Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. И. Борисов, Асимптотики и оценки собственных элементов лапласиана с частой непериодической сменой граничных условий, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 6, 23–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/im459>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:43:17

УДК 517.956

Д. И. Борисов

**Асимптотики и оценки собственных
элементов лапласиана с частой
непериодической сменой граничных условий**

Рассматривается сингулярно возмущенная краевая задача на собственные значения оператора Лапласа в двумерной области с частой непериодической сменой граничных условий. При весьма слабых ограничениях на структуру чередования граничных условий получены первые члены асимптотических разложений собственных элементов возмущенной задачи. При еще более слабых ограничениях получены оценки скорости сходимости собственных значений возмущенной задачи.

Библиография: 37 наименований.

Введение

Целью настоящей работы является изучение двумерной краевой задачи с частой сменой типа граничных условий. Вначале опишем в общих чертах постановку подобных краевых задач. В области с достаточно гладкой границей рассматривается эллиптическое уравнение. На границе выделяется подмножество, состоящее из большого числа непересекающихся частей малой меры (см. рис. 1). На этом подмножестве задается граничное условие одного типа (например, условие Дирихле), на оставшейся части границы – другого типа (например, условие Неймана). Исследуется поведение решений такой краевой задачи, когда число частей выделенного подмножества границы неограниченно растет, а мера каждой отдельной части и расстояние между соседними частями стремится к нулю. Возможны также постановки задач, в которых описанная смена краевых условий задается не на всей границе, а лишь на фиксированной ее части, в то время как на остальной части границы задается одно из классических краевых условий.

Вопросы усреднения эллиптических краевых задач с частой сменой граничных условий исследовались достаточно подробно (см., например, [1]–[11]). Основной целью этих работ было определение вида предельных (усредненных) задач при минимальном наборе требований к структуре чередования граничных условий, т. е. к поведению множеств с разными краевыми условиями. В работе [1] рассматривалось уравнение Лапласа в ограниченной области с частой сменой типа граничного условия, причем было рассмотрено чередование граничных условий Дирихле и Неймана, а также случай, когда вместо граничного условия Дирихле задается краевое условие интегрального вида. Усредненные задачи в [1] были получены в предположении ряда весьма жестких ограничений на структуру чередования. В работах [2]–[9] для задач с чередованием первого краевого условия со

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 02-01-00693, № 03-01-06470), программы “Ведущие научные школы” (№ НШ-1446.2003.1) и программы “Университеты России” Минобразования РФ (УР.04.01.010).

Рис. 1

вторым либо третьим краевым условием были также получены усредненные задачи и приведены достаточно простые условия, определяющие зависимость типа усредненной задачи от структуры чередования. Случай, когда подмножество границы с граничным условием Дирихле имеет периодическую структуру, исследовался в [3]–[6]. Сходимость в непериодическом случае изучалась в [2], [8], [9]. Краевые задачи для нелинейных эллиптических уравнений с частой сменой типа граничного условия рассматривались в [10], [11]. В работе [10] задача решалась численно; в [11] исследовались вопросы усреднения. Результаты, полученные при изучении сходимости задач с частой сменой типа граничного условия (как периодической, так и непериодической), кратко можно сформулировать следующим образом. Краевые эллиптические задачи с частой сменой типа граничного условия при достаточно общих предположениях сходятся к задачам с классическими граничными условиями. Тип граничного условия в усредненной задаче зависит от соотношения мер частей границы с разными типами краевых условий в возмущенной задаче.

Усреднение краевых задач, близких к задачам со сменой типа граничных условий, изучалось в монографии [12]. Здесь рассматривались эллиптические краевые задачи во всем пространстве. Граничное условие (первое либо второе) задавалось на границе множества, состоящего из большого количества непересекающихся малых областей, расположенных близко друг к другу. Также рассматривался случай, когда малые области заменялись на малые кривые, на которых задавалось граничное условие Неймана. Асимптотические разложения решений для задач с такой геометрией краевых условий были построены в работе [13].

Помимо определения вида усредненных задач для задач с частой сменой типа граничных условий важен и актуален также вопрос об оценках скорости сходимости. Для периодической смены краевых условий такого рода оценки были получены в [6], [15]. В случае непериодического чередования граничного условия Дирихле с третьим (либо вторым – как частный случай) краевым условием оценки скорости сходимости были выведены в [14] (предельная – задача Дирихле) и [16] (предельная – третья (вторая) краевая задача).

В последние годы появились работы, в которых строились асимптотики решений задач с периодической структурой чередования. Отметим, что факт периодичности при получении асимптотик использовался по существу. Двумерный случай исследован в работах [17]–[22]. В этих работах рассматривалось чередование граничного условия Дирихле с граничным условием Неймана. Для круга при неко-

торых дополнительных ограничениях в [17] и [19] были построены полные степенные асимптотики собственных чисел и собственных функций оператора Лапласа в случае предельных задач Дирихле и Неймана. В работе [20] результаты [17] были обобщены, и в предположении одной лишь периодичности структуры чередования были получены полные двупараметрические асимптотические разложения собственных чисел оператора Лапласа, сходящихся к простым собственным значениям, а также были получены асимптотики соответствующих собственных функций. В работах [21] и [22] для случая произвольной области с периодической структурой чередования были построены первые члены асимптотических разложений собственных значений и собственных функций оператора Лапласа, сходящихся к простым собственным значениям второй и третьей краевых задач.

В работах [24]–[26] были рассмотрены задачи для параболического уравнения с частым чередованием первого и третьего граничных условий в предположении, что меры частей границы с разными граничными условиями имеют одинаковый порядок малости, что при усреднении приводило к граничному условию Дирихле. В [24], [25] для периодической, а в [26] для почти периодической смены граничных условий в различных нормах были оценены скорости сходимости и построены первые члены асимптотических разложений решений рассматриваемых задач.

В настоящей работе рассматривается краевая задача на собственные значения оператора Лапласа в произвольной двумерной области с частой, вообще говоря, непериодической сменой типа граничных условий. Изучается случай чередования граничного условия Дирихле с граничным условием Неймана. В задаче выделяются два характерных малых параметра, описывающих длины частей границы с первым и вторым краевыми условиями. Приведены достаточно слабые условия на множество с граничным условием Дирихле, при выполнении которых можно получить первые члены асимптотических разложений собственных значений и собственных функций возмущенной задачи в случае предельных второй или третьей краевых задач. Данные разложения асимптотичны одновременно по обоим малым параметрам; для первых членов этих разложений получены явные формулы. В случае предельной второй краевой задачи проведено дополнительное исследование и показано, что первые члены асимптотик можно получить и при более слабых ограничениях на структуру непериодичности. Данные асимптотические разложения включают в себя как частный случай первые члены асимптотик из работ [19], [21], [22].

При дальнейшем ослаблении требований на структуру множества с граничным условием Дирихле получены двусторонние оценки отклонений собственных значений возмущенной задачи от предельных собственных значений, причем рассмотрены случаи предельных первой, второй и третьей краевых задач. Упомянутые отклонения оценены бесконечно малыми величинами, которые имеют тот же порядок малости, что и первые члены асимптотических разложений собственных значений возмущенной задачи, полученных, разумеется, при более жестких условиях на структуру чередования. Условия, наложенные на структуру чередования в [14], [16] для получения оценок скорости сходимости, более слабые, чем в настоящей работе. Вместе с тем, оценки из цитированных работ более грубые по сравнению с доказанными в настоящей статье.

Результаты предлагаемой работы были анонсированы в [23].

В заключение отметим, что вопросы усреднения и оценок скорости сходимости для трехмерных задач с частой сменой краевых условий исследовались в [1],

[3]–[5], [7]–[11], [14]–[16]; асимптотики собственных значений оператора Лапласа в цилиндре с частой сменой граничных условий на узких полосах на боковой поверхности были построены в [27]–[29]. Отметим также, что в работах [30], [31] была рассмотрена краевая задача для уравнения Пуассона в n -мерном слое с частым периодическим чередованием условий Дирихле и Неймана на частях границы, стягивающихся к точке; также дополнительно предполагалось, что меры частей границы с разными типами граничных условий имеют одинаковый порядок малости. Для решения рассматриваемой задачи было получено полное асимптотическое разложение.

§ 1. Постановка задачи и формулировка результатов

Пусть $x = (x_1, x_2)$ – декартовы координаты, Ω – произвольная ограниченная односвязная область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей, s – натуральный параметр кривой $\partial\Omega$, а S – длина этой кривой, $s \in [0, S)$. Точки границы $\partial\Omega$ будем описывать с помощью натурального параметра, фиксируя направление обхода (против часовой стрелки) и произвольно выбрав точку на $\partial\Omega$, которой соответствует значение $s = 0$. Для удобства изложения точкам границы, которым соответствуют значения s , близкие к S или к нулю, сопоставим дополнительно значения $s - S$ и $S + s$. Пусть $N \gg 1$ – натуральное число, $\varepsilon = 2N^{-1}$ – малый положительный параметр. Для каждого значения N на границе $\partial\Omega$ зададим подмножество γ_ε , состоящее из N открытых непересекающихся связных частей границы (см. рис. 1). Опишем множество γ_ε более подробно. Для каждого значения N задаются точки $x_j^\varepsilon \in \partial\Omega$, $j = 0, \dots, N-1$, соответствующие значениям натурального параметра $s_j^\varepsilon \in [0, S)$, причем расстояние между любыми двумя соседними точками, измеренное вдоль границы области Ω , есть величина порядка ε . Далее, пусть заданы два набора из N функций каждый: $a_j(\varepsilon)$ и $b_j(\varepsilon)$, $j = 0, \dots, N-1$, где функции a_j и b_j неотрицательны и ограничены. Множество γ_ε определяется следующим образом:

$$\gamma_\varepsilon = \bigcup_{j=0}^{N-1} \gamma_{\varepsilon,j}, \quad \gamma_{\varepsilon,j} = \{x: -\varepsilon a_j(\varepsilon) < s - s_j^\varepsilon < \varepsilon b_j(\varepsilon)\}, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Без ограничения общности предположим, что множества $\gamma_{\varepsilon,j}$ не пересекаются.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Мы не исключаем ситуацию, когда для некоторых значений ε и j функция a_j или b_j обращается в нуль. В этом случае точка x_j^ε не принадлежит множеству $\gamma_{\varepsilon,j}$.

Рассмотрим сингулярно возмущенную краевую задачу на собственные значения:

$$-\Delta \psi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \psi_\varepsilon, \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon &= 0, & x &\in \gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial \nu} &= 0, & x &\in \Gamma_\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где ν – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$, $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega \setminus \bar{\gamma}_\varepsilon$. Целью настоящей работы является исследование поведения решений возмущенной задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$ (или, эквивалентно, $N \rightarrow \infty$).

Положим $a_N(\varepsilon) \equiv a_0(\varepsilon)$, $b_N(\varepsilon) \equiv b_0(\varepsilon)$, $s_N^\varepsilon \equiv s_0^\varepsilon$. Выражения вида f' обозначают производные по s .

Всюду далее будем предполагать выполнение следующего условия.

(C0) Существует функция $\theta_\varepsilon(s)$, $\theta_\varepsilon: [0, S] \rightarrow [0, 2\pi]$, $\theta_\varepsilon(0) = 0$, $\theta_\varepsilon(S) = 2\pi$, такая, что

$$\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) = \theta_\varepsilon(s_0^\varepsilon) + \varepsilon\pi j, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

$\theta'_\varepsilon \in C^\infty(\partial\Omega)$, $0 < c_1 \leq \theta'_\varepsilon(s) \leq c_2$, где c_1, c_2 – некоторые константы, не зависящие от ε и s . При $\varepsilon \rightarrow 0$ функция $\theta_\varepsilon(s)$ сходится в $C^1[0, S]$ к некоторой функции $\theta_0(s)$, $\theta'_0 \in C^\infty(\partial\Omega)$. Норма $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^3(\partial\Omega)}$ ограничена по ε .

Геометрически условие (C0) означает, что границу $\partial\Omega$ можно гладко и взаимно однозначно отобразить на окружность единичного радиуса так, что при этом отображении множество точек $\{x_j^\varepsilon\}$ переходит в периодическое множество точек, делящее единичную окружность на N дуг длиной $\varepsilon\pi$ каждая, причем данное отображение может зависеть от ε . На характер этой зависимости налагаются лишь условия сходимости θ_ε и ограниченности $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^3(\partial\Omega)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Следует подчеркнуть, что непериодическая структура смены граничных условий не связана с отображением θ_ε , т. е. отображение θ_ε , вообще говоря, не переводит γ_ε в периодическое множество. Пусть, например, Ω – единичный круг с центром в нуле, $x_j^\varepsilon = (\cos \varepsilon\pi j, \sin \varepsilon\pi j)$, $s_j^\varepsilon = \varepsilon\pi j$, $a_j(\varepsilon) = \varepsilon j(1 + \varepsilon \sin j)/2$, $b_j(\varepsilon) = 1 - \varepsilon j/2$. Здесь множество γ_ε представляет собой объединение дуг разной длины, лежащих на границе $\partial\Omega$, причем j -я дуга содержит точку $\{r = 1, \theta = \varepsilon\pi j\}$, (r, θ) – полярные координаты, но не центрирована относительно этой точки. Условие (C0) для такого множества выполнено при $\theta_\varepsilon(s) \equiv \theta_0(s) \equiv s \equiv \theta$, $a^j(\varepsilon) = a_j(\varepsilon)$, $b^j(\varepsilon) = b_j(\varepsilon)$.

Собственные значения возмущенной задачи занумеруем в порядке неубывания с учетом кратности: $\lambda_\varepsilon^1 \leq \lambda_\varepsilon^2 \leq \dots \leq \lambda_\varepsilon^k \leq \dots$. Соответствующие собственные функции ψ_ε^k ортонормируем в $L_2(\Omega)$.

Первой частью основных результатов статьи являются оценки скорости сходимости, приведенные в формулировках следующих трех теорем.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполнено условие (C0) и

1) существует положительная ограниченная функция $\eta = \eta(\varepsilon)$, удовлетворяющая равенству

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \eta(\varepsilon) = 0, \quad (1.3)$$

такая, что имеют место оценки

$$2c_1^{-1}\eta(\varepsilon) \leq \min_j a_j(\varepsilon) + \min_i b_i(\varepsilon),$$

где c_1 – константа из условия (C0);

2) существует $c_3 > 0$, для которого норма Гёльдера $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^{3+c_3}(\partial\Omega)}$ ограничена по ε .

Тогда собственные значения λ_ε^k возмущенной задачи сходятся к собственным значениям λ_0^k (расположенным в порядке неубывания с учетом кратности) предельной задачи

$$-\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad x \in \Omega, \quad \psi_0 = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.4)$$

и справедливы оценки

$$C_{k,1}\varepsilon \ln \sin \eta(\varepsilon) - C_{k,2}|\varepsilon \ln \eta(\varepsilon)|^{3/2}(\pi/2 - \eta(\varepsilon)) \leq \lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k \leq 0,$$

где $C_{k,i}$ – некоторые положительные константы, не зависящие от ε , а функция $\eta(\varepsilon)$ ограничена сверху числом $\pi/2$.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть выполнено условие (C0) и существуют положительные функции $\eta = \eta(\varepsilon)$ и $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon)$, удовлетворяющие равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon) = 0$$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \ln \eta(\varepsilon))^{-1} = -A, \quad (1.5)$$

где $A = \text{const} > 0$, такие, что имеют место оценки

$$2c_1^{-1}\eta_0\eta \leq a_j + b_j \leq 2c_2^{-1}\eta, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

с константами c_1 и c_2 из условия (C0).

Тогда собственные значения λ_ε^k возмущенной задачи сходятся к собственным значениям λ_0^k (расположенным в порядке неубывания с учетом кратности) предельной задачи

$$-\Delta\psi_0 = \lambda_0\psi_0, \quad x \in \Omega, \quad \left(\frac{\partial}{\partial\nu} + A\theta'_0(s) \right) \psi_0 = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.6)$$

и справедливы оценки

$$\begin{aligned} C_{k,1}\mu(\varepsilon) + C_{k,2}\varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon) - C_{k,3}\varepsilon - C_{k,4}\sigma(\varepsilon) \\ \leq \lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k \leq C_{k,5}\mu(\varepsilon) + C_{k,6}\varepsilon^{3/2} + C_{k,7}\sigma(\varepsilon), \end{aligned}$$

где $\mu = \mu(\varepsilon) = -(\varepsilon \ln \eta(\varepsilon))^{-1} - A$, $\sigma(\varepsilon) = \|\theta'_\varepsilon - \theta'_0\|_{C(\partial\Omega)}$, $C_{k,i}$ – некоторые положительные константы, не зависящие от ε , а функция $\eta_0(\varepsilon)$ ограничена сверху единицей.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть выполнено условие (C0) и существует положительная функция $\eta = \eta(\varepsilon)$, удовлетворяющая равенству (1.5) при $A = 0$, такая, что имеют место оценки

$$a_j + b_j \leq 2c_2^{-1}\eta, \quad j = 0, \dots, N-1,$$

с константой c_2 из условия (C0).

Тогда собственные значения λ_ε^k возмущенной задачи сходятся к собственным значениям λ_0^k задачи (1.6) при $A = 0$ и справедливы оценки

$$0 \leq \lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k \leq C_k\mu(\varepsilon),$$

где $\mu = \mu(\varepsilon) = -(\varepsilon \ln \eta(\varepsilon))^{-1}$, C_k – некоторые положительные константы, не зависящие от ε .

Поясним геометрический смысл условий теорем 1.1–1.3. Оценки для сумм $a_j + b_j$ в условиях данных теорем являются ограничениями на длины отдельных составляющих множества γ_ε и позволяют множествам $\gamma_{\varepsilon,j}$ иметь длины *разных* порядков. Более того, благодаря оценке для $a_j + b_j$ в условии теоремы 1.3 допустима ситуация, когда для некоторых ε и j выполнено равенство $a_j(\varepsilon) + b_j(\varepsilon) = 0$, т. е.

соответствующее множество $\gamma_{\varepsilon,j}$ пустое, и в окрестности точки x_j^ε задается граничное условие Неймана. Следует отметить, что константы в упомянутых оценках из условий теорем 1.1–1.3 могут быть произвольными, однако их всегда можно выбрать указанным образом путем умножения функций η и η_0 на подходящие числа.

Вторая часть основных результатов настоящей работы – это асимптотические разложения собственных элементов возмущенной задачи. Ясно, что требования на множество γ_ε , необходимые для возможности построения данных асимптотик, должны быть более жесткие по сравнению с условиями теорем 1.1–1.3. Одно из таких требований на множество γ_ε , налагаемое дополнительно к условию (C0), выглядит следующим образом.

(C1) *Существует положительная ограниченная функция $\eta = \eta(\varepsilon)$ такая, что выполнены оценки*

$$c_4\eta(\varepsilon) \leq a_j(\varepsilon) + b_j(\varepsilon) \leq 2c_2^{-1}\eta(\varepsilon), \quad j = 0, \dots, N-1,$$

где положительная константа c_4 не зависит от ε , η и j .

Геометрически условие (C1) означает, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ все множества $\gamma_{\varepsilon,j}$ имеют длины одинакового порядка $\varepsilon\eta$, что, однако, вовсе не означает точного равенства этих длин. Отметим, что в правой части неравенства из этого условия можно было бы написать некоторую константу c_5 , которой, однако, легко придать указанное значение, умножая $\eta(\varepsilon)$ на соответствующее число.

Для того чтобы сформулировать основные результаты работы об асимптотических разложениях, понадобятся некоторые вспомогательные факты и дополнительные обозначения.

Функцию θ_ε продолжим на значения $s \in [-S, 2S)$ по правилу $\theta_\varepsilon(s) = \theta_\varepsilon(s - kS) + 2\pi k$, $s \in [kS, (k+1)S)$, $k = -1, 0, 1$. Обозначим:

$$\begin{aligned} d_j(\varepsilon) &= \frac{a_j(\varepsilon) + b_j(\varepsilon)}{2\eta(\varepsilon)}, & d^j(\varepsilon) &= \frac{\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon + \varepsilon b_j(\varepsilon)) - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon - \varepsilon a_j(\varepsilon))}{2\varepsilon\eta(\varepsilon)}, \\ \delta_j(\varepsilon) &= d_{j+1}(\varepsilon) - d_j(\varepsilon), & \delta^j(\varepsilon) &= d^{j+1}(\varepsilon) - d^j(\varepsilon). \end{aligned}$$

Пусть $\chi(t)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная единице при $t < 1/4$ и нулю при $t > 3/4$ и принимающая значения из отрезка $[0, 1]$. Введем еще одну функцию $g_\varepsilon(\theta)$ следующим образом:

$$g_\varepsilon(\theta) = d^{j+1}(\varepsilon) - \chi((\theta - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon))/(\varepsilon\pi))\delta^j(\varepsilon)$$

при $\varepsilon\pi j \leq \theta - \theta_\varepsilon(s_\varepsilon^0) \leq \varepsilon\pi(j+1)$, $j = 0, \dots, N-1$. Собственные значения задачи (1.6), как и ранее, занумеруем в порядке неубывания с учетом кратности: $\lambda_0^1 \leq \lambda_0^2 \leq \dots \leq \lambda_0^k \leq \dots$, а соответствующие собственные функции ψ_0^k ортонормируем в $L_2(\Omega)$.

Следующее утверждение носит вспомогательный характер и будет доказано в § 2.

ЛЕММА 1.1. Пусть $\|\theta'_\varepsilon - \theta'_0\|_{C(\partial\Omega)} \rightarrow 0$. Тогда собственные значения $\Lambda_0^k = \Lambda_0^k(\mu, \varepsilon)$ задачи

$$-\Delta \Psi_0^k = \Lambda_0^k \Psi_0^k, \quad x \in \Omega, \quad (1.7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + (A + \mu) \theta'_\varepsilon(s) \right) \Psi_0^k = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (1.8)$$

где $A \geq 0$, расположенные в порядке неубывания с учетом кратности, сходятся к собственным значениям λ_0^k задачи (1.6) при $(\varepsilon, \mu) \rightarrow 0$. Для каждого фиксированного значения ε собственные значения Λ_0^k и соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции Ψ_0^k голоморфны по μ (последние – в норме $H^1(\Omega)$). Если Λ_0^k – кратное собственное значение, то соответствующие ему собственные функции дополнительно можно выбрать ортогональными в скалярном произведении $L_2(\partial\Omega)$ с весом θ'_ε .

Сформулируем теперь вторую часть основных результатов работы.

ТЕОРЕМА 1.4. Пусть выполнены условия (C0), (C1), а также равенства (1.5) при $A \geq 0$ для функции η из (C1) и

$$\max_j |\delta_j(\varepsilon)| = o(\varepsilon^{1/2}(A + \mu)^{-1}), \quad (1.9)$$

где $\mu = \mu(\varepsilon) = -(\varepsilon \ln \eta(\varepsilon))^{-1} - A$. Тогда для каждого k собственное значение λ_ε^k возмущенной задачи сходится к собственному значению λ_0^k предельной задачи (1.6) и имеет асимптотику:

$$\lambda_\varepsilon^k = \Lambda_0^k(\mu, \varepsilon) + \varepsilon \Lambda_1^k(\mu, \varepsilon) + o(\varepsilon(A + \mu)), \quad (1.10)$$

$$\Lambda_1^k(\mu, \varepsilon) = (A + \mu)^2 \int_{\partial\Omega} (\Psi_0^k(x, \mu, \varepsilon))^2 \ln g_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s)) \theta'_\varepsilon(s) ds, \quad (1.11)$$

где Λ_0^k и Ψ_0^k удовлетворяют утверждению леммы 1.1. Функция Λ_1^k неположительна и голоморфна по μ для каждого фиксированного значения ε .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. В случае простого предельного собственного значения λ_0^k в следующем параграфе будет дополнительно доказано, что коэффициенты рядов Тейлора функций Λ_0^k , Ψ_0^k по степеням μ непрерывны при $\varepsilon \rightarrow 0$, а сами функции мажорируются голоморфными по μ функциями, не зависящими от ε . Функция Ψ_0^k мажорируется в смысле нормы $H^1(\Omega)$. Также будет показано, что Ψ_0^k сходится к ψ_0^k в $H^1(\Omega)$ при $(\varepsilon, \mu) \rightarrow (0, 0)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Величины δ_j характеризуют разность длин двух соседних множеств $\gamma_{\varepsilon, j+1}$ и $\gamma_{\varepsilon, j}$, поэтому равенство (1.9) фактически означает, что длины двух соседних составляющих γ_ε не очень сильно отличаются друг от друга.

Наряду с асимптотиками λ_ε^k в работе доказаны утверждения об асимптотиках соответствующих собственных функций ψ_ε^k при условиях теоремы 1.4. Для формулировки этих утверждений требуется ввести ряд дополнительных обозначений, и поэтому удобнее сформулировать их в конце §2 (см. теоремы 2.1, 2.2).

В следующей теореме приведены асимптотики собственных значений возмущенной задачи в случае нарушения равенства (1.9) и сохранения остальных условий теоремы 1.4.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть выполнены условия (C0), (C1) и равенство (1.5) при $A \geq 0$ для функции η из (C1). Тогда собственное значение λ_ε^k возмущенной задачи сходится к собственному значению λ_0^k предельной задачи (1.6) и имеет асимптотику:

$$\lambda_\varepsilon^k = \lambda_0^k + \mu \int_{\partial\Omega} (\psi_0^k(x))^2 \theta'_0(s) ds + O(\mu^2 + \mu(\sigma + \varepsilon^{3/2}) + A(\sigma + \varepsilon^{1/2})), \quad (1.12)$$

где в случае кратного собственного значения λ_0^k соответствующие собственные функции дополнительно выбраны ортогональными в $L_2(\partial\Omega)$ с весом θ'_0 , $\sigma = \sigma(\varepsilon) = \|\theta'_\varepsilon - \theta'_0\|_{C(\partial\Omega)}$.

Асимптотика (1.12) конструктивна при $A = 0$, а в случае $A > 0$ – при $\sigma + \varepsilon^{1/2} = o(\mu)$.

Утверждение об асимптотиках собственных функций ψ_ε^k в условиях последней теоремы будет доказано в §3 (см. теорему 3.1).

Настоящая работа имеет следующую структуру. В §2 доказаны теорема 1.4 и в ее условиях – теоремы 2.1, 2.2 об асимптотиках собственных функций возмущенной задачи. В §3 доказаны теорема 1.5, а также теорема 3.1 об асимптотиках собственных функций возмущенной задачи в условиях теоремы 1.5. В §4 установлена справедливость вспомогательного утверждения об асимптотиках собственных значений в случае предельной задачи Дирихле. Это вспомогательное утверждение будет использовано в §5 при доказательстве теоремы 1.1. Кроме того, в §5 также будут доказаны теоремы 1.2, 1.3.

§ 2. Асимптотики собственных элементов возмущенной задачи в условиях теоремы 1.4

В настоящем параграфе мы получим асимптотики собственных элементов возмущенной задачи. Прежде установим справедливость ряда вспомогательных утверждений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.1. Краевая задача (1.7), (1.8) является регулярно возмущенной. Сходимость собственных значений и утверждаемая голоморфность собственных элементов по μ легко устанавливаются, если свести задачу (1.7), (1.8) к операторному уравнению в $H^1(\Omega)$ и применить результаты работы [35]. Сохраняя все указанные свойства, собственные функции Ψ_0^k можно выбрать ортонормированными в $L_2(\Omega)$. Согласно теореме о диагонализации двух квадратичных форм собственные функции, соответствующие кратному собственному значению, можно дополнительно выбрать ортогональными в $L_2(\partial\Omega)$ с весом θ'_ε . Поскольку θ'_ε не зависит от μ , то такая дополнительная ортогонализация сохранит голоморфность по μ данных собственных функций. Лемма доказана.

Если λ_0^k – простое собственное значение задачи (1.6), то к нему сходится только одно собственное значение Λ_0^k задачи (1.7), (1.8), а соответствующая собственная функция Ψ_0^k сходится к ψ_0^k в $H^1(\Omega)$. Кроме того, данные собственные элементы Λ_0^k и Ψ_0^k обладают дополнительными свойствами, описанными в замечании 1.3. Для доказательства этих свойств представим теперь Λ_0^k и Ψ_0^k в виде рядов по степеням μ , подставим их в (1.7), (1.8) и вычислим коэффициенты при одинаковых степенях μ . Полученная таким образом рекуррентная система краевых задач, как легко доказать с учетом простоты λ_0^k , однозначно разрешима, ее решения непрерывны

при $\varepsilon \rightarrow 0$ и могут быть оценены равномерно по ε . Последние оценки позволяют построить не зависящие от ε и голоморфные по μ мажоранты для Λ_0^k и Ψ_0^k . Таким образом, утверждение замечания 1.3 полностью доказано.

Пусть выполнено условие (C0), и пусть

$$a^j(\varepsilon) = (\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon - \varepsilon a_j(\varepsilon)))/\varepsilon, \quad b^j(\varepsilon) = (\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon + \varepsilon b_j(\varepsilon)) - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon))/\varepsilon.$$

Функции a^j и b^j описывают образ множества $\gamma_{\varepsilon,j}$ при отображении θ_ε : длина этого образа равна $\varepsilon(a^j + b^j)$, а его концевые точки соответствуют углам $(\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) - \varepsilon a^j(\varepsilon))$ и $(\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) + \varepsilon b^j(\varepsilon))$. Пусть теперь выполнено и условие (C1), и пусть

$$\begin{aligned} \alpha^j &= \alpha^j(\varepsilon) = \frac{a^j(\varepsilon)}{2\eta(\varepsilon)}, & \beta^j &= \beta^j(\varepsilon) = \frac{b^j(\varepsilon)}{2\eta(\varepsilon)}, & \delta^*(\varepsilon) &= \max_j |\delta^j(\varepsilon)|, \\ \alpha_j &= \alpha_j(\varepsilon) = \frac{a_j(\varepsilon)}{2\eta(\varepsilon)}, & \beta_j &= \beta_j(\varepsilon) = \frac{b_j(\varepsilon)}{2\eta(\varepsilon)}, & \delta_*(\varepsilon) &= \max_j |\delta_j(\varepsilon)|. \end{aligned}$$

Заметим, что $d^j = \alpha^j + \beta^j$.

ЛЕММА 2.1. *Пусть выполнены условия (C0) и (C1). Тогда справедливы оценки*

$$c_1(a_j(\varepsilon) + b_j(\varepsilon)) \leq a^j(\varepsilon) + b^j(\varepsilon) \leq c_2(a_j(\varepsilon) + b_j(\varepsilon)), \quad \delta^*(\varepsilon) \leq C(\delta_*(\varepsilon) + \varepsilon),$$

где константа C не зависит от ε и η .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Лагранжа и определения функций a^j и b^j имеем

$$a^j(\varepsilon) + b^j(\varepsilon) = \theta'_\varepsilon(M_{j,\varepsilon}^{(1)})(a_j(\varepsilon) + b_j(\varepsilon)), \quad (2.1)$$

где $M_{j,\varepsilon}^{(1)}$ — некоторая точка из интервала $(s_j^\varepsilon - \varepsilon a_j(\varepsilon), s_j^\varepsilon + \varepsilon b_j(\varepsilon))$. Используя теперь оценку производной θ'_ε из условия (C0), приходим к первому неравенству утверждения леммы.

В силу (2.1) и определения $\delta^j(\varepsilon)$ выводим:

$$\begin{aligned} \delta^j &= \theta'_\varepsilon(M_{j+1,\varepsilon}^{(1)})(\alpha_{j+1} + \beta_{j+1}) - \theta'_\varepsilon(M_{j,\varepsilon}^{(1)})(\alpha_j + \beta_j) \\ &= \theta'_\varepsilon(M_{j+1,\varepsilon}^{(1)})\delta_j + (\alpha_j + \beta_j)(\theta'_\varepsilon(M_{j+1,\varepsilon}^{(1)}) - \theta'_\varepsilon(M_{j,\varepsilon}^{(1)})). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Величину $\theta'_\varepsilon(M_{j+1,\varepsilon}^{(1)}) - \theta'_\varepsilon(M_{j,\varepsilon}^{(1)})$ согласно теореме Лагранжа можно представить в виде

$$\theta'_\varepsilon(M_{j+1,\varepsilon}^{(1)}) - \theta'_\varepsilon(M_{j,\varepsilon}^{(1)}) = \theta''_\varepsilon(M_{j,\varepsilon}^{(2)})(M_{j+1,\varepsilon}^{(1)} - M_{j,\varepsilon}^{(1)}),$$

где точка $M_{j,\varepsilon}^{(2)}$, по определению $M_{j,\varepsilon}^{(1)}$, лежит в интервале $(s_j^\varepsilon - \varepsilon a_j(\varepsilon), s_{j+1}^\varepsilon + \varepsilon b_{j+1}(\varepsilon))$. В силу последнего равенства и условий (C0) и (C1) второе слагаемое в правой части (2.2) оценим следующим образом:

$$|(\alpha_j + \beta_j)\theta''_\varepsilon(M_{j,\varepsilon}^{(2)})(M_{j+1,\varepsilon}^{(1)} - M_{j,\varepsilon}^{(1)})| \leq C(s_{j+1}^\varepsilon - s_j^\varepsilon + \varepsilon(b_{j+1} + a_j)) \leq C\varepsilon, \quad (2.3)$$

где константы C не зависят от ε , η и j . Здесь мы также применили легко доказываемое соотношение

$$c_1|s_{j+1}^\varepsilon - s_j^\varepsilon| \leq \theta_\varepsilon(s_{j+1}^\varepsilon) - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) = \varepsilon\pi.$$

Подставляя (2.3) в (2.2) и используя оценку величины $\theta'_\varepsilon(M_{j+1,\varepsilon}^{(1)})$, с помощью условия (C0) получим второе неравенство утверждения леммы. Лемма доказана.

Из доказанной леммы очевидным образом вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.1. В условиях теоремы 1.4 верно соотношение

$$\delta^*(\varepsilon) = o(\varepsilon^{1/2}(A + \mu)^{-1}).$$

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Функция $\delta^*(\varepsilon)$ ограничена.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2.1 и условия (C1) имеем

$$|d^j(\varepsilon)| \leq c_2 \frac{a^j(\varepsilon) + b^j(\varepsilon)}{2\eta(\varepsilon)} \leq 1,$$

откуда и следует ограниченность δ^* . Следствие доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.4. Сходимость собственных значений возмущенной задачи к собственным значениям задачи (1.6) при выполнении условий (C0), (C1) и равенства (1.5) нетрудно доказать, используя результаты и методики работ [2], [6], [8].

Поясним схему доказательства асимптотик. Вначале формально построим асимптотики собственных значений и собственных функций возмущенной задачи. Затем проведем строгое обоснование формальных асимптотических разложений, т. е. докажем, что формально построенные асимптотические разложения действительно являются асимптотиками собственных элементов возмущенной задачи. При формальном построении будем предполагать лишь ограниченность функции $\delta^*(\varepsilon)$ (см. следствие 2.2), а равенством (1.9) воспользуемся только при обосновании асимптотик для оценки остатков.

Формальное построение асимптотических разложений подробно проведем для случая простого предельного собственного значения. Такой выбор обусловлен, с одной стороны, желанием избежать излишней громоздкости изложения, с другой стороны, построение не зависит, по существу, от кратности предельного собственного значения. Далее поясним построение в случае кратного предельного собственного значения.

Перейдем непосредственно к построению асимптотик. Пусть λ_0 – простое собственное значение задачи (1.6), λ_ε – сходящееся к λ_0 собственное значение возмущенной задачи, ψ_ε и ψ_0 – соответствующие собственные функции. Вначале продемонстрируем саму схему построения и формально получим первые члены асимптотик. Асимптотику собственного значения будем строить в виде

$$\lambda_\varepsilon = \Lambda_0(\mu, \varepsilon) + \varepsilon \Lambda_1(\mu, \varepsilon). \quad (2.4)$$

Асимптотика ψ_ε строится на основе комбинации метода согласования асимптотических разложений [32], метода составных разложений [33] и метода многих масштабов [34]. Эта асимптотика будет получена как сумма трех разложений: внешнего разложения, пограничного слоя и внутреннего разложения. Внешнее разложение построим следующим образом:

$$\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \mu) = \Psi_0(x, \mu, \varepsilon) + \varepsilon \Psi_1(x, \mu, \varepsilon). \quad (2.5)$$

Пограничный слой построим с использованием метода составных разложений в виде

$$\psi_\varepsilon^{\text{bl}}(\xi, s, \mu) = \varepsilon v_1(\xi, s, \mu, \varepsilon) + \varepsilon^2 v_2(\xi, s, \mu, \varepsilon), \quad (2.6)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2) = ((\theta_\varepsilon(s) - \theta_\varepsilon(s_0^\varepsilon))/\varepsilon, \tau\theta'_\varepsilon(s)/\varepsilon)$ – “растянутые” переменные. Здесь (s, τ) – локальные переменные, введенные в окрестности границы $\partial\Omega$, τ – расстояние от точки до границы $\partial\Omega$, измеренное в направлении внутренней нормали. Данный выбор переменных ξ поясним ниже, в замечании 2.1.

Внутреннее разложение построим на основе метода согласования асимптотических разложений в малых окрестностях точек x_j^ε в виде

$$\psi_\varepsilon^{\text{in},j}(\varsigma^j, s, \mu) = w_{0,0}^{(j)}(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon) + \varepsilon w_{1,0}^{(j)}(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon), \quad (2.7)$$

где $\varsigma^j = (\varsigma_1^j, \varsigma_2^j) = ((\xi_1 - \pi j)\eta^{-1}, \xi_2\eta^{-1})$.

Целью формального построения является определение вида функций Λ_i , Ψ_i , v_i и $w_{i,0}$.

Уравнения для функций Ψ_0 и Ψ_1 получаются стандартной подстановкой (2.4) и (2.5) в уравнение (1.1) с последующим выписыванием коэффициентов при одинаковых степенях ε . Такая процедура приводит к уравнению (1.7) для функции Ψ_0 с $\Lambda_0^k = \Lambda_0$ и следующему уравнению для Ψ_1 :

$$(\Delta + \Lambda_0)\Psi_1 = -\Lambda_1\Psi_0, \quad x \in \Omega. \quad (2.8)$$

Граничные условия для функций Ψ_0 и Ψ_1 будут определены ниже при построении коэффициентов пограничного слоя и внутреннего разложения.

Определим теперь функции v_i . Вначале получим задачи для этих функций, для чего необходимо переписать оператор Лапласа в переменных (s, τ) :

$$\Delta_x = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \left(P \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial s} \right) \right), \quad P = P(s, \tau) = 1 + \tau K(s),$$

$K = K(s) = (\mathbf{r}''(s), \nu(s))_{\mathbb{R}^2}$, $\nu = \nu(s)$, $\mathbf{r}(s)$ – двумерная вектор-функция, задающая кривую $\partial\Omega$, $K \in C^\infty(\partial\Omega)$. Теперь подставим (2.4), (2.5) в уравнение (1.1) с учетом приведенного выше представления для оператора Лапласа, перейдем к переменным ξ и выпишем коэффициенты при старших степенях ε . Тогда для функций v_1 и v_2 получим уравнения

$$\Delta_\xi v_1 = 0, \quad \xi_2 > 0, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \Delta_\xi v_2 = & -\frac{\theta''_\varepsilon}{(\theta'_\varepsilon)^2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} + 2\xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right) v_1 \\ & - \frac{K}{\theta'_\varepsilon} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} - 2\xi_2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} \right) v_1 - \frac{2}{\theta'_\varepsilon} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi_1 \partial s}, \quad \xi_2 > 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Согласно методу составных разложений сумма функций $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}$ и $\psi_\varepsilon^{\text{bl}}$ удовлетворяет однородному граничному условию Неймана всюду на $\partial\Omega$, за исключением точек x_j^ε :

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \psi_\varepsilon^{\text{ex}} - \frac{\partial}{\partial \tau} \psi_\varepsilon^{\text{bl}} = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad x \neq x_j^\varepsilon.$$

Перепишем теперь второе слагаемое последнего равенства в переменных ξ и заменим функции $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}$ и $\psi_\varepsilon^{\text{bl}}$ на правые части равенств (2.5) и (2.6), после чего вычислим коэффициенты при старших степенях ε , которые приравняем нулю. В результате получим граничные условия для функций v_i :

$$\frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} = \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \Psi_0^\nu, \quad \xi \in \Gamma^0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} = \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \Psi_1^\nu, \quad \xi \in \Gamma^0, \quad (2.12)$$

где $\Gamma^0 = \{\xi: \xi_2 = 0, \xi_1 \neq \varepsilon \pi j, j \in \mathbb{Z}\}$,

$$\Psi_i^\nu = \Psi_i^\nu(s, \mu, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \nu} \Psi_i(x, \mu, \varepsilon), \quad x \in \partial\Omega.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из определения множества Γ^0 следует, что для функций v_i мы получили задачу с периодической структурой по переменной ξ_1 , что по существу будет использовано при решении краевых задач (2.9)–(2.12). Как нетрудно убедиться, периодичность Γ^0 является прямым следствием условия (C0), а именно равенства $\theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) = \theta_\varepsilon(s_0^\varepsilon) + \varepsilon \pi j$, и приведенного выше определения переменной ξ_1 , что и объясняет указанный выбор переменной ξ_1 . Переменная ξ_2 была выбрана так, чтобы получить уравнения Пуассона для функций v_1 и v_2 .

Согласно методу составных разложений будем искать экспоненциально убывающие при $\xi_2 \rightarrow +\infty$ решения задач (2.9), (2.11) и (2.10), (2.12). При построении пограничного слоя мы также используем и метод многих масштабов: роль “медленного” времени играет переменная s . Обратим также внимание на то обстоятельство, что пограничный слой “контролирует” только граничное условие Неймана, именно поэтому мы перешли к формальному пределу при $\eta \rightarrow 0$ при выводе граничного условия (2.11). Казалось бы, можно добиться выполнения и граничного условия Дирихле подходящим выбором функций v_1 и v_2 . Однако такой путь приводит к неразрешимым задачам для функций v_1 и v_2 .

Пусть $\mathcal{Y}_0$ – пространство π -периодических по переменной ξ_1 функций из $C^\infty(\{\xi: \xi_2 > 0\} \cup \Gamma^0)$, экспоненциально убывающих вместе со всеми своими производными при $\xi_2 \rightarrow +\infty$ равномерно по ξ_1 .

Построим решение задачи (2.9), (2.11). Заметим, что переменная s в эту задачу входит как параметр. Рассмотрим функцию

$$X(\xi) = \operatorname{Re} \ln \sin z + \ln 2 - \xi_2, \quad (2.13)$$

где $z = \xi_1 + i\xi_2$ – комплексная переменная. Непосредственными вычислениями проверим, что $X \in \mathcal{Y}_0$ – четная по ξ_1 гармоническая функция, удовлетворяющая граничному условию

$$\frac{\partial X}{\partial \xi_2} = -1, \quad \xi \in \Gamma^0,$$

для которой справедливо представление

$$X(\xi) = \ln \rho + \ln 2 - \xi_2 + \tilde{X}(\xi), \quad \tilde{X}(\xi) = O(\rho^2), \quad \xi \rightarrow \xi^{(j)}, \quad (2.14)$$

где $\rho = |\xi - \xi^{(j)}|$, $\xi^{(j)} = (\pi j, 0)$, $j \in \mathbb{Z}$, $\tilde{X}(\xi) \in C^\infty(\{\xi: \xi_2 \geq 0\})$. Учитывая все перечисленные факты, заключаем, что функция v_1 имеет следующий вид:

$$v_1(\xi, s, \mu) = -\frac{1}{\theta'_\varepsilon(s)} \Psi_0^\nu(s, \mu, \varepsilon) X(\xi).$$

Решение задачи (2.10), (2.12) также можно построить в явном виде. Прямыми вычислениями проверяем, что функция

$$\tilde{v}_2 = \frac{\Psi_0^\nu}{2(\theta'_\varepsilon)^2} \xi_2^2 \left(\frac{\theta''_\varepsilon}{\theta'_\varepsilon} \frac{\partial X}{\partial \xi_1} + K \frac{\partial X}{\partial \xi_2} \right) - \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \left(\frac{\Psi_0^\nu}{\theta'_\varepsilon} \right)' \int_{\xi_2}^{+\infty} t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt$$

является решением уравнения (2.10), удовлетворяющим однородному граничному условию Неймана на Γ^0 . Функция $\tilde{v}_2 \in \mathcal{V}_0$ имеет следующую (дифференцируемую) асимптотику при $\xi \rightarrow \xi^{(j)}$:

$$\tilde{v}_2 = O(\rho \ln \rho). \quad (2.15)$$

Учитывая все перечисленные свойства функций $\tilde{v}_2$ и X , приходим к выражению для функции v_2 :

$$v_2(\xi, s, \mu, \varepsilon) = \tilde{v}_2(\xi, s, \mu, \varepsilon) - \frac{1}{\theta'_\varepsilon(s)} \Psi_1^\nu(s, \mu, \varepsilon) X(\xi). \quad (2.16)$$

Как следует из (2.14)–(2.16), функции v_i имеют логарифмические особенности в окрестностях точек $\xi^{(j)}$, или, что то же самое, в окрестности точек x_j^ε . Кроме того, сумма внешнего разложения и пограничного слоя не удовлетворяет (даже асимптотически) граничному условию Дирихле на γ_ε . Поэтому в окрестности точек x_j^ε вводятся новые “растянутые” переменные ς^j , а асимптотика собственной функции строится в виде $\psi_\varepsilon^{\text{in}}$ методом согласования асимптотических разложений. Применение термина “растянутые” к переменным ς^j оправдано, так как в силу равенства (1.5) функция η имеет следующий вид:

$$\eta(\varepsilon) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon(A + \mu(\varepsilon))}\right), \quad (2.17)$$

где $\mu(\varepsilon)$ – такое, как в утверждении доказываемой теоремы. Таким образом, функция $\eta(\varepsilon)$ экспоненциально мала по сравнению с ε .

Вначале проведем согласование асимптотических разложений в окрестности точки x_j^ε . Для краткости обозначим $\varsigma = \varsigma^j$. Ясно, что при $\tau \rightarrow 0$ верны асимптотики

$$\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x) = \sum_{i=0}^1 \varepsilon^i (\Psi_i^D(s, \mu, \varepsilon) - \tau \Psi_i^\nu(s, \mu, \varepsilon)) + O(\tau^2), \quad (2.18)$$

где Ψ_i^D – значения функций Ψ_i при $x \in \partial\Omega$, а переменная s меняется в малой окрестности значения s_j^ε . Учитывая асимптотики (2.14), (2.15) и определения функций v_i , получаем, что при $\xi \rightarrow \xi^{(j)}$

$$\psi_\varepsilon^{\text{bl}}(\xi, s, \mu) = -\varepsilon(\ln \rho + \ln 2 - \xi_2) \sum_{i=0}^1 \varepsilon^i \frac{\Psi_i^\nu(s, \mu, \varepsilon)}{\theta'_\varepsilon(s)} + O(\rho \ln \rho). \quad (2.19)$$

Перепишем теперь асимптотики (2.18), (2.19) в переменных ς и учтем, что в силу (2.17) выполнено равенство $\varepsilon \ln \eta(\varepsilon) = -(A + \mu)^{-1}$. Тогда получим, что при $\frac{1}{4}\eta^{1/4} < \rho < \frac{3}{4}\eta^{1/4}$ (или, что то же самое, при $\frac{1}{4}\eta^{-3/4} < |\varsigma| < \frac{3}{4}\eta^{-3/4}$)

$$\psi_\varepsilon^{\text{ex}, \mu}(x) + \psi_\varepsilon^{\text{bl}}(\xi, s, \mu) = W_{0,0}(s, \mu, \varepsilon) + \varepsilon W_{1,0}(\varsigma, s, \mu, \varepsilon) + O(\varepsilon^2 \ln |\varsigma|), \quad (2.20)$$

$$W_{0,0}(s, \mu, \varepsilon) = \Psi_0^D(s, \mu, \varepsilon) + \frac{\Psi_0^\nu(s, \mu, \varepsilon)}{(A + \mu)\theta'_\varepsilon(s)}, \quad (2.21)$$

$$W_{1,0}(\varsigma, s, \mu, \varepsilon) = -\frac{\Psi_0^\nu(s, \mu, \varepsilon)}{\theta'_\varepsilon(s)}(\ln |\varsigma| + \ln 2) + \Psi_1^D(s, \mu) + \frac{\Psi_1^\nu(s, \mu, \varepsilon)}{(A + \mu)\theta'_\varepsilon(s)}. \quad (2.22)$$

В силу метода согласования асимптотических разложений из (2.20) вытекает, что функции $w_{i,0}^{(j)}$ имеют следующие асимптотики на бесконечности:

$$w_{i,0}^{(j)} = W_{i,0} + o(1), \quad \varsigma \rightarrow \infty. \quad (2.23)$$

Задачи для функций $w_{i,0}$ получаем стандартной подстановкой (2.4) и (2.7) в краевую задачу (1.1), (1.2) и выписыванием коэффициентов при старших степенях ε и η :

$$\begin{aligned} \Delta_\varsigma w_{i,0}^{(j)} &= 0, \quad \varsigma_2 > 0, \\ w_{i,0}^{(j)} &= 0, \quad \varsigma \in \gamma_j^1, \\ \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} w_{i,0}^{(j)} &= 0, \quad \varsigma \in \Gamma_j^1. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Здесь γ_j^1 — интервал $(-2\alpha^j, 2\beta^j)$ на оси $O\varsigma_1$, а Γ_j^1 — дополнение замыкания γ_j^1 до прямой $\varsigma_2 = 0$.

Задача (2.24) не имеет ограниченных на бесконечности нетривиальных решений, а потому ввиду (2.21), (2.23) имеем

$$w_{0,0}^{(j)} = 0.$$

Из этого равенства и асимптотики (2.21), (2.23) вытекает граничное условие (1.8) для функции Ψ_0 . Собственные элементы Λ_0 и Ψ_0 удовлетворяют лемме 1.1. В силу гладкости границы области и функции $\theta'_\varepsilon(s)$ функция Ψ_0 бесконечно дифференцируема по переменным x .

Определим теперь функцию $w_{1,0}$. Пусть

$$Y^{(j)}(\varsigma, \varepsilon) = \operatorname{Re} \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}), \quad (2.25)$$

где $y = (\varsigma_1 + i\varsigma_2 + \alpha^j - \beta^j)/(\alpha^j + \beta^j)$ — комплексная переменная. Легко убедиться, что $Y^{(j)} \in \mathcal{W}$, где обозначено

$$\mathcal{W} \equiv C^\infty(\{\varsigma: \varsigma_2 \geq 0, \varsigma \neq (-2\alpha^j, 0), \varsigma \neq (2\beta^j, 0)\}) \cap H^1(\{\varsigma: \varsigma_2 > 0, |\varsigma| < 5\}).$$

Функция $Y^{(j)}$ есть решение задачи (2.24), имеющее на бесконечности асимптотику:

$$Y^{(j)} = \ln |\varsigma| + \ln 2 - \ln(\alpha^j + \beta^j) + (\alpha^j - \beta^j)\varsigma_1 |\varsigma|^{-2} + O(|\varsigma|^{-2}), \quad \varsigma \rightarrow \infty. \quad (2.26)$$

В силу перечисленных свойств $Y^{(j)}$ функция $w_{1,0}^{(j)}$ имеет следующий вид:

$$w_{1,0}^{(j)}(\varsigma, s, \mu, \varepsilon) = -\frac{\Psi_0'(s, \mu, \varepsilon)}{\theta_\varepsilon'(s)} Y^{(j)}(\varsigma, \varepsilon).$$

Ясно, что $w_{1,0}^{(j)} \in \mathcal{W}$. Выпишем теперь асимптотику функции $w_{1,0}^{(j)}$ на бесконечности (см. (2.26)) и сравним ее с (2.22), (2.23). В результате такого сравнения приходим к равенству

$$\frac{\Psi_0'(s, \mu, \varepsilon)}{\theta_\varepsilon'(s)} \ln(\alpha^j(\varepsilon) + \beta^j(\varepsilon)) = \Psi_1^D(s, \mu, \varepsilon) + \frac{\Psi_1'(s, \mu, \varepsilon)}{(A + \mu)\theta_\varepsilon'(s)}, \quad (2.27)$$

фактически являющемуся граничным условием для функции Ψ_1 . Необходимо лишь корректно определить правую часть граничного условия, которая бы учитывала то обстоятельство, что, вообще говоря, величины $\ln(\alpha^j + \beta^j)$ зависят от номера j и параметра ε . Как уже было отмечено выше, переменная s в равенстве (2.27) меняется в малой (порядка $O(\varepsilon\eta^{1/4})$) окрестности точки s_j^ε . Следовательно, для выполнения равенства (2.27) достаточно построить функцию, которая была бы равна $\alpha^j + \beta^j$ в указанных окрестностях точек s_j^ε , и заменить затем $\alpha^j + \beta^j$ в (2.27) на эту функцию. Функция $g_\varepsilon(\theta)$, как несложно убедиться, бесконечно дифференцируема по θ и равна $d^j = \alpha^j + \beta^j$ при $|\theta - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon)| \leq \varepsilon\pi/4$. Поэтому в качестве функции, на которую заменяется сумма $\alpha^j + \beta^j$ в (2.27), мы возьмем $g_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s))$, откуда немедленно получим граничное условие для Ψ_1 :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + (A + \mu)\theta_\varepsilon'(s) \right) \Psi_1 = (A + \mu)\Psi_0'(s, \mu, \varepsilon) \ln g_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s)), \quad x \in \partial\Omega.$$

Теперь учтем, что $\Psi_0' = -(A + \mu)\theta_\varepsilon' \Psi_0^D$, и окончательно получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + (A + \mu)\theta_\varepsilon'(s) \right) \Psi_1 = -(A + \mu)^2 \Psi_0^D(s, \mu, \varepsilon) \theta_\varepsilon'(s) \ln g_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s)), \quad x \in \partial\Omega. \quad (2.28)$$

Задача (2.8), (2.28) разрешима при подходящем выборе Λ_1 . Условие разрешимости получается стандартно, умножением уравнения (2.8) на Ψ_0 и интегрированием по частям с учетом граничного условия (2.28). Принимая во внимание нормировку функции Ψ_0 , из указанного условия разрешимости получаем формулу (1.11) для первого члена асимптотики. Из леммы 2.1, условия (C1) и определения g_ε следует оценка

$$c_1 c_4 / 2 \leq g_\varepsilon(\theta) \leq 1, \quad (2.29)$$

откуда в силу формулы (1.11) вытекает неположительность Λ_1 . Утверждаемая голоморфность Λ_1 по μ является следствием соответствующих свойств Ψ_0 , ограниченности θ_ε' и $g_\varepsilon(\theta)$ и оценки нормы $\|\Psi_0\|_{L_2(\partial\Omega)}$ через $\|\Psi_0\|_{H^1(\Omega)}$.

Функция Ψ_1 определена с точностью до слагаемого $C\Psi_0$, $C = \text{const}$. Выбираем функцию Ψ_1 , считая ее ортогональной Ψ_0 в $L_2(\Omega)$. Функция $\ln g_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s))$ гладкая, поэтому нетрудно показать, что $\Psi_1 \in C^\infty(\bar{\Omega})$. Кроме того, функция Ψ_1 голоморфна по μ в норме $H^1(\Omega)$ для каждого фиксированного значения ε [35]. Используя однозначность λ_0 , нетрудно доказать, что коэффициенты разложения Ψ_1 в ряд Тейлора по степеням μ непрерывны по $\varepsilon \rightarrow 0$, а функция Ψ_1 мажорируется голоморфной по μ функцией, не зависящей от ε .

Проведенное построение позволило определить первые члены асимптотических разложений λ_ε и ψ_ε (на формальном уровне, разумеется). Необходимо теперь доказать, что формально построенные асимптотики действительно являются асимптотиками λ_ε и ψ_ε . Для того чтобы провести такое обоснование, предварительно докажем, что построенные асимптотики являются формальным асимптотическим решением возмущенной задачи, т. е. удовлетворяют ей с точностью до достаточно малой невязки. Именно доказательство последнего утверждения будет нашей целью на данном этапе. Чтобы провести это доказательство и обеспечить необходимую малость невязки, нужно построить дополнительные члены в асимптотических разложениях для λ_ε и ψ_ε .

Во внешнем разложении необходимо построить одно дополнительное слагаемое:

$$\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \mu) = \Psi_0(x, \mu, \varepsilon) + \varepsilon \Psi_1(x, \mu, \varepsilon) + \varepsilon^2 \Psi_2(x, \mu, \varepsilon). \quad (2.30)$$

В пограничном слое необходимо построить еще два члена; в результате пограничный слой выглядит следующим образом:

$$\psi_\varepsilon^{\text{bl}}(\xi, s, \mu) = \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i v_i(\xi, s, \mu, \varepsilon). \quad (2.31)$$

С учетом равенства $w_{0,0}^{(j)} = 0$ и дополнительных членов внутреннее разложение имеет следующий вид:

$$\psi_\varepsilon^{\text{in},j}(\varsigma^j, s, \mu) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon^i w_{i,0}^{(j)}(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon) + \eta \sum_{i=1}^4 \varepsilon^i w_{i,1}^{(j)}(\varsigma^j, s, \mu, \varepsilon). \quad (2.32)$$

Во внешнем разложении (2.30) первые члены известны, осталось определить лишь функцию Ψ_2 . Эта функция будет использована далее только для того, чтобы провести согласование дополнительных членов внутреннего разложения. Как и ранее, согласование будет влиять лишь на вид граничного условия для Ψ_2 , а потому имеет место определенная свобода в выборе уравнения для Ψ_2 , так как конкретный вид этого уравнения не оказывает существенного влияния на оценку невязки. Уравнение для Ψ_2 мы выбираем так, чтобы, во-первых, гарантировать его разрешимость и, во-вторых, упростить дальнейшие вычисления. Эти две цели достигаются за счет следующего выбора:

$$(\Delta - 1)\Psi_2 = -\Lambda_1 \Psi_1, \quad x \in \Omega. \quad (2.33)$$

Дополнительные члены пограничного слоя зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{\Psi_1^\nu}{2(\theta_\varepsilon')^2} \xi_2^2 \left(\frac{\theta_\varepsilon''}{\theta_\varepsilon'} \frac{\partial X}{\partial \xi_1} + K \frac{\partial X}{\partial \xi_2} \right) - \frac{1}{\theta_\varepsilon'} \left(\frac{\Psi_1^\nu}{\theta_\varepsilon'} \right)' \int_{\xi_2}^{+\infty} t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt \\ &\quad + l \int_{\xi_2}^{+\infty} t X(\xi_1, t) dt - \frac{1}{\theta_\varepsilon'} \Psi_2^\nu X, \\ v_4 &= \frac{\Psi_2^\nu}{2(\theta_\varepsilon')^2} \xi_2^2 \left(\frac{\theta_\varepsilon''}{\theta_\varepsilon'} \frac{\partial X}{\partial \xi_1} + K \frac{\partial X}{\partial \xi_2} \right) - \frac{1}{\theta_\varepsilon'} \left(\frac{\Psi_2^\nu}{\theta_\varepsilon'} \right)' \int_{\xi_2}^{+\infty} t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt, \end{aligned}$$

где $l = l(s, \mu, \varepsilon)$ – некоторая функция, которая будет определена ниже, Ψ_2^ν – значение нормальной производной Ψ_2 на границе $\partial\Omega$. Легко убедиться в том, что $v_3, v_4 \in \mathcal{V}_0$.

Для того чтобы провести согласование асимптотических разложений и определить внутреннее разложение, необходимы следующие дифференцируемые асимптотики ($\rho \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} v_1(\xi, s, \mu, \varepsilon) &= -\frac{\Psi_0^\nu}{\theta'_\varepsilon}(\ln \rho + \ln 2 - \xi_2) + O(\rho^2), \\ v_2(\xi, s, \mu, \varepsilon) &= -\frac{\Psi_1^\nu}{\theta'_\varepsilon}(\ln \rho + \ln 2 - \xi_2) \\ &\quad + V_\varepsilon(\xi - \xi^{(j)}, s, \Psi_0^\nu(s, \mu, \varepsilon)) + O(\rho^2), \\ v_3(\xi, s, \mu, \varepsilon) &= -\frac{\Psi_2^\nu}{\theta'_\varepsilon}(\ln \rho + \ln 2 - \xi_2) - \frac{\zeta(3)}{4}l(s, \mu, \varepsilon) \\ &\quad + V_\varepsilon(\xi - \xi^{(j)}, s, \Psi_1^\nu(s, \mu, \varepsilon)) + O(\rho^2 \ln \rho), \\ v_4(\xi, s, \mu, \varepsilon) &= V_\varepsilon(\xi - \xi^{(j)}, s, \Psi_2^\nu(s, \mu, \varepsilon)) + O(\rho^2), \end{aligned}$$

где $\zeta(t)$ – дзета-функция Римана и

$$\begin{aligned} V_\varepsilon(\xi, s, \Psi(s)) &= \frac{\Psi(s)}{2(\theta'_\varepsilon(s))^2} \frac{\xi_2^2}{|\xi|^2} \left(\frac{\theta''_\varepsilon(s)}{\theta'_\varepsilon(s)} \xi_1 + K(s) \xi_2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{\theta'_\varepsilon(s)} \left(\frac{\Psi(s)}{\theta'_\varepsilon(s)} \right)' \xi_1 (\ln |\xi| + \ln 2 - 1). \end{aligned}$$

Коэффициенты внешнего разложения в окрестности границы $\partial\Omega$ удовлетворяют соотношениям

$$\Psi_i = \Psi_i^D - \tau \Psi_i^\nu + O(\tau^2), \quad \tau \rightarrow 0, \quad i = 0, 1, 2.$$

Переписывая теперь приведенные асимптотики функций v_i и Ψ_j в переменных ς , с учетом равенства (2.17) получаем, что при $\frac{1}{4}\eta^{1/4} < \rho < \frac{3}{4}\eta^{1/4}$ ($\frac{1}{4}\eta^{-3/4} < |\varsigma| < \frac{3}{4}\eta^{-3/4}$) справедливо равенство

$$\begin{aligned} \psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \mu) + \psi_\varepsilon^{\text{bl}}(\xi, s, \mu) &= \sum_{k=1}^3 \varepsilon^k W_{k,0}(\varsigma, s, \mu, \varepsilon) \\ &\quad + \eta \sum_{k=1}^4 \varepsilon^k W_{k,1}(\varsigma, s, \mu, \varepsilon) + O(\eta^2 |\varsigma|^2 \ln |\varsigma|), \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} W_{2,0} &= -\frac{\Psi_1^\nu}{\theta'_\varepsilon}(\ln |\varsigma| + \ln 2) + \Psi_2^D + \frac{\Psi_2^\nu}{(A + \mu)\theta'_\varepsilon}, \\ W_{3,0} &= -\frac{\Psi_2^\nu}{\theta'_\varepsilon}(\ln |\varsigma| + \ln 2) - \frac{\zeta(3)}{4}l, \\ W_{1,1} &= -\frac{1}{(A + \mu)\theta'_\varepsilon} \left(\frac{\Psi_0^\nu}{\theta'_\varepsilon} \right)' \varsigma_1, \\ W_{k,1} &= V_\varepsilon(\varsigma, s, \Psi_{k-2}^\nu) - \frac{1}{(A + \mu)\theta'_\varepsilon} \left(\frac{\Psi_{k-1}^\nu}{\theta'_\varepsilon} \right)' \varsigma_1, \quad k = 2, 3, \\ W_{4,1} &= V_\varepsilon(\varsigma, s, \Psi_2^\nu). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Здесь $\Psi_2^D = \Psi_2^D(s, \mu, \varepsilon) = \Psi_2(x, \mu, \varepsilon)$, $x \in \partial\Omega$. Следовательно, функции $w_{k,i}^{(j)}$ должны удовлетворять асимптотикам

$$w_{k,i}^{(j)} = W_{k,i} + o(|\varsigma|^i), \quad \varsigma \rightarrow \infty. \quad (2.36)$$

Задачи для коэффициентов внутреннего разложения получаем, как и ранее, подставляя (2.4) и (2.32) в (1.1), (1.2) и выписывая коэффициенты при старших степенях ε и η :

$$\begin{aligned} \Delta_\varsigma w_{k,1}^{(j)} &= -\frac{\theta_\varepsilon''}{(\theta_\varepsilon')^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varsigma_1} + 2\varsigma_2 \frac{\partial^2}{\partial \varsigma_1 \partial \varsigma_2} \right) w_{k-1,0}^{(j)} \\ &\quad - \frac{K}{\theta_\varepsilon'} \left(\frac{\partial}{\partial \varsigma_2} - 2\varsigma_2 \frac{\partial^2}{\partial \varsigma_1^2} \right) w_{k-1,0}^{(j)} - \frac{2}{\theta_\varepsilon'} \frac{\partial^2}{\partial \varsigma_1 \partial s} w_{k-1,0}^{(j)}, \quad \varsigma_2 > 0, \\ w_{k,1}^{(j)} &= 0, \quad \varsigma \in \gamma_j^1, \quad \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} w_{k,1}^{(j)} = 0, \quad \varsigma \in \Gamma_j^1, \end{aligned} \quad (2.37)$$

$k = 2, 3, 4$; а для $w_{1,1}^{(j)}$ и $w_{k,0}^{(j)}$, $k = 2, 3$, получаем ту же краевую задачу (2.24), что и для $w_{1,0}^{(j)}$. Функции $w_{k,0}^{(j)}$, $k = 2, 3$, определим следующим образом:

$$w_{k,0}^{(j)} = -\frac{\Psi_{k-1}^\nu}{\theta_\varepsilon'} Y^{(j)}. \quad (2.38)$$

Имеем $w_{k,0}^{(j)} \in \mathcal{W}$. Теперь выпишем асимптотики функций $w_{k,0}^{(j)}$ (см. (2.26), (2.38)) и сравним их с асимптотиками (2.36), (2.35). Тогда получим два равенства:

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_1^\nu(s, \mu, \varepsilon)}{\theta_\varepsilon'(s)} \ln(\alpha^j(\varepsilon) + \beta^j(\varepsilon)) &= \Psi_2^D(s, \mu, \varepsilon) + \frac{\Psi_2^\nu(s, \mu, \varepsilon)}{(A + \mu)\theta_\varepsilon'(s)}, \\ \frac{\Psi_2^\nu(s, \mu, \varepsilon)}{\theta_\varepsilon'(s)} \ln(\alpha^j(\varepsilon) + \beta^j(\varepsilon)) &= -\frac{\zeta(3)}{4} l(s, \mu, \varepsilon). \end{aligned}$$

Из первого равенства получим граничное условие для Ψ_2 :

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} + (A + \mu)\theta_\varepsilon'(s) \right) \Psi_2 = (A + \mu)\Psi_1^\nu(s, \mu, \varepsilon) \ln g_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s)), \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.39)$$

а из второго определим функцию l :

$$l(s, \mu, \varepsilon) = -\frac{4}{\zeta(3)\theta_\varepsilon'(s)} \Psi_2^\nu(s, \mu, \varepsilon) \ln g_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s)).$$

Краевая задача (2.33), (2.39) однозначно разрешима. Правые части в уравнении (2.33) и граничном условии (2.39) содержат гладкие по x и s функции, а потому $\Psi_2 \in C^\infty(\bar{\Omega})$.

Вернемся к построению внутреннего разложения. Несложно проверить, что функция

$$Y_1^{(j)}(\varsigma, \varepsilon) = (\alpha^j(\varepsilon) + \beta^j(\varepsilon)) \operatorname{Re} \sqrt{y^2 - 1}$$

принадлежит $\mathcal{W}$ и является решением краевой задачи (2.24) с асимптотикой

$$Y_1^{(j)}(\varsigma, \varepsilon) = \varsigma_1 + O(|\varsigma|^{-1}), \quad \varsigma \rightarrow \infty. \quad (2.40)$$

В силу этой асимптотики и других перечисленных свойств $Y_1^{(j)}$ функция $w_{1,1}^{(j)}$ имеет вид

$$w_{1,1}^{(j)} = -\frac{1}{(A+\mu)\theta'_\varepsilon} \left(\frac{\Psi_0^\nu}{\theta'_\varepsilon} \right)' Y_1^{(j)}.$$

Прямыми вычислениями несложно проверить, что функция

$$\tilde{w}_{2,1} = \frac{\Psi_0^\nu}{2(\theta'_\varepsilon)^2} \varsigma_2^2 \left(\frac{\theta''_\varepsilon}{\theta'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varsigma_1} + K \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} \right) Y^{(j)} + \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \left(\frac{\Psi_0^\nu}{\theta'_\varepsilon} \right)' \varsigma_1 Y^{(j)},$$

принадлежащая $\mathcal{W}$, является решением задачи (2.37) и удовлетворяет следующей асимптотике на бесконечности ($\varsigma \rightarrow \infty$):

$$\tilde{w}_{2,1}^{(j)} = \frac{\Psi_0^\nu}{2(\theta'_\varepsilon)^2} \frac{\varsigma_2^2}{|\varsigma|^2} \left(\frac{\theta''_\varepsilon}{\theta'_\varepsilon} \varsigma_1 + K \varsigma_2 \right) + \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \left(\frac{\Psi_0^\nu}{\theta'_\varepsilon} \right)' \varsigma_1 (\ln |\varsigma| + \ln 2 - \ln(\alpha^j + \beta^j)) + O(1).$$

Для того чтобы получить требуемую функцию $w_{2,1}^{(j)}$, к $\tilde{w}_{2,1}^{(j)}$ следует добавить гармоническую функцию $Y_1^{(j)}$ с подходящим множителем так, чтобы в асимптотике $w_{2,1}^{(j)}$ добиться требуемого коэффициента перед ς_1 . Таким множителем является функция

$$\frac{1}{\theta'_\varepsilon} \left(\frac{\Psi_0^\nu}{\theta'_\varepsilon} \right)' (\ln(\alpha^j + \beta^j) - 1) - \frac{1}{(A+\mu)\theta'_\varepsilon} \left(\frac{\Psi_1^\nu}{\theta'_\varepsilon} \right)',$$

то есть

$$w_{2,1}^{(j)} = \tilde{w}_{2,1}^{(j)} + \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \left(\left(\frac{\Psi_0^\nu}{\theta'_\varepsilon} \right)' (\ln(\alpha^j + \beta^j) - 1) - \frac{1}{(A+\mu)} \left(\frac{\Psi_1^\nu}{\theta'_\varepsilon} \right)' \right) Y_1^{(j)}.$$

Аналогично строим $w_{3,1}^{(j)}$ и $w_{4,1}^{(j)}$:

$$\begin{aligned} w_{3,1}^{(j)} &= \frac{\Psi_1^\nu}{2(\theta'_\varepsilon)^2} \varsigma_2^2 \left(\frac{\theta''_\varepsilon}{\theta'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varsigma_1} + K \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} \right) Y^{(j)} + \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \left(\frac{\Psi_1^\nu}{\theta'_\varepsilon} \right)' \varsigma_1 Y^{(j)} \\ &\quad + \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \left(\left(\frac{\Psi_1^\nu}{\theta'_\varepsilon} \right)' (\ln(\alpha^j + \beta^j) - 1) - \frac{1}{(A+\mu)} \left(\frac{\Psi_2^\nu}{\theta'_\varepsilon} \right)' \right) Y_1^{(j)}, \\ w_{4,1}^{(j)} &= \frac{\Psi_2^\nu}{2(\theta'_\varepsilon)^2} \varsigma_2^2 \left(\frac{\theta''_\varepsilon}{\theta'_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varsigma_1} + K \frac{\partial}{\partial \varsigma_2} \right) Y^{(j)} \\ &\quad + \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \left(\frac{\Psi_2^\nu}{\theta'_\varepsilon} \right)' \left(\varsigma_1 Y^{(j)} + (\ln(\alpha^j + \beta^j) - 1) Y_1^{(j)} \right). \end{aligned}$$

Очевидно, что $w_{k,1}^{(j)} \in \mathcal{W}$. Используя асимптотики (2.26) и (2.40), непосредственно проверяем, что при $\varsigma \rightarrow \infty$

$$w_{k,i}^{(j)} = W_{k,i} + O(|\varsigma|^{i-1}). \quad (2.41)$$

Формальное построение внешнего разложения (2.30), пограничного слоя (2.31) и внутреннего разложения (2.32) закончено.

Следующие четыре вспомогательные леммы необходимы для доказательства того, что формально построенные асимптотики собственных элементов являются формальным асимптотическим решением возмущенной задачи.

Пусть $\Omega^{\text{bl}} = \{x: 0 < \tau < c_0\}$, где c_0 – некоторое фиксированное малое число такое, что на множестве Ω^{bl} координаты (s, τ) определены корректно, а функция $P(s, \tau)$ не имеет нулей. Всюду далее через C будем обозначать различные не специфические константы, не зависящие от ε и μ .

ЛЕММА 2.2. Пусть $F = F(x, \mu, \varepsilon)$ и $f = f(s, \mu, \varepsilon)$ – бесконечно дифференцируемые по x и s функции, $l_0 = l_0(\mu, \varepsilon)$ – некоторая функция, равномерно ограниченная по ε и μ , а нормы $\|f\|_{C(\partial\Omega)}$, $\|F\|_{C(\bar{\Omega})}$ и $\|F\|_{C^k(\bar{\Omega}_1)}$, $\Omega_1 \Subset \Omega$ – произвольная подобласть, $k \in \mathbb{N}$, ограничены равномерно по ε и μ . Если краевая задача

$$(\Delta + l_0)u = F, \quad x \in \Omega, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + (A + \mu)\theta'_\varepsilon \right) u = f, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.42)$$

имеет решение с ограниченной по ε и μ нормой в $H^1(\Omega)$, то для этого решения верны равномерные по ε и μ оценки

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^1(\Omega)} &\leq C(\|f\|_{C^1(\partial\Omega)} + 1), \quad \|u\|_{C^k(\bar{\Omega}_1)} \leq C, \\ \|u^\nu\|_{C(\partial\Omega)} &\leq C(A + \mu + \|f\|_{C(\partial\Omega)}), \\ \|u^\nu\|_{C^i(\partial\Omega)} &\leq C(\|f\|_{C^i(\partial\Omega)} + 1), \quad i = 1, 2, \\ \|u^\nu\|_{C^3(\partial\Omega)} &\leq C(\|F\|_{C^1(\bar{\Omega})} + \|f\|_{C^3(\partial\Omega)} + 1), \end{aligned}$$

где $u^\nu = u^\nu(s, \mu, \varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, \mu, \varepsilon)$, $x \in \partial\Omega$, $k \in \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гладкость функций f и F позволяет утверждать, что решение u задачи (2.42) бесконечно дифференцируемо по x . Кроме того, в силу ограниченности нормы $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ для всякой пары строго внутренних подобластей $\Omega_1 \Subset \Omega_2 \Subset \Omega$ выполнено

$$\|u\|_{H^{k+2}(\Omega_1)} \leq C(\|F\|_{H^k(\Omega_2)} + 1) \leq C, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Последние неравенства и теоремы вложения C^k в H^{k+2} позволяют утверждать, что верны оценки

$$\|u\|_{C^k(\bar{\Omega}_1)} \leq C. \quad (2.43)$$

На области Ω^{bl} сделаем замену функции u :

$$v(x, \mu, \varepsilon) = u(x, \mu, \varepsilon)e^{-(A+\mu)\theta'_\varepsilon(s)\tau}(l_1 - l_2\tau^2),$$

где l_1 и l_2 – некоторые положительные числа. В силу (2.42) функция v есть решение задачи

$$\begin{aligned} \left(\Delta_x + l_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + l_4 \frac{\partial}{\partial x_2} + l_5 \right) v &\equiv L_1 v = \tilde{F}, \quad x \in \Omega^{\text{bl}}, \\ v &= l_6, \quad \tau = c_0, \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} = -l_1 f, \quad \tau = 0, \end{aligned}$$

где $\tilde{F} = e^{-(A+\mu)\theta'_\varepsilon(s)\tau}(l_1 - l_2\tau^2)F$, $l_i = l_i(x, \mu, \varepsilon)$, $i = 3, 4, 5$, и $l_6 = l_6(s, \mu, \varepsilon)$ – гладкие функции пространственных переменных, голоморфные по μ , причем $\|l_6\|_{C(\{\tau=c_0\})} \leq C$ (см. (2.43)), $\|l_i\|_{C^1(\bar{\Omega}^{\text{bl}})} \leq C$. Функции l_i , $i = 3, 4, 5$, легко получить в явном виде, мы не будем приводить здесь этих явных формул, отметим лишь, что за счет подходящего выбора констант l_2 и l_3 и константы c_0 из определения Ω^{bl} всегда можно добиться выполнения неравенств $l_1 - l_2c_0^2 > 0$, $l_5 \leq C < 0$

при $x \in \bar{\Omega}^{\text{bl}}$. Тогда для оператора L_1 и всякой функции $V \in C^2(\bar{\Omega}^{\text{bl}})$ справедливо утверждение: если

$$L_1 V < 0, \quad x \in \bar{\Omega}^{\text{bl}}, \quad V > 0, \quad \tau = c_0, \quad \frac{\partial V}{\partial \tau} < 0, \quad \tau = 0,$$

то $V > 0$. Действительно, если допустить обратное, то в точке минимума на $\bar{\Omega}^{\text{bl}}$ функция V отрицательна, $\Delta V \geq 0$, $\nabla_x V = 0$, т.е. в этой точке $L_1 V > 0$. Ясно, что данная точка минимума лежит строго внутри области Ω^{bl} ; полученное противоречие и доказывает утверждение.

Рассмотрим теперь барьерную “функцию” $(l_7 - l_8 \tau - l_9 \tau^2)$, l_7, l_8, l_9 – положительные константы, и применим данное утверждение к функциям $V = (l_7 - l_8 \tau - l_9 \tau^2) \pm v$, каждый раз подходящим образом выбирая константы l_i . В результате имеем оценку

$$\begin{aligned} \|u\|_{C(\bar{\Omega}^{\text{bl}})} &\leq C\|v\|_{C(\bar{\Omega}^{\text{bl}})} \leq C(\|\tilde{F}\|_{C(\bar{\Omega}^{\text{bl}})} + \|f\|_{C(\partial\Omega)} + \|l_6\|_{C(\{\tau=c_0\})}) \\ &\leq C(\|F\|_{C(\bar{\Omega}^{\text{bl}})} + \|f\|_{C(\partial\Omega)} + \|u\|_{C(\Omega \setminus \Omega^{\text{bl}})}) \leq C. \end{aligned}$$

Объединяя последнее неравенство с (2.43), окончательно получаем

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C. \quad (2.44)$$

В книге [36, гл. 3, §3, теорема 3.1] приводится оценка, из которой, производя деление уравнения и краевого условия в (2.42) на достаточно большое фиксированное число и учитывая гладкость u , получаем

$$\|u\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq C(\|F\|_{C(\bar{\Omega})} + \|f\|_{C^1(\partial\Omega)} + \|u\|_{C(\bar{\Omega})}). \quad (2.45)$$

Из неравенств (2.44) и (2.45) выводим

$$\|u\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq C(\|f\|_{C^1(\partial\Omega)} + 1), \quad (2.46)$$

откуда имеем, в частности, требуемую оценку величины $\|u\|_{C^1(\bar{\Omega})}$. В силу граничных условий $u^\nu = -(A + \mu)\theta'_\varepsilon u + f$, а потому, используя (2.44) и (2.46) и учитывая ограниченность $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^2(\partial\Omega)}$, выводим указанные в утверждении леммы оценки величин $\|u^\nu\|_{C^i(\partial\Omega)}$, $i = 0, 1, 2$. Оценим теперь $\|u^\nu\|_{C^3(\partial\Omega)}$. При $x \in \Omega^{\text{bl}}$ продифференцируем задачу (2.42) по s . Тогда получим, что функция $U = \frac{\partial u}{\partial s}$ есть решение краевой задачи

$$\begin{aligned} \left(\Delta_x + \frac{\partial}{\partial s} (P^{-2})' \frac{\partial}{\partial s} + l_0 \right) U &= \frac{\partial F}{\partial s} - \frac{K'}{P^2} \frac{\partial u}{\partial \tau} \equiv F_1, \quad x \in \Omega^{\text{bl}}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + (A + \mu)\theta'_\varepsilon \right) U &= f' - (A + \mu)\theta''_\varepsilon U \equiv f_1, \quad x \in \partial\Omega, \\ \frac{\partial U}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \tau}, \quad \tau = c. \end{aligned}$$

Для такой задачи, вновь используя результаты [36, гл. 3, § 3, теорема 3.1], можно выписать оценку типа (2.45); здесь она будет иметь следующий вид:

$$\|U\|_{C^2(\bar{\Omega}^{\text{bl}})} \leq C \left(\|F_1\|_{C(\bar{\Omega}^{\text{bl}})} + \|f_1\|_{C^1(\partial\Omega)} + \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \tau} \right\|_{C^1(\{\tau=c_0\})} + \|U\|_{C(\bar{\Omega}^{\text{bl}})} \right). \quad (2.47)$$

Величину $\left\| \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial \tau} \right\|_{C^1(\{\tau=c_0\})}$ оценим сверху некоторой константой C в силу (2.43); сумму остальных трех слагаемых можно оценить с помощью (2.46):

$$\|F_1\|_{C(\bar{\Omega}^{\text{bl}})} + \|f_1\|_{C^1(\partial\Omega)} + \|U\|_{C(\bar{\Omega}^{\text{bl}})} \leq C(\|F\|_{C^1(\bar{\Omega}^{\text{bl}})} + \|f\|_{C^2(\partial\Omega)} + 1).$$

Подставляя теперь полученную оценку в (2.47), приходим к неравенству

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial s} \right\|_{C^2(\bar{\Omega}^{\text{bl}})} \leq C(\|F\|_{C^1(\bar{\Omega})} + \|f\|_{C^2(\partial\Omega)} + 1),$$

отсюда и из равенства $u^\nu = -(A + \mu)\theta'_\varepsilon u + f$ и ограниченности $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^3(\partial\Omega)}$ вытекает требуемая оценка $\|u^\nu\|_{C^3(\partial\Omega)}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.3. *Функции Ψ_1 и Λ_1 представимы в следующем виде:*

$$\Psi_1(x, \mu, \varepsilon) = (A + \mu)^2 \tilde{\Psi}_1(x, \mu, \varepsilon), \quad \Lambda_1(\mu, \varepsilon) = (A + \mu)^2 \tilde{\Lambda}_1(\mu, \varepsilon), \quad (2.48)$$

где $\tilde{\Psi}_1$ бесконечно дифференцируема по x , $\tilde{\Psi}_1$ и $\tilde{\Lambda}_1$ голоморфны по μ для каждого фиксированного значения ε . Верны равномерные по ε и μ оценки ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} |\Lambda_0| &\leq C, & \|\Psi_0\|_{H^1(\Omega)} &\leq C, & \|\Psi_0^\nu\|_{C^3(\partial\Omega)} &\leq C(A + \mu), \\ |\Lambda_1| &\leq C(A + \mu)^2, & \|\Psi_1\|_{H^1(\Omega)} &\leq C(A + \mu)^2, & \|\Psi_2\|_{H^1(\Omega)} &\leq C(A + \mu)^3, \\ \|\Psi_1^\nu\|_{C(\partial\Omega)} &\leq C(A + \mu)^2, & \|\Psi_1^\nu\|_{C^i(\partial\Omega)} &\leq C(A + \mu)^2(\varepsilon^{-i}\delta^*(\varepsilon) + 1), \\ \|\Psi_2^\nu\|_{C(\partial\Omega)} &\leq C(A + \mu)^3, & \|\Psi_2^\nu\|_{C^i(\partial\Omega)} &\leq C(A + \mu)^3(\varepsilon^{-i}\delta^*(\varepsilon) + 1). \end{aligned} \quad (2.49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представления (2.48) доказываются весьма просто. В самом деле, для Λ_1 это есть прямое следствие (1.11). Используя представление для Λ_1 и наличие множителя $(A + \mu)^2$ в граничном условии (2.28), приходим к требуемому представлению для Ψ_1 .

Оценки для Λ_0 и Ψ_0 из (2.49) доказываются элементарно. Ограниченность Λ_0 следует из сходимости $\Lambda_0 \rightarrow \lambda_0$. Поскольку $\|\Psi_0\|_{L_2(\Omega)} = 1$, то, умножая уравнение (1.7) на Ψ_0 и интегрируя один раз по частям, в силу ограниченности Λ_0 и $\|\theta'_\varepsilon\|_{C(\partial\Omega)}$ получаем требуемую оценку нормы $\|\Psi_0\|_{H^1(\Omega)}$. Теперь, применяя лемму 2.2 к задаче для функции Ψ_0 , получаем оценку $\|\Psi_0^\nu\|_{C^3(\partial\Omega)}$, и, кроме того, $\|\Psi_0\|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq C$, $\|\Psi_0\|_{C^k(\bar{\Omega}_1)} \leq C$ для всякой подобласти $\Omega_1 \Subset \Omega$.

Оценка для Λ_1 вытекает из доказанных оценок для Ψ_0 , ограниченности функций θ'_ε и $g_\varepsilon(\theta_\varepsilon)$ и формулы (1.11).

Неравенства для Ψ_1 и Ψ_2 из (2.49) также докажем на основе леммы 2.2. Поскольку Ψ_1 ортогональна Ψ_0 в $L_2(\Omega)$, а величины Λ_0 и Λ_1 ограничены, то верна равномерная оценка

$$\|\Psi_1\|_{H^1(\Omega)} \leq C(A + \mu)^2 (\|\Psi_0\|_{L_2(\Omega)} + \|\Psi_0^D \theta'_\varepsilon \ln g_\varepsilon(\theta_\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)}) \leq C(A + \mu)^2.$$

Правые части уравнения (2.8) и граничного условия (2.28) удовлетворяют всем условиям леммы 2.2. Кроме того, заметим, что оценки производных граничного условия (2.28) фактически сводятся к оценкам производных (ограниченной) функции $g_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s))$, так как производные θ'_ε оцениваются в силу условия (C0), а производные Ψ_0^D оцениваются с помощью уже доказанных оценок для Ψ_0^ν и равенства $\Psi_0^\nu = (A + \mu)\theta'_\varepsilon \Psi_0^D$. Производные $g_\varepsilon(\theta_\varepsilon)$, очевидно, оцениваются следующим образом:

$$\|g_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s))\|_{C^i(\partial\Omega)} \leq C(\varepsilon^{-i}\delta^*(\varepsilon) + 1), \quad i = 1, 2, 3.$$

Используя этот очевидный факт и применяя лемму 2.2 к задаче для $\tilde{\Psi}_1$, приходим к оценкам для Ψ_1 из (2.49). Кроме того, в силу леммы 2.2 выполнены неравенства

$$\|\Psi_1\|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq C(A + \mu)^2(\varepsilon^{-1}\delta^*(\varepsilon) + 1), \quad \|\Psi_1\|_{C^k(\bar{\Omega}_1)} \leq C$$

для всех $k \in \mathbb{Z}_+$ и всех $\Omega_1 \Subset \Omega$. Из очевидного неравенства

$$\|\Psi_2\|_{H^1(\Omega)} \leq C(|\Lambda_1|\|\Psi_1\|_{L_2(\Omega)} + (A + \mu)\|\Psi_1^\nu\|_{L_2(\partial\Omega)})$$

и уже доказанных оценок для Ψ_1 и Λ_1 выводим требуемую оценку для нормы $\|\Psi_2\|_{H^1(\Omega)}$. Представляя Ψ_2 в виде $\Psi_2 = (A + \mu)^3 \tilde{\Psi}_2$ и применяя к $\tilde{\Psi}_2$ лемму 2.2, получаем и остальные оценки для Ψ_2 из (2.49). Лемма доказана.

Обозначим $\hat{\lambda}_\varepsilon = \Lambda_0(\mu, \varepsilon) + \varepsilon\Lambda_1(\mu, \varepsilon)$, $\Pi^{(j)} = \{\xi: |\xi_1 - \pi j| < \pi/2, \xi_2 > 0\}$, $\Pi_\eta^{(j)} = \Pi^{(j)} \cap \{\xi: 4|\xi - \xi^{(j)}| > \eta^{1/4}\}$, $\Omega_\eta^{\text{bl}} = \Omega^{\text{bl}} \cap \{x: \xi \in \Pi_\eta^{(j)}, j = 0, \dots, N-1\}$.

ЛЕММА 2.4. Для пограничного слоя (2.31) при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы следующие равномерные оценки:

$$\begin{aligned} \|\psi_\varepsilon^{\text{bl}}\|_{L_2(\Omega^{\text{bl}})} &\leq C\varepsilon^{3/2}(A + \mu), \\ \|\psi_\varepsilon^{\text{bl}} - \varepsilon v_1 - \varepsilon^2(v_2 - \tilde{v}_2)\|_{H^1(\Omega_\eta^{\text{bl}})} &\leq C\varepsilon^{3/2}(A + \mu)^2, \\ \|(\Delta_x + \hat{\lambda}_\varepsilon)\psi_\varepsilon^{\text{bl}}\|_{L_2(\Omega^{\text{bl}})} &\leq C(\varepsilon^{3/2}(A + \mu) + \varepsilon^{1/2}\delta^*(\varepsilon)(A + \mu)^2). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Всюду в доказательстве леммы, не оговаривая это дополнительно, будем опираться на тот очевидный факт, что

$$\xi_2^{i+k} \frac{\partial^i X}{\partial \xi_2^i}, \quad \xi_2^{i+k} \frac{\partial^i X}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^{i-1}} \in L_2(\Pi^{(j)}) \cap \mathcal{V}_0, \quad i, k \in \mathbb{Z}, \quad i, k \geq 0.$$

Верна оценка

$$\|\psi_\varepsilon^{\text{bl}}\|_{L_2(\Omega^{\text{bl}})} \leq \varepsilon \left(\sum_{j=0}^{N-1} \|\psi_\varepsilon^{\text{bl}}\|_{L_2(\Pi^{(j)})}^2 \right)^{1/2}.$$

Нормы $\|\psi_\varepsilon^{\text{bl}}\|_{L_2(\Pi^{(j)})}$ оценим, используя явный вид функций v_i и оценки из леммы 2.3:

$$\|\psi_\varepsilon^{\text{bl}}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq C\varepsilon(A + \mu).$$

Из последних двух оценок и равенства $N = 2\varepsilon^{-1}$ следует первое неравенство из утверждения леммы. Второе неравенство из утверждения леммы доказывается аналогично, на основе явного вида функций v_i и леммы 2.3. Для краткости обозначим $F_\varepsilon = (\Delta_x + \hat{\lambda}_\varepsilon)\psi_\varepsilon^{\text{bl}}$. Используя явный вид функций v_i , вычислим

$$\begin{aligned} P^3 F_\varepsilon &= \varepsilon \sum_{i=1}^3 \xi_2^i \left(T_{0,i} \frac{\partial^i X}{\partial \xi_2^i} + T_{1,i-1} \frac{\partial^i X}{\partial \xi_1 \partial \xi_2^{i-1}} \right) + \varepsilon T_{0,0} X \\ &\quad + \varepsilon^2 T_{1,-1} \int_{\xi_2}^{+\infty} t \frac{\partial}{\partial \xi_1} X(\xi_1, t) dt + \varepsilon T_{0,-1} \int_{\xi_2}^{+\infty} t X(\xi_1, t) dt. \end{aligned}$$

Здесь $T_{i,k} = T_{i,k}(\xi_2, s, \varepsilon, \mu)$ – полиномы по ξ_2 с коэффициентами, зависящими от остальных переменных, причем эти коэффициенты в силу леммы 2.3 оцениваются сверху величиной $C((A + \mu) + \varepsilon^{-1}\delta^*(\varepsilon)(A + \mu)^2)$, где C не зависит от ε, μ, s . Используя указанные оценки коэффициентов полиномов $T_{i,k}$ и вид функции $P^3 F_\varepsilon$, убеждаемся, что

$$\|P^3 F_\varepsilon\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq C(\varepsilon(A + \mu) + \delta^*(\varepsilon)(A + \mu)^2),$$

где C не зависит от ε, μ, s и j . Поскольку при $x \in \bar{\Omega}^{\text{bl}}$ функция P не обращается в нуль, то

$$\|F_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^{\text{bl}})} \leq C\|P^3 F_\varepsilon\|_{L_2(\Omega^{\text{bl}})} \leq C\varepsilon \left(\sum_{j=0}^{N-1} \|P^3 F_\varepsilon\|_{L_2(\Pi^{(j)})}^2 \right)^{1/2},$$

откуда вместе с уже полученными оценками норм $\|P^3 F_\varepsilon\|_{L_2(\Pi^{(j)})}$ получаем третье неравенство утверждения леммы. Лемма доказана.

Обозначим $\Omega_j^{\text{in}} = \{x: 4\eta^{3/4}|\varsigma^j| < 3\}$, $\Omega_j^{\text{mat}} = \{x: 1 < 4|\varsigma^j|\eta^{3/4} < 3, j = 0, \dots, N-1\}$.

Аналогично лемме 2.4 доказывается справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 2.5. *Для внутреннего разложения (2.32) при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы следующие равномерные по ε, μ и η оценки:*

$$\begin{aligned} \|\psi_\varepsilon^{\text{in},j}\|_{L_2(\Omega_j^{\text{in}})} &\leq C\eta^{1/5}, \quad \|(\Delta_x + \hat{\lambda}_\varepsilon)\psi_\varepsilon^{\text{in},j}\|_{L_2(\Omega_j^{\text{in}})} \leq C\eta^{1/5}, \\ \|\psi_\varepsilon^{\text{in},j} - \varepsilon w_{1,0}^{(j)} - \varepsilon^2 w_{2,0}^{(j)}\|_{H^1(\Omega_j^{\text{in}})} &\leq C\varepsilon^2(A + \mu)^{3/2}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\hat{\psi}_\varepsilon(x) = (\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \mu) + \chi(\tau/c_0)\psi_\varepsilon^{\text{bl}}(\xi, s, \mu))\chi_\varepsilon(x) + \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\varsigma^j|\eta^{3/4})\psi_\varepsilon^{\text{in},j}(\varsigma^j, s, \mu),$$

где $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}, \psi_\varepsilon^{\text{bl}}$ и $\psi_\varepsilon^{\text{in},j}$ из (2.30)–(2.32),

$$\chi_\varepsilon(x) = 1 - \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\varsigma^j|\eta^{3/4}).$$

В следующем утверждении докажем, что формально построенные асимптотики $\hat{\lambda}_\varepsilon$ и $\hat{\psi}_\varepsilon$ являются формальным асимптотическим решением возмущенной задачи.

ЛЕММА 2.6. *Функции $\widehat{\psi}_\varepsilon \in C^\infty(\Omega \cup \gamma_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon) \cap H^1(\Omega)$ и $\widehat{\lambda}_\varepsilon$ удовлетворяют краевой задаче*

$$-\Delta u_\varepsilon = \lambda u_\varepsilon + f, \quad x \in \Omega, \quad u_\varepsilon = 0, \quad x \in \gamma_\varepsilon, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad (2.50)$$

при $u_\varepsilon = \widehat{\psi}_\varepsilon$, $\lambda = \widehat{\lambda}_\varepsilon$ и $f = f_\varepsilon$, где для f_ε верна равномерная оценка:

$$\|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq C(\varepsilon^{3/2}(A + \mu(\varepsilon)) + \varepsilon^{1/2}\delta^*(\varepsilon)(A + \mu(\varepsilon))^2). \quad (2.51)$$

Функция $\widehat{\lambda}_\varepsilon$ сходится к λ_0 при $\varepsilon \rightarrow 0$, а для функции $\widehat{\psi}_\varepsilon$ справедлива оценка $\|\widehat{\psi}_\varepsilon - \Psi_0\|_{L_2(\Omega)} = o(1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение о гладкости функции $\widehat{\psi}_\varepsilon$ очевидно. Сходимость $\widehat{\lambda}_\varepsilon$ к λ_0 следует из лемм 1.1 и 2.3. Оценка $\|\widehat{\psi}_\varepsilon - \Psi_0\|_{L_2(\Omega)} = o(1)$ является прямым следствием лемм 2.3–2.5. Проверим граничные условия из (2.50). Равенство функции $\widehat{\psi}_\varepsilon$ на γ_ε вытекает из равенства нулю χ_ε на γ_ε и равенства нулю $\psi_\varepsilon^{\text{in},j}$ на γ_j^1 . Нетрудно проверить, что при $x \in \Gamma_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{\psi}_\varepsilon}{\partial \nu} &= \left(\frac{\partial \psi_\varepsilon^{\text{ex}}}{\partial \nu} - \frac{\theta'_\varepsilon}{\varepsilon} \frac{\partial \psi_\varepsilon^{\text{bl}}}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi \in \Gamma^0} \right) \chi_\varepsilon(x) - \frac{\theta'_\varepsilon}{\varepsilon \eta} \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\varsigma^j| \eta^{3/4}) \frac{\partial \psi_\varepsilon^{\text{in},j}}{\partial \varsigma_2} \Big|_{\varsigma \in \Gamma_j^1} \\ &= \chi_\varepsilon(x) \sum_{i=0}^2 \varepsilon^i \left(\Psi_i^\nu - \theta'_\varepsilon \frac{\partial v_{i+1}}{\partial \xi_2} \Big|_{\xi \in \Gamma^0} \right) = 0. \end{aligned}$$

Оценим функцию f_ε . Она, очевидно, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon &= -(\Delta_x + \widehat{\lambda}_\varepsilon) \widehat{\psi}_\varepsilon = - \sum_{i=1}^5 f_\varepsilon^{(i)}, \\ f_\varepsilon^{(1)} &= \chi_\varepsilon(\Delta_x + \widehat{\lambda}_\varepsilon) \psi_\varepsilon^{\text{ex}}, \\ f_\varepsilon^{(2)} &= \chi_\varepsilon \chi(\tau/c_0) (\Delta_x + \widehat{\lambda}_\varepsilon) \psi_\varepsilon^{\text{bl}}, \\ f_\varepsilon^{(3)} &= \chi_\varepsilon (2(\nabla_x \psi_\varepsilon^{\text{bl}}, \nabla_x \chi(\tau/c_0)) + \psi_\varepsilon^{\text{bl}} \Delta_x \chi(\tau/c_0)), \\ f_\varepsilon^{(4)} &= \sum_{j=0}^{N-1} \chi(|\varsigma^j| \eta^{3/4}) (\Delta_x + \widehat{\lambda}_\varepsilon) \psi_\varepsilon^{\text{in},j}, \\ f_\varepsilon^{(5)} &= \sum_{j=0}^{N-1} (2(\nabla_x \psi_\varepsilon^{\text{mat},j}, \nabla_x \chi(|\varsigma^j| \eta^{3/4})) + \psi_\varepsilon^{\text{mat},j} \Delta_x \chi(|\varsigma^j| \eta^{3/4})), \\ \psi_\varepsilon^{\text{mat},j} &= \psi_\varepsilon^{\text{in},j} - \psi_\varepsilon^{\text{ex}} - \psi_\varepsilon^{\text{bl}}. \end{aligned}$$

Используя уравнения (1.7), (2.8) и (2.33), нетрудно убедиться в том, что

$$(\Delta_x + \widehat{\lambda}_\varepsilon) \psi_\varepsilon^{\text{ex}} = \varepsilon^2 (\Lambda_0 + 1 + \varepsilon \Lambda_1) \Psi_2,$$

а потому в силу леммы 2.3 имеем

$$\|f_\varepsilon^{(1)}\|_{L_2(\Omega)} \leq C \varepsilon^2 (A + \mu)^3.$$

Функция $f_\varepsilon^{(2)}$ оценивается с помощью леммы 2.4:

$$\|f_\varepsilon^{(2)}\|_{L_2(\Omega)} \leq \|f_\varepsilon^{(2)}\|_{L_2(\Omega^{\text{bl}})} \leq C(\varepsilon^{3/2}(A + \mu) + \varepsilon^{1/2}\delta^*(\varepsilon)(A + \mu)^2).$$

Функции v_i и, следовательно, $\psi_\varepsilon^{\text{bl}}$ экспоненциально убывают, а интегрирование $f_\varepsilon^{(3)}$ по Ω в силу определения χ фактически сводится к интегрированию по области $\{x: \frac{c_0\theta'_\varepsilon}{4\varepsilon} \leq \xi_2 \leq \frac{3c_0\theta'_\varepsilon}{4\varepsilon}\}$, а потому

$$\|f_\varepsilon^{(3)}\|_{L_2(\Omega)} \leq C(A + \mu)e^{-1/\varepsilon^{c_5}},$$

где $c_5 > 0$ – некоторое фиксированное число. Далее, функцию $f_\varepsilon^{(4)}$ оцениваем на основе леммы 2.5:

$$\|f_\varepsilon^{(4)}\|_{L_2(\Omega)} \leq C \sum_{j=0}^{N-1} \|(\Delta_x + \hat{\lambda}_\varepsilon)\psi_\varepsilon^{\text{in},j}\|_{L_2(\Omega_j^{\text{in}})} \leq C\eta^{1/6}.$$

В силу проведенного согласования (см. (2.34), (2.41)) функция $\psi_\varepsilon^{\text{mat},j}$ при $\eta^{-3/4} \leq 4|\varsigma^j| \leq 3\eta^{-3/4}$ имеет следующую дифференцируемую асимптотику:

$$\psi_\varepsilon^{\text{mat},j} = O(\eta^2|\varsigma|^2 |\ln |\varsigma|| + \varepsilon|\varsigma|^{-1} + \varepsilon\eta), \quad (2.52)$$

используя которую, оцениваем $f_\varepsilon^{(5)}$:

$$\|f_\varepsilon^{(5)}\|_{L_2(\Omega)} \leq C \sum_{j=0}^{N-1} \|f_\varepsilon^{(5)}\|_{L_2(\Omega_j^{\text{mat}})} \leq C\eta^{1/5}.$$

Из полученных оценок величин $f_\varepsilon^{(i)}$ следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Переходим к обоснованию асимптотик. Аналогично [17], [19], [28], [29], [37] можно показать, что при λ , близких к p -кратному собственному значению λ_0 предельной задачи, для решения задачи (2.50) при $f \in L_2(\Omega)$ справедливо представление

$$u_\varepsilon = \sum_{k=q}^{q+p-1} \frac{\psi_\varepsilon^k}{\lambda_\varepsilon^k - \lambda} \int_\Omega f \psi_\varepsilon^k dx + \tilde{u}_\varepsilon, \quad (2.53)$$

где λ_ε^k , $k = q, \dots, q+p-1$, – собственные значения возмущенной задачи, сходящиеся к λ_0 , ψ_ε^k , напомним, соответствующие ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции, $\tilde{u}_\varepsilon$ – голоморфная по λ в норме $H^1(\Omega)$ функция, ортогональная всем ψ_ε^k , $k = q, \dots, q+p-1$, в $L_2(\Omega)$; для функции $\tilde{u}_\varepsilon$ выполнена равномерная по $\varepsilon, \mu, \lambda$ и f оценка

$$\|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|f\|_{L_2(\Omega)}. \quad (2.54)$$

В рассматриваемом случае λ_0 – простое собственное значение. Положим $u_\varepsilon = \hat{\psi}_\varepsilon$, $\lambda = \hat{\lambda}_\varepsilon$ и $f = f_\varepsilon$. Тогда из леммы 2.6 и соотношений (2.53), (2.54) получаем

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_\varepsilon &= \frac{\psi_\varepsilon}{\lambda_\varepsilon - \hat{\lambda}_\varepsilon} \int_\Omega f_\varepsilon \psi_\varepsilon dx + \tilde{u}_\varepsilon, \\ \|\tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} &\leq C(\varepsilon^{3/2}(A + \mu) + \varepsilon^{1/2}\delta^*(\varepsilon)(A + \mu)^2). \end{aligned} \quad (2.55)$$

Поскольку $\|\widehat{\psi}_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} = \|\Psi_0\|_{L_2(\Omega)}(1 + o(1)) = 1 + o(1)$ (см. лемму 2.6), то в силу (2.55) имеем

$$C \leq \frac{\|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}}{|\lambda_\varepsilon - \widehat{\lambda}_\varepsilon|} \implies |\lambda_\varepsilon - \widehat{\lambda}_\varepsilon| \leq C(\varepsilon^{3/2}(A + \mu) + \varepsilon^{1/2}\delta^*(\varepsilon)(A + \mu)^2).$$

В силу следствия 2.1 можно заменить в последней оценке функцию $\delta^*(\varepsilon)$ на $o(\varepsilon^{1/2}(A + \mu)^{-1})$, т.е. асимптотика (1.10) верна.

Случай p -кратного собственного значения $\lambda_0 = \lambda_0^q = \dots = \lambda_0^{q+p-1}$ в целом доказывается аналогично. При построении кратность λ_0 проявляется в том, что по той же схеме мы строим несколько асимптотик, соответствующих собственным значениям λ_ε^k , сходящимся к λ_0 . Кроме того, в построении кратность проявляется при решении задачи (1.7), (1.8), которая будет иметь несколько собственных значений Λ_0^k , сходящихся к Λ_0 , и, разумеется, несколько собственных функций Ψ_0^k . Собственные значения Λ_0^k удовлетворяют лемме 1.1, соответствующие собственные функции Ψ_0^k также следует выбрать согласно лемме 1.1. В частности, ортогональность Ψ_0^k в $L_2(\partial\Omega)$ с весом θ'_ε является условием разрешимости задач для функций Ψ_1^k , которые мы вновь выбираем ортогональными Ψ_0^k . Все остальные рассуждения формального построения, в том числе утверждения лемм 2.3–2.5, остаются в силе. Таким образом, в результате формального построения имеем функции $\widehat{\lambda}_\varepsilon^k$ и $\widehat{\psi}_\varepsilon^k$, $k = q, \dots, q + p - 1$, которые определяются так же, как $\widehat{\lambda}_\varepsilon$ и $\widehat{\psi}_\varepsilon$, с заменой Λ_0 на Λ_0^k и Ψ_0 на Ψ_0^k . Для $\widehat{\lambda}_\varepsilon^k$ и $\widehat{\psi}_\varepsilon^k$ выполнена лемма 2.6. Через f_ε^k обозначим правые части уравнений из (2.50) с $u_\varepsilon = \widehat{\psi}_\varepsilon^k$, $\lambda = \widehat{\lambda}_\varepsilon^k$.

Применим представление (2.53) к функциям $\widehat{\psi}_\varepsilon^k$:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_\varepsilon^k &= \sum_{i=q}^{q+p-1} h_{ki}^\varepsilon \psi_\varepsilon^i + \tilde{u}_\varepsilon^k, \quad h_{ki}^\varepsilon = \frac{1}{\lambda_\varepsilon^i - \widehat{\lambda}_\varepsilon^k} \int_\Omega f_\varepsilon^k \psi_\varepsilon^i dx, \\ \|\tilde{u}_\varepsilon^k\|_{H^1(\Omega)} &\leq C(\varepsilon^{3/2}(A + \mu) + \varepsilon^{1/2}\delta^*(\varepsilon)(A + \mu)^2). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Последняя оценка для $\tilde{u}_\varepsilon^k$ вытекает из (2.54) и леммы 2.6. В силу (2.56) и ортогональности $\tilde{u}_\varepsilon^k$ функциям ψ_ε^k получаем соотношения

$$h_{ki}^\varepsilon = (\widehat{\psi}_\varepsilon^k, \psi_\varepsilon^i)_{L_2(\Omega)}, \quad (2.57)$$

откуда следует ограниченность величин h_{ki}^ε . Докажем теперь асимптотики (1.10) для собственных значений λ_ε^k , $k = q, \dots, q + p - 1$. Допустим противное, а именно пусть существует подпоследовательность ε_m , на которой для некоторых собственных значений λ_ε^k , $k = q, \dots, q + p - 1$, асимптотики (1.10) неверны и для $k = q, \dots, q + p - 1$, $i \in I \neq \emptyset$ выполнено

$$|\lambda_{\varepsilon_m}^i - \widehat{\lambda}_{\varepsilon_m}^k| \geq m(\varepsilon_m^{3/2}(A + \mu) + \varepsilon_m^{1/2}\delta^*(\varepsilon_m)(A + \mu)^2), \quad (2.58)$$

где $I \subseteq \{q, \dots, q + p - 1\}$ – подмножество индексов собственных значений, которые не удовлетворяют асимптотикам (1.10). В силу оценок для функций f_ε^k , формул для h_{ki}^ε из (2.56) и неравенств (2.58) получаем

$$h_{ki}^{\varepsilon_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \quad k = q, \dots, q + p - 1, \quad i \in I. \quad (2.59)$$

Учитывая теперь ограниченность $h_{ki}^{\varepsilon_m}$ и выделяя при необходимости из ε_m подпоследовательность, считаем, что $h_{ki}^{\varepsilon_m} \rightarrow h_{ki}^0$, причем в силу (2.59) верны равенства $h_{ki}^0 = 0$ при $k = q, \dots, q + p - 1$, $k \in I$. Из чисел $h_{ki}^{\varepsilon_m}$ составим p векторов $h_k^{\varepsilon_m}$ по следующему правилу: в качестве компонент вектора $h_k^{\varepsilon_m}$ берем последовательно числа $h_{ki}^{\varepsilon_m}$, причем индекс i меняется в пределах от q до $q + p - 1$ и не принимает значений из множества I . Аналогичным образом из чисел h_{ki}^0 составим p векторов h_k^0 . Размерности полученных векторов, очевидно, равны $p - |I| < p$. Теперь умножим скалярно в $L_2(\Omega)$ представления (2.56) для $\widehat{\psi}_\varepsilon^k$ друг на друга при всех значениях k и учтем равенства $\|\widehat{\psi}_\varepsilon^k - \Psi_0^k\|_{L_2(\Omega)} = o(1)$, оценки для $\widehat{u}_\varepsilon^k$ и ортонормированность функций Ψ_0^k и ψ_ε^k . Тогда получим

$$(h_k^0, h_j^0)_{L_2(\Omega)} = \lim_{m \rightarrow \infty} (h_k^{\varepsilon_m}, h_j^{\varepsilon_m})_{L_2(\Omega)} = \delta_{kj}, \quad k, j = q, \dots, q + p - 1,$$

где δ_{kj} – символ Кронекера, т.е. h_k^0 образуют систему p ортонормированных $(p - |I|)$ -мерных векторов. Из полученного противоречия следуют оценки

$$|\lambda_\varepsilon^k - \widehat{\lambda}_\varepsilon^k| \leq C(\varepsilon^{3/2}(A + \mu) + \varepsilon^{1/2}\delta^*(\varepsilon)(A + \mu)^2),$$

что с учетом равенства (1.9), леммы 2.1 и следствия 2.1 приводит к асимптотикам (1.10) и в случае кратного собственного значения λ_0 . Теорема 1.4 полностью доказана.

Выясним теперь асимптотическое поведение собственных функций возмущенной задачи в условиях теоремы 1.4. При выполнении условий (C0), (C1) и равенства (1.5) при $A \geq 0$ аналогично работам [2], [6], [8] нетрудно установить следующее. Если λ_0^k – простое собственное значение задачи (1.6), а ψ_0^k – соответствующая собственная функция, то собственная функция ψ_ε^k сходится к ψ_0^k . Если $\lambda_0 = \lambda_0^q = \dots = \lambda_0^{q+p-1}$ – p -кратное собственное значение и $\lambda_\varepsilon^k \rightarrow \lambda_0^k$, $k = q, \dots, q + p - 1$, то к каждой соответствующей собственной функции ψ_0^k , $k = q, \dots, q + p - 1$, сходится линейная комбинация собственных функций ψ_ε^l , $l = q, \dots, q + p - 1$. Данная сходимость является сильной в $L_2(\Omega)$ и слабой в $H^1(\Omega)$, если предельная – третья краевая задача ($A > 0$), и сильной в $H^1(\Omega)$, если предельная – вторая краевая задача ($A = 0$).

Будем придерживаться обозначений из доказательства теоремы 1.4. Пусть λ_0 – простое собственное значение. Из леммы 2.6 и замечания 1.3 вытекает, что $\widehat{\psi}_\varepsilon$ сходится к ψ_0 в $L_2(\Omega)$.

Умножая (2.55) скалярно в $L_2(\Omega)$ на ψ_ε , благодаря леммам 2.3–2.5 видим, что

$$\frac{1}{\lambda_\varepsilon - \widehat{\lambda}_\varepsilon} \int_\Omega f_\varepsilon \psi_\varepsilon dx = (\widehat{\psi}_\varepsilon, \psi_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} = (\Psi_0 + \varepsilon \Psi_1, \psi_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} + O(\varepsilon^{3/2}(A + \mu)).$$

Из последнего соотношения, вводя обозначение

$$\widetilde{\psi}_\varepsilon = (\Psi_0 + \varepsilon \Psi_1, \psi_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} \psi_\varepsilon, \quad (2.60)$$

и из (2.55), (1.9) и следствия 2.1 выводим, что

$$\|\widetilde{\psi}_\varepsilon - \widehat{\psi}_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq C(\varepsilon^{3/2}(A + \mu) + \varepsilon^{1/2}\delta^*(\varepsilon)(A + \mu)^2) = o(\varepsilon(A + \mu)),$$

откуда в силу замечания 1.3 и леммы 2.6 следует, что собственная функция $\tilde{\psi}_\varepsilon$ возмущенной задачи, соответствующая λ_ε , сходится к ψ_0 в $L_2(\Omega)$ и имеет в силу лемм 2.3–2.5 и проведенного согласования следующую асимптотику в норме $H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\varepsilon(x) = & \left(\Psi_0(x, \mu, \varepsilon) + \varepsilon \Psi_1(x, \mu, \varepsilon) - \frac{\chi(\tau/c_0)}{\theta'_\varepsilon(s)} \sum_{n=0}^1 \varepsilon^{n+1} \Psi_n^\nu(s, \mu, \varepsilon) X(\xi) \right) \chi_\varepsilon(x) \\ & - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\chi(|\varsigma^j| \eta^{3/4})}{\theta'_\varepsilon(s)} \sum_{n=0}^1 \varepsilon^{n+1} \Psi_n^\nu(s, \mu, \varepsilon) Y^{(j)}(\varsigma^j, \varepsilon) + o(\varepsilon(A + \mu)). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Пусть теперь $\lambda_0 = \lambda_0^q = \dots = \lambda_0^{q+p-1}$ – p -кратное собственное значение. Вычислим коэффициенты линейной комбинации собственных функций возмущенной задачи, сходящихся к $\psi_0^q, \dots, \psi_0^{q+p-1}$, и асимптотики этих линейных комбинаций. Прежде докажем вспомогательную лемму.

ЛЕММА 2.7. *Имеет место сходимость в $H^1(\Omega)$:*

$$\sum_{n=q}^{q+p-1} (\psi_0^k, \Psi_0^n)_{L_2(\Omega)} \Psi_0^n \rightarrow \psi_0^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Собственные функции Ψ_0^k , $k = q, \dots, q + p - 1$, сходятся к собственным функциям ψ_0^k задачи (1.6) в том смысле, что для всякой собственной функции ψ_0^k , $k = q, \dots, q + p - 1$, существует линейная комбинация собственных функций Ψ_0^n , $n = q, \dots, q + p - 1$, сходящаяся к ψ_0^k в $H^1(\Omega)$ [35]:

$$\sum_{n=q}^{q+p-1} h_{nk} \Psi_0^n = \psi_0^k (1 + o(1)).$$

Умножая это равенство на Ψ_0^i скалярно в $L_2(\Omega)$, получаем

$$h_{ik} = (\psi_0^k, \Psi_0^i)_{L_2(\Omega)} (1 + o(1)),$$

откуда следует утверждение леммы. Лемма доказана.

Из формул (2.57) и лемм 2.3–2.5 вытекает, что

$$h_{ki}^\varepsilon = (\Psi_0 + \varepsilon \Psi_1, \psi_\varepsilon^i)_{L_2(\Omega)} + O(\varepsilon^{3/2}(A + \mu)), \quad (2.62)$$

причем последние соотношения верны в предположении лишь ограниченности функции $\delta^*(\varepsilon)$. Используя эти соотношения и (2.56), выводим оценку

$$\left\| \sum_{i=q}^{q+p-1} (\Psi_0^n + \varepsilon \Psi_1^n, \psi_\varepsilon^i)_{L_2(\Omega)} \psi_\varepsilon^i - \widehat{\psi}_\varepsilon^n \right\|_{H^1(\Omega)} = O(\varepsilon^{3/2}(A + \mu) + \varepsilon^{1/2} \delta^*(\varepsilon)(A + \mu)^2), \quad (2.63)$$

откуда в силу леммы 2.7 и оценки $\|\widehat{\psi}_\varepsilon^n - \Psi_0^n\|_{L_2(\Omega)} = o(1)$ (см. лемму 2.6) вытекает сходимость в $L_2(\Omega)$:

$$\widetilde{\psi}_\varepsilon^k \equiv \sum_{n=q}^{q+p-1} (\psi_0^k, \Psi_0^n)_{L_2(\Omega)} \sum_{i=q}^{q+p-1} (\Psi_0^n + \varepsilon \Psi_1^n, \psi_\varepsilon^i)_{L_2(\Omega)} \psi_\varepsilon^i \rightarrow \psi_0^k, \quad (2.64)$$

т. е. $\widetilde{\psi}_\varepsilon^k$ — линейная комбинация собственных функций возмущенной задачи, сходящаяся к ψ_0^k в $L_2(\Omega)$. С другой стороны, в силу (2.63) для $\widetilde{\psi}_\varepsilon^k$ верна оценка

$$\left\| \widetilde{\psi}_\varepsilon^k - \sum_{i=q}^{q+p-1} (\psi_0^k, \Psi_0^i)_{L_2(\Omega)} \widehat{\psi}_\varepsilon^i \right\|_{H^1(\Omega)} = O(\varepsilon^{3/2}(A + \mu) + \varepsilon^{1/2}\delta^*(\varepsilon)(A + \mu)^2),$$

откуда, учитывая равенство (1.9) и следствие 2.1, получим, что асимптотика для $\widetilde{\psi}_\varepsilon^k$ в $H^1(\Omega)$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi}_\varepsilon^k(x) = & \sum_{i=q}^{q+p-1} (\psi_0^k, \Psi_0^i)_{L_2(\Omega)} \left(\left(\Psi_0^i(x, \mu, \varepsilon) + \varepsilon \Psi_1^i(x, \mu, \varepsilon) \right. \right. \\ & - \frac{\chi(\tau/c_0)}{\theta'_\varepsilon(s)} \sum_{n=0}^1 \varepsilon^{n+1} \Psi_n^{i,\nu}(s, \mu, \varepsilon) X(\xi) \Big) \chi_\varepsilon(x) \\ & \left. - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\chi(|\varsigma^j| \eta^{3/4})}{\theta'_\varepsilon(s)} \sum_{n=0}^1 \varepsilon^{n+1} \Psi_n^{i,\nu}(s, \mu, \varepsilon) Y^{(j)}(\varsigma^j, \varepsilon) \right) + o(\varepsilon(A + \mu)). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия теоремы 1.4. Если $\lambda_0 = \lambda_0^k$ — простое собственное значение задачи (1.6), то собственная функция $\widetilde{\psi}_\varepsilon$ из (2.60) при $\psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon^k$ сходится к ψ_0^k в $L_2(\Omega)$ -норме и имеет в $H^1(\Omega)$ асимптотику (2.61), где Ψ_1 — решение задачи (2.8), (2.28) при $\Psi_0 = \Psi_0^k$, $\Psi_n^\nu = \Psi_n^{k,\nu}$ — значения нормальных производных функций Ψ_n^k на $\partial\Omega$, X и $Y^{(j)}$ определены равенствами (2.13) и (2.25). Если $\lambda_0 = \lambda_0^q = \dots = \lambda_0^{q+p-1}$ — p -кратное собственное значение задачи (1.6), то для каждой соответствующей собственной функции ψ_0^k , $k = q, \dots, q+p-1$, существует линейная комбинация (2.64) собственных функций возмущенной задачи, сходящаяся к ψ_0^k в норме $L_2(\Omega)$ и имеющая в $H^1(\Omega)$ асимптотику (2.65).

Из доказательств теорем 1.4 и 2.1 следует справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 2.8. Пусть выполнены условия (C0), (C1) и равенство (1.5) при $A \geq 0$ для функции η из (C1). Тогда остатки в асимптотиках (1.10), (2.61) и (2.65) есть величины порядка $O(\varepsilon^{3/2}(A + \mu) + \varepsilon^{1/2}\delta^*(\varepsilon)(A + \mu)^2)$.

Если $A = 0$, т. е. предельной является задача Неймана, то можно усилить утверждение теоремы 2.1 следующим образом.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть выполнены условия (C0), (C1) и равенство (1.5) при $A = 0$ для функции η из (C1). Тогда собственная функция $\tilde{\psi}_\varepsilon^k$ из (2.60) в случае простого предельного собственного значения и линейная комбинация собственных функций $\tilde{\psi}_\varepsilon^k$ из (2.64) в случае кратного предельного собственного значения сходятся к предельным собственным функциям ψ_0^k в $H^1(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что для всех k при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место равенство

$$\|\widehat{\psi}_\varepsilon^k - \Psi_0^k\|_{H^1(\Omega)} = o(1). \quad (2.66)$$

Поскольку

$$\|\widehat{\psi}_\varepsilon^k - \Psi_0^k\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\nabla_x(\widehat{\psi}_\varepsilon^k - \Psi_0^k)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\widehat{\psi}_\varepsilon^k - \Psi_0^k\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

причем последнее слагаемое стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу леммы 2.6, то остается оценить лишь норму градиента. Учитывая вид $\widehat{\psi}_\varepsilon^k$, норму градиента $\widehat{\psi}_\varepsilon^k - \Psi_0^k$ оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} \|\nabla_x(\widehat{\psi}_\varepsilon^k - \Psi_0^k)\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq 2\|\nabla_x(\psi_\varepsilon^{\text{ex}} - \Psi_0^k)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{j=0}^{N-1} \|\nabla_x \psi_\varepsilon^{\text{in},j}\|_{L_2(\Omega_j^{\text{in}})}^2 \\ &\quad + 2\|\nabla_x(\psi_\varepsilon^{\text{bl}} \chi(\tau/c_0))\|_{L_2(\Omega_\eta^{\text{bl}})}^2 \\ &\quad + 2 \sum_{j=0}^{N-1} \|\nabla_x(\psi_\varepsilon^{\text{mat},j} \chi(|\varsigma^j| \eta^{3/4}))\|_{L_2(\Omega_j^{\text{mat}})}^2, \end{aligned} \quad (2.67)$$

где $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}$, $\psi_\varepsilon^{\text{bl}}$, $\psi_\varepsilon^{\text{in},j}$ и $\psi_\varepsilon^{\text{mat},j}$ — функции, определенные в доказательстве теоремы 1.4 и соответствующие ψ_0^k .

В силу леммы 2.3 и определения $\psi_\varepsilon^{\text{ex}}$ имеем

$$\|\nabla_x(\psi_\varepsilon^{\text{ex}} - \Psi_0^k)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C\varepsilon^2 \mu^4. \quad (2.68)$$

Нетрудно видеть, что

$$\|\nabla_x(\psi_\varepsilon^{\text{bl}} \chi(\tau/c_0))\|_{L_2(\Omega_\eta^{\text{bl}})}^2 \leq C(\|\nabla_x \psi_\varepsilon^{\text{bl}}\|_{L_2(\Omega_\eta^{\text{bl}} \cap \Omega^{\text{bl}})}^2 + \|\psi_\varepsilon^{\text{bl}}\|_{L_2(\Omega^{\text{bl}})}^2).$$

Второе слагаемое в правой части полученного неравенства оценивается сверху величиной $C\varepsilon^{3/2}\mu$ (см. лемму 2.4). Прямыми вычислениями с использованием явного вида функций v_i , ограниченности функции $\delta^*(\varepsilon)$, леммы 2.3 и равенства $N = 2\varepsilon^{-1}$ проверяется, что

$$\|\nabla_x \psi_\varepsilon^{\text{bl}}\|_{L_2(\Omega_\eta^{\text{bl}} \cap \Omega^{\text{bl}})}^2 \leq C \sum_{j=0}^{N-1} \left(\|\nabla_\xi \psi_\varepsilon^{\text{bl}}\|_{L_2(\Pi_\eta^{(j)})}^2 + \varepsilon^2 \left\| \frac{\partial}{\partial s} \psi_\varepsilon^{\text{bl}} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})}^2 \right) \leq C\mu.$$

Таким образом,

$$\|\nabla_x(\psi_\varepsilon^{\text{bl}} \chi(\tau/c_0))\|_{L_2(\Omega_\eta^{\text{bl}})}^2 \leq C\mu. \quad (2.69)$$

Из явного вида функций $\psi_\varepsilon^{\text{in},j}$ следует, что

$$\sum_{j=0}^{N-1} \|\nabla_x \psi_\varepsilon^{\text{in},j}\|_{L_2(\Omega_j^{\text{in}})}^2 \leq C\mu. \quad (2.70)$$

Используя асимптотику (2.52), докажем, что

$$\sum_{j=0}^{N-1} \|\nabla_x (\psi_\varepsilon^{\text{mat},j} \chi(|\zeta^j| \eta^{3/4}))\|_{L_2(\Omega_j^{\text{mat}})}^2 \leq C\eta^{1/5}. \quad (2.71)$$

Из оценок (2.67)–(2.71) выводим равенство (2.66). Заметим, что сходимость (2.66) получена без использования равенства (1.9) и верна для любой ограниченной функции $\delta^*(\varepsilon)$.

Пусть ψ_0 соответствует простому собственному значению. Ввиду сходимостей (2.66) и $\Psi_0 \xrightarrow{H^1(\Omega)} \psi_0$ (см. замечание 1.3) заключаем, что $\widehat{\psi}_\varepsilon$ сходится к ψ_0 сильно в $H^1(\Omega)$. Следовательно, собственная функция $\widetilde{\psi}_\varepsilon$ из (2.60) в силу леммы 2.8 удовлетворяет равенству

$$\|\widetilde{\psi}_\varepsilon - \widehat{\psi}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} = o(1),$$

откуда следует, что собственная функция ψ_ε сходится к ψ_0 в норме $H^1(\Omega)$.

Пусть ψ_0 соответствует p -кратному собственному значению

$$\lambda_0 = \lambda_0^q = \dots = \lambda_0^{q+p-1},$$

которому соответствуют собственные функции ψ_0^k , $k = q, \dots, q+p-1$. Для функций $\widehat{\psi}_\varepsilon^k$ и Ψ_0^k выполнено соотношение (2.66). Из этих соотношений, леммы 2.7 и оценки (2.63) следует, что линейная комбинация собственных функций возмущенной задачи $\widetilde{\psi}_\varepsilon^k$ из (2.64) сходится к ψ_0^k в $H^1(\Omega)$. Теорема доказана.

§ 3. Асимптотики собственных элементов возмущенной задачи в условиях теоремы 1.5

В настоящем параграфе будут получены асимптотики собственных элементов возмущенной задачи в случае нарушения условия (1.9) теоремы 1.4. Вначале докажем теорему 1.5 об асимптотиках собственных значений, а затем – теорему 3.1 об асимптотиках соответствующих собственных функций. Далее, если не оговорено особо, придерживаемся обозначений из предыдущего параграфа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. В доказательстве используем ограниченность функции $\delta^*(\varepsilon)$, доказанную в следствии 2.2. В § 6 покажем, что собственные значения задачи (1.7), (1.8) удовлетворяют следующим асимптотическим формулам:

$$\Lambda_0^k(\mu, \varepsilon) = \lambda_0^k + \mu \int_{\partial\Omega} (\psi_0^k)^2 \theta_0' ds + O(\mu^2 + (A + \mu)\sigma), \quad (3.1)$$

где в случае кратного собственного значения λ_0^k соответствующие собственные функции ψ_0^k дополнительно предполагаются ортогональными в $L_2(\partial\Omega)$ с весом θ_0' , $\sigma = \sigma(\varepsilon) = \|\theta_\varepsilon' - \theta_0'\|_{C(\partial\Omega)} = o(1)$. Из лемм 2.3, 2.8 и следствия 2.2 выводим, что

$|\lambda_\varepsilon^k - \Lambda_0^k| = O(\varepsilon^{3/2}(A + \mu) + \varepsilon^{1/2}(A + \mu)^2)$, откуда в силу асимптотик (3.1) следует утверждение доказываемой теоремы. Теорема доказана.

Выведем теперь асимптотики собственных функций возмущенной задачи в условиях теоремы 1.5. Пусть вначале λ_0 – простое собственное значение. Из (2.60) и лемм 2.3, 2.8 вытекает, что собственная функция возмущенной задачи

$$\tilde{\psi}_\varepsilon = (\Psi_0, \psi_\varepsilon)_{L_2(\Omega)} \psi_\varepsilon, \quad (3.2)$$

соответствующая $\lambda_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_0$, удовлетворяет оценке

$$\|\tilde{\psi}_\varepsilon - \hat{\psi}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} = O(\varepsilon^{3/2}(A + \mu) + \varepsilon^{1/2}(A + \mu)^2).$$

Прямыми вычислениями с использованием лемм 2.3–2.5 и результатов согласования из предыдущего параграфа нетрудно проверить, что $H^1(\Omega)$ -норма функции

$$\left(\varepsilon \Psi_1 - \varepsilon^2 \frac{\chi(\tau/c_0)}{\theta'_\varepsilon} \Psi_1^\nu X \right) \chi_\varepsilon - \varepsilon^2 \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\chi(|\varsigma^j| \eta^{3/4})}{\theta'_\varepsilon} \Psi_1^\nu Y^{(j)}$$

есть величина порядка $O(\varepsilon^{1/2}(A + \mu))$. Следовательно, функция $\tilde{\psi}_\varepsilon$ из (3.2) сходится к ψ_0 в $L_2(\Omega)$ и имеет следующую асимптотику в норме $H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\varepsilon(x) = & \left(\Psi_0(x, \mu, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\chi(\tau/c_0)}{\theta'_\varepsilon(s)} \Psi_0^\nu(s, \mu, \varepsilon) X(\xi) \right) \chi_\varepsilon(x) \\ & + \varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\chi(|\varsigma^j| \eta^{3/4})}{\theta'_\varepsilon(s)} \Psi_0^\nu(s, \mu, \varepsilon) Y^{(j)}(\varsigma^j, \varepsilon) + O(\varepsilon^{1/2}(A + \mu)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Пусть теперь $\lambda_0 = \lambda_0^q = \dots = \lambda_0^{q+p-1}$ – p -кратное собственное значение. Из (2.64) и лемм 2.3, 2.8 выводим, что линейная комбинация собственных функций возмущенной задачи

$$\tilde{\psi}_\varepsilon^k \equiv \sum_{n=q}^{q+p-1} (\psi_0^k, \Psi_0^n)_{L_2(\Omega)} \sum_{i=q}^{q+p-1} (\Psi_0^n, \psi_\varepsilon^i)_{L_2(\Omega)} \psi_\varepsilon^i \quad (3.4)$$

сходится в $L_2(\Omega)$ к ψ_0^k , $k = q, \dots, q + p - 1$, и имеет в норме $H^1(\Omega)$ асимптотику

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_\varepsilon^k(x) = & \sum_{i=q}^{q+p-1} (\psi_0^k, \Psi_0^i)_{L_2(\Omega)} \left(\left(\Psi_0^i(x, \mu, \varepsilon) + \varepsilon \frac{\chi(\tau/c_0)}{\theta'_\varepsilon(s)} \Psi_0^{i,\nu}(s, \mu, \varepsilon) X(\xi) \right) \chi_\varepsilon(x) \right. \\ & \left. + \varepsilon \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\chi(|\varsigma^j| \eta^{3/4})}{\theta'_\varepsilon(s)} \Psi_0^{i,\nu}(s, \mu, \varepsilon) Y^{(j)}(\varsigma^j, \varepsilon) \right) + O(\varepsilon^{1/2}(A + \mu)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Как и в случае простого предельного собственного значения, мы учли, что $H^1(\Omega)$ -норма некоторых слагаемых в правой части (2.65) есть величина порядка $O(\varepsilon^{1/2}(A + \mu))$.

В силу леммы 2.3 и теоремы 2.2 следует, что утверждение теоремы 2.2 имеет место и для функций (3.2), (3.4).

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Если $\lambda_0 = \lambda_0^k$ – простое собственное значение задачи (1.6), то собственная функция $\tilde{\psi}_\varepsilon$ из (3.2), где $\psi_\varepsilon = \psi_\varepsilon^k$, $\Psi_0 = \Psi_0^k$, сходится к ψ_0^k в $L_2(\Omega)$ при $A \geq 0$ и в $H^1(\Omega)$ при $A = 0$ и имеет в $H^1(\Omega)$ -норме асимптотику (3.3).

Если $\lambda_0 = \lambda_0^q = \dots = \lambda_0^{q+p-1}$ – p -кратное собственное значение, то для каждой соответствующей собственной функции ψ_0^k , $k = q, \dots, k+p-1$, существует линейная комбинация (3.4), сходящаяся к ψ_0^k в $L_2(\Omega)$ при $A \geq 0$ и в $H^1(\Omega)$ при $A = 0$ и имеющая в $H^1(\Omega)$ -норме асимптотику (3.5). В асимптотиках (3.3), (3.5) обозначения те же, что и в теореме 2.1.

§ 4. Вспомогательное утверждение

В настоящем параграфе докажем вспомогательную лемму, которая будет использована в следующем параграфе при доказательстве теоремы 1.1. Сформулируем указанную лемму.

ЛЕММА 4.1. Пусть выполнены условия (C0) и (C1), функция $\eta(\varepsilon)$ из (C1) ограничена сверху числом $\pi/2$ и удовлетворяет соотношению (1.3), и для всех i, j и ε справедливы равенства $a^j(\varepsilon) + b^j(\varepsilon) = 2\eta(\varepsilon)$, $a^i(\varepsilon) = a^j(\varepsilon)$, $b^i(\varepsilon) = b^j(\varepsilon)$. Пусть также существует фиксированное число $c_3 > 0$, для которого норма Гёльдера $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^{3+c_3}(\partial\Omega)}$ ограничена по ε . Тогда собственное значение λ_ε^k возмущенной задачи сходится к собственному значению λ_0^k предельной задачи (1.4) и имеет асимптотику

$$\lambda_\varepsilon^k = \lambda_0^k + \varepsilon \ln \sin \eta(\varepsilon) \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \psi_0^k}{\partial \nu} \right)^2 \frac{ds}{\theta'_\varepsilon} + O\left(\varepsilon^{3/2} (|\ln \eta(\varepsilon)|^{3/2} + 1) \left(\frac{\pi}{2} - \eta(\varepsilon) \right) \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сходимость собственных значений доказывается аналогично работам [2], [6], [8]. Доказательство асимптотик проведем по схеме, использованной в § 2. Как и ранее, вначале формально построим асимптотики, а затем дадим их строгое обоснование. Следует также отметить, что формальное построение асимптотик будем проводить по схеме, предложенной в работах [17], [18]. Отличием является оценка остатка в асимптотиках одновременно по двум параметрам ε и η , а также чуть более общая постановка рассматриваемой здесь задачи по сравнению с [17], [18] и отказ от дополнительных ограничений, сделанных в [17], [18]. Подробно остановимся только на случае простого предельного собственного значения; случай кратного собственного значения доказывается аналогично.

Пусть λ_0 – простое собственное значение предельной задачи (1.4), ψ_0 – соответствующая (нормированная в $L_2(\Omega)$) собственная функция, λ_ε – собственное значение возмущенной задачи, сходящееся к λ_0 .

Асимптотику собственного значения λ_ε будем искать в виде

$$\lambda_\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1(\varepsilon) \ln \sin \eta, \quad (4.1)$$

а асимптотика соответствующей собственной функции строится как сумма внешнего разложения и пограничного слоя:

$$\psi_\varepsilon(x) = \psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \eta) + \chi(\tau/c_0) \psi_\varepsilon^{\text{bl}}(\xi, s, \eta),$$

$$\psi_\varepsilon^{\text{ex}}(x, \eta) = \psi_0(x) + \varepsilon \psi_1(x, \varepsilon) \ln \sin \eta, \quad (4.2)$$

$$\psi_\varepsilon^{\text{bl}}(\xi, s, \eta) = \varepsilon v_1(\xi, s, \varepsilon, \eta) + \varepsilon^2 v_2(\xi, s, \varepsilon, \eta), \quad (4.3)$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $\xi_1 = (\theta_\varepsilon(s) - \theta_\varepsilon(s_0^\varepsilon))/\varepsilon - (b^j(\varepsilon) - a^j(\varepsilon))/2$, $\xi_2 = \tau\theta'_\varepsilon(s)/\varepsilon$. Заметим также, что построение асимптотик здесь удается провести без использования метода согласования асимптотических разложений.

Подставим (4.1) и (4.2) в уравнение (1.1) и выпишем коэффициенты при $\varepsilon \ln \sin \eta$:

$$(\Delta + \lambda_0)\psi_1 = -\lambda_1\psi_0, \quad x \in \Omega. \quad (4.4)$$

Подставляя (4.1) и (4.3) в уравнение (1.1), получим уравнения (2.9) и (2.10) для функций v_1 и v_2 . Граничные условия для этих функций выводим из требования того, что сумма правых частей (4.2) и (4.3) удовлетворяет обоим граничным условиям из (1.2):

$$v_1 = -\psi_1^D \ln \sin \eta, \quad \xi \in \gamma^\eta, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \xi_2} = \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \psi_0^\nu, \quad \xi \in \Gamma^\eta, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \xi_2} = \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \psi_1^\nu \ln \sin \eta, \quad \xi \in \Gamma^\eta, \quad (4.6)$$

где γ^η – объединение интервалов $(\pi j - \eta, \pi j + \eta)$, $j \in \mathbb{Z}$, лежащих на оси ξ_1 , а Γ^η – дополнение $\bar{\gamma}^\eta$ до оси ξ_1 , ψ_1^D и ψ_i^ν – значения функций ψ_i и их нормальных производных на границе $\partial\Omega$. Задача (2.9), (4.5) решается явно:

$$v_1(\xi, s, \varepsilon, \eta) = -\frac{1}{\theta'_\varepsilon(s)} \psi_0^\nu(s) X_\eta(\xi), \quad (4.7)$$

$$X_\eta(\xi) = \operatorname{Re} \ln \left(\sin z + \sqrt{\sin^2 z - \sin^2 \eta} \right) - \xi_2.$$

Нетрудно проверить, что $X_\eta \in \mathcal{V}_\eta \cap H^1(\Pi^{(j)})$ – четная по ξ_1 гармоническая функция, где $\mathcal{V}_\eta$ – пространство π -периодических по переменной ξ_1 , экспоненциально убывающих вместе со всеми своими производными при $\xi_2 \rightarrow +\infty$ равномерно по ξ_1 функций, принадлежащих $C^\infty(\{\xi: \xi_2 > 0\} \cup \gamma^\eta \cup \Gamma^\eta)$. Функция X_η удовлетворяет граничным условиям

$$X_\eta(\xi) = \ln \sin \eta, \quad \xi \in \gamma^\eta, \quad \frac{\partial X}{\partial \xi_2} = -1, \quad \xi \in \Gamma^\eta. \quad (4.8)$$

Функция v_1 , определенная равенством (4.7), в силу (4.8) удовлетворяет граничному условию

$$v_1 = -\frac{1}{\theta'_\varepsilon} \psi_0^\nu \ln \sin \eta, \quad \xi \in \gamma^\eta,$$

из сравнения которого с (4.5) получаем краевое условие для ψ_1 :

$$\psi_1 = \frac{1}{\theta'_\varepsilon} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu}, \quad x \in \partial\Omega. \quad (4.9)$$

Условие разрешимости краевой задачи (4.4), (4.9) приводит к формуле для λ_1 :

$$\lambda_1 = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \right)^2 \frac{ds}{\theta'_\varepsilon(s)}. \quad (4.10)$$

Функцию ψ_1 выберем ортогональной ψ_0 в $L_2(\Omega)$. Функция v_2 определяется следующим образом:

$$v_2 = \frac{\psi_0''}{2(\theta_\varepsilon')^2} \xi_2^2 \left(\frac{\theta_\varepsilon''}{\theta_\varepsilon'} \frac{\partial X_\eta}{\partial \xi_1} + K \frac{\partial X_\eta}{\partial \xi_2} \right) - \frac{2}{\theta_\varepsilon'} \left(\frac{\psi_0''}{\theta_\varepsilon'} \right)' v_2^{\text{odd}} - \frac{1}{\theta_\varepsilon'} \psi_1'' \ln \sin \eta X_\eta, \quad (4.11)$$

где v_2^{odd} – экспоненциально убывающее решение краевой задачи

$$\Delta_\xi v_2^{\text{odd}} = \frac{\partial X_\eta}{\partial \xi_1}, \quad \xi_2 > 0, \quad v_2^{\text{odd}} = 0, \quad \xi \in \gamma^\eta, \quad \frac{\partial v_2^{\text{odd}}}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma^\eta. \quad (4.12)$$

Существование решения задачи (4.12), а также его нечетность по ξ_1 и принадлежность $\mathcal{V}_\eta \cap H^1(\Pi^{(j)})$ были доказаны в [17].

Для обоснования формально построенных асимптотик понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 4.2. *Выполняются следующие свойства:*

1) для целых $m \geq 0$ справедливы неравенства

$$\|\xi_2^m X_\eta\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq C \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right)^2 \left(\left| \ln \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) \right|^{1/2} + 1 \right),$$

где константы C не зависят от η ;

2) для целых $m, p \geq 0$ имеют место оценки

$$\begin{aligned} \left\| \xi_2^m \nabla_\xi \frac{\partial^m X_\eta}{\partial \xi_2^m} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C |\ln \sin \eta|^{1/2}, \\ \left\| \xi_2^{m+p+1} \nabla_\xi \frac{\partial^m X_\eta}{\partial \xi_2^m} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right)^2 \left(\left| \ln \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) \right|^{1/2} + 1 \right), \end{aligned}$$

где константы C не зависят от η .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале докажем утверждение 1) для $m = 0$. В [20, § 3] было показано, что $\|X_\eta\|_{L_2(\Pi^{(j)})}$ – непрерывная функция по $\eta \in [0, \pi/2]$. Для доказательства требуемой оценки выясним поведение этой функции при $\eta \rightarrow \pi/2$. Непосредственно проверяется, что функция

$$X_\eta^1(\xi) = -\frac{1}{2} \xi_2 \int_{\xi_2}^{+\infty} X_\eta(\xi_1, t) dt$$

является четной по ξ_1 , принадлежит $\mathcal{V}_\eta$ и в области $\xi_2 > 0$ является решением уравнения $\Delta_\xi X_\eta^1(\xi) = X_\eta$, удовлетворяющим граничным условиям

$$X_\eta^1 = 0, \quad \frac{\partial X_\eta^1}{\partial \xi_2} = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} X_\eta(\xi_1, t) dt, \quad \xi_2 = 0.$$

Используя перечисленные свойства функций X_η^1 и X_η и доказанное в [20, § 3] равенство

$$\int_{\Pi^{(j)}} X_\eta^2 d\xi = \int_{\Pi^{(j)}} (X_\eta + \xi_2 - \ln \sin \eta) X_\eta d\xi,$$

интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Pi^{(j)}} X_\eta^2 d\xi &= \int_{\Pi^{(j)}} (X_\eta + \xi_2 - \ln \sin \eta) \Delta_\xi X_\eta^1 d\xi \\ &= \int_\eta^{\pi/2} (X_\eta(\xi_1, 0) - \ln \sin \eta) \int_0^{+\infty} X_\eta(\xi_1, t) dt d\xi_1. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Поскольку при $\xi_1 \in (\eta, \pi/2]$

$$\frac{d^2}{d\xi_1^2} \int_0^{+\infty} X_\eta(\xi_1, t) dt = - \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial t^2} X_\eta(\xi_1, t) dt = -1,$$

то ввиду четности и π -периодичности X_η по ξ_1 получаем

$$\int_0^{+\infty} X_\eta(\xi_1, t) dt = -\frac{1}{2} \left(\xi_1 - \frac{\pi}{2} \right)^2 + \int_0^{+\infty} X_\eta \left(\frac{\pi}{2}, t \right) dt. \quad (4.14)$$

Применяя оценку $|\ln(1+a)| \leq a$, $a \geq 0$, к подынтегральной функции

$$X_\eta \left(\frac{\pi}{2}, t \right) = \ln \left(1 + \frac{e^{-2t} - 1 + \sqrt{(1 - e^{-2t})^2 + 4e^{-2t} \cos^2 \eta}}{2} \right)$$

из правой части равенства (4.14) и вычисляя полученный интеграл, выводим соотношение ($\eta \rightarrow \pi/2$)

$$\int_0^{+\infty} X_\eta \left(\frac{\pi}{2}, t \right) dt = O(\eta_1^2 \ln \eta_1), \quad (4.15)$$

где $\eta_1 = \pi/2 - \eta$. В работе [17] было доказано, что

$$\int_{\gamma^\eta \cap \Pi} \frac{\partial X_\eta}{\partial \xi_2} d\xi_1 = \pi - 2\eta, \quad \int_{\Gamma^\eta \cap \Pi} X_\eta d\xi_1 = -2\eta \ln \sin \eta. \quad (4.16)$$

Подставляя теперь (4.14)–(4.16) в (4.13), приходим к равенствам ($\eta \rightarrow \pi/2$)

$$\begin{aligned} \int_{\Pi^{(j)}} X^2 d\xi &= -\frac{1}{2} \int_\eta^{\pi/2} \ln \left(\frac{\sin \xi_1}{\sin \eta} + \sqrt{\frac{\sin^2 \xi_1}{\sin^2 \eta} - 1} \right) \left(\xi_1 - \frac{\pi}{2} \right)^2 d\xi_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} X_\eta \left(\frac{\pi}{2}, \xi_2 \right) d\xi_2 \int_\eta^{\pi/2} (X_\eta(\xi_1, 0) - \ln \sin \eta) d\xi_1 \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\eta_1} t^2 \left(\ln \left(\cos t + \sqrt{\cos^2 t - \sin^2 \eta} \right) - \ln \sin \eta \right) dt + O(\eta_1^4 \ln \eta_1) \\ &= O(\eta_1^4 \ln \eta_1). \end{aligned}$$

Здесь была сделана замена $t = \pi/2 - \xi_1$. Из полученной оценки для $\|X_\eta\|_{L_2(\Pi^{(j)})}^2$ и непрерывности этой функции по $\eta \in [0, \pi/2]$ вытекает утверждение 1) для $m = 0$.

Из явного вида функции X , ее бесконечной дифференцируемости по (ξ, η) при $\xi_2 \geq 1$, непрерывности по $(\xi, \eta) \in \{\xi: \xi_2 > 0\} \times (0, \pi/2]$ и экспоненциального убывания при $\xi_2 \rightarrow +\infty$ следует, что для $m \geq 1$ норма $\|\xi_2^m X_\eta\|_{L_2(\Pi^{(j)})}$ – непрерывная по $\eta \in (0, \pi/2]$ функция и верна оценка

$$\|\xi_2^m X_\eta\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cap \{\xi: \xi_2 > 1\})} \leq C\eta_1^2,$$

где константа C не зависит от η . Тогда в силу неравенства

$$\|\xi_2^m X_\eta\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cap \{\xi: \xi_2 < 1\})} < \|X_\eta\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq C\eta_1^2(|\ln \eta_1|^{1/2} + 1)$$

и утверждения 1) для $m = 0$ заключаем, что утверждение 1) верно и для $m > 0$.

Проведем интегрирование по частям в равенстве $\int_{\Pi} X_\eta \Delta_\xi X_\eta d\xi = 0$; в результате получим

$$\int_{\Pi} |\nabla_\xi X_\eta|^2 d\xi = -\ln \sin \eta \int_{\gamma_\eta \cap \bar{\Pi}^{(j)}} \frac{\partial X_\eta}{\partial \xi_2} d\xi_1 + \int_{\Gamma_\eta \cap \bar{\Pi}^{(j)}} X_\eta d\xi_1,$$

откуда в силу (4.16) вытекает

$$\|\nabla_\xi X_\eta\|_{L_2(\Pi^{(j)})} = \pi^{1/2} |\ln \sin \eta|^{1/2}. \quad (4.17)$$

Из цепочки равенств ($m \geq 0$, $p \geq 0$, $m + p \geq 1$, $m, p \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2(m+p)} \frac{\partial^m X_\eta}{\partial \xi_2^m} \Delta_\xi \frac{\partial^m X_\eta}{\partial \xi_2^m} d\xi \\ &= - \int_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2(m+p)} \left| \nabla_\xi \frac{\partial^m X_\eta}{\partial \xi_2^m} \right|^2 d\xi - 2(m+p) \int_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2(m+p)-1} \frac{\partial^m X_\eta}{\partial \xi_2^m} \frac{\partial^{m+1} X_\eta}{\partial \xi_2^{m+1}} d\xi \\ &= - \left\| \xi_2^{m+p} \nabla_\xi \frac{\partial^m X_\eta}{\partial \xi_2^m} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})}^2 + (m+p)(2(m+p)-1) \left\| \xi_2^{m+p-1} \frac{\partial^m X_\eta}{\partial \xi_2^m} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})}^2 \end{aligned}$$

выводим формулы

$$\left\| \xi_2^{m+p} \nabla_\xi \frac{\partial^m X_\eta}{\partial \xi_2^m} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} = \sqrt{(m+p)(2(m+p)-1)} \left\| \xi_2^{m+p-1} \frac{\partial^m X_\eta}{\partial \xi_2^m} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})}. \quad (4.18)$$

Применяя данные формулы при $p = 0$, $m \geq 1$ и при $p \geq 1$, $m \geq 0$, получаем оценки

$$\begin{aligned} \left\| \xi_2^m \nabla_\xi \frac{\partial^m X_\eta}{\partial \xi_2^m} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C \|\nabla_\xi X_\eta\|_{L_2(\Pi^{(j)})}, \\ \left\| \xi_2^{m+p+1} \nabla_\xi \frac{\partial^m X_\eta}{\partial \xi_2^m} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C \|X_\eta\|_{L_2(\Pi^{(j)})}, \end{aligned}$$

откуда в силу утверждения 1) и равенства (4.17) вытекает утверждение 2). Лемма доказана.

ЛЕММА 4.3. *Функция v_2^{odd} удовлетворяет оценкам*

$$\begin{aligned} \|\xi_2^p v_2^{\text{odd}}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C |\ln \sin \eta|^{1/2}, \quad \|\xi_2^p \nabla_\xi v_2^{\text{odd}}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq C |\ln \sin \eta|^{1/2}, \\ \left\| \xi_2^p \nabla_\xi \frac{\partial}{\partial \xi_2} v_2^{\text{odd}} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C |\ln \sin \eta|^{1/2}, \end{aligned}$$

где $p \geq 0$, $p \in \mathbb{Z}$, а константы C не зависят от η .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v \in \mathcal{V}_\eta \cap H^1(\Pi^{(j)})$ – нечетная по ξ_1 функция, являющаяся решением краевой задачи

$$\Delta_\xi v = f, \quad \xi_2 > 0, \quad v = 0, \quad \xi \in \gamma^\eta, \quad \frac{\partial v}{\partial \xi_2} = 0, \quad \xi \in \Gamma^\eta, \quad (4.19)$$

где $f \in \mathcal{V}_\eta \cap L_2(\Pi^{(j)})$ нечетна по ξ_1 . Поскольку $v \in \mathcal{V}_\eta$ нечетна по ξ_1 , то $v = 0$ при $\xi_1 = \pi k/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$v(\xi) = \int_{-\pi/2+\pi j}^{\xi_1} \frac{\partial v}{\partial t}(t, \xi_2) dt,$$

откуда в силу неравенства Коши–Буняковского выводим оценку

$$|v(\xi)|^2 \leq \pi \int_{-\pi/2+\pi j}^{\pi/2+\pi j} \left| \frac{\partial v}{\partial \xi_1}(\xi) \right|^2 d\xi_1,$$

используя которую, окончательно получаем

$$\|v\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq \pi \|\nabla_\xi v\|_{L_2(\Pi^{(j)})}. \quad (4.20)$$

Теперь умножим уравнение из (4.19) на v и один раз проинтегрируем по частям. Получим

$$\|\nabla_\xi v\|_{L_2(\Pi^{(j)})} = - \int_{\Pi^{(j)}} v f d\xi,$$

откуда в силу неравенства Коши–Буняковского и оценки (4.20) имеем

$$\|v\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq \pi^2 \|f\|_{L_2(\Pi^{(j)})}, \quad \|\nabla v\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq \pi \|f\|_{L_2(\Pi^{(j)})}. \quad (4.21)$$

Применяя неравенства (4.21) к решению задачи (4.12) и учитывая лемму 4.2, получаем равномерные по η оценки

$$\begin{aligned} \|v_2^{\text{odd}}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C \|\nabla_\xi X_\eta\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \leq C |\ln \sin \eta|^{1/2}, \\ \|\nabla_\xi v_2^{\text{odd}}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C |\ln \sin \eta|^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Далее, функции $\xi_2^p v_2^{\text{odd}}$ являются решением задачи (4.19), где γ_η совпадает с осью ξ_1 , а правые части имеют вид

$$f = p(p-1)\xi_2^{p-2}v_2^{\text{odd}} + 2p\xi_2^{p-1}\frac{\partial v_2^{\text{odd}}}{\partial \xi_2} + \xi_2^p \frac{\partial X_\eta}{\partial \xi_1}.$$

Поэтому, применяя к $\xi_2^p v_2^{\text{odd}}$ оценки (4.21), с учетом (4.22) и леммы 4.2 получаем

$$\begin{aligned} \|\xi_2 v_2^{\text{odd}}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C (\|\nabla v_2^{\text{odd}}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} + \|\nabla X_\eta\|_{L_2(\Pi^{(j)})}) \leq C |\ln \sin \eta|^{1/2}, \\ \|\xi_2^p v_2^{\text{odd}}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C (\|\xi_2^{p-2} v_2^{\text{odd}}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} + \|\xi_2^{p-1} \nabla v_2^{\text{odd}}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \\ &\quad + \|\xi_2^p \nabla_\xi X_\eta\|_{L_2(\Pi^{(j)})}), \quad p \geq 2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Интегрируя по частям в равенствах ($m \geq 1$, $m \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} \int_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2m} v_2^{\text{odd}} \frac{\partial X_\eta}{\partial \xi_1} d\xi &= \int_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2m} v_2^{\text{odd}} \Delta_\xi v_2^{\text{odd}} d\xi, \\ \int_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2(m+1)} \frac{\partial v_2^{\text{odd}}}{\partial \xi_2} \frac{\partial^2 X_\eta}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} d\xi &= \int_{\Pi^{(j)}} \xi_2^{2(m+1)} \frac{\partial v_2^{\text{odd}}}{\partial \xi_2} \Delta_\xi \frac{\partial v_2^{\text{odd}}}{\partial \xi_2} d\xi, \end{aligned}$$

аналогично тому, как было получено (4.18), выводим неравенства

$$\begin{aligned} \|\xi_2^m \nabla_\xi v_2^{\text{odd}}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C \left(\|\xi_2^{m-1} v_2^{\text{odd}}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} + \left\| \xi_2^{m+1} \frac{\partial X_\eta}{\partial \xi_1} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \right), \\ \left\| \xi_2^{m+1} \nabla_\xi \frac{\partial v_2^{\text{odd}}}{\partial \xi_2} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} &\leq C \left(\|\xi_2^m \nabla_\xi v_2^{\text{odd}}\|_{L_2(\Pi^{(j)})} + \left\| \xi_2^{m+2} \frac{\partial^2 X_\eta}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)})} \right). \end{aligned}$$

Из полученных неравенств, леммы 4.2 и оценок (4.22), (4.23) по индукции вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.4. *Для любого $R > 0$ и целого $m \geq 3$ имеют место равномерные по R и η оценки ($k = 0, 1, 2$)*

$$\begin{aligned} \|X_\eta\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cup \{\xi: \xi_2 > R\})} &\leq CR^{-m} \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right)^2 \left(\left| \ln \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) \right| + 1 \right), \\ \|\xi_2^k \nabla_\xi X_\eta\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cup \{\xi: \xi_2 > R\})} &\leq CR^{-m} \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right)^2 \left(\left| \ln \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) \right| + 1 \right), \\ \left\| \xi_2^{k+1} \nabla_\xi \frac{\partial X_\eta}{\partial \xi_2} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cup \{\xi: \xi_2 > R\})} &\leq CR^{-m} \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right)^2 \left(\left| \ln \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right) \right| + 1 \right), \\ \|v_2^{\text{odd}}\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cup \{\xi: \xi_2 > R\})} &\leq CR^{-m} |\ln \sin \eta|^{1/2}, \\ \|\nabla_\xi v_2^{\text{odd}}\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cup \{\xi: \xi_2 > R\})} &\leq CR^{-m} |\ln \sin \eta|^{1/2}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $v \in \mathcal{V}_\eta$ при $\xi_2 \geq R$ в силу неравенства Коши–Буняковского справедливы соотношения

$$|v(\xi)| = \left| \int_{\xi_2}^{+\infty} \frac{\partial v}{\partial t}(\xi_1, t) dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2m-3}} \xi_2^{-m+3/2} \left\| \xi_2^{m-1} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}.$$

Интегрируя это неравенство по $\Pi^{(j)} \cap \{\xi: \xi_2 > R\}$, получаем

$$\|v\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cap \{\xi: \xi_2 > R\})} \leq \frac{R^{-m}}{\sqrt{(2m-3)(2m-4)}} \left\| \xi_2^{m-1} \frac{\partial v}{\partial \xi_2} \right\|_{L_2(\Pi^{(j)} \cap \{\xi: \xi_2 > R\})}.$$

Последовательно полагая в данном неравенстве

$$v = X_\eta, \quad v = \xi_2^k \frac{\partial X_\eta}{\partial \xi_i}, \quad v = \xi_2^{k+1} \frac{\partial^2 X_\eta}{\partial \xi_i \partial \xi_2}, \quad v = v_2^{\text{odd}}, \quad v = \frac{\partial v_2^{\text{odd}}}{\partial \xi_i}, \quad i = 1, 2,$$

приходим к утверждению леммы. Лемма доказана.

ЛЕММА 4.5. *Функции $\lambda_1(\varepsilon)$ и $\psi_1(x, \varepsilon) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ ограничены по ε :*

$$|\lambda_1| \leq C, \quad \|\psi_1\|_{C^3(\overline{\Omega})} \leq C.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограниченность $\lambda_1(\varepsilon)$ следует из условия (C0) и формулы (4.10). Гладкость функции ψ_1 очевидна. В силу хорошо известных оценок решений эллиптических краевых задач для функции ψ_1 имеем

$$\|\psi_1\|_{H^2(\Omega)} \leq C(|\lambda_1| \|\psi_0\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi_0^\nu / \theta'_\varepsilon\|_{C^2(\partial\Omega)}) \leq C,$$

где C не зависит от ε , откуда в силу теоремы вложения $H^2(\Omega)$ в $C(\Omega)$ получаем, что $\|\psi_1\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C$ с не зависящей от ε константой C . Применяя теперь оценки Шаудера (см. [36, гл. III, § 1, формула (1.11)]) и учитывая ограниченность нормы $\|\theta'_\varepsilon\|_{C^{3+c_3}(\partial\Omega)}$, ВВОДИМ

$$\|\psi_1\|_{C^3(\overline{\Omega})} \leq C(|\lambda_1| \|\psi_0\|_{C^2(\overline{\Omega})} + \|\psi_1\|_{C(\overline{\Omega})} + \|\psi_0^\nu / \theta'_\varepsilon\|_{C^{3+c_3}(\partial\Omega)}) \leq C,$$

где C не зависит от ε . Лемма доказана.

Пусть

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_\varepsilon &= \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 \ln \sin \eta, \\ \widehat{\psi}_\varepsilon(x) &= \psi_0(x) + \varepsilon \ln \sin \eta \psi_1(x, \varepsilon) + \chi(\tau/c_0) \psi_\varepsilon^{\text{bl}}(\xi, s, \eta) + R_\varepsilon(x), \\ R_\varepsilon(x) &= \varepsilon^2 \frac{\chi(\tau/c_0) \psi_0^\nu}{\theta'_\varepsilon} \ln^2 \sin \eta, \end{aligned}$$

где λ_1 определяется формулой (4.10), $\psi_\varepsilon^{\text{bl}}$ – формулой (4.3) с v_1 и v_2 из (4.7) и (4.11).

Следующее утверждение является аналогом леммы 2.6.

ЛЕММА 4.6. *Функция $\widehat{\psi}_\varepsilon \in C^\infty(\Omega \cup \gamma_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon) \cap H^1(\Omega)$ сходится к ψ_0 в $H^1(\Omega)$ и удовлетворяет краевой задаче (2.50) при $u_\varepsilon = \widehat{\psi}_\varepsilon$, $\lambda = \lambda_\varepsilon$, $f = f_\varepsilon$, где для f_ε верна равномерная оценка*

$$\|f_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} \leq C \varepsilon^{3/2} (|\ln \eta|^{3/2} + 1) \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right),$$

константа C не зависит от ε и η . Для функции $R_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$ верна равномерная по ε и η оценка

$$\|R_\varepsilon\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq C \varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Гладкость $\widehat{\psi}_\varepsilon$ и R_ε является прямым следствием определения этих функций. Утверждаемые граничные условия для $\widehat{\psi}_\varepsilon$ вытекают из (4.5), (4.6), (4.8), (4.9), (4.12). Доказательство оценки для R_ε основывается на лемме 4.5 и условии (C0):

$$\|R_\varepsilon\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq C \varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta \|\psi_1\|_{C^3(\overline{\Omega})} \leq C \varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta.$$

Докажем оценку для f_ε . Эта функция представляется в виде

$$\begin{aligned} f_\varepsilon &= -(\Delta_x + \widehat{\lambda}_\varepsilon)\widehat{\psi}_\varepsilon = -\sum_{i=1}^3 f_\varepsilon^{(i)}, \\ f_\varepsilon^{(1)} &= \varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta (\lambda_1 \psi_1 + (\Delta + \widehat{\lambda}_\varepsilon)\chi(\tau/c_0)\psi_0^\nu/\theta'_\varepsilon), \\ f_\varepsilon^{(2)} &= \chi(\tau/c_0)(\Delta_x + \widehat{\lambda}_\varepsilon)\psi_\varepsilon^{\text{bl}}, \\ f_\varepsilon^{(3)} &= 2(\nabla_x \psi_\varepsilon^{\text{bl}}, \nabla_x \chi(\tau/c_0)) + \psi_\varepsilon^{\text{bl}} \Delta_x \chi(\tau/c_0). \end{aligned}$$

Функция $f_\varepsilon^{(1)}$ легко оценивается благодаря лемме 4.5:

$$\|f_\varepsilon^{(1)}\|_{L_2(\Omega)} \leq C\varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta,$$

где C не зависит от ε и η . Поскольку $\nabla_x \chi(\tau/c_0)$ и $\Delta_x \chi(\tau/c_0)$ не равны нулю лишь при $c_0/4 < \tau < 3c_0/4$, то, учитывая определение переменных ξ и используя лемму 4.4 при $m = 3$ и $R = c_0 c_1/(4\varepsilon)$ (здесь c_1 – такое, как в условии (C0)), получаем оценку

$$\|f_\varepsilon^{(2)}\|_{L_2(\Omega)} \leq C\varepsilon^{7/2} |\ln \sin \eta|^{1/2},$$

где C не зависит от η и ε . Используя гармоничность X и уравнение для v_2^{odd} , приходим к представлению для функции $f_\varepsilon^{(3)}$:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon^{(3)} &= \varepsilon \sum_{k=0}^2 \sum_{i=1}^2 ((\ln \sin \eta)^{[\frac{3-k}{2}]} G_{4k+2i-1} + \xi_2 G_{4k+2i}) \xi_2^{2[\frac{k+1}{2}]} \frac{\partial^{k+1} X}{\partial \xi_i \partial \xi_2^k} \\ &\quad + \varepsilon (\varepsilon^2 \ln^2 \sin \eta G_{13} + \varepsilon \ln \sin \eta G_{14} + G_{15}) X \\ &\quad + \varepsilon \sum_{k=0}^1 \sum_{i=1}^2 \xi_2^k G_{2k+i+15} \frac{\partial^{k+1} v_2^{\text{odd}}}{\partial \xi_i \partial \xi_2^k} \\ &\quad + \varepsilon^2 (\varepsilon \ln \sin \eta G_{20} + G_{21}) v_2^{\text{odd}}, \end{aligned}$$

где $G_i = G_i(\xi_2; s, \varepsilon)$ – полиномы по ξ_2 с коэффициентами, зависящими от s и ε , причем в силу леммы 4.5 эти коэффициенты ограничены равномерно по s и ε , $[\cdot]$ – целая часть числа. Учитывая эти оценки и применяя леммы 4.2 и 4.3, получаем

$$\|f_\varepsilon^{(2)}\|_{L_2(\Omega)} \leq C\varepsilon^{3/2} (|\ln \eta|^{3/2} + 1) \left(\frac{\pi}{2} - \eta \right),$$

где C не зависит от ε и η . Здесь мы также использовали следующие очевидные соотношения: $\ln \sin \eta = O(\eta)$, $\eta \rightarrow 0$; $\ln \sin \eta = O((\pi/2 - \eta)^2)$, $\eta \rightarrow \pi/2$. Лемма доказана.

Обоснование построенных асимптотик проводится аналогично обоснованию асимптотик из § 2.

Формальное построение асимптотик в случае кратного предельного собственного значения принципиально не отличается от случая простого предельного собственного значения. Отличием будет лишь то, что одновременно строятся асимптотики всех собственных значений, сходящихся к кратному предельному собственному значению; в целом же формальное построение дословно повторяет приведенные выше рассуждения. Обоснование асимптотик в случае кратного предельного собственного значения также аналогично обоснованию, приведенному в § 2. Лемма 4.1 полностью доказана.

§ 5. Оценки собственных значений возмущенной задачи

В настоящем параграфе докажем теоремы 1.1–1.3. Доказательства этих теорем будут основываться на следующем вспомогательном утверждении.

ЛЕММА 5.1. Пусть множества $\gamma_1(\varepsilon), \gamma_2(\varepsilon) \subseteq \partial\Omega$ таковы, что $\gamma_1(\varepsilon) \subseteq \gamma_2(\varepsilon)$, $\lambda_{\varepsilon,1}^k, \lambda_{\varepsilon,2}^k$ – собственные значения возмущенной задачи при $\gamma_\varepsilon = \gamma_1(\varepsilon)$ и $\gamma_\varepsilon = \gamma_2(\varepsilon)$ соответственно, взятые с учетом кратности в порядке неубывания. Тогда для всех k верны неравенства

$$\lambda_{\varepsilon,1}^k \leq \lambda_{\varepsilon,2}^k.$$

Лемма 5.1 представляет собой стандартное утверждение о вариационных свойствах собственных значений эллиптических краевых задач, доказательство основано на минимаксном свойстве собственных значений и очевидном вложении функциональных пространств: $H^1(\Omega, \gamma_2(\varepsilon)) \subseteq H^1(\Omega, \gamma_1(\varepsilon))$, где $H^1(\Omega, \gamma_i(\varepsilon))$, $i = 1, 2$, – множество функций из $H^1(\Omega)$, обращающихся в нуль на $\gamma_i(\varepsilon)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Согласно теореме Лагранжа функции a^j и b^j , введенные в § 2, можно выразить через a_j и b_j следующим образом:

$$a^j = \theta'_\varepsilon(M_{j,\varepsilon}^{(3)})a_j, \quad b^j = \theta'_\varepsilon(M_{j,\varepsilon}^{(4)})b_j,$$

где $M_{j,\varepsilon}^{(3)} \in (s_j^\varepsilon - \varepsilon a_j, s_j^\varepsilon)$, $M_{j,\varepsilon}^{(4)} \in (s_j^\varepsilon, s_j^\varepsilon + \varepsilon b_j)$. Из полученных представлений в силу условия (C0) и условия 1) теоремы вытекает, что

$$a^j \geq c_1 a_j, \quad b^j \geq c_1 b_j.$$

Из этих оценок, условий (C0) и 1) и того факта, что множества $\gamma_{\varepsilon,j}$ не пересекаются, имеем

$$2\eta(\varepsilon) \leq \min_j a^j(\varepsilon) + \min_i b^i(\varepsilon) \leq \pi,$$

т. е. функция η ограничена сверху числом $\pi/2$. Кроме того, из последних неравенств следует существование функций $a_*(\varepsilon)$ и $b_*(\varepsilon)$ таких, что $a_* + b_* = 2\eta$, а для множества

$$\gamma_{\varepsilon,*} = \{x: x \in \partial\Omega, -\varepsilon a_*(\varepsilon) < \theta_\varepsilon(s) - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) < \varepsilon b_*(\varepsilon), j = 0, \dots, N-1\}$$

выполнено включение $\gamma_{\varepsilon,*} \subseteq \gamma_\varepsilon$. Через $\lambda_{\varepsilon,*}^k$ обозначим собственные значения возмущенной задачи при $\gamma_\varepsilon = \gamma_{\varepsilon,*}$, взятые с учетом кратности в порядке неубывания. Множество $\gamma_{\varepsilon,*}$ удовлетворяет условиям леммы 4.1 с функцией η из условия 1) теоремы. Согласно лемме 4.1 собственные значения $\lambda_{\varepsilon,*}^k$ сходятся к собственным значениям λ_0^k задачи (1.4) и для них верны асимптотики из этой леммы. Дважды применяя теперь лемму 5.1 при $\gamma_1(\varepsilon) = \gamma_{\varepsilon,*}$, $\gamma_2(\varepsilon) = \gamma_\varepsilon$ и $\gamma_1(\varepsilon) = \gamma_\varepsilon$, $\gamma_2(\varepsilon) = \partial\Omega$, выводим двусторонние оценки

$$\lambda_{\varepsilon,*}^k \leq \lambda_\varepsilon^k \leq \lambda_0^k.$$

Теперь в полученных оценках заменим $\lambda_{\varepsilon,*}^k$ на асимптотики из леммы 5.1, что дает, во-первых, сходимости λ_ε^k к λ_0^k и, во-вторых, требуемые двусторонние оценки разностей $\lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Из первой оценки леммы 2.1 и условия теоремы выводим неравенства

$$2\eta_0\eta \leq a^j + b^j \leq 2\eta.$$

Отсюда вытекает, что, во-первых, функция η_0 ограничена сверху единицей и, во-вторых, найдутся неотрицательные ограниченные функции $a_*^j(\varepsilon)$, $b_*^j(\varepsilon)$, $a^{j,*}(\varepsilon)$, $b^{j,*}(\varepsilon)$ такие, что $a_*^j + b_*^j = 2\eta_0\eta$, $a^{j,*} + b^{j,*} = 2\eta$, а для множеств

$$\begin{aligned} \gamma_{\varepsilon,*} &= \{x: x \in \partial\Omega, -\varepsilon a_*^j(\varepsilon) < \theta_\varepsilon(s) - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) < \varepsilon b_*^j(\varepsilon), j = 0, \dots, N-1\}, \\ \gamma_\varepsilon^* &= \{x: x \in \partial\Omega, -\varepsilon a^{j,*}(\varepsilon) < \theta_\varepsilon(s) - \theta_\varepsilon(s_j^\varepsilon) < \varepsilon b^{j,*}(\varepsilon), j = 0, \dots, N-1\} \end{aligned}$$

выполнены вложения

$$\gamma_{\varepsilon,*} \subseteq \gamma_\varepsilon \subseteq \gamma_\varepsilon^*. \quad (5.1)$$

Через $\lambda_{\varepsilon,*}^k$ и $\lambda_\varepsilon^{k,*}$ обозначим собственные значения возмущенной задачи при $\gamma_\varepsilon = \gamma_{\varepsilon,*}$ и $\gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon^*$ с учетом кратности в порядке неубывания. Множества $\gamma_{\varepsilon,*}$ и γ_ε^* удовлетворяют условиям (C0) и (C1): функция η из (C1) для них – это функции $\eta_0\eta$ и η из условия теоремы соответственно; равенство (1.5) для этих функций выполнено с одним и тем же $A > 0$. Величины $\delta^j(\varepsilon)$ для множеств $\gamma_{\varepsilon,*}$ и γ_ε^* равны нулю, а потому в силу леммы 2.8 собственные значения $\lambda_{\varepsilon,*}^k$ и $\lambda_\varepsilon^{k,*}$ сходятся к собственным значениям задачи (1.6) и верны асимптотики

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon,*}^k &= \Lambda_0^k(\tilde{\mu}, \varepsilon) + \varepsilon(A + \mu)^2 \int_{\partial\Omega} (\Psi_0^k(x, \mu, \varepsilon))^2 \theta'_\varepsilon(s) \ln g_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s)) ds + O(\varepsilon^{3/2}), \\ \lambda_\varepsilon^{k,*} &= \Lambda_0^k(\mu, \varepsilon) + \varepsilon(A + \mu)^2 \int_{\partial\Omega} (\Psi_0^k(x, \tilde{\mu}, \varepsilon))^2 \theta'_\varepsilon(s) \ln g_\varepsilon(\theta_\varepsilon(s)) ds + O(\varepsilon^{3/2}), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где

$$\begin{aligned} \mu &= \mu(\varepsilon) = -(\varepsilon \ln \eta(\varepsilon))^{-1} - A, \\ \tilde{\mu} &= \tilde{\mu}(\varepsilon) = -(\varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon)\eta(\varepsilon))^{-1} - A = \mu(\varepsilon) + \frac{(A^2 - \mu(\varepsilon)^2)\varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon)}{1 + (A + \mu(\varepsilon))\varepsilon \ln \eta_0(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Из леммы 2.3 выводим оценку $\|\Psi_0^k\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C$ с не зависящей от ε и μ константой C . Данная оценка, (2.29) и условие (C0) позволяют оценить интегралы в (5.2):

$$-C \leq (A + \mu)^2 \int_{\partial\Omega} (\Psi_0^k)^2 \theta'_\varepsilon \ln g_\varepsilon(\theta_\varepsilon) ds \leq 0, \quad (5.3)$$

где $C > 0$ не зависит от ε и μ . Лемма 5.1 в силу включений (5.1) утверждает справедливость оценок

$$\lambda_{\varepsilon,*}^k \leq \lambda_\varepsilon^k \leq \lambda_\varepsilon^{k,*},$$

откуда в силу (5.2), (3.1) и неравенства (5.3) выводим сходимость $\lambda_\varepsilon^k \rightarrow \lambda_0^k$ и требуемые двусторонние оценки величин $\lambda_\varepsilon^k - \lambda_0^k$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3. Методика доказательства – такая же, как и в теоремах 1.1, 1.2. Из первой оценки леммы 2.1 и условия теоремы следует, что существуют неотрицательные функции $a^{j,*}(\varepsilon)$ и $b^{j,*}(\varepsilon)$ такие, что $a^{j,*} + b^{j,*} = 2\eta$, и для подмножества границы $\partial\Omega$

$$\gamma_\varepsilon^* = \{x: x \in \partial\Omega, -\varepsilon a^{j,*}(\varepsilon) < \theta_\varepsilon(s) - \varepsilon \pi j < \varepsilon b^{j,*}(\varepsilon), j = 0, \dots, N-1\}$$

выполнено $\gamma_\varepsilon \subseteq \gamma_\varepsilon^*$. Пусть $\lambda_\varepsilon^{k,*}$ – собственные значения возмущенной задачи с $\gamma_\varepsilon = \gamma_\varepsilon^*$. Множество γ_ε^* удовлетворяет всем требованиям теоремы 1.5 с функцией η из условия теоремы. Поэтому

$$\lambda_\varepsilon^{k,*} = \lambda_0^k + \mu \int_{\partial\Omega} (\psi_0^k)^2 \theta'_0 ds + o(\mu), \quad (5.4)$$

где λ_0^k , напомним, собственные значения задачи (1.6) при $A = 0$. Из включений $\emptyset \subseteq \gamma(\varepsilon) \subseteq \gamma^*(\varepsilon)$ в силу леммы 5.1 имеем неравенства

$$\lambda_0^k \leq \lambda_\varepsilon^k \leq \lambda_\varepsilon^{k,*},$$

откуда с учетом асимптотик (5.4) вытекает утверждение теоремы. Теорема доказана.

§6. Приложение

В настоящем параграфе будут доказаны соотношения (3.1) для собственных значений задачи (1.7), (1.8). Пусть

$$\widehat{\Lambda}_0^k = \lambda_0^k + \mu \lambda_1^k, \quad \widehat{\Psi}_0^k = \psi_0^k + \mu \psi_1^k + R_{\varepsilon,\mu}^k, \quad \lambda_1^k = \int_{\partial\Omega} (\psi_0^k)^2 \theta'_0 ds.$$

Функции ψ_0^k , соответствующие кратному собственному значению, дополнительно выбраны ортогональными в $L_2(\partial\Omega)$ с весом θ'_0 . Функции ψ_1^k и $R_{\varepsilon,\mu}^k$ определяются как решения следующих задач:

$$\begin{aligned} (\Delta + \lambda_0^k) \psi_1^k &= -\lambda_1^k \psi_0^k, \quad x \in \Omega, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + A \theta'_0 \right) \psi_1^k = -\theta'_0 \psi_0^k, \quad x \in \partial\Omega, \\ (\Delta - 1) R_{\varepsilon,\mu}^k &= -\mu^2 \lambda_1^k \psi_1^k, \quad x \in \Omega, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + (A + \mu) \theta'_\varepsilon \right) R_{\varepsilon,\mu}^k &= -(\theta'_\varepsilon - \theta'_0) ((A + \mu) \psi_0^k + A \mu \psi_1^k) - \mu^2 \theta'_\varepsilon \psi_1^k, \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Задача для ψ_1^k разрешима, приведенные выше формула для λ_1^k и условие на ψ_0^k есть в точности условия разрешимости. Функции ψ_1^k выберем ортогональными всем собственным функциям, соответствующим λ_0^k . Задача для $R_{\varepsilon,\mu}^k$, очевидно, однозначно разрешима. Из общих свойств решений эллиптических краевых задач вытекает, что ψ_1^k и $R_{\varepsilon,\mu}^k$ – бесконечно дифференцируемые по x функции, для которых верны оценки

$$\|\psi_1^k\|_{H^1(\Omega)} \leq C, \quad \|R_{\varepsilon,\mu}^k\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\mu^2 + (A + \mu)\sigma),$$

где константы C не зависят от ε и μ . Используя эти оценки и определения λ_1^k , ψ_1^k и $R_{\varepsilon, \mu}^k$, получаем, что сходящиеся к λ_0^k и ψ_0^k функции $\hat{\Lambda}_0^k$ и $\hat{\Psi}_0^k$ удовлетворяют краевой задаче

$$(\Delta + \hat{\Lambda}_0^k) \hat{\Psi}_0^k = \hat{F}_k, \quad x \in \Omega, \quad \left(\frac{\partial}{\partial \nu} + (A + \mu) \theta'_\varepsilon \right) \hat{\Psi}_0^k = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$\|\hat{F}_k\|_{L_2(\Omega)} \leq C(\mu^2 + (A + \mu)\sigma),$$

где константа C не зависит от ε и μ . Пусть $\lambda_0 = \lambda_0^q = \dots = \lambda_0^{q+p-1}$ — p -кратное собственное значение. На основе задачи для $\hat{\Psi}_0^k$ и оценки правой части $\hat{F}_k$, используя результаты [35], нетрудно доказать, что при $k = q, \dots, q + p - 1$ справедливы следующие представление и равномерная по ε и μ оценка:

$$\hat{\Psi}_0^k = \sum_{i=q}^{q+p-1} \frac{\Psi_0^i}{\Lambda_0^i - \hat{\Lambda}_0^k} \int_{\Omega} \Psi_0^i \hat{F}_k dx + \hat{u}_k, \quad \|\hat{u}_k\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\mu^2 + (A + \mu)\sigma).$$

Аналогично обоснованию, приведенному в § 2, на основе последних соотношений доказываются оценки

$$|\Lambda_0^k - \hat{\Lambda}_0^k| \leq C(\mu^2 + (A + \mu)\sigma),$$

из которых следует справедливость равенств (3.1).

В заключение автор благодарит Р.Р. Гадылышина за постоянное внимание к работе, обсуждение результатов и полезные замечания.

Список литературы

1. Damlamian A., Li Ta-Tsien (Li Daqian). Boundary homogenization for elliptic problems // J. Math. Pures Appl. (9). 1987. V. 66. № 4. P. 351–361.
2. Чечкин Г. А. О краевых задачах для эллиптического уравнения второго порядка с осциллирующими граничными условиями // Неклассические дифференциальные уравнения в частных производных. Новосибирск: ИМ СОАН СССР, 1988. С. 95–104.
3. Lobo M., Pérez M. E. Asymptotic behaviour of an elastic body with a surface having small stuck regions // RAIRO Modélisation Math. Anal. Numér. 1988. V. 22. № 4. P. 609–624.
4. Brillard A., Lobo M., Pérez M. E. Homogénéisation de frontières par épi-convergence en élasticité linéaire // RAIRO Modélisation Math. Anal. Numér. 1990. V. 24. № 1. P. 5–26.
5. Lobo M., Pérez M. E. Boundary homogenization of certain elliptic problems for cylindrical bodies // Bull. Sci. Math. 1992. V. 116. Ser. 2. P. 399–426.
6. Чечкин Г. А. Усреднение краевых задач с сингулярным возмущением граничных условий // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 6. С. 99–150.
7. Беляев А. Г., Чечкин Г. А. Усреднение смешанной краевой задачи для оператора Лапласа в случае, когда “предельная” задача неразрешима // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 4. С. 47–60.
8. Friedman A., Huang Ch., Yong J. Effective permeability of the boundary of a domain // Commun. Partial Differential Equations. 1995. V. 20 (1&2). P. 59–102.
9. Беляев А. Ю., Чечкин Г. А. Усреднение операторов с мелкомасштабной структурой // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 4. С. 496–510.
10. Barenblatt G. I., Bell J. B., Crutchfield W. Y. The thermal explosion revisited // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1998. V. 95. № 23. P. 13384–13386.
11. Dávila J. A nonlinear elliptic equation with rapidly oscillating boundary conditions // Asymptotic Analysis. 2001. V. 28. № 3–4. P. 279–307.
12. Марченко В. А., Хруслов Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наук. думка, 1974.

13. *Гадильшин Р. Р.* О модельном аналоге резонатора Гельмгольца в усреднении // Тр. МИАН. 2002. Т. 236. С. 79–86.
14. *Олейник О. А., Чечкин Г. А.* О краевых задачах для эллиптических уравнений с быстро меняющимся типом граничных условий // УМН. 1993. Т. 48. № 6. С. 163–165.
15. *Гадильшин Р. Р., Чечкин Г. А.* Краевая задача для лапласиана с быстро меняющимся типом граничных условий в многомерной области // Сиб. матем. журн. 1999. Т. 40. № 2. С. 271–287.
16. *Chechkin G. A., Doronina E. I.* On asymptotics of spectrum of boundary value problem with nonperiodic rapidly alternating boundary conditions // Functional Differential Equations. 2001. V. 8. № 1–2. P. 111–122.
17. *Гадильшин Р. Р.* Об асимптотике собственных значений для периодически закрепленной мембраны // Алгебра и анализ. 1998. Т. 10. № 1. С. 3–19.
18. *Гадильшин Р. Р.* О краевой задаче для лапласиана с быстро осциллирующими граничными условиями // Докл. РАН. 1998. Т. 362. № 4. С. 456–459.
19. *Гадильшин Р. Р.* Асимптотики собственных значений краевой задачи с быстро осциллирующими граничными условиями // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35. № 4. С. 540–551.
20. *Борисов Д. И.* О двухпараметрической асимптотике в одной краевой задаче для лапласиана // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 4. С. 520–534.
21. *Борисов Д. И., Гадильшин Р. Р.* О спектре лапласиана с часто меняющимся типом граничных условий // ТМФ. 1999. Т. 118. № 3. С. 347–353.
22. *Гадильшин Р. Р.* Осреднение и асимптотики в задаче о часто закрепленной мембране // ЖВМиМФ. 2001. Т. 41. № 12. С. 1857–1869.
23. *Борисов Д. И.* О лапласиане с часто и непериодически чередующимися граничными условиями // Докл. РАН. 2002. Т. 383. № 4. С. 443–445.
24. *Filo J., Luckhaus S.* Asymptotic expansion for a periodic boundary condition // J. Diff. Equations. 1995. V. 120. № 1. P. 133–173.
25. *Filo J.* A note on asymptotic expansion for a periodic boundary condition // Arch. Math. (Brno). 1998. V. 34. № 1. P. 83–92.
26. *Filo J., Luckhaus S.* Homogenization of a boundary condition for the heat equation // J. Eur. Math. Soc. 2000. V. 2. № 3. P. 217–258.
27. *Borisov D. I.* The asymptotics for the eigenelements of the Laplacian in a cylinder with frequently alternating boundary conditions // C. R. Acad. Sci. Paris. Série IIb. 2001. V. 329. № 10. P. 717–721.
28. *Борисов Д. И.* О сингулярно возмущенной краевой задаче для лапласиана в цилиндре // Дифференц. уравнения. 2002. Т. 38. № 8. С. 1071–1078.
29. *Борисов Д. И.* О краевой задаче в цилиндре с частой сменой типа граничных условий // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 7. С. 37–68.
30. *Чечкин Г. А.* Полное асимптотическое разложение решения краевой задачи с быстро меняющимися граничными условиями в слое // УМН. 1993. Т. 48. № 4. С. 218–219.
31. *Чечкин Г. А.* Асимптотическое разложение решения краевой задачи с быстро меняющимся типом граничных условий // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 1996. Т. 19. С. 323–337.
32. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
33. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. 1957. Т. 12. № 5. С. 3–122.
34. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
35. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
36. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
37. *Планида М. Ю.* О сходимости решений сингулярно возмущенных краевых задач для лапласиана // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 6. С. 867–877.