гиперплоскости $u = 0$, если $\varepsilon = +1$, и трех гиперплоскостей $u = 0, P_2 = 2(u + v), P_2 = 2(u - v)$, если $\varepsilon = -1$;

iv) $\varphi(\{t_2 = 0\} \cup \overline{(A_1^2)^\varphi}) = \overline{(A_1^3)^f}$;

v) $\varphi(\overline{(A_2)^\varphi})$ – замыкание множества точек $x \in (A_2 A_1)^f$ таких, что отображение f неособо в x .

Рассмотрим пересечение гиперповерхностей $\overline{(A_2)^f}$ и Γ . Согласно лемме 5.3 и лемме 5.4 подмножество $\varphi^{-1}(\overline{(A_2)^f} \cap \Gamma) \subset \mathbb{R}^4$ состоит из двух гиперповерхностей

$$\Pi_1: t_2[P_2 + \varepsilon(t_2 + 2u)] = v^2, \quad \Pi_2: u = t_2.$$

Эти гиперповерхности обладают следующими свойствами:

- i) $\varphi(\Pi_1)$ – замыкание множества точек трансверсального пересечения множеств $(A_2)^f$ и Γ ;
- ii) $\varphi(\Pi_2)$ – замыкание множества точек касания $(A_2)^f$ и Γ ;
- iii) $\varphi(\Pi_1)$ – замыкание множества точек $x \in (A_2 A_1)^f$ таких, что f имеет особенность типа A_2 в x ;
- iv) $\{t_1 = t_2 = 0\} \cup \varphi(\Pi_2) = \overline{(A_3)^f}$;
- v) $\varphi^{-1}(\overline{(D_4)^f}) = \{v = t_2 = 0, P_2 = -2\varepsilon u\} \cup \{u = t_2 = 0\}$, где $\{v = t_2 = 0, P_2 = -2\varepsilon u\} \subset \Pi_1$, а $\{u = t_2 = 0\} \subset \Pi_2$.

Опишем C^∞ -стратификацию подмножества $t_1 = t_2 = 0$ в прообразе $\mathbb{R}^5$ отображения f , а также C^∞ -стратификации подмножеств $\{t_2 = 0\}$, $\overline{(A_1^2)^\varphi}$, Π_1 , Π_2 в прообразе $\mathbb{R}^4$ отображения φ по типам мультиособенностей отображения f .

1) Подмножество $t_1 = t_2 = 0$ в $\mathbb{R}^5 = \{(t_1, t_2, P_0, P_1, P_2)\}$ является гладким подмногообразием $\alpha(\mathbb{R}^3)$, где

$$\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5, \quad \alpha: (P_0, P_1, P_2) \mapsto (t_1, t_2, P_0, P_1, P_2), \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 0.$$

Разбиение $\mathbb{S}_\alpha$ прообраза $\mathbb{R}^3$ отображения α на связные компоненты подмногообразий вида $\alpha^{-1}(\mathcal{A}^f)$, где $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$, является полуалгебраической стратификацией.

Трехмерные страты этой стратификации имеют тип A_3 . Остов коразмерности 1 представляет собой двумерную поверхность

$$\text{St}_1(A_3)_1 = \alpha^{-1}(\Gamma \cup \overline{(D_4)^f}),$$

где

$$\alpha^{-1}(\overline{(D_4)^f}) = \{P_0 = 0\},$$

а $\alpha^{-1}(\Gamma)$ является объединением полуплоскости $\{P_0 = 0, P_1 \leq 0\}$ и бифуркационной диаграммы Δ нулей семейства вещественных функций

$$u \mapsto \varepsilon u^3 + P_2 u^2 + P_1 u + P_0,$$

зависящих от параметров P_0, P_1, P_2 . При этом:

- i) Δ диффеоморфно ребру возврата;
- ii) $\{P_0 = 0\} \cup \Delta$ имеет особенность типа B_3 в нуле (см. [13]);
- iii) $\alpha(\{P_0 = 0, P_1 \geq 0\}) = \overline{(D_4^+)^f}$;
- iv) $\alpha(\{P_0 = 0, P_1 \leq 0\}) = \overline{(D_4^-)^f}$;
- v) $\alpha(\{P_0 = 0, P_1 = 0\}) = \overline{(D_5)^f}$;
- vi) $\alpha(\Delta)$ – замыкание множества точек $x \in (A_3 A_1)^f \cap \{t_2 = 0\}$ таких, что f имеет особенность типа A_3 в x ;
- vii) $\alpha(\overline{(A_2)_\Delta}) = \{t_1 = 0, t_2 = 0, P_0 = -\varepsilon u^3, P_1 = 3\varepsilon u^2, P_2 = -3\varepsilon u\}$ – замыкание множества точек $x \in (A_3 A_2)^f$ таких, что f имеет особенность типа A_3 в x ;
- viii) $\alpha(\{\varepsilon u^2 + P_2 u + P_1 = 0, 2\varepsilon u + P_2 = 0\}) = \{t_1 = t_2 = P_0 = 0, P_2^2 = 4\varepsilon P_1\}$ – замыкание множества точек $x \in (D_4^+ A_1)^f$ ($x \in (D_4^- A_1)^f$) таких, что f имеет особенность типа D_4^+ (D_4^-) в x , если $\varepsilon = +1$ (соответственно $\varepsilon = -1$).

Рис. 8. Росток поверхности $\text{St}(A_3)_1$ для лежандровых особенностей типа D_6^+

Росток поверхности $\text{St}(A_3)_1$ в нуле изображен на рис. 8, 9. Все одномерные страты стратификации $\mathbb{S}_\alpha$, а также один из двумерных стратов каждой неприводимой компоненты поверхности $\text{St}(A_3)_1$ помечены типами соответствующих мультиособенностей.

2) Гиперповерхность Π_2 в $\mathbb{R}^4 = \{(t_2, u, v, P_2)\}$ является гладким подмногообразием $\beta(\mathbb{R}^3)$, где

$$\beta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \beta: (u, v, P_2) \mapsto (t_2, u, v, P_2), \quad t_2 = u.$$

Разбиение $\mathbb{S}_\beta$ прообраза $\mathbb{R}^3$ отображения β на связные компоненты подмногообразий вида $(\varphi \circ \beta)^{-1}(\mathcal{A}^f)$, где $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$, является полуалгебраической стратификацией.

Трехмерные страты этой стратификации имеют тип A_3 . Остов коразмерности 1 представляет собой двумерную поверхность

$$\text{St}(A_3)_2 = \beta^{-1}(\overline{(A_2)^\varphi} \cup \overline{(A_1^2)^\varphi} \cup \{t_2 = 0\}),$$

где:

- i) $\beta^{-1}(\overline{(A_2)^\varphi})$: $u(P_2 + 3\varepsilon u) = v^2$;
- ii) $\beta^{-1}(\{t_2 = 0\})$: $u = 0$;
- iii) $\beta^{-1}(\overline{(A_1^2)^\varphi})$ состоит из плоскости $u = 0$, если $\varepsilon = +1$, и трех плоскостей $u = 0$, $P_2 = 2(u + v)$, $P_2 = 2(u - v)$, если $\varepsilon = -1$.

При этом

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \beta)(\{u(P_2 + 3\varepsilon u) = v^2\}) &= \overline{(A_4)^f}, \\ (\varphi \circ \beta)(\{u = 0\}) &= \overline{(D_4^-)^f}, \\ (\varphi \circ \beta)(\{u = 0, u(P_2 + 3\varepsilon u) = v^2\}) &= \overline{(D_5)^f}. \end{aligned}$$

Рис. 9. Росток поверхности $\text{St}(A_3)_1$ для лежандровых особенностей типа D_6^-

Если $\varepsilon = -1$, то:

- i) $(\varphi \circ \beta)(\{P_2 = 2(u + v)\}) \cup (\varphi \circ \beta)(\{P_2 = 2(u - v)\})$ – замыкание множества точек $x \in (A_3A_1)^f \setminus \{t_2 = 0\}$ таких, что f имеет особенность типа A_3 в x ;
- ii) $(\varphi \circ \beta)(\{P_2 = 2u + 2v, u = 0\}) = (\varphi \circ \beta)(\{P_2 = 2u - 2v, u = 0\}) = \alpha(\{-u^2 + P_2u + P_1 = 0, -2u + P_2 = 0\})$;

Рис. 10. Росток поверхности $\text{St}(A_3)_2$ для лежандровой особенности типа D_6^+

iii) $(\varphi \circ \beta)(\{P_2 = 2u + 2v, P_2 = 2u - 2v\}) = \{t_1 = P_0 = 0, P_1 = -t_2^2, P_2 = 2t_2\}$ – замыкание множества точек $x \in (A_3 A_1^2)^f$ таких, что f имеет особенность типа A_3 в x ;

iv) $(\varphi \circ \beta)(\{P_2 = 2u + 2v, u(P_2 - 3u) = v^2\}) \cup (\varphi \circ \beta)(\{P_2 = 2u - 2v, u(P_2 - 3u) = v^2\}) = (A_5)^f$.

Росток поверхности $\text{St}(A_3)_2$ в нуле изображен на рис. 10, 11. Плоскость $u = 0$ закрашена. Все одномерные страты стратификации $\mathbb{S}_\beta$, а также один из двумерных стратов каждой неприводимой компоненты поверхности $\text{St}(A_3)_2$ помечены типами соответствующих мультиособенностей.

Рис. 11. Росток поверхности $\text{St}(A_3)_2$ для лежандровых особенностей типа D_6^-

3) Гиперповерхность $\{t_2 = 0\}$ в $\mathbb{R}^4 = \{(t_2, u, v, P_2)\}$ является гладким подмногообразием $\gamma(\mathbb{R}^3)$, где

$$\gamma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \gamma: (u, v, P_2) \mapsto (t_2, u, v, P_2), \quad t_2 = 0.$$

Разбиение $\mathbb{S}_\gamma$ прообраза $\mathbb{R}^3$ отображения γ на связные компоненты подмногообразий вида $(\varphi \circ \gamma)^{-1}(\mathcal{A}^f)$, где $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$, является полуалгебраической стратификацией.

Трехмерные страты этой стратификации имеют тип A_1^3 . Остов коразмерности 1 представляет собой двумерную поверхность

$$\text{St}(A_1^3)_1 = \gamma^{-1}(\overline{(A_2)^\varphi} \cup \overline{(A_1^2)^\varphi} \cup \Pi_1),$$

где:

- i) $\gamma^{-1}(\overline{(A_2)^\varphi})$: $u(P_2 + 3\varepsilon u) = v^2$;
- ii) $\gamma^{-1}(\Pi_1)$: $v = 0$;
- iii) $\gamma^{-1}(\overline{(A_1^2)^\varphi})$ состоит из плоскости $u = 0$, если $\varepsilon = +1$, и трех плоскостей $u = 0$, $P_2 = 2u + 2v$, $P_2 = 2u - 2v$, если $\varepsilon = -1$.

При этом:

- i) $(\varphi \circ \gamma)(\{u = 0\}) = \overline{(D_4^-)^f}$;
- ii) $(\varphi \circ \gamma)(\{u = 0, u(P_2 + 3\varepsilon u) = v^2\}) = \overline{(D_5)^f}$;
- iii) $(\varphi \circ \gamma)(\{u(P_2 + 3\varepsilon u) = v^2\})$ – замыкание множества точек $x \in (A_2 A_1^2)^f$ таких, что f неособо в x ;
- iv) $(\varphi \circ \gamma)(\{v = 0\}) = \alpha(\Delta)$;
- v) $(\varphi \circ \gamma)(\{v = 0, P_2 = -3\varepsilon u\}) = \alpha(\overline{(A_2)_\Delta})$;
- vi) $(\varphi \circ \gamma)(\{v = 0, P_2 = -2\varepsilon u\}) = \alpha(\{\varepsilon u^2 + P_2 u + P_1 = 0, 2\varepsilon u + P_2 = 0\})$.

Если $\varepsilon = -1$, то:

- vii) $(\varphi \circ \gamma)(\{P_2 = 2u + 2v\}) \cup (\varphi \circ \gamma)(\{P_2 = 2u - 2v\})$ – замыкание множества $(A_1^4)^f \cap \{t_2 = 0\}$;
- viii) $(\varphi \circ \gamma)(\{P_2 = 2u + 2v, u = 0\}) = (\varphi \circ \gamma)(\{P_2 = 2u - 2v, u = 0\}) = \alpha(\{-u^2 + P_2 u + P_1 = 0, -2u + P_2 = 0\})$;
- ix) $(\varphi \circ \gamma)(\{P_2 = 2u + 2v, u(P_2 - 3u) = v^2\}) \cup (\varphi \circ \gamma)(\{P_2 = 2u - 2v, u(P_2 - 3u) = v^2\})$ – замыкание множества точек $x \in (A_3 A_1^2)^f$ таких, что f неособо в x .

Рис. 12. Росток поверхности $\text{St}(A_1^3)_1$ для лежандровых особенностей типа D_6^+

Росток поверхности $\text{St}(A_1^3)_1$ в нуле изображен на рис. 12, 13. Плоскость $u = 0$ закрашена. Все одномерные страты стратификации $\mathbb{S}_\gamma$, а также один

Рис. 13. Росток поверхности $\text{St}(A_1^3)_1$ для лежандровых особенностей типа D_6^-

из двумерных стратов каждой неприводимой компоненты поверхности $\text{St}(A_1^3)_1$ помечены типами соответствующих мультиособенностей.

4) Гиперплоскость $u = 0$ в $\mathbb{R}^4 = \{(t_2, u, v, P_2)\}$ является гладким подмногообразием $\tau(\mathbb{R}^3)$, где

$$\tau: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \tau: (t_2, v, P_2) \mapsto (t_2, u, v, P_2), \quad u = 0.$$

Разбиение $\mathbb{S}_\tau$ прообраза $\mathbb{R}^3$ отображения τ на связные компоненты подмногообразий вида $(\varphi \circ \tau)^{-1}(\mathcal{A}^f)$, где $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$, является полуалгебраической стратификацией.

Трехмерные страты этой стратификации имеют тип A_1^3 . Остов коразмерности 1 представляет собой двумерную поверхность

$$\begin{aligned} \text{St}(A_1^3)_2 = \\ = \begin{cases} \tau^{-1}(\overline{(A_2)^\varphi} \cup \Pi_1 \cup \Pi_2), & \text{если } \varepsilon = +1, \\ \tau^{-1}(\overline{(A_2)^\varphi} \cup \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \{P_2 = 2u + 2v\} \cup \{P_2 = 2u - 2v\}), & \text{если } \varepsilon = -1, \end{cases} \end{aligned}$$

где:

- i) $\tau^{-1}(\overline{(A_2)^\varphi}): v^2 = 0;$
- ii) $\tau^{-1}(\Pi_1): t_2(P_2 + \varepsilon t_2) = v^2;$

- iii) $\tau^{-1}(\Pi_2)$: $t_2 = 0$;
- iv) $\tau^{-1}(\{P_2 = 2u + 2v\})$: $P_2 = 2v$;
- v) $\tau^{-1}(\{P_2 = 2u - 2v\})$: $P_2 = -2v$.

При этом:

- i) $(\varphi \circ \tau)(\{t_2 = 0\}) = \overline{(D_4^-)^f}$;
 - ii) $(\varphi \circ \tau)(\{t_2 = 0, v = 0\}) = \overline{(D_5)^f}$;
 - iii) $(\varphi \circ \tau)(\{t_2(P_2 + \varepsilon t_2) = v^2\})$ – замыкание множества точек $x \in (A_2 A_1^2)^f$ таких, что f имеет особенность типа A_2 в x ;
 - iv) $(\varphi \circ \tau)(\{v = 0\})$ – замыкание множества точек $x \in (A_3 A_1)^f \cap \{t_1 = 0\}$ таких, что f неособо в x ;
 - v) $(\varphi \circ \tau)(\{v = 0, P_2 = -\varepsilon t_2\})$ – замыкание множества точек $x \in (A_3 A_2)^f$ таких, что f имеет особенность типа A_2 в x ;
 - vi) $(\varphi \circ \tau)(\{v = 0, P_2 = 0\})$ – замыкание множества точек $x \in (D_4^+ A_1)^f$ ($x \in (D_4^- A_1)^f$) таких, что f неособо в x , если $\varepsilon = +1$ (соответственно, $\varepsilon = -1$).
- Если $\varepsilon = -1$, то:
- vii) $(\varphi \circ \tau)(\{P_2 = 2v\}) = (\varphi \circ \tau)(\{P_2 = -2v\})$ – замыкание множества $(A_1^4)^f \setminus \{t_2 = 0\}$;
 - viii) $(\varphi \circ \tau)(\{P_2 = 2v, t_2 = 0\}) = (\varphi \circ \tau)(\{P_2 = -2v, t_2 = 0\}) = \alpha(\{-u^2 + P_2 u + P_1 = 0, -2u + P_2 = 0\})$;
 - ix) $(\varphi \circ \tau)(\{P_2 = 2v, t_2(P_2 - t_2) = v^2\}) = (\varphi \circ \tau)(\{P_2 = -2v, t_2(P_2 - t_2) = v^2\}) = (\varphi \circ \beta)(\{P_2 = 2u + 2v, P_2 = 2u - 2v\})$.

Росток поверхности $\text{St}(A_1^3)_2$ в нуле диффеоморфен ростку поверхности $\text{St}(A_1^3)_1$ в нуле и изображен на рис. 12, 13. Плоскость $t_2 = 0$ закрашена. Стратификация $\mathbb{S}_\tau$ диффеоморфна стратификации $\mathbb{S}_\gamma$.

5) Подмножество $\Pi_1 \setminus \{t_2 = 0\}$ в $\mathbb{R}^4 = \{(t_2, u, v, P_2)\}$ является гладким подмногообразием $\sigma(M)$, где $M = \{(t_2, u, v) \in \mathbb{R}^3 \mid t_2 \neq 0\}$ и

$$\sigma: M \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \sigma: (t_2, u, v) \mapsto (t_2, u, v, P_2), \quad P_2 = \frac{v^2}{t_2} - \varepsilon(t_2 + 2u).$$

Разбиение $\mathbb{S}_\sigma$ замыкания $\mathbb{R}^3 = \{(t_2, u, v)\}$ многообразия M на связные компоненты подмногообразий вида $(\varphi \circ \sigma)^{-1}(\mathcal{A}^f)$, где $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$, и связные компоненты подмножеств

$$\begin{aligned} \{uv \neq 0, t_2 = 0\}, \quad \{u \neq 0, v = t_2 = 0\}, \quad \{v \neq 0, u = t_2 = 0\}, \\ \{u = v = t_2 = 0\} \end{aligned}$$

является полуалгебраической стратификацией.

Трехмерные страты этой стратификации имеют тип $A_2 A_1$. Остов коразмерности 1 представляет собой двумерную поверхность

$$\text{St}(A_2 A_1) = \sigma^{-1}(\overline{(A_2)^\varphi} \cup \overline{(A_1^2)^\varphi} \cup \Pi_2) \cup \{t_2 = 0\},$$

где:

- i) $\sigma^{-1}(\overline{(A_2)^\varphi})$: $\{(u - t_2)(v^2 + \varepsilon u t_2) = 0, t_2 \neq 0\}$;
- ii) $\sigma^{-1}(\Pi_2)$: $\{u = t_2 \neq 0\}$;
- iii) $\sigma^{-1}(\overline{(A_1^2)^\varphi})$ состоит из полуплоскостей $\{u = 0, t_2 \neq 0\}$, если $\varepsilon = +1$, и полуплоскостей $\{u = 0, t_2 \neq 0\}$, $\{v = t_2 \neq 0\}$, $\{v = -t_2 \neq 0\}$, если $\varepsilon = -1$.

При этом

$$\begin{aligned}
 (\varphi \circ \sigma)(\{u = t_2 \neq 0\}) &= \overline{(A_4)^f} \setminus \overline{(D_5)^f}, \\
 (\varphi \circ \sigma)(\{v^2 + \varepsilon u t_2 = 0, t_2 \neq 0\}) &= \overline{(A_2^2)^f} \setminus \alpha(\overline{(A_2)_\Delta}), \\
 (\varphi \circ \sigma)(\{u = 0, t_2 \neq 0\}) &= (\varphi \circ \tau)(\{t_2(P_2 + \varepsilon t_2) = v^2\}) \setminus \overline{(D_5)^f}, \\
 (\varphi \circ \sigma)(\{u = 0, v^2 + \varepsilon u t_2 = 0, t_2 \neq 0\}) &= (\varphi \circ \tau)(\{v = 0, P_2 = -\varepsilon t_2\}) \setminus \{0\}.
 \end{aligned}$$

Если $\varepsilon = -1$, то

$$\begin{aligned}
 (\varphi \circ \sigma)(\{v = t_2 \neq 0\}) &= (\varphi \circ \beta)(\{P_2 = 2(u + v)\}) \setminus \{t_1 = t_2 = P_0 = 0, P_2^2 = -4P_1\}, \\
 (\varphi \circ \sigma)(\{v = -t_2 \neq 0\}) &= (\varphi \circ \beta)(\{P_2 = 2(u - v)\}) \setminus \{t_1 = t_2 = P_0 = 0, P_2^2 = -4P_1\}, \\
 (\varphi \circ \sigma)(\{u = 0, v = t_2 \neq 0\}) &= (\varphi \circ \sigma)(\{u = 0, v = -t_2 \neq 0\}) \\
 &= (\varphi \circ \beta)(\{P_2 = 2u + 2v, P_2 = 2u - 2v\}) \setminus \{0\}, \\
 (\varphi \circ \sigma)(\{u = v = t_2 \neq 0\}) \cup (\varphi \circ \sigma)(\{u = -v = t_2 \neq 0\}) &= \overline{(A_5)^f} \setminus \{0\}.
 \end{aligned}$$

Росток поверхности $\text{St}(A_2A_1)$ в нуле изображен на рис. 14, 15. Плоскость $t_2 = 0$ закрашена. Все одномерные страты стратификации $\mathbb{S}_\sigma$, не лежащие в плоскости $t_2 = 0$, а также один из двумерных стратов каждой неприводимой компоненты поверхности $\text{St}(A_2A_1)$, кроме $t_2 = 0$, помечены типами соответствующих мультиособенностей.

Рис. 14. Росток поверхности $\text{St}(A_2A_1)$ для лежандровых особенностей типа D_6^+

Рис. 15. Росток поверхности $\text{St}(A_2A_1)$ для лежандровых особенностей типа D_6^-

6) Пусть $\varepsilon = -1$. Тогда множество $\overline{(A_1^2)^\varphi}$ содержит две гиперплоскости $P_2 = 2(u + \delta v)$, $\delta = \pm 1$. Гиперплоскость $P_2 = 2(u + \delta v)$ в $\mathbb{R}^4 = \{(t_2, u, v, P_2)\}$ является гладким подмногообразием $\psi(\mathbb{R}^3)$, где

$$\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \tau: (t_2, u, v) \mapsto (t_2, u, v, P_2), \quad P_2 = 2(u + \delta v).$$

Разбиение $\mathbb{S}_\psi$ прообраза $\mathbb{R}^3$ отображения ψ на связные компоненты подмногообразий вида $(\varphi \circ \psi)^{-1}(\mathcal{A}^f)$, где $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$, является полуалгебраической стратификацией.

Трехмерные страты этой стратификации имеют тип A_1^3 . Остов коразмерности 1 представляет собой двумерную поверхность

$$\text{St}(A_1^3)_3 = \psi^{-1}(\overline{(A_2)^\varphi} \cup \Pi_1 \cup \Pi_2 \cup \{t_2 = 0\} \cup \{u = 0\} \cup \{P_2 = 2(u - \delta v)\}),$$

где:

- i) $\psi^{-1}(\overline{(A_2)^\varphi})$: $(u - \delta v)^2 = 0$;
- ii) $\psi^{-1}(\Pi_1)$: $(t_2 - \delta v)^2 = 0$;
- iii) $\psi^{-1}(\Pi_2)$: $u = t_2$;
- iv) $\psi^{-1}(\{t_2 = 0\})$: $t_2 = 0$;
- v) $\psi^{-1}(\{u = 0\})$: $u = 0$;
- vi) $\psi^{-1}(\{P_2 = 2(u - \delta v)\})$: $v = 0$.

При этом:

- i) $(\varphi \circ \psi)(\{t_2 = 0\}) = (\varphi \circ \gamma)(\{P_2 = 2(u + \delta v)\})$;
- ii) $(\varphi \circ \psi)(\{u = 0\}) = (\varphi \circ \psi)(\{v = 0\}) = (\varphi \circ \tau)(\{P_2 = 2v\})$;
- iii) $(\varphi \circ \psi)(\{u = \delta v\})$ – замыкание множества точек $x \in (A_3 A_1)^f \cap \{\delta t_1 < 0\}$

таких, что f неособо в x ;

- iv) $(\varphi \circ \psi)(\{u = t_2\}) = (\varphi \circ \psi)(\{t_2 = \delta v\}) = (\varphi \circ \beta)(\{P_2 = 2(u + \delta v)\})$;
- v) $(\varphi \circ \psi)(\{u = t_2 = \delta v\}) = (\varphi \circ \beta)(\{P_2 = 2(u + \delta v), u(P_2 - 3u) = v^2\})$;
- vi) $(\varphi \circ \psi)(\{u = v = 0\}) = (\varphi \circ \tau)(\{v = 0, P_2 = 0\})$;
- vii) $(\varphi \circ \psi)(\{t_2 = u = 0\}) = (\varphi \circ \psi)(\{t_2 = v = 0\}) = \alpha(\{-u^2 + P_2 u + P_1 = 0, -2u + P_2 = 0\})$;
- viii) $(\varphi \circ \psi)(\{u = \delta v, t_2 = 0\}) = (\varphi \circ \gamma)(\{P_2 = 2(u + \delta v), u(P_2 - 3u) = v^2\})$;
- ix) $(\varphi \circ \psi)(\{t_2 = u, v = 0\}) = (\varphi \circ \psi)(\{t_2 = \delta v, u = 0\}) = (\varphi \circ \beta)(\{P_2 = 2(u + v), P_2 = 2(u - v)\})$.

Отображение $\varphi \circ \psi$ инвариантно относительно инволюции

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t_2, u, v) \mapsto (t_2, \delta v, \delta u).$$

Эта инволюция переводит плоскость $u = 0$ в $v = 0$, плоскость $t_2 = u$ в $t_2 = \delta v$, а каждую из остальных неприводимых компонент поверхности $\text{St}(A_1^3)_3$ переводит в себя.

Рис. 16. Росток поверхности $\text{St}(A_1^3)_3$ для лежандровых особенностей типа D_6^-

Росток поверхности $\text{St}(A_1^3)_3$ в нуле изображен на рис. 16. Плоскость $t_2 = 0$ закрашена. Все одномерные страты стратификации $\mathbb{S}_\psi$, а также один из двумерных стратов каждой неприводимой компоненты поверхности $\text{St}(A_1^3)_3$ помечены типами соответствующих мультиособенностей.

Теперь мы можем вычислить все ненулевые индексы $J_X(D_6^\pm)$. Действительно, индексы $J_X(D_6^\pm)$ для $X \in \mathbb{S}$ таких, что $\text{codim } X$ равно 5 или 3, легко найти из рис. 8–16 при помощи формулы (2.2).

Например, число связных компонент дополнения к поверхности, представленной на рис. 13, равно 20. Число связных компонент дополнения к поверхности, изображенной на рис. 16, равно 24. Поэтому

$$J_{A_1^3}(D_6^-) = \frac{1}{3} \left(20 + \frac{20}{2} + \frac{24}{2} + \frac{24}{2} \right) = 18.$$

Индексы $J_X(D_6^\pm)$ для $X \in \mathbb{S}$ таких, что $\text{codim } X$ равно 4 или 2, вычисляются при помощи предложения 3.3. Индексы $J_{A_1}(D_6^\pm)$ и $J_{1_\mathbb{S}}(D_6^\pm)$ следуют из предложения 3.1.

§ 6. Лежандровы особенности типа E_6

ЛЕММА 6.1. Пусть $\mathbf{t} = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{q} = (q_3, q_4, q_5) \in \mathbb{R}^3$ и $S(\mathbf{t}, \mathbf{q}) = t_1^3 + t_2^4 + q_5 t_1 t_2^2 + q_4 t_1 t_2 + q_3 t_2^2$. Рассмотрим семейство функций

$$F(\mathbf{u}, \mathbf{t}, \mathbf{q}) = S(\mathbf{u}, \mathbf{q}) - S(\mathbf{t}, \mathbf{q}) - (\mathbf{u} - \mathbf{t}) \frac{\partial S(\mathbf{t}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{t}}$$

от $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, зависящих от параметров $\mathbf{t}, \mathbf{q}$, $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^5$. Пусть

$$\Sigma = \left\{ (\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^5 \mid \exists \mathbf{u} \neq \mathbf{t}: F(\mathbf{u}, \mathbf{t}, \mathbf{q}) = 0, \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{t}, \mathbf{q}) = 0 \right\}.$$

Тогда замыкание $\bar{\Sigma} \subset \mathbb{R}^5$ множества Σ является бифуркационной диаграммой нулей семейства вещественных функций

$$u \mapsto u^6 + 2q_5 u^4 + 8t_2 u^3 + (q_5^2 - 12t_1) u^2 - 4q_4 u - 8t_2^2 - 4t_1 q_5 - 4q_3,$$

зависящих от параметров $\mathbf{t}, \mathbf{q}$. В частности, $\bar{\Sigma}$ – волновой фронт с особенностью типа A_5 в нуле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbf{u} - \mathbf{t} = \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Тогда Σ – множество точек $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^5$ таких, что для каждого $(\mathbf{t}, \mathbf{q})$ существует $\mathbf{v} \neq 0$, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{aligned} v_2^4 + v_1^3 + q_5 v_1 v_2^2 + 4t_2 v_2^3 + 3t_1 v_1^2 + (2t_2 q_5 + q_4) v_1 v_2 + (6t_2^2 + t_1 q_5 + q_3) v_2^2 &= 0, \\ 3v_1^2 + q_5 v_2^2 + 6t_1 v_1 + (2t_2 q_5 + q_4) v_2 &= 0, \\ 4v_2^3 + 2q_5 v_1 v_2 + 12t_2 v_2^2 + (2t_2 q_5 + q_4) v_1 + 2(6t_2^2 + t_1 q_5 + q_3) v_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Решения $(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \mathbf{q})$ этой системы с $\mathbf{v} \neq 0$ удовлетворяют условию $v_2 \neq 0$.

Пусть $v_1 = uv_2$, где $u \in \mathbb{R}$. Тогда система (6.1) примет вид

$$\begin{aligned} v_2^2 + u^3 v_2 + q_5 u v_2 + 4t_2 v_2 + 3t_1 u^2 + (2t_2 q_5 + q_4)u + (6t_2^2 + t_1 q_5 + q_3) &= 0, \\ 3u^2 v_2 + q_5 v_2 + 6t_1 u + (2t_2 q_5 + q_4) &= 0, \\ 4v_2^2 + 2q_5 u v_2 + 12t_2 v_2 + (2t_2 q_5 + q_4)u + 2(6t_2^2 + t_1 q_5 + q_3) &= 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Исключив q_3 и q_4 из третьего уравнения системы (6.2), получим

$$v_2 = -\frac{1}{2}u(u^2 + q_5) - 2t_2.$$

Поэтому из первого и второго уравнений системы (6.2) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}u^6 + \frac{1}{2}q_5 u^4 + 2t_2 u^3 + \frac{1}{4}(q_5^2 - 12t_1)u^2 - q_4 u - 2t_2^2 - t_1 q_5 - q_3 &= 0, \\ \frac{3}{2}u^5 + 2q_5 u^3 + 6t_2 u^2 + \frac{1}{2}(q_5^2 - 12t_1)u - q_4 &= 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.9. Рассмотрим лежандрово отображение

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^5 &\rightarrow \mathbb{R}^6, \\ (t_1, t_2, q_3, q_4, q_5) &\mapsto \left(-S + t_1 \frac{\partial S}{\partial t_1} + t_2 \frac{\partial S}{\partial t_2}, -\frac{\partial S}{\partial t_1}, -\frac{\partial S}{\partial t_2}, q_3, q_4, q_5 \right), \\ S = S(t_1, t_2, q_3, q_4, q_5) &= t_1^3 + t_2^4 + q_5 t_1 t_2^2 + q_4 t_1 t_2 + q_3 t_2^2. \end{aligned}$$

Оно имеет особенность типа E_6 в нуле.

Пусть t_1, t_2, S_3, S_4, q_5 – новая система координат в прообразе $\mathbb{R}^5$ отображения f , где $S_3 = \frac{\partial^2 S}{\partial t_2^2}$, $S_4 = \frac{\partial^2 S}{\partial t_1 \partial t_2}$. Тогда:

- i) гиперповерхность $\overline{(A_2)^f} \subset \mathbb{R}^5$ задается уравнением $6t_1 S_3 = S_4^2$; ее особые точки образуют двумерную поверхность $\overline{(D_4)^f} = \overline{(D_4^+)^f} \cup \overline{(D_4^-)^f} = \{t_1 = S_3 = S_4 = 0\}$;
- ii) отображение f имеет особенности типа D_4^+ (D_4^-) в точках $(t_1, t_2, S_3, S_4, q_5) \in \overline{(D_4)^f}$ таких, что $108t_2^2 + q_5^3 > 0$ (соответственно, $108t_2^2 + q_5^3 < 0$);
- iii) $\overline{(D_5)^f}$: $t_1 = S_3 = S_4 = 108t_2^2 + q_5^3 = 0$;
- iv) $\overline{(A_3)^f}$ является замыканием множества точек $(t_1, t_2, S_3, S_4, q_5) \in \overline{(A_2)^f}$ таких, что $S_3 S_4 - 144t_1^2 t_2 + 6t_1 S_4 q_5 = 0$, $t_1 \neq 0$;
- v) $\overline{(A_4)^f}$ является замыканием множества точек $(t_1, t_2, S_3, S_4, q_5) \in \overline{(A_3)^f}$ таких, что $(S_3 + 2t_1 q_5)^2 = 48t_1^3$, $t_1 \neq 0$;
- vi) $\overline{(A_5)^f}$: $t_1 = q_5^2/12$, $t_2 = S_3 = S_4 = 0$;
- vii) $\{t_1 = 0\} \cap \overline{(A_3)^f} = \overline{(D_4)^f}$;
- viii) $\{t_1 = 0\} \cap \overline{(A_4)^f} = \overline{(D_5)^f}$.

По лемме 6.1 гиперповерхность $\overline{(A_1^2)^f} \subset \mathbb{R}^5$ является фронтом лежандрова отображения

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^4 &\rightarrow \mathbb{R}^5, \quad \varphi: (t_1, t_2, u, q_5) \mapsto (t_1, t_2, S_3, S_4, q_5), \\ S_3 &= -\frac{1}{2}(u^3 + q_5 u + 4t_2)(5u^3 + q_5 u - 4t_2) + 6t_1 u^2, \\ S_4 &= \frac{1}{2}(u^3 + q_5 u + 4t_2)(3u^2 + q_5) - 6t_1 u. \end{aligned}$$

При этом:

- i) φ имеет особенность типа A_5 в нуле;
- ii) гиперповерхность $\overline{(A_2)^\varphi} \subset \mathbb{R}^4$ задается уравнением $12t_1 - q_5^2 = 15u^4 + 12q_5u^2 + 24t_2u$;
- iii) гиперповерхность $\overline{(A_1^2)^\varphi}$ является бифуркационной диаграммой нулей семейства вещественных функций

$$v \mapsto v^4 + 6uv^3 + (15u^2 + 2q_5)v^2 + 4(5u^3 + 2q_5u + 2t_2)v + 15u^4 + 12q_5u^2 + 24t_2u - (12t_1 - q_5^2),$$

зависящих от параметров t_1, t_2, u, q_5 ;

- iv) $\overline{(A_1^2)^\varphi}$ диффеоморфно цилиндру над ласточкиным хвостом;
- v) $\overline{(A_2)^\varphi} \cup \overline{(A_1^2)^\varphi}$ имеет особенность типа B_4 в нуле (см. [13]);
- vi) $\varphi(\overline{(A_1^2)^\varphi}) = \overline{(A_1^3)^f}$;
- vii) $\varphi(\overline{(A_2)^\varphi})$ – замыкание множества точек $x \in (A_2A_1)^f$ таких, что отображение f неособо в x .

Рассмотрим пересечение гиперповерхностей $\overline{(A_2)^f}$ и $\overline{(A_1^2)^f}$. Подмножество

$$\varphi^{-1}(\overline{(A_2)^f} \cap \overline{(A_1^2)^f}) \subset \mathbb{R}^4$$

определяется уравнением

$$(u^3 + q_5u + 4t_2)^2[(3u^2 + q_5)^2 - 12t_1] = 0.$$

Следовательно, оно состоит из двух гиперповерхностей

$$\Pi_1: (3u^2 + q_5)^2 = 12t_1, \quad \Pi_2: u^3 + q_5u + 4t_2 = 0.$$

Эти гиперповерхности обладают следующими свойствами:

- i) $\varphi(\Pi_1)$ – замыкание множества точек трансверсального пересечения многообразий $(A_2)^f$ и $(A_1^2)^f$;
- ii) $\varphi(\Pi_2)$ – замыкание множества точек касания $(A_2)^f$ и $(A_1^2)^f$;
- iii) $\varphi(\Pi_1)$ – замыкание множества точек $x \in (A_2A_1)^f$ таких, что f имеет особенность типа A_2 в x ;
- iv) $\varphi(\Pi_2) = \overline{(A_3)^f}$.

Опишем C^∞ -стратификации подмножеств $\overline{(A_2)^\varphi}$, $\overline{(A_1^2)^\varphi}$ и Π_2 в прообразе $\mathbb{R}^4$ отображения φ по типам мультиособенностей отображения f .

1) Гиперповерхность $\overline{(A_2)^\varphi}$ в $\mathbb{R}^4 = \{(t_1, t_2, u, q_5)\}$ является гладким подмногообразием $\alpha(\mathbb{R}^3)$, где

$$\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \alpha: (t_2, u, q_5) \mapsto (t_1, t_2, u, q_5),$$

$$t_1 = \frac{1}{12}(15u^4 + 12q_5u^2 + 24t_2u + q_5^2).$$

Разбиение $\mathbb{S}_\alpha$ прообраза $\mathbb{R}^3$ отображения α на связные компоненты подмногообразий вида $(\varphi \circ \alpha)^{-1}(\mathcal{A}^f)$, где $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$, является полуалгебраической стратификацией.

Трехмерные страты этой стратификации имеют тип A_2A_1 . Остов коразмерности 1 представляет собой двумерную поверхность

$$\text{St}(A_2A_1) = \alpha^{-1}(\overline{(A_1^2)^\varphi} \cup \Pi_1 \cup \Pi_2),$$

где:

- i) $\alpha^{-1}(\Pi_1)$: $u(u^3 + q_5u + 4t_2) = 0$;
- ii) $\alpha^{-1}(\Pi_2)$: $u^3 + q_5u + 4t_2 = 0$;
- iii) $\alpha^{-1}(\overline{(A_1^2)^\varphi})$ является объединением поверхности $5u^3 + 2q_5u + 2t_2 = 0$ и бифуркационной диаграммы Δ нулей семейства вещественных функций

$$v \mapsto v^3 + 6uv^2 + (15u^2 + 2q_5)v + 4(5u^3 + 2q_5u + 2t_2),$$

зависящих от параметров t_2 , u , q_5 .

При этом:

- i) Δ диффеоморфно ребру возврата;
- ii) $\{5u^3 + 2q_5u + 2t_2 = 0\} \cup \Delta$ имеет особенность типа B_3 в нуле;
- iii) $(\varphi \circ \alpha)(\{u = 0\}) = \overline{(A_2^2)^f}$;
- iv) $(\varphi \circ \alpha)(\{u^3 + q_5u + 4t_2 = 0\}) = \overline{(A_4)^f}$;
- v) $(\varphi \circ \alpha)(\{5u^3 + 2q_5u + 2t_2 = 0\})$ – замыкание множества точек $x \in (A_3A_1)^f$ таких, что f неособо в x ;
- vi) $(\varphi \circ \alpha)(\Delta)$ – замыкание множества точек $x \in (A_2A_1^2)^f$ таких, что отображение f неособо в x ;
- vii) $(\varphi \circ \alpha)(\{u^3 + q_5u + 4t_2 = 0, u = 0\}) = (\varphi \circ \alpha)(\{5u^3 + 2q_5u + 2t_2 = 0, u = 0\}) = \overline{(A_5)^f}$;
- viii) $(\varphi \circ \alpha)(\overline{(A_2)_\Delta}) = \{t_1 = -\frac{u^4}{16}, t_2 = 0, S_3 = \frac{u^6}{2}, S_4 = 0, q_5 = -\frac{3u^2}{2}\}$ – замыкание множества точек $x \in (A_2^2A_1)^f$ таких, что f неособо в x ;
- ix) $(\varphi \circ \alpha)(\Delta \cap \{u = 0\})$ – замыкание множества точек $x \in (A_2^2A_1)^f$ таких, что f имеет особенности типа A_2 в x ;
- x) $(\varphi \circ \alpha)(\Delta \cap \{5u^3 + 2q_5u + 2t_2 = 0\}) = (\varphi \circ \alpha)(\{t_2 = \frac{u^3}{2}, q_5 = -3u^2\}) \cup (\varphi \circ \alpha) \times (\{t_2 = 5u^3, q_5 = -\frac{15u^2}{2}\})$;
- xi) $(\varphi \circ \alpha)(\Delta \cap \{u^3 + q_5u + 4t_2 = 0\}) = (\varphi \circ \alpha)(\{t_2 = \frac{u^3}{2}, q_5 = -3u^2\}) \cup (\varphi \circ \alpha) \times (\{t_2 = \frac{7u^3}{32}, q_5 = -\frac{15u^2}{8}\})$;
- xii) $(\varphi \circ \alpha)(\{t_2 = \frac{u^3}{2}, q_5 = -3u^2\}) = \overline{(D_5)^f}$;
- xiii) $(\varphi \circ \alpha)(\{t_2 = 5u^3, q_5 = -\frac{15u^2}{2}\})$ – замыкание множества таких точек $x \in (A_4A_1)^f$, что f неособо в x ;
- xiv) $(\varphi \circ \alpha)(\{t_2 = \frac{7u^3}{32}, q_5 = -\frac{15u^2}{8}\})$ – замыкание множества таких точек $x \in (A_4A_1)^f$, что f имеет особенность типа A_4 в x .

Росток поверхности $\text{St}(A_2A_1)$ в нуле изображен на рис. 17 (в координатах $5u^3 + 2q_5u + 2t_2$, u , $3u^2 + q_5$). Поверхность $5u^3 + 2q_5u + 2t_2 = 0$ представлена закрашенной плоскостью, $u = 0$ – вертикальная плоскость. Все одномерные страты стратификации $\mathbb{S}_\alpha$, а также один из двумерных стратов каждой неприводимой компоненты поверхности $\text{St}(A_2A_1)$ помечены типами соответствующих мультиособенностей.

Рис. 17. Росток множества $\text{St}(A_2A_1)$ для лежандровых особенностей типа E_6

2) Гиперповерхность Π_2 в $\mathbb{R}^4 = \{(t_1, t_2, u, q_5)\}$ является гладким подмногообразием $\beta(\mathbb{R}^3)$, где

$$\beta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \beta: (t_1, u, q_5) \mapsto (t_1, t_2, u, q_5), \quad t_2 = -\frac{u}{4}(u^2 + q_5).$$

Разбиение $\mathbb{S}_\beta$ прообраза $\mathbb{R}^3$ отображения β на связные компоненты подмногообразий вида $(\varphi \circ \beta)^{-1}(\mathcal{A}^f)$, где $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$, является полуалгебраической стратификацией.

Трехмерные страты этой стратификации имеют тип A_3 . Остов коразмерности 1 представляет собой двумерную поверхность

$$\text{St}(A_3) = \beta^{-1}(\overline{(A_2)^\varphi} \cup \overline{(A_1^2)^\varphi} \cup \Pi_1 \cup \overline{(D_4)^f}),$$

где:

- i) $\beta^{-1}(\overline{(A_2)^\varphi}) = \beta^{-1}(\Pi_1): (3u^2 + q_5)^2 = 12t_1;$
- ii) $\beta^{-1}(\overline{(D_4)^f}): t_1 = 0;$

iii) $\beta^{-1}(\overline{(A_1^2)^\varphi})$ является бифуркационной диаграммой нулей семейства вещественных функций

$$v \mapsto (v^2 + 3uv + 3u^2 + q_5)^2 - 12t_1,$$

зависящих от параметров t_1 , u , q_5 .

При этом:

i) $\beta^{-1}(\overline{(A_1^2)^\varphi}) = \{(3u^2 + 4q_5)^2 = 192t_1\} \cup \{t_1 = 0, 3u^2 + 4q_5 \leq 0\}$;

ii) $(\varphi \circ \beta)(\{(3u^2 + 4q_5)^2 = 192t_1\})$ – замыкание множества точек $x \in (A_3A_1)^f$ таких, что f имеет особенность типа A_3 в x ;

iii) $(\varphi \circ \beta)(\{t_1 = 0, 3u^2 + 4q_5 \leq 0\}) = \overline{(D_4^-)^f}$;

iv) $(\varphi \circ \beta)(\{t_1 = 0, 3u^2 + 4q_5 \geq 0\}) = \overline{(D_4^+)^f}$;

v) $(\varphi \circ \beta)(\{(3u^2 + q_5)^2 = 12t_1\}) = \overline{(A_4)^f}$;

vi) $(\varphi \circ \beta)(\{t_1 = 0, 3u^2 + q_5 = 0\}) = (\varphi \circ \beta)(\{t_1 = 0, 3u^2 + 4q_5 = 0\}) = \overline{(D_5)^f}$;

vii) $(\varphi \circ \beta)(\{(3u^2 + q_5)^2 = 12t_1\} \cap \{(3u^2 + 4q_5)^2 = 192t_1\}) = (\varphi \circ \beta)(\{t_1 = \frac{q_5^2}{12}, u = 0\}) \cup (\varphi \circ \beta)(\{t_1 = \frac{27u^4}{256}, q_5 = -\frac{15u^2}{8}\})$;

viii) $(\varphi \circ \beta)(\{t_1 = \frac{q_5^2}{12}, u = 0\}) = \overline{(A_5)^f}$;

ix) $(\varphi \circ \beta)(\{t_1 = \frac{27u^4}{256}, q_5 = -\frac{15u^2}{8}\}) = (\varphi \circ \alpha)(\{t_2 = \frac{7u^3}{32}, q_5 = -\frac{15u^2}{8}\})$.

Росток поверхности $\text{St}(A_3)$ в нуле изображен на рис. 18 (в координатах t_1 , u , $3u^2 + 4q_5$). Множество $\{t_1 = 0, 3u^2 + 4q_5 \leq 0\}$ представлено закрашенной полуплоскостью. Все одномерные страты стратификации $\mathbb{S}_\beta$, а также один из двумерных стратов каждой неприводимой компоненты поверхности $\text{St}(A_3)$ помечены типами соответствующих мультиособенностей.

Рис. 18. Росток множества $\text{St}(A_3)$ для лежандровых особенностей типа E_6

3) Гиперповерхность $\overline{(A_1^2)^\varphi}$ в $\mathbb{R}^4 = \{(t_1, t_2, u, q_5)\}$ является фронтом лежандрова отображения

$$\psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad \psi: (v, u, q_5) \mapsto (t_1, t_2, u, q_5),$$

$$t_1 = -\frac{1}{12}[3v^4 + 24uv^3 + (69u^2 + 2q_5)v^2 + 6u(15u^2 + 2q_5)v + 45u^4 + 12q_5u^2 - q_5^2],$$

$$t_2 = -\frac{1}{4}[2v^3 + 9uv^2 + (15u^2 + 2q_5)v + 2u(5u^2 + 2q_5)].$$

При этом:

i) отображение ψ имеет особенности типа A_3 в точках гладкой кривой $\overline{(A_3)^\psi} = \{u = -\frac{2v}{3}, q_5 = -\frac{v^2}{3}\}$;

ii) $\overline{(A_2)^\psi}$: $3(2v + 3u)^2 + 3u^2 + 4q_5 = 0$;

iii) $\overline{(A_1^2)^\psi}$: $(2v + 3u)^2 + 3u^2 + 4q_5 = 0$;

iv) $(\varphi \circ \psi)(\overline{(A_3)^\psi}) = \overline{(D_5)^f}$;

v) $(\varphi \circ \psi)(\overline{(A_2)^\psi}) = (\varphi \circ \alpha)(\Delta)$;

vi) $(\varphi \circ \psi)(\overline{(A_1^2)^\psi}) = \overline{(D_4^-)^f}$.

Разбиение $\mathbb{S}_\psi$ прообраза $\mathbb{R}^3$ отображения ψ на связные компоненты подмногообразий вида $(\varphi \circ \psi)^{-1}(\mathcal{A}^f)$, где $\mathcal{A} \in \mathbb{S}$, является полуалгебраической стратификацией.

Трехмерные страты этой стратификации имеют тип A_1^3 . Остов коразмерности 1 представляет собой двумерную поверхность

$$\text{St}(A_1^3) = \psi^{-1}(\overline{(A_2)^\varphi} \cup \Pi_1 \cup \Pi_2) \cup \overline{(A_2)^\psi} \cup \overline{(A_1^2)^\psi},$$

где

$$\psi^{-1}(\overline{(A_2)^\varphi}): v^2(3v^2 + 12uv + 15u^2 + 2q_5) = 0,$$

$$\psi^{-1}(\Pi_1): (v + 3u)^2(3v^2 + 6uv + 6u^2 + 2q_5) = 0,$$

$$\psi^{-1}(\Pi_2): (2v + 3u)[(2v + 3u)^2 + 3u^2 + 4q_5] = 0.$$

При этом:

i) $(\varphi \circ \psi)(\{3v^2 + 12uv + 15u^2 + 2q_5 = 0\}) = (\varphi \circ \alpha)(\Delta)$;

ii) $(\varphi \circ \psi)(\{v = 0\}) = (\varphi \circ \alpha)(\{5u^3 + 2q_5u + 2t_2 = 0\})$;

iii) $(\varphi \circ \psi)(\{v + 3u = 0\}) = (\varphi \circ \psi)(\{2v + 3u = 0\}) = (\varphi \circ \beta)(\{(3u^2 + 4q_5)^2 = 192t_1\})$;

iv) $(\varphi \circ \psi)(\{3v^2 + 6uv + 6u^2 + 2q_5 = 0\})$ – замыкание множества точек $x \in (A_2A_1^2)^f$ таких, что f имеет особенность типа A_2 в x ;

v) $(\varphi \circ \psi)(\{v = 0\} \cap \overline{(A_1^2)^\psi}) = \overline{(D_5)^f}$;

vi) $(\varphi \circ \psi)(\{v = 0, u = 0\}) = \overline{(A_5)^f}$;

vii) $(\varphi \circ \psi)(\{3v^2 + 6uv + 6u^2 + 2q_5 = 0, u = 0\}) = (\varphi \circ \alpha)(\Delta \cap \{u = 0\})$;

viii) $(\varphi \circ \psi)(\{v = 0\} \cap \overline{(A_2)^\psi}) = (\varphi \circ \alpha)(\{t_2 = 5u^3, q_5 = -\frac{15u^2}{2}\})$.

