Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Л. Гуревич, Нелокальные эллиптические задачи с нелинейными преобразованиями переменных вблизи точек сопряжения, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 6, 71–110

DOI: <https://doi.org/10.4213/im460>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:26:40

УДК 517.9

П. Л. Гуревич

Нелокальные эллиптические задачи с нелинейными преобразованиями переменных вблизи точек сопряжения

Рассмотрено эллиптическое уравнение порядка $2m$ в области $G \subset \mathbb{R}^n$ с нелокальными условиями, связывающими значения искомой функции и ее производных на $(n-1)$ -мерных многообразиях $\bar{\Upsilon}_i$, где $\bigcup_i \bar{\Upsilon}_i = \partial G$, со значениями на $\omega_{is}(\bar{\Upsilon}_i) \subset \bar{G}$. Вблизи точек сопряжения $g \in \bar{\Upsilon}_i \cap \bar{\Upsilon}_j \neq \emptyset, i \neq j$, в качестве модельных возникают нелокальные эллиптические задачи в двугранных углах. Изучен случай, когда преобразованиям ω_{is} в модельных задачах соответствуют *нелинейные* преобразования переменных. Доказано, что при переходе от линейных преобразований переменных к нелинейным оператор задачи остается фредгольмовым и индекс сохраняется.

Библиография: 29 наименований.

Введение

Обыкновенные дифференциальные уравнения с нелокальными условиями одними из первых начали изучать А. Зоммерфельд [1], Я. Д. Тамаркин [2], М. Пиконе [3]. В 1932г. Т. Карлеман [4] рассмотрел задачу о нахождении голоморфной функции в ограниченной области G , удовлетворяющей следующему условию: значение неизвестной функции в точке x границы ∂G связано со значением в точке $\omega(x)$, где $\omega(\omega(x)) = x$, $\omega(\partial G) = \partial G$. С такой постановкой задачи связаны дальнейшие исследования нелокальных эллиптических задач со сдвигами, отображающими границу области на себя. В 1969г. А. В. Бицадзе и А. А. Самарский [5] рассмотрели принципиально иную нелокальную эллиптическую задачу, изучив уравнение Лапласа в ограниченной области G с краевыми условиями, связывающими значения искомой функции на многообразии $\Upsilon_1 \subset \partial G$ со значениями на некотором многообразии, лежащем внутри области G ; на множестве $\partial G \setminus \Upsilon_1$ задано условие Дирихле. В общем случае такая задача была сформулирована как нерешенная.

Наиболее сложной здесь оказывается ситуация, когда носитель нелокальных членов пересекается с границей области. Рассмотрим следующий пример. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, — ограниченная область с границей $\partial G = \Upsilon_1 \cup \Upsilon_2 \cup \mathcal{K}_1$, где Υ_i — открытые связные (в топологии ∂G) $(n-1)$ -мерные многообразия класса C^∞ , $\mathcal{K}_1 = \bar{\Upsilon}_1 \cap \bar{\Upsilon}_2$ — $(n-2)$ -мерное связное многообразие без края класса C^∞ (если $n = 2$, то $\mathcal{K}_1 = \{g_1, g_2\}$, где g_1, g_2 — концы кривых $\bar{\Upsilon}_1, \bar{\Upsilon}_2$). Пусть в окрестности

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-01-06523), Министерства образования РФ (грант № E02-1.0-131) и INTAS (грант YSF 2002-008).

каждой точки $g \in \mathcal{K}_1$ область G диффеоморфна n -мерному двугранному (плоскому, если $n = 2$) углу. Рассмотрим в области G нелокальную задачу

$$\Delta u = f_0(y), \quad y \in G, \quad (0.1)$$

$$u|_{\Upsilon_i} - b_i u(\omega_i(y))|_{\Upsilon_i} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (0.2)$$

Здесь $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$; ω_i – бесконечно дифференцируемое невырожденное преобразование, отображающее некоторую окрестность $\mathcal{O}_i$ многообразия Υ_i на множество $\omega(\mathcal{O}_i)$ так, что $\omega_i(\Upsilon_i) \subset G$, $\overline{\omega_i(\Upsilon_i)} \cap \partial G \neq \emptyset$ (см. рис. 0.1, a, b).

Рис. 0.1. Область G с границей $\partial G = \overline{\Upsilon_1} \cup \overline{\Upsilon_2}$ при $n = 2$; g_1 и g_2 – точки сопряжения нелокальных условий

Задачи типа (0.1), (0.2) рассматривались многими математиками (см. [6]–[8] и др.). Наиболее полная теория для таких задач построена в работах А. Л. Скубачевского и его учеников [9]–[14]: доказана фредгольмова разрешимость эллиптических уравнений высокого порядка с общими нелокальными условиями, получена асимптотика решений вблизи точек сопряжения нелокальных условий, изучена гладкость обобщенных решений. При этом показано [15], что если носитель нелокальных членов не пересекается с точками сопряжения (см. рис. 0.1, a), то индекс нелокальной задачи равен индексу соответствующей локальной; в противном случае (см. рис. 0.1, b) это, вообще говоря, уже неверно.

По существу, свойства задачи в ограниченной области определяются свойствами модельных нелокальных задач в двугранных (в двумерном случае – плоских) углах $\Omega = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : b' < \varphi < b'', z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, (φ, r) – полярные координаты точки y , соответствующих точкам сопряжения нелокальных условий. До сих пор [9]–[11] рассматривался случай, когда преобразованиям ω_{is} в модельных задачах соответствуют *линейные* операторы поворота и растяжения в плоскости $\{y\}$. Однако во многих приложениях такое ограничение оказывается неестественным. Поясним это на примерах. Задача типа (0.1), (0.2) возникает при математическом описании некоторых процессов в плазме [16]. Наличие нелокальных условий указывает на связь температуры плазмы на границе области с температурой внутри области и в других точках границы.

Другим важным приложением является теория диффузионных процессов (описывающих, например, броуновское движение частицы в мембране $G \subset \mathbb{R}^n$). Как

известно [17]–[19], всякому диффузионному процессу соответствует некоторая полугруппа Феллера, исследование которой сводится в силу теоремы Хилле–Иосиды к изучению эллиптического оператора с краевыми условиями, содержащими интеграл по $\bar{G}$ относительно некоторой неотрицательной борелевской меры [20]. В наиболее сложном случае, когда мера атомарна, нелокальные условия принимают вид (0.2). Их вероятностный смысл таков: частица, попадая в точку $y \in \Upsilon_i$, может с вероятностью b_i , $0 \leq b_i \leq 1$, перескочить в точку $\omega_i(y)$, либо с вероятностью $1 - b_i$ “погибнуть” (в этом случае процесс завершается). Понятно, что и в теории плазмы, и в теории диффузионных процессов возникающие преобразования переменных, вообще говоря, нелинейны.

Укажем еще одно приложение нелокальных задач. В монографии [21] показано, что в ряде случаев краевая задача для эллиптического дифференциально-разностного уравнения (возникающая, в частности, в авиационно-космической технике при моделировании многослойных пластин и оболочек [22], [21]) сводится к эллиптическому уравнению с нелокальными условиями на сдвигах границы. Таким образом, мы снова получаем нелинейные преобразования переменных в нелокальных членах (эти преобразования окажутся линейными лишь в частном случае, когда граница области на определенных участках совпадает с $(n - 1)$ -мерной гиперплоскостью).

Другие приложения, а также подробную библиографию работ, посвященных изучению нелокальных эллиптических задач, можно найти в [21].

В настоящей работе рