Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Бахвалов, Представление непериодических функций ограниченной Λ -вариации интегралом Фурье в многомерном случае, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 6, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/im458>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 07:36:14

УДК 517.518

А. Н. Бахвалов

Представление непериодических функций ограниченной Λ -вариации интегралом Фурье в многомерном случае

Установлены достаточные условия сходимости кратного интеграла Фурье интегрируемой функции по Прингсхейму (в смысле сходимости частичных интегралов по параллелепипедам) в терминах принадлежности функции классам ограниченной Λ -вариации. Эти условия состоят в следующем: функция принадлежит классу ограниченной гармонической вариации, рассматриваемая точка регулярна, гармоническая вариация в окрестности этой точки ведет себя “хорошо”, функция непрерывна по гармонической вариации на специальном подмножестве в окрестности бесконечности. Показано также, что ни одно из двух последних условий, вообще говоря, нельзя исключить.

Библиография: 10 наименований.

§ 1. Введение

Введем необходимые обозначения. Пусть C – абсолютные постоянные, а $C(\cdot)$ – величины, зависящие лишь от перечисленных в скобках параметров (не обязательно одинаковые в различных случаях).

Для промежутка I на прямой через $\Omega(I)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов $\{I_n\}$ таких, что $\overline{I_n} \subset I$.

Пусть $I^k = (a^k, b^k)$. Рассмотрим функцию $f(\mathbf{x})$ на $\mathbb{R}^m$. При $m = 1$ положим $f(I^1) = f(b^1) - f(a^1)$; если для любой функции $m - 1$ переменных уже определено выражение $f(I^1 \times \dots \times I^{m-1})$, то для функции m переменных положим

$$f(I^1 \times \dots \times I^m) = f(I^1 \times \dots \times I^{m-1}, b^m) - f(I^1 \times \dots \times I^{m-1}, a^m). \quad (1)$$

Величину $f(I^1 \times \dots \times I^m)$ будем называть *смешанным приращением функции f на I* .

Пусть множество $\{1, \dots, m\}$ разбито на два непересекающихся множества α и β , состоящих из p и $m - p$ элементов соответственно. Будем обозначать $|\alpha| = p$, $|\beta| = m - p$. Если $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^m)$, то x^α – элемент $\mathbb{R}^p$, состоящий из компонент x^j , $j \in \alpha$. Для параллелепипеда $I = \bigotimes_{j=1}^m I^j$ обозначим $I^\alpha = \bigotimes_{j \in \alpha} I^j$. Через $x^\alpha + I^\alpha$ (в частности, $\mathbf{x} + I$) обозначим сдвиг параллелепипеда на вектор, а через $f(I^\alpha, x^\beta)$ – смешанное приращение f как функции аргументов x^j , $j \in \alpha$, на I^α при фиксированных значениях x^k , $k \in \beta$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-01-00080), государственных программ “Ведущие научные школы” (грант № НШ-1657.2003.01) и “Молодые кандидаты” (грант № МК-1643.2003.01).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Неубывающая последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}$ задает класс функций ограниченной Λ -вариации (класс Ватермана), если $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$. Далее будем рассматривать только такие Λ . Множество последовательностей Λ , удовлетворяющих перечисленным условиям, будем обозначать через $\mathbb{L}$. Частичные суммы $\sum_{k=1}^N \frac{1}{\lambda_k}$ обозначим через $\Lambda(N)$, последовательность $\{\lambda_k\}_{k=n+1}^{\infty}$ – через Λ_n . Положим также $H = \{n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $\Lambda^1, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$. Тогда $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариацией функции $f(x^1, \dots, x^m)$ относительно переменных $x^1, \dots, x^m$ по параллелепипеду $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$ называется величина

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}^{x^1, \dots, x^m}(f; \Delta) = V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}^{\mathbf{x}}(f; \Delta) = \sup_{\{I_{kj}^j\} \in \Omega(\Delta^j)} \sum_{k^1, \dots, k^m} \frac{|f(I_{k^1}^1 \times \dots \times I_{k^m}^m)|}{\lambda_{k^1}^1 \dots \lambda_{k^m}^m}.$$

Пусть непустое множество $\alpha \subset \{1, \dots, m\}$ состоит из элементов $j_1 < \dots < j_p$ и $\beta = \{1, \dots, m\} \setminus \alpha$. Через

$$V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; (\Delta^\alpha, x^\beta)) = V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\alpha}(f; (\Delta^\alpha, x^\beta))$$

обозначим $(\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p})$ -вариацию f как функции переменных $x^{j_1}, \dots, x^{j_p}$ по p -мерному параллелепипеду $\Delta^\alpha = \Delta^{j_1} \times \dots \times \Delta^{j_p}$ при фиксированных значениях x^β остальных переменных (если β непусто). Возникающие при этом параллелепипеды $\bigotimes_{l=1}^p I_{k^{j_l}}^{j_l}$ для краткости запишем как $I_{k^\alpha}^\alpha$, а произведения $\lambda_{k^{j_1}}^{j_1} \dots \lambda_{k^{j_p}}^{j_p}$ – как $\lambda_{k^\alpha}^\alpha$.

Далее, $(\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p})$ -вариацией функции $f(x^1, \dots, x^m)$ относительно переменных x^α по параллелепипеду $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$ называется величина

$$V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; \Delta) = V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\alpha}(f; \Delta) = \sup_{x^\beta \in \Delta^\beta} V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\alpha}(f; (\Delta^\alpha, x^\beta)).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Величина

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; \Delta) = \sum_{\substack{\alpha \subset \{1, \dots, m\} \\ \alpha \neq \emptyset}} V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}(f; \Delta)$$

называется (полной) $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариацией функции $f(x^1, \dots, x^m)$ по параллелепипеду $\Delta = \Delta^1 \times \dots \times \Delta^m$. Множество функций, для которых она конечна, называется классом $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -ограниченной вариации и обозначается $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)\text{BV}(\Delta)$. Если все последовательности Λ^j совпадают и равны Λ , то для краткости будем записывать $V_{\Lambda^\alpha}^{x^\alpha}$, V_Λ , $\Lambda\text{BV}(\Delta)$ и λ_{k^α} . Величину V_H называют гармонической вариацией.

Далее предположим, что все рассматриваемые функции измеримы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Функция $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)\text{BV}(\Delta)$ называется непрерывной по $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)$ -вариации, если для любого непустого множества $\alpha = \{j_1, \dots, j_p\} \subset \{1, \dots, m\}$ и любого $j_k \in \alpha$ выполнено

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{\Lambda^{j_1}, \dots, \Lambda^{j_{k-1}}, \Lambda_n^{j_k}, \Lambda^{j_{k+1}}, \dots, \Lambda^{j_p}}^{x^\alpha}(f; \Delta) = 0. \quad (2)$$

Множество таких функций обозначим через $C(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)\text{V}(\Delta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Точка $\mathbf{x}_0$ является регулярной точкой функции $f(\mathbf{x})$, если существуют и конечны 2^m пределов

$$f(x_0^1 \pm 0, \dots, x_0^m \pm 0) = \lim_{t^1, \dots, t^m \rightarrow +0} f(x_0^1 \pm t^1, \dots, x_0^m \pm t^m)$$

для всевозможных комбинаций знаков. Для регулярной точки $\mathbf{x}_0$ обозначим

$$f^*(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2^m} \sum f(x_0^1 \pm 0, \dots, x_0^m \pm 0).$$

Пусть $\delta \in (0, \infty)^m$, а $\sigma \in \{-1, 1\}^m$. Обозначим через $(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \sigma\delta)$ параллелепипед $\bigotimes_{j=1}^m I^j$, где $I^j = (x^j, x^j + \delta^j)$ при $\sigma^j = 1$ и $I^j = (x^j - \delta^j, x^j)$ при $\sigma^j = -1$. В качестве нормы в $\mathbb{R}^m$ возьмем $\|\delta\| = \max |\delta^j|$.

Классы HBV в одномерном случае были определены Д. Ватерманом [1], в двумерном случае – А. А. Саакяном [2], а для случая более высоких размерностей – А. И. Саблиным [3], [4]. Ими были установлены следующие результаты о сходимости рядов Фурье (здесь и далее рассматриваются ряды Фурье по (кратной) тригонометрической системе).

ТЕОРЕМА А (Д. Ватерман). Пусть $f \in \text{HBV}([-\pi, \pi])$. Тогда в каждой точке ряд Фурье функции f сходится к величине $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ и сходимость равномерна на любом отрезке, лежащем внутри интервала непрерывности функции.

ТЕОРЕМА В (А. А. Саакян). Пусть f – 2π -периодическая по каждому аргументу функция на плоскости и $f \in \text{HBV}([-\pi, \pi]^2)$. Тогда в каждой регулярной точке $\mathbf{x}$ ряд Фурье функции $f(\mathbf{x})$ сходится по Прингстейму к величине $f^*(\mathbf{x})$. Если функция непрерывна на открытом множестве E , то сходимость равномерна на любом компакте, лежащем в E .

ТЕОРЕМА С (А. И. Саблин). Пусть $f(x) \in \text{HBV}([-\pi, \pi]^m)$ – непрерывная 2π -периодическая по каждому аргументу функция и

$$\lim_{\text{diam } I \rightarrow 0} V_H(f; I) = 0$$

равномерно по всем параллелепипедам I . Тогда ее ряд Фурье равномерно сходится к ней по Прингстейму.

Если $f(x) \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)\text{BV}([-\pi, \pi]^m)$ – непрерывная 2π -периодическая по каждому аргументу функция, причем $\lambda_k^q \leq k$ и для любого $p \in \{1, \dots, m\}$ справедливо условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^m \frac{1}{\lambda_k^q} = \infty, \quad (3)$$

то ее ряд Фурье равномерно сходится к ней по Прингстейму.

Результат Саблина был усилен автором в работе [5], где доказана

ТЕОРЕМА D. Для любой непрерывной 2π -периодической по каждому аргументу функции из $\text{CHV}([-\pi, \pi]^m)$ ее ряд Фурье равномерно сходится по Прингстейму.

С другой стороны, при $m \geq 3$ для любых последовательностей $\Lambda^2, \dots, \Lambda^m$, не удовлетворяющих условию (3) (при $p = 1$), найдется непрерывная 2π -периодическая по каждому аргументу функция из $(H, \Lambda^2, \dots, \Lambda^m)\text{BV}([-\pi, \pi]^m)$, для которой ряд Фурье расходится по кубам в нуле.

Перейдем к проблеме представления интегрируемой функции на $\mathbb{R}^m$, принадлежащей классам ограниченной Λ -вариации, интегралом Фурье.

Рассмотрим преобразование Фурье интегрируемой в $\mathbb{R}^m$ функции:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{\mathbb{R}^m} f(t) e^{-i(\xi, t)} dt$$

и частичные интегралы Фурье по параллелепипедам:

$$\begin{aligned} \sigma_A(f, x) &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{-A^1}^{A^1} \dots \int_{-A^m}^{A^m} \hat{f}(\xi) e^{i(x, \xi)} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(x + t) \prod_{j=1}^m \frac{\sin A^j t^j}{t^j} dt. \end{aligned}$$

В одномерном случае из теоремы A и принципа равносходимости (см., например, [6, гл. 16, п. 1]) следует

ТЕОРЕМА A'. Пусть $f \in \text{HBV}(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$. Тогда в каждой точке $\mathbb{R}$ интеграл Фурье функции f сходится в смысле главного значения к величине $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$ и сходимость равномерна на любом отрезке, лежащем внутри интервала непрерывности функции. Если $\text{HBV}(\mathbb{R}) \subset \Lambda\text{BV}(\mathbb{R})$ – собственное подмножество, то найдется функция $f \in \Lambda\text{BV}(\mathbb{R}) \cap L(\mathbb{R})$, интеграл Фурье которой расходится в некоторой точке (в смысле главного значения).

В многомерном случае свойство равносходимости, вообще говоря, не выполняется, поэтому вопрос о представимости функции интегралом Фурье представляет самостоятельный интерес.

Для двумерного случая автором [7] был получен следующий результат.

ТЕОРЕМА E. Пусть $f \in L(\mathbb{R}^2) \cap \Lambda\text{BV}(\mathbb{R}^2)$, где $\frac{\lambda_n}{n} \downarrow 0$. Тогда в каждой регулярной точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ функции f имеет место равенство

$$\lim_{A, B \rightarrow +\infty} \sigma_{A, B}(f, (x, y)) = f^*(x, y).$$

Настоящая работа посвящена обобщению этой теоремы на случай произвольной размерности. Основным результатом является следующая

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in L(\mathbb{R}^m) \cap \text{HBV}(\mathbb{R}^m)$. Для заданных $\delta > 0$, $B \geq \delta$ и точки $\mathbf{x}$ положим

$$E_{\delta, B}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m \mid \exists j: |x^j - t^j| \leq \delta, \exists k: |x^k - t^k| \geq B\}.$$

Тогда в каждой регулярной точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ функции f , для которой выполнены два условия:

- (А) $\lim_{\|\delta\| \rightarrow +0} \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^m} V_H(f; (\mathbf{x}, \mathbf{x} + \sigma\delta)) = 0$,
- (Б) найдутся $\delta_0 > 0$ и $B \geq \delta_0$ такие, что $f \in \text{CHV}(\Delta)$ для любого параллелепипеда $\Delta \subset E_{\delta_0, B}(\mathbf{x})$,

имеет место равенство

$$\lim_{\mathbf{A} \rightarrow +\infty} \sigma_{\mathbf{A}}(f, \mathbf{x}) = f^*(\mathbf{x}).$$

Здесь $\mathbf{A} \rightarrow +\infty$ означает, что $\min_j A^j \rightarrow +\infty$, т. е. сходимость понимается в смысле Прингсхейма.

В частности, справедливо следующее утверждение, которое непосредственно вытекает из теоремы 1 и леммы 3 (см. § 2).

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $f \in L(\mathbb{R}^m) \cap \text{CHV}(\mathbb{R}^m)$. Тогда в каждой регулярной точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ функции f имеет место равенство

$$\lim_{\mathbf{A} \rightarrow +\infty} \sigma_{\mathbf{A}}(f, \mathbf{x}) = f^*(\mathbf{x}).$$

Используя теорему 1, покажем, что в теореме С условие непрерывности несущественно. Точнее, справедлива

ТЕОРЕМА 2. Пусть $f \in \text{HBV}([-\pi, \pi]^m)$. Тогда в каждой регулярной точке $\mathbf{x} \in [-\pi, \pi]^m$ функции f , для которой

$$\lim_{\|\delta\| \rightarrow +0} \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^m} V_H(f; (\mathbf{x}, \mathbf{x} + \sigma\delta)) = 0,$$

ее ряд Фурье сходится по Прингсхейму к величине $f^*(\mathbf{x})$.

Отсюда также вытекает (с учетом леммы 3) следствие, усиливающее теорему D.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f \in \text{CHV}([-\pi, \pi]^m)$. Тогда в каждой регулярной точке $\mathbf{x} \in [-\pi, \pi]^m$ функции f ее ряд Фурье сходится по Прингсхейму к величине $f^*(\mathbf{x})$.

Отметим, что автором [5] было доказано следующее утверждение.

ТЕОРЕМА F. Для любой последовательности $\Lambda \in \mathbb{L}$ справедливо равенство

$$\text{CLV}(\Delta) = \bigcup_{M \in \mathbb{L}: \frac{\mu_M}{\lambda_M} \downarrow 0} \text{MBV}(\Delta).$$

Поэтому при $m = 2$ теорема E и следствие 1 равносильны. Но поскольку О. С. Драгошанским доказано [8], что классы $\text{CHV}(\mathbb{R}^2)$ и $\text{HBV}(\mathbb{R}^2)$ совпадают, то получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $f \in L(\mathbb{R}^2) \cap \text{HBV}(\mathbb{R}^2)$. Тогда в каждой регулярной точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ функции f имеет место равенство

$$\lim_{A, B \rightarrow +\infty} \sigma_{A, B}(f, (x, y)) = f^*(x, y).$$

В §5 настоящей работы построены примеры, показывающие, что в теореме 1 нельзя, вообще говоря, исключить ни условие (А), ни условие (Б). В частности, в отличие от двумерного случая, при $m \geq 3$ распространить теорему 1 на весь класс $\text{HBV}(\mathbb{R}^m) \cap L(\mathbb{R}^m)$ нельзя.

Приведем точные формулировки доказанных в §5 утверждений.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $m \geq 3$ и последовательности $\Lambda^2, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2 \dots \lambda_k^m} < \infty. \quad (4)$$

Тогда в классе $(H, \Lambda^2, \dots, \Lambda^m)\text{BV}(\mathbb{R}^m)$ существует непрерывная функция $f(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^m)$, тождественно равная нулю вне $(-\pi, \pi)^m$, такая, что числовая последовательность $\sigma_{\Lambda}(f, 0)$ расходится даже в смысле сходимости по кубам.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $m \geq 3$ и последовательности $\Lambda^2, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ удовлетворяют условию (4). Тогда в классе $(H, \Lambda^2, \dots, \Lambda^m)\text{BV}(\mathbb{R}^m)$ существует непрерывная функция $f(\mathbf{x}) \in L(\mathbb{R}^m)$, тождественно равная нулю на $(-\pi, \pi)^m$, такая, что числовая последовательность $\sigma_{\Lambda}(f, 0)$ расходится даже в смысле сходимости по кубам.

§2. Необходимые свойства Λ -вариации

ЛЕММА 1. Если $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)\text{BV}(\Delta)$, где $\Delta \subset \mathbb{R}^m$, и $\inf_{\Delta} |f(\mathbf{x})| = 0$, то

$$\sup_{\Delta} |f(\mathbf{x})| \leq \left(\sum_{j=1}^m \lambda_1^j \right) V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; \Delta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что для любых точек $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ выполнена оценка

$$|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| \leq \left(\sum_{j=1}^m \lambda_1^j \right) V_{\Lambda}(f; \Delta).$$

Это неравенство следует из того, что если точки $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ различаются лишь по j -й координате, то

$$|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)| = \lambda_1^j \frac{|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)|}{\lambda_1^j} \leq \lambda_1^j V_{\Lambda^j}^{x_j}(f; \Delta).$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Если $f \in \Lambda BV(\Delta)$, $g \in \Lambda BV(\Delta^j)$, то $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})g(x^j) \in \Lambda BV(\Delta)$ и справедлива оценка

$$V_\Lambda(F; \Delta) \leq C(m) \left(V_\Lambda(f; \Delta) V_\Lambda(g; \Delta^j) + V_\Lambda(f; \Delta) \sup_{\Delta^j} |g| + V_\Lambda(g; \Delta^j) \sup_{\Delta} |f| \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности предположим, что $j = 1$. Если $1 \notin \alpha$, то

$$V_\Lambda^{x^\alpha}(F; \Delta) \leq V_\Lambda^{x^\alpha}(f; \Delta) \sup_{\Delta^1} |g|.$$

Пусть $\alpha = \{1, \dots, p\}$, $\beta = \{p+1, \dots, m\}$; тогда для любого $x^\beta \in \Delta^\beta$ выполнено равенство

$$F(I_{k^\alpha}^\alpha, x^\beta) = f(I_{k^\alpha}^\alpha, x^\beta) g(b_{k^1}^1) + f(a_{k^1}^1, I_{k^2}^2 \times \dots \times I_{k^p}^p, x^\beta) g(I_{k^1}^1).$$

Отсюда при $p > 1$ следует оценка

$$V_\Lambda^{x^\alpha}(F; \Delta) \leq V_\Lambda(f; \Delta) \sup_{\Delta^1} |g| + V_\Lambda(f; \Delta) V_\Lambda(g; \Delta^j),$$

а при $p = 1$ – оценка

$$V_\Lambda^{x^1}(F; \Delta) \leq V_\Lambda(f; \Delta) \sup_{\Delta^1} |g| + V_\Lambda(g; \Delta^j) \sup_{\Delta} |f|.$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Если функция $f(x)$ принадлежит классу $\text{CHV}(\mathbb{R}^m)$ и в точке $\mathbf{x}_0$ существует предел $f(\mathbf{x}_0 + 0)$, то

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} V_H \left(f; \bigotimes_{j=1}^m (x_0^j, x_0^j + \delta) \right) = 0.$$

Лемма доказана в работе автора [5, теорема 2].

Будем также использовать следующие простейшие свойства Λ -вариации:

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f + g; \Delta) \leq V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; \Delta) + V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(g; \Delta); \quad (5)$$

если Δ_1 и Δ_2 – два параллелепипеда, образующие в объединении параллелепипед и пересекающиеся по общей грани, то

$$V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; \Delta_1 \cup \Delta_2) \leq V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; \Delta_1) + V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; \Delta_2). \quad (6)$$

§ 3. Вспомогательные оценки

ЛЕММА 4. Пусть $f \in (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)\text{BV}(\mathbb{R}^m)$, где $\lambda_n^j/n \leq C(\Lambda^j)$, $\{1, \dots, m\} = \alpha \sqcup \beta$, где α непусто, и $\Delta^\alpha \subset \mathbb{R}^{|\alpha|}$ – произвольный параллелепипед, $\Delta^\beta \subset \mathbb{R}^{|\beta|}$ – ограниченный параллелепипед. Определим функцию $\varphi_{\mathbf{A}}(t^\alpha)$ формулой

$$\varphi_{\mathbf{A}}(t^\alpha) = \int_{\Delta^\beta} f(x^\alpha + t^\alpha, x^\beta + t^\beta) \prod_{j \in \beta} \frac{\sin A^j t^j}{t^j} dt^\beta.$$

Тогда для любых $A^j > 1$ выполнена оценка

$$V_{\Lambda^\alpha}(\varphi_{\mathbf{A}}; \Delta^\alpha) \leq C(m, \Lambda^\beta) V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(f; (x^\alpha + \Delta^\alpha) \times (x^\beta + \Delta^\beta)).$$

ЛЕММА 5. Пусть $g \in \text{HBV}(\Delta)$, $\Delta = \bigotimes_{j=1}^m [a^j, b^j]$ – конечный или бесконечный промежуток в $\mathbb{R}^m$ (во втором случае дополнительно потребуем, чтобы g была интегрируема по Лебегу на Δ). Тогда существует величина $C(m)$ такая, что для любых $A^j > 1$ и для любого k при $\zeta = \lfloor \frac{1}{2\pi} \min_{t \in [a^k, b^k]} |A^k t| \rfloor$ (здесь и далее $\lfloor x \rfloor$ – целая часть числа x) выполнена оценка

$$\left| \int_{\Delta} g(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m \frac{\sin A^j t^j}{t^j} dt \right| \leq C(m) \left(V_{H, \dots, H, H_{2\zeta}^k, H, \dots, H}(g; \Delta) + \frac{1}{1 + \zeta} \left(\sup_{\Delta} |g| + V_H(g; \Delta) \right) \right).$$

Здесь верхний индекс k при $H_{2\zeta}$ показывает, что сдвигается k -я последовательность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММ 4 и 5. Проведем параллельно доказательство этих лемм по индукции. Прежде всего, отметим, что утверждение леммы 5 достаточно доказать для случая ограниченного промежутка. Действительно, если

$$V_{H, \dots, H, H_{2\zeta}^k, H, \dots, H}(g; \Delta) + \frac{1}{1 + \zeta} \left(\sup_{\Delta} |g| + V_H(g; \Delta) \right) = 0,$$

то это означает, что $g \equiv 0$ на Δ , т.е. утверждение леммы заведомо выполнено; в противном случае в силу свойств интеграла Лебега можно подобрать конечный параллелепипед $\Delta' \subset \Delta$ так, чтобы

$$\left| \int_{\Delta \setminus \Delta'} g(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m \frac{\sin A^j t^j}{t^j} dt \right| \leq \left(V_{H, \dots, H, H_{2\zeta}^k, H, \dots, H}(g; \Delta) + \frac{1}{1 + \zeta} \sup_{\Delta} |g| \right).$$

Утверждение леммы 4 при $m = 1$ тривиально, так как непустота α влечет пустоту β , т.е. в этом случае

$$\varphi_A(t) = f(x + t).$$

Докажем лемму 5 при $m = 1$. (Отметим, что для $\zeta = 0$ доказательство фактически содержится в [9].)

Пусть $\Delta = (a, b)$. Достаточно рассмотреть случай $a, b \geq 0$ (в противном случае разобьем интервал (a, b) на две части). Если $b - a \leq \frac{4\pi}{A}$, то справедлива оценка

$$\left| \int_a^b g(t) \frac{\sin At}{t} dt \right| = \left| \int_{Aa}^{Ab} g\left(\frac{s}{A}\right) \frac{\sin s}{s} ds \right| \leq \frac{C}{Aa+1} \sup_{\Delta} |g(t)|. \quad (7)$$

Пусть теперь $b - a > \frac{4\pi}{A}$. Выберем натуральные $K \geq K'$ так, чтобы

$$\frac{(2K' - 3)\pi}{A} \leq a < \frac{(2K' - 1)\pi}{A} < \frac{(2K + 1)\pi}{A} \leq b < \frac{(2K + 3)\pi}{A}.$$

Тогда $K' = \lfloor \frac{aA}{2\pi} + \frac{3}{2} \rfloor$. Отметим, что при этом $K' = \zeta + 1$ или $K' = \zeta + 2$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b g(t) \frac{\sin At}{t} dt &= \int_a^{(2K'-1)\pi/A} g(t) \frac{\sin At}{t} dt + \int_{(2K'-1)\pi/A}^{(2K+1)\pi/A} g(t) \frac{\sin At}{t} dt \\ &\quad + \int_{(2K+1)\pi/A}^b g(t) \frac{\sin At}{t} dt. \end{aligned}$$

Первое и третье слагаемые оцениваются так же, как в (7). Оценим второе слагаемое. Имеем

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{(2K'-1)\pi/A}^{(2K+1)\pi/A} g(t) \frac{\sin At}{t} dt = \sum_{j=2K'-1}^{2K} \int_{j\pi/A}^{(j+1)\pi/A} g(t) \frac{\sin At}{t} dt \\ &= \sum_{j=2K'-1}^{2K} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} g\left(\frac{s}{A}\right) \frac{\sin s}{s} ds = \sum_{j=2K'-1}^{2K} \int_0^\pi g\left(\frac{s+j\pi}{A}\right) \frac{\sin(s+j\pi)}{s+j\pi} ds \\ &= \sum_{j=2K'-1}^{2K} (-1)^j \int_0^\pi g\left(\frac{s+j\pi}{A}\right) \frac{\sin s}{s+j\pi} ds. \end{aligned}$$

Группируя слагаемые по два, получим

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_{j=K'}^K \int_0^\pi \left(\frac{g((t+2j\pi)/A)}{t+2j\pi} - \frac{g((t+(2j-1)\pi)/A)}{t+(2j-1)\pi} \right) \sin t dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{j=K'}^K \frac{g((t+2j\pi)/A) - g((t+(2j-1)\pi)/A)}{t/\pi + (2j-1)} \sin t dt \\ &\quad + \sum_{j=K'}^K \int_0^\pi g\left(\frac{t+2j\pi}{A}\right) \left(\frac{1}{t+2j\pi} - \frac{1}{t+(2j-1)\pi} \right) \sin t dt = J'_2 + J''_2. \end{aligned}$$

Видно, что подынтегральное выражение в J'_2 не превосходит по модулю $H_{2K'-2}$ -вариации функции g , поэтому $|J'_2| \leq V_{H_{2\zeta}}(g; \Delta)$. Для второй суммы имеем оценку

$$\begin{aligned} |J''_2| &\leq \sup_{\Delta} |g| \sum_{j=K'}^K \int_0^\pi \frac{\pi}{(t+2j\pi)(t+(2j-1)\pi)} dt \\ &\leq \sup_{\Delta} |g| \sum_{j=K'}^\infty \frac{1}{(2j-1)^2} \leq \frac{C}{\zeta+1} \sup_{\Delta} |g|. \end{aligned}$$

Таким образом, лемма 5 для одномерного случая доказана.

Пусть для $(m-1)$ -мерного случая утверждения обеих лемм уже установлены.

Докажем лемму 4 для m -мерного случая. Из соображений симметрии достаточно рассмотреть случай $\alpha = \{1, \dots, p\}$, где $1 \leq p \leq m-1$. Отметим, что оценка младших компонент вариации функции $\varphi_{\mathbf{A}}$ (т.е. ее вариации не по всем переменным $\mathbf{x}^\alpha$) следует из предположения индукции.

Пусть $F(\mathbf{t}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{t})$. Рассмотрим системы интервалов $\{I_{kj}^j\} \in \Omega(\Delta^j)$, $j = 1, \dots, p$. Если $\varepsilon_{k^\alpha} = \text{sign}(\varphi_{\mathbf{A}}(I_{k^\alpha}^\alpha))$, то

$$Z = \sum_{k^\alpha} \frac{|\varphi_{\mathbf{A}}(I_{k^\alpha}^\alpha)|}{\lambda_{k^\alpha}^\alpha} = \sum_{k^\alpha} \frac{\varepsilon_{k^\alpha} \varphi_{\mathbf{A}}(I_{k^\alpha}^\alpha)}{\lambda_{k^\alpha}^\alpha} = \int_{\Delta^\beta} \psi(t^\beta) \prod_{j \in \beta} \frac{\sin A^j t^j}{t^j} dt^\beta, \quad (8)$$

где ψ определена формулой

$$\psi(t^\beta) = \sum_{k^\alpha} \frac{\varepsilon_{k^\alpha}}{\lambda_{k^\alpha}^\alpha} F(I_{k^\alpha}^\alpha, t^\beta).$$

Заметим, что в силу определения Λ -вариации

$$\sup_{\Delta^\beta} |\psi| \leq V_{\Lambda^1, \dots, \Lambda^m}(F; \Delta).$$

Оценим $(\Lambda^{p+1}, \dots, \Lambda^m)$ -вариацию ψ . Рассмотрим непустое $\gamma \subset \beta$ и $\eta = \beta \setminus \gamma$. Для любых систем интервалов $\{I_{kj}^j\} \in \Omega(\Delta^j)$, $j \in \gamma$, выполнено

$$\sum_{k^\gamma} \frac{|\psi(I_{k^\gamma}^\gamma)|}{\lambda_{k^\gamma}^\gamma} \leq \sum_{k^\alpha, k^\gamma} \frac{|F(I_{k^\alpha}^\alpha \times I_{k^\gamma}^\gamma, x^\eta)|}{\lambda_{k^\alpha}^\alpha \lambda_{k^\gamma}^\gamma} \leq V_{\Lambda^\alpha, \Lambda^\gamma}^{x^\alpha, x^\gamma}(F; \Delta).$$

Отсюда, переходя в левой части неравенства к верхней грани по $\Omega(\Delta^j)$, $j \in \gamma$, и по $x \in \Delta^\eta$, а затем суммируя по γ , получаем

$$V_{\Lambda^\beta}(\psi; \Delta^\beta) \leq C(m) V_\Lambda(F; \Delta).$$

Из соотношений (8) по лемме 5 (в силу непустоты α выполнено $|\beta| < m$) получаем

$$Z \leq C(m-p) \left(V_H(\psi; \Delta^\beta) + \sup_{\Delta^\beta} |\psi| \right) \leq C(m, \Lambda^\beta) \left(V_{\Lambda^\beta}(\psi; \Delta^\beta) + \sup_{\Delta^\beta} |\psi| \right).$$

Здесь важно отметить, что константа в последнем неравенстве определяется величиной $\sup_{j \in \beta} \sup_n \frac{\lambda_n^j}{n}$, т. е. не зависит от Λ^α . Переходя к верхней грани по $\Omega(\Delta^j)$, $j \in \alpha$, получаем оценку

$$V_\Lambda(\varphi; \Delta^\alpha) \leq C(m, \Lambda^\beta) V_\Lambda(F; \Delta) = C(m, \Lambda^\beta) V_\Lambda(f; \mathbf{x} + \Delta).$$

Тем самым лемма 4 доказана для m -мерного случая.

Пусть теперь лемма 4 доказана для m -мерного случая, а лемма 5 — для $(m-1)$ -мерного случая. Докажем лемму 5 для m -мерного случая.