Отображение $\varphi \circ \psi$ инвариантно относительно инволюции

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (v, u, q_5) \mapsto (-v, u + v, q_5).$$

Эта инволюция переводит плоскость $v + 3u = 0$ в $2v + 3u = 0$, поверхность $3v^2 + 12uv + 15u^2 + 2q_5 = 0$ в $(A_2)^\psi$, а каждую из остальных неприводимых компонент поверхности $\text{St}(A_1^3)$ переводит в себя.

Заметим, что отображение $f \circ \varphi \circ \psi$ инвариантно относительно инволюции

$$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (v, u, q_5) \mapsto (-3u - v, u, q_5),$$

которая переводит плоскость $v = 0$ в $v + 3u = 0$, поверхность $3v^2 + 6uv + 6u^2 + 2q_5 = 0$ в $3v^2 + 12uv + 15u^2 + 2q_5 = 0$, а каждую из остальных неприводимых компонент поверхности $\text{St}(A_1^3)$ переводит в себя.

Росток поверхности $\text{St}(A_1^3)$ в нуле изображен на рис. 19 (в координатах $-v, 3u + v, 2v^2 + 6uv + 6u^2 + 2q_5$). Плоскость $v = 0$ закрашена, поверхность $(A_1^2)^\psi$ представлена вертикальной плоскостью. Все одномерные страты стратификации $\mathbb{S}_\psi$, а также один из двумерных стратов каждой неприводимой компоненты поверхности $\text{St}(A_1^3)$ помечены типами соответствующих мультиособенностей.

Рис. 19. Росток поверхности $\text{St}(A_1^3)$ для лежандровых особенностей типа E_6

Теперь мы можем вычислить все ненулевые индексы $J_X(E_6)$. Действительно, индексы $J_X(E_6)$ для $X \in \mathbb{S}$ таких, что $\text{codim } X$ равно 5 или 3, легко найти из рис. 17–19 при помощи формулы (2.2).

Например, число стратов типа $A_2^2 A_1$, представленных на рис. 17, равно 4. Обrazy стратов из $(A_2)_\Delta \setminus \{0\}$ при отображении $\varphi \circ \alpha$ совпадают. Поэтому

$$J_{A_2^2 A_1}(E_6) = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{2}{2} \right) = 1.$$

Число связных компонент дополнения к поверхности, изображенной на рис. 19, равно 36. Поэтому

$$J_{A_1^3}(E_6) = \frac{1}{3} \left(\frac{36}{2} \right) = 6.$$

Индексы $J_X(E_6)$ для $X \in \mathbb{S}$ таких, что $\text{codim } X$ равно 4 или 2, вычисляются при помощи предложения 3.3. Индексы $J_{A_1}(E_6)$ и $J_{1_s}(E_6)$ следуют из предложения 3.1.

§ 7. Доказательство теоремы 2.10

Используя предложение 3.2, получим соотношение

$$\chi(\mathcal{A}_{\mathcal{F}}) = \frac{(-1)^n}{2} \sum_{\mathcal{B} \in \mathbb{S}} (-1)^{\text{codim } \mathcal{B}} J_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) \chi(\mathcal{B}_{\mathcal{F}})$$

для каждого $\mathcal{A} \in \mathbb{S} \setminus \{1_s\}$ такого, что $\text{codim } \mathcal{A} < n$ и $\text{codim } \mathcal{A} \equiv n-1 \pmod{2}$. Эти соотношения образуют систему однородных линейных уравнений, неизвестными в которой являются эйлеровы характеристики многообразий особенностей фронта $\mathcal{F}$.

Данная система легко представляется в треугольном виде относительно эйлеровых характеристик нечетномерных многообразий особенностей (необходимо лишь правильно занумеровать уравнения и неизвестные). Следовательно, эти эйлеровы характеристики линейно выражаются через остальные.

Формулы, приведенные в пп. 2) и 3) теоремы 2.10, получены путем решения указанной системы вручную. Вычисления проверены на компьютере с использованием пакета программ “Mathematica”.

Список литературы

1. В. И. Арнольд, *Особенности каустик и волновых фронтов*, Фазис, М., 1996; англ. пер.: V. I. Arnold, *Singularities of caustics and wave fronts*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **62**, Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht, 1990.
2. E. Looijenga, “The discriminant of a real simple singularity”, *Compositio Math.*, **37**:1 (1978), 51–62.
3. О. В. Ляшко, “Распадения простых особенностей функций”, *Функц. анализ и его прил.*, **10**:2 (1976), 49–56; англ. пер.: O. V. Lyashko, “Decomposition of simple singularities of functions”, *Funct. Anal. Appl.*, **10**:2 (1976), 122–128.
4. Ю. С. Численко, “Распадения простых особенностей вещественных функций”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:4 (1988), 52–67; англ. пер.: Yu. S. Chislenko, “Decompositions of simple singularities of real functions”, *Funct. Anal. Appl.*, **22**:4 (1988), 297–310.

5. В. А. Васильев, *Лагранжесвы и лежандровы характеристические классы*, 2-е изд., МЦНМО, М., 2000; англ. пер. 1-го изд.: V. A. Vasil'ev, *Lagrange and Legendre characteristic classes*, Adv. Stud. Contemp. Math., **3**, Gordon and Breach, New York, 1988.
6. Дж. Мазер, “Стратификации и отображения”, *УМН*, **27:5** (1972), 85–118; пер. с англ.: J. M. Mather, “Stratifications and mappings”, *Dynamical systems* (Salvador, 1971), Academic Press, New York, 1973, 195–232.
7. В. Д. Седых, “Разрешение особенностей коранга 1 фронта общего положения”, *Функц. анализ и его прил.*, **37:2** (2003), 52–64; англ. пер.: V. D. Sedykh, “Resolution of corank 1 singularities of a generic front”, *Funct. Anal. Appl.*, **37:2** (2003), 123–133.
8. В. Д. Седых, “Полная система линейных соотношений между эйлеровыми характеристиками многообразий особенностей коранга 1 фронта общего положения”, *Функц. анализ и его прил.*, **38:4** (2004), 73–78; англ. пер.: V. D. Sedykh, “A complete system of linear relations between the Euler characteristics of manifolds of corank 1 singularities of a generic front”, *Funct. Anal. Appl.*, **38:4** (2004), 298–301.
9. M. C. Romero Fuster, “Sphere stratifications and the Gauss map”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **95:1–2** (1983), 115–136.
10. C. McCrory, A. Parusiński, “Algebraically constructible functions”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **30:4** (1997), 527–552.
11. В. М. Закалюкин, “О лагранжевых и лежандровых особенностях”, *Функц. анализ и его прил.*, **10:1** (1976), 26–36; англ. пер.: V. M. Zakalyukin, “Lagrangian and Legendrian singularities”, *Funct. Anal. Appl.*, **10:1** (1976), 23–31.
12. В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, т. 1: *Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов*, Наука, М., 1982; англ. пер.: V. I. Arnol'd, S. M. Gusejn-Zade, A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable maps*, v. 1: *The classification of critical points, caustics and wave fronts*, Monogr. Math., **82**, Birkhäuser, Boston–Basel–Stuttgart, 1985.
13. В. И. Арнольд, В. А. Васильев, В. В. Горюнов, О. В. Ляшко, “Особенности. II. Классификация и приложения”, *Динамические системы – 8*, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления, **39**, ВИНТИ, М., 1989, 5–249.

В. Д. Седых (V. D. SEDYKH)

Российский государственный университет нефти и газа

им. И. М. Губкина, г. Москва

E-mail: sedykh@mccme.ru

Поступило в редакцию

07.05.2010