Без ограничения общности предположим, что $k = 1$. Пусть $t^* = (t^2, \dots, t^m)$ и $\Delta^* = \bigotimes_{j=2}^m [a^j, b^j]$. Имеем

$$Z_1 = \int_{\Delta} g(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m \frac{\sin A^j t^j}{t^j} dt = \int_{a^1}^{b^1} \frac{\sin A^1 t^1}{t^1} \left(\int_{\Delta^*} g(t^1, t^*) \prod_{j=2}^m \frac{\sin A^j t^j}{t^j} dt^* \right) dt^1.$$

Рассмотрим функцию

$$G(t^1) = \int_{\Delta^*} g(t^1, t^*) \prod_{j=2}^m \frac{\sin A^j t^j}{t^j} dt^*.$$

По лемме 4 имеем $G(t^1) \in \text{HBV}(\Delta^1)$ и $V_{H_\zeta}(G; \Delta^1) \leq C_1(m) V_{H_\zeta, H, \dots, H}(g; \Delta)$. По предположению индукции $\sup_{\Delta^1} |G| \leq C(m-1)(V_H(g; \Delta) + \sup_{\Delta} |g|)$. В силу основания индукции

$$|Z_1| \leq C(1) \left(V_{H_\zeta}(G; \Delta^1) + \frac{1}{\zeta + 1} \sup_{\Delta^1} |G| \right).$$

Комбинируя последние неравенства, получим

$$|Z_1| \leq C(m) \left(V_{H_\zeta, H, \dots, H}(g; \Delta) + \frac{1}{\zeta + 1} \left(\sup_{\Delta} |g| + V_H(g; \Delta) \right) \right).$$

Леммы 4 и 5 доказаны.

ЛЕММА 6. Пусть $\Delta = \bigotimes_{j=1}^m \Delta^j$, где $\Delta^j = [a^j, b^j]$. Пусть $f \in \Lambda\text{BV}(\Delta)$. Тогда для $\varkappa^j = (b^j - a^j)/\pi$ справедлива оценка

$$\left| \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m \sin A^j t^j dt \right| \leq C(\Delta) \left(\frac{V_\Lambda(f; \Delta)}{\prod_{j=1}^m \Lambda(\lfloor \varkappa^j A^j \rfloor - 1)} + \sup_{\Delta} |f| \left(\max_j \frac{1}{A^j} \right) \right).$$

Отметим, что при $m = 1$ доказательство лишь несущественно отличается от доказательства аналогичной оценки для коэффициентов Фурье (см. [10]).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\Delta^{(\mathbf{A})} = \bigotimes_{j=1}^m [a^j, b^j - \frac{\pi}{A^j}]$. Введем обозначение для смешанного приращения:

$$f\left(\mathbf{t}, \mathbf{t} + \frac{\pi}{\mathbf{A}}\right) = f\left(\bigotimes_{j=1}^m \left(t^j, t^j + \frac{\pi}{A^j}\right)\right).$$

Сначала докажем индукцией по m , что

$$\int_{\Delta} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m \sin A^j t^j d\mathbf{t} = \frac{(-1)^m}{2^m} \int_{\Delta^{(\mathbf{A})}} f\left(\mathbf{t}, \mathbf{t} + \frac{\pi}{\mathbf{A}}\right) \prod_{j=1}^m \sin A^j t^j d\mathbf{t} + R(f, \Delta, \mathbf{A}), \quad (9)$$

где

$$|R(f, \Delta, \mathbf{A})| \leq C(\Delta) \sup_{\Delta} |f| \left(\max_j \frac{1}{A^j} \right). \quad (10)$$

При $m = 1$ имеем: если $|b - a| \leq \pi/A$, то $\Delta^{(\mathbf{A})}$ пусто и нетрудно видеть, что интеграл, стоящий в левой части (9), не превосходит по модулю правой части (10); в противном случае из равенства

$$J = \int_a^b f(t) \sin At dt = - \int_{a-\frac{\pi}{A}}^{b-\frac{\pi}{A}} f\left(t + \frac{\pi}{A}\right) \sin At dt$$

получаем

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{2} \int_a^{b-\frac{\pi}{A}} \left(f\left(t + \frac{\pi}{A}\right) - f(t) \right) \sin At dt + \frac{1}{2} \int_{b-\frac{\pi}{A}}^b f(t) \sin At dt \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{a-\frac{\pi}{A}}^a f\left(t + \frac{\pi}{A}\right) \sin At dt. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что в данном случае соотношение (9) справедливо.

Пусть для $(m-1)$ -мерного случая равенство (9) установлено. Положим $|\Delta^j| = b^j - a^j$. Если для некоторого k выполнено $|\Delta^k| \leq \pi/A^k$, то $\Delta^{(\mathbf{A})}$ пусто и

$$\left| \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m \sin A^j t^j d\mathbf{t} \right| \leq \frac{\pi}{A^k} \sup_{\Delta} |f(\mathbf{t})| \prod_{j \neq k} |\Delta^j|, \quad (11)$$

т. е. равенство (9) справедливо.

Пусть теперь для любого j выполнено неравенство $|\Delta^j| > \pi/A^j$. Положим $\Delta^* = \bigotimes_{j=2}^m \Delta^j$ и $t^* = (t^2, \dots, t^m)$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} J &= \int_{\Delta} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m \sin A^j t^j d\mathbf{t} \\ &= - \int_{a^1-\frac{\pi}{A^1}}^{b^1-\frac{\pi}{A^1}} \int_{\Delta^*} f\left(t^1 + \frac{\pi}{A^1}, t^*\right) \prod_{j=1}^m \sin A^j t^j dt^* dt^1. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$J = \frac{1}{2} \left(\int_{\Delta} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m \sin A^j t^j dt - \int_{a^1 - \frac{\pi}{A^1}}^{b^1 - \frac{\pi}{A^1}} \int_{\Delta^*} f\left(t^1 + \frac{\pi}{A^1}, t^*\right) \prod_{j=1}^m \sin A^j t^j dt^* dt^1 \right) = J_1 + J_2 + J_3,$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2} \int_{a^1}^{b^1 - \frac{\pi}{A^1}} \int_{\Delta^*} \left(f(\mathbf{t}) - f\left(t^1 + \frac{\pi}{A^1}, t^*\right) \right) \prod_{j=1}^m \sin A^j t^j dt^* dt^1, \\ J_2 &= \int_{b^1 - \frac{\pi}{A^1}}^{b^1} \int_{\Delta^*} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m \sin A^j t^j dt^* dt^1, \\ J_3 &= - \int_{a^1 - \frac{\pi}{A^1}}^{a^1} \int_{\Delta^*} f\left(t^1 - \frac{\pi}{A^1}, t^*\right) \prod_{j=1}^m \sin A^j t^j dt^* dt^1. \end{aligned}$$

Интегралы J_2 и J_3 оцениваются аналогично (11). К внутреннему интегралу в J_1 применим предположение индукции. Получим, что

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{(-1)^m}{2^m} \int_{\Delta(\mathbf{A})} f\left(\mathbf{t}, \mathbf{t} + \frac{\pi}{\mathbf{A}}\right) \prod_{j=1}^m \sin A^j t^j dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{a^1}^{b^1 - \frac{\pi}{A^1}} R(f(t^1, \cdot), \Delta^*, (A^2, \dots, A^m)) dt^1. \end{aligned}$$

Здесь для подынтегральной функции второго слагаемого справедлива оценка (10) из предположения индукции, а длина отрезка интегрирования не превосходит $b^1 - a^1 = C(\Delta)$. Таким образом, (9) установлено.

Перейдем непосредственно к доказательству утверждения леммы. Поскольку для $R(f, \Delta, \mathbf{A})$ требуемая оценка справедлива, то достаточно оценить величину

$$\frac{1}{2^m} \int_{\Delta(\mathbf{A})} f\left(\mathbf{t}, \mathbf{t} + \frac{\pi}{\mathbf{A}}\right) \prod_{j=1}^m \sin A^j t^j dt.$$

Пусть K^j – наибольшее целое такое, что $b^j - a^j - \frac{\pi}{A^j} \geq K^j \frac{\pi}{A^j}$. Обозначим через $\Delta_*^{(\mathbf{A})}$ промежуток $\bigotimes_{j=1}^m [a^j, a^j + K^j \frac{\pi}{A^j}]$.

Заметим, что объем множества $\Delta^{(\mathbf{A})} \setminus \Delta_*^{(\mathbf{A})}$ не превосходит величины $\sum_{j=1}^m \frac{\pi}{A^j} \times \prod_{i \neq j} |\Delta^i|$; поэтому

$$\int_{\Delta^{(\mathbf{A})} \setminus \Delta_*^{(\mathbf{A})}} f\left(\mathbf{t}, \mathbf{t} + \frac{\pi}{\mathbf{A}}\right) \prod_{j=1}^m \sin A^j t^j dt \leq C(\Delta) \sup_{\Delta} |f| \max_j \frac{1}{A^j}.$$

Рассмотрим оставшийся интеграл:

$$|Z_5| = \left| \int_{\Delta_*^{(\mathbf{A})}} f\left(\mathbf{t}, \mathbf{t} + \frac{\pi}{\mathbf{A}}\right) \prod_{j=1}^m \sin A^j t^j dt \right| \leq \int_{\Delta_*^{(\mathbf{A})}} \left| f\left(\mathbf{t}, \mathbf{t} + \frac{\pi}{\mathbf{A}}\right) \right| dt = Z'_5.$$

Продолжим теперь функцию $f(\mathbf{t})$, определенную на параллелепипеде $\Delta_*^{(\mathbf{A})}$ (полуоткрытом справа по каждой координате), на все $\mathbb{R}^m$ с периодами $\frac{K^j \pi}{A^j}$ по переменным t^j . В силу периодичности полученной функции $f_0(\mathbf{t})$ имеем для любых $k^j = 0, \dots, K^j - 1$ соотношение

$$Z'_5 = \int_{\Delta_*^{(\mathbf{A})}} \left| f_0\left(\bigotimes_{j=1}^m \left(t^j + k^j \frac{\pi}{A^j}, t^j + (k^j + 1) \frac{\pi}{A^j}\right)\right) \right| dt. \quad (12)$$

Из линейной комбинации равенств (12) получим

$$\begin{aligned} Z'_5 &= \frac{1}{\Lambda(K^1) \dots \Lambda(K^m)} \\ &\times \int_{\Delta_*^{(\mathbf{A})}} \sum_{k^1=0}^{K^1-1} \dots \sum_{k^m=0}^{K^m-1} \frac{|f_0(\bigotimes_{j=1}^m (t^j + k^j \frac{\pi}{A^j}, t^j + (k^j + 1) \frac{\pi}{A^j}))|}{\lambda_{k^1+1} \dots \lambda_{k^m+1}} dt. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (6) имеем

$$\begin{aligned} |Z_5| &\leq \frac{\prod_{j=1}^m |\Delta^j|}{\Lambda(K^1) \dots \Lambda(K^m)} V_{\Lambda}\left(f_0; \bigotimes_{j=1}^m \left(a^j, a^j + 2K^j \frac{\pi}{A^j}\right)\right) \\ &\leq \frac{C(\Delta) V_{\Lambda}(f; \bigotimes_{j=1}^m (a^j, b^j))}{\Lambda(K^1) \dots \Lambda(K^m)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 4. Доказательство теорем о сходимости

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Без ограничения общности предположим, что $\mathbf{x} = 0$, и рассмотрим функцию, отличную от нуля лишь при $t^j > 0$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Прежде всего, в силу условия (А) теоремы выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$V_H(f; (0, \delta)^m) \leq \varepsilon.$$

При этом будем считать, что $\delta < \delta_0$, где δ_0 – такое же, как в условии (Б). Пусть число B – из условия (Б). Для произвольного разбиения множества $\{1, \dots, m\}$ на три непересекающихся множества α , β и γ обозначим

$$P_{\alpha, \beta, \gamma} = \bigotimes_{j=1}^m J_{\alpha, \beta, \gamma}^j, \quad J_{\alpha, \beta, \gamma}^j = \begin{cases} (0, \delta), & j \in \alpha, \\ [\delta, B), & j \in \beta, \\ [B, +\infty), & j \in \gamma. \end{cases}$$

Тогда получаем, что

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathbf{A}}(f, 0) &= \sum_{\alpha \sqcup \beta \sqcup \gamma = \{1, \dots, m\}} S_{\alpha, \beta, \gamma} \\ &= \sum_{\alpha \sqcup \beta \sqcup \gamma = \{1, \dots, m\}} \frac{1}{\pi^m} \int_{P_{\alpha, \beta, \gamma}} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m \frac{\sin A^j t^j}{t^j} dt. \end{aligned} \quad (13)$$

Перейдем теперь к оценке различных слагаемых в этой сумме.

1. Пусть $\alpha = \emptyset$. Тогда соответствующее слагаемое есть линейная комбинация значений преобразования Фурье функции $f(\mathbf{t}) \left(\prod_{j=1}^m \frac{1}{t^j} \right) \chi_{P_{\emptyset, \beta, \gamma}}(\mathbf{t})$ в точках $(\pm A^1, \dots, \pm A^m)$, причем коэффициенты в этой линейной комбинации не зависят от $\mathbf{A}$. Поскольку преобразование Фурье интегрируемой функции стремится к нулю с ростом $\min_j |\xi^j|$, то при достаточно больших A^j эти слагаемые будут меньше ε .

2. Пусть α и γ непусты. Для определенности положим $\alpha = \{1, \dots, p\}$, $\beta = \{p+1, \dots, q\}$, $\gamma = \{q+1, \dots, m\}$ (остальные случаи симметричны).

Для произвольных $A^j > 1$ рассмотрим функцию

$$\varphi_{\mathbf{A}}(t^\gamma) = \prod_{j=q+1}^m \int_{(0, \delta)^p \times [\delta, B)^{q-p}} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^q \frac{\sin A^j t^j}{t^j} dt^\alpha dt^\beta.$$

Тогда

$$S_{\alpha, \beta, \gamma} = \frac{1}{\pi^m} \int_{[B, \infty)^{m-q}} \varphi_{\mathbf{A}}(t^\gamma) \prod_{j=q+1}^m \frac{\sin A^j t^j}{t^j} dt^\gamma.$$

Заметим, что так как $\varphi_{\mathbf{A}}(t^\gamma)$ интегрируема на параллелепипеде бесконечной меры, то по лемме 1 справедлива оценка

$$\sup_{[B, \infty)^{m-q}} |\varphi_{\mathbf{A}}(t)| \leq C(m) V_H(\varphi_{\mathbf{A}}; [B, \infty)^{m-q}).$$

По лемме 5 для $\zeta = \lfloor \frac{A^m B}{2\pi} \rfloor$ справедлива оценка

$$|S_{\alpha, \beta, \gamma}| \leq C(m) \left(V_{H, \dots, H, H_{2\zeta}}(\varphi_{\mathbf{A}}; [B, \infty)^{m-q}) + \frac{1}{\zeta + 1} V_H(\varphi_{\mathbf{A}}; [B, \infty)^{m-q}) \right).$$

Применяя лемму 4, получаем

$$|S_{\alpha, \beta, \gamma}| \leq C(m) \left(V_{H, \dots, H, H_{2\zeta}}(f; P_{\alpha, \beta, \gamma}) + \frac{1}{\zeta + 1} V_H(f; P_{\alpha, \beta, \gamma}) \right).$$

При увеличении ζ , т. е. при увеличении A^m , правая часть этого неравенства в силу условия (Б) теоремы стремится к нулю. Выберем A^m столь большим, чтобы она была не больше ε .

3. Пусть γ пусто, а α и β непусты. Для определенности положим $\alpha = \{1, \dots, p\}$, $\beta = \{p+1, \dots, m\}$. Тогда рассмотрим на $[\delta, B)^{m-p}$ функции

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{A}}(t^\beta) &= \int_{(0, \delta)^p} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^p \frac{\sin A^j t^j}{t^j} dt^\alpha, \\ \psi_{\mathbf{A}}(t^\beta) &= \prod_{j=p+1}^m \frac{1}{t^j} \int_{(0, \delta)^p} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^p \frac{\sin A^j t^j}{t^j} dt^\alpha.\end{aligned}$$

По лемме 4 справедлива оценка

$$V_H(\varphi_{\mathbf{A}}; [\delta, B)^{m-p}) \leq C(m) V_H(f; \mathbb{R}^m),$$

из которой по лемме 2 с учетом леммы 1 вытекает оценка

$$V_H(\psi_{\mathbf{A}}; [\delta, B)^{m-p}) \leq \frac{C(m)}{\delta^{m-p}} \left(V_H(f; \mathbb{R}^m) + \sup_{\mathbb{R}^m} |f| \right) \leq \frac{C(m)}{\delta^{m-p}} V_H(f; \mathbb{R}^m).$$

С другой стороны, по лемме 5 с учетом леммы 1 имеем

$$\sup_{[\delta, B)^{m-p}} |\psi_{\mathbf{A}}| \leq \frac{1}{\delta^{m-p}} \sup_{[\delta, B)^{m-p}} |\varphi_{\mathbf{A}}| \leq \frac{C(m)}{\delta^{m-p}} V_H(f; \mathbb{R}^m).$$

Поскольку

$$S_{\alpha, \beta, \varnothing} = \int_{[\delta, B)^{m-p}} \psi_{\mathbf{A}}(t^\beta) \prod_{j=p+1}^m \sin A^j t^j dt^\beta,$$

то по лемме 6 найдутся положительные $\varkappa^j$, зависящие лишь от δ и B , такие, что

$$|S_{\alpha, \beta, \varnothing}| \leq C(\delta, B) \left(\frac{V_H(\psi_{\mathbf{A}}; [\delta, B)^{m-p})}{\prod_{j=p+1}^m \Lambda(\lfloor \varkappa^j A^j \rfloor - 1)} + \sup_{[\delta, B)^{m-p}} |\psi_{\mathbf{A}}| \left(\sum_{j=p+1}^m \frac{1}{A^j} \right) \right).$$

Объединяя эти оценки, получаем, что при достаточно больших A^j

$$|S_{\alpha, \beta, \varnothing}| \leq C(m, f, \delta, B) \left(\frac{1}{\prod_{j=p+1}^m \Lambda(\lfloor \varkappa^j A^j \rfloor - 1)} + \sum_{j=p+1}^m \frac{1}{A^j} \right) \leq \varepsilon.$$

4. Рассмотрим оставшееся слагаемое ($\beta = \gamma = \varnothing$). Пусть $g(\mathbf{t}) = f(\mathbf{t}) - f(+0)$. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{(0, \delta)^m} f(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m \frac{\sin A^j t^j}{t^j} d\mathbf{t} &= \int_{(0, \delta)^m} g(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m \frac{\sin A^j t^j}{t^j} d\mathbf{t} \\ &\quad + f(+0) \int_{(0, \delta)^m} \prod_{j=1}^m \frac{\sin A^j t^j}{t^j} d\mathbf{t}. \end{aligned}$$

К первому слагаемому применим лемму 5: поскольку $\lim_{t^j \rightarrow +0} g(\mathbf{t}) = 0$, то с учетом леммы 1 получаем оценку

$$\left| \int_{(0, \delta)^m} g(\mathbf{t}) \prod_{j=1}^m \frac{\sin A^j t^j}{t^j} d\mathbf{t} \right| \leq C(m) \left(V_H(g; (0, \delta)^m) + \sup_{(0, \delta)^m} |g| \right) \leq C(m) \varepsilon.$$

Второе слагаемое распадается в произведение одномерных интегралов Фурье от функций $\chi_{(0, \delta)}(t)$, поэтому (например, по теореме Дирихле–Жордана)

$$f(+0) \int_{(0, \delta)^m} \prod_{j=1}^m \frac{\sin A^j t^j}{t^j} dt \rightarrow \frac{1}{2^m} f(+0) = f^*(0)$$

при увеличении A^j .

Таким образом, при достаточно больших A^j каждое слагаемое в (13) не превосходит $C(m)\varepsilon$, кроме одного слагаемого (рассмотренного в п. 4), которое сколь угодно близко к $f^*(0)$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть функция $f(\mathbf{x})$ принадлежит классу $\text{HBV}((-\pi, \pi]^m)$. Без ограничения общности рассмотрим поведение ряда Фурье в нуле.

Введем вспомогательную функцию

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) \prod_{j=1}^m \frac{x^j}{2 \sin(x^j/2)}, & x \in (-\pi, \pi]^m, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^m \setminus (-\pi, \pi]^m. \end{cases}$$

Для $\mathbf{A} \in \mathbb{N}^m$ положим $\mathbf{A}' = (A^1 + 1/2, \dots, A^m + 1/2)$. Заметим, что по лемме 2 выполнено условие $g(\mathbf{x}) \in \text{HBV}(\mathbb{R}^m)$. Кроме того, нетрудно видеть, что по той же лемме

$$\lim_{\|\delta\| \rightarrow +0} \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^m} V_H(f - g; (0, \sigma\delta)) = 0,$$

т. е. из условий теоремы и неравенства (5) следует, что

$$\lim_{\|\delta\| \rightarrow +0} \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^m} V_H(f; (0, \sigma\delta)) = 0.$$

Теперь утверждение теоремы 2 непосредственно вытекает из равенств $f^*(0) = g^*(0)$, $S_{\mathbf{A}}(f, 0) = \sigma_{\mathbf{A}'}(g, 0)$ и теоремы 1 (условие (Б) в ней автоматически выполнено для $B = \pi$).

§ 5. Доказательство теорем о расходимости

Нам понадобится следующая конструкция.

Пусть $m \geq 3$. Рассмотрим систему вложенных в $\mathbb{R}$ интервалов $\{D_i^1\}_{i=1}^\infty$, не образующих в объединении всё $\mathbb{R}$, и системы попарно непересекающихся интервалов $\{D_i^q\}_{i=1}^\infty$, $q = 2, \dots, m$, где $D_i^q = (a_i^q, b_i^q) \subset \mathbb{R}$. Пусть $f_i(x)$ – произвольные функции на $\mathbb{R}$, удовлетворяющие условию $f_i(t) = 0$ при $t \leq a_i^1$ и $t \geq b_i^1$.

Обозначим через $h_i^q(t)$ произвольную функцию, равную нулю при $t \leq a_i^q$ и $t \geq b_i^q$, такую, что $h_i^q((a_i^q + b_i^q)/2) = \pm 1$, $|h_i^q(t)|$ не убывает на $[a_i^q, (a_i^q + b_i^q)/2]$ и не возрастает на $[(a_i^q + b_i^q)/2, b_i^q]$.

Назовем *диагональной* функцию на $\mathbb{R}^m$, имеющую вид

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^\infty \left(f_i(x^1) \prod_{q=2}^m h_i^q(x^q) \right). \quad (14)$$

Ясно, что носитель этой функции содержится в объединении замыканий попарно непересекающихся параллелепипедов $D_i^1 \times \dots \times D_i^m$.

ЛЕММА 7. Пусть последовательности $\Lambda^2, \dots, \Lambda^m \in \mathbb{L}$ таковы, что выполнено условие (4). Тогда следующие условия эквивалентны:

(а) диагональная функция $f(\mathbf{x})$, определенная формулой (14), принадлежит классу $(\Lambda^1, \dots, \Lambda^m)\text{BV}(\mathbb{R}^m)$;

(б) при всех натуральных i выполнено $f_i \in \Lambda^1\text{BV}(\mathbb{R})$ и величины $V_{\Lambda^1}(f_i; \mathbb{R})$ ограничены в совокупности некоторым числом C .

Эта лемма доказана в работе автора [5] для функций на $[-\pi, \pi]^m$. Из доказательства нетрудно видеть, что лемма справедлива и в приведенном здесь виде.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть n_k – натуральные числа, причем $n_1 = 4$, $n_k \geq 3$, $N_0 = 1$, $N_k = n_1 n_2 \cdots n_k = N_{k-1} n_k$. Введем для натуральных k интервалы $D_k^1 = (\frac{\pi}{N_k}, \frac{\pi}{N_{k-1}})$. Определим функции

$$f_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\ln n_k} \sin(N_k t), & t \in D_k^1, \\ 0, & t \leq \frac{\pi}{N_k} \text{ или } t \geq \frac{\pi}{N_{k-1}}. \end{cases}$$

Для $q = 2, \dots, m$ возьмем $D_k^q = (\frac{\pi}{N_k}, \frac{2\pi}{N_k})$ и $h_j(t) = h_k^q(t) = \sin(N_k t)$ на интервале D_k^q и $h_j(t) = 0$ вне него.

Тогда диагональная функция

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \left(f_{2j}(x^1) \prod_{q=2}^m h_{2j}(x^q) \right) \quad (15)$$

принадлежит классу $(H, \Lambda^2, \dots, \Lambda^m)BV(T^3)$ по лемме 7.

Аналогично [5, теорема 5] доказывается, что при надлежащем выборе последовательности $\{n_k\}$ функция $f(\mathbf{x})$ удовлетворяет всем остальным условиям теоремы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Пусть $A_k = 4^k$; фактически понадобится лишь то, чтобы A_k были натуральными числами, $A_{k+1} \geq 4A_k$ и $A_1 > 1$. Положим

$$c_0 = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t} dt.$$

Будем также пользоваться тем, что при $a > 0$ по второй теореме о среднем справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b \frac{\cos t}{t} dt \right| \leq \frac{2}{a}. \quad (16)$$

Определим функции

$$h_k(t) = \begin{cases} \sin A_k t, & \frac{\pi}{A_k} \leq t \leq \frac{2\pi}{A_k}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad g_k(t) = \begin{cases} \sin A_k t, & \pi \leq t \leq \pi A_k, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что $V_H(g_k; \mathbb{R}) < \sum_{j=1}^{A_k(A_k-1)+1} \frac{2}{j} \leq C \ln A_k$. Поэтому если положить

$$\varphi_k(\mathbf{x}) = \frac{g_k(x^1)}{\ln A_k} \prod_{j=2}^m h_k(x^j), \quad f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(\mathbf{x}),$$

то функция $f(\mathbf{x})$ будет принадлежать классу $(H, \Lambda^2, \dots, \Lambda^m)BV(\mathbb{R}^m)$ по лемме 7.

Через $\sigma_A(f, \mathbf{x})$ обозначим частичный интеграл Фурье по кубу $[-A, A]^m$.

Установим теперь необходимые свойства функции $f(\mathbf{x})$.

(А) Функция f интегрируема по Лебегу на $\mathbb{R}^m$. Действительно, носитель $\varphi_k(\mathbf{x})$ имеет меру, не большую, чем $\frac{\pi^m}{(A_k)^{m-2}}$, и функция f на нем не превосходит $\frac{1}{\ln A_k}$, а ряд $\sum \frac{1}{(A_k)^{m-2} \ln A_k}$ сходится.

(Б) При $k \geq 3$ выполнено неравенство

$$\sigma_{A_k}(\varphi_k, 0) \geq \frac{(c_0)^{m-1}}{4\pi^m}. \quad (17)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \sigma_{A_k}(\varphi_k, 0) &= \frac{1}{\pi^m \ln A_k} \int_{\pi}^{A_k \pi} \frac{\sin^2 A_k t}{t} dt \left(\int_{\pi/A_k}^{2\pi/A_k} \frac{\sin^2 A_k s}{s} ds \right)^{m-1} \\ &= \frac{(c_0)^{m-1}}{\pi^m \ln A_k} \left(\int_{\pi}^{A_k \pi} \frac{dt}{2t} - \int_{\pi}^{A_k \pi} \frac{\cos 2A_k t}{2t} dt \right) \\ &= \frac{(c_0)^{m-1}}{2\pi^m} - \frac{(c_0)^{m-1}}{2\pi^m \ln A_k} \int_{2A_k \pi}^{2(A_k)^2 \pi} \frac{\cos s}{s} ds \\ &\geq \frac{(c_0)^{m-1}}{2\pi^m} - \frac{(c_0)^{m-1}}{\pi^{m+1} A_k \ln A_k}, \end{aligned}$$

откуда получаем требуемое утверждение.

(В) Докажем, что если $A \leq \frac{1}{2}A_{k+1}$, то

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} |\sigma_A(\varphi_j, 0)| \leq \frac{1}{A_{k+1}}. \quad (18)$$

Заметим, что для любых A и A_j

$$\left| \int_{\pi/A_j}^{2\pi/A_j} \sin At \frac{\sin A_j t}{t} dt \right| \leq \pi. \quad (19)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{j=k+1}^{\infty} |\sigma_A(\varphi_j, 0)| &\leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{\pi^m \ln A_j} \left| \int_{\pi}^{A_j \pi} \frac{\sin At \sin A_j t}{t} dt \right| \cdot \pi^{m-1} \\ &\leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{\pi \ln A_j} \left(\frac{1}{2} \left| \int_{\pi(A_j+A)}^{\pi A_j(A_j+A)} \frac{\cos s}{s} ds \right| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left| \int_{\pi(A_j-A)}^{\pi A_j(A_j-A)} \frac{\cos s}{s} ds \right| \right). \end{aligned}$$

Учитывая оценку (16) и неравенство $A_{j+1} \geq 4A_j$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=k+1}^{\infty} |\sigma_A(\varphi_j, 0)| &\leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{\pi \ln A_j} \left(\frac{1}{\pi(A_j+A)} + \frac{1}{\pi(A_j-A)} \right) \\ &\leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{3}{\pi^2 A_j \ln A_j} \leq \frac{1}{A_{k+1}}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

(Г) Наконец, учитывая (19) и (16), аналогично предыдущему получаем, что при $A \geq 2A_{k-1}$

$$\sum_{j=1}^{k-1} |\sigma_A(\varphi_j, 0)| \leq \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\pi \ln A_j} \left| \int_{\pi}^{A_j \pi} \frac{\sin At \sin A_j t}{t} dt \right| \leq \frac{3}{\pi A} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{\ln A_j} \leq \frac{C \ln k}{A}. \quad (20)$$

Теперь, с одной стороны, объединяя оценки (17), (18) и (20), получаем, что при достаточно больших k выполнены неравенства

$$|\sigma_{A_k}(f, 0)| \geq \frac{(c_0)^{m-1}}{4\pi^m} - \frac{1}{4^{k+1}} - \frac{C \ln k}{4^k} > C(m) > 0.$$

С другой стороны, для $B_k = 2 \cdot 4^k$ из оценок (18) и (20) получаем, что при $k \rightarrow \infty$

$$|\sigma_{B_k}(f, 0)| \leq \frac{1}{4^{k+1}} + \frac{C \ln k}{2 \cdot 4^k} \rightarrow 0.$$

Теорема доказана.

Автор благодарен профессору М. И. Дьяченко за полезные замечания.

Список литературы

1. *Waterman D.* On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation // *Studia Math.* 1972. V. 44. № 1. P. 107–117.
2. *Саакян А. А.* О сходимости двойных рядов Фурье функций ограниченной гармонической вариации // *Изв. АН АрмССР.* 1986. Т. 21. № 6. С. 517–529.
3. *Саблин А. И.* Функции ограниченной Λ -вариации и ряды Фурье: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1987.
4. *Саблин А. И.* Λ -вариация и ряды Фурье // *Изв. вузов. Математика.* 1987. № 10. С. 66–68.
5. *Бахвалов А. Н.* Непрерывность по Λ -вариации функций многих переменных и сходимость кратных рядов Фурье // *Матем. сб.* 2002. Т. 193. № 12. С. 3–20.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
7. *Бахвалов А. Н.* О представлении непериодических функций ограниченной Λ -вариации интегралом Фурье // *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика.* 1998. № 3. С. 6–12.
8. *Драгошанский О. С.* О непрерывности двумерной Λ -вариации // *Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 11-й Саратовской зимней школы.* Саратов: Изд-во ГосУНЦ “Колледж”, 2002. С. 71–72.
9. *Goffman C., Waterman D.* The localization principle for Fourier series // *Studia Math.* 1980. V. 99. № 1. P. 41–57.
10. *Schramm M., Waterman D.* On the magnitude of Fourier coefficients // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1982. V. 85. № 3. P. 408–410.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: alex@abs.math.msu.su

Поступило в редакцию
17.XII.2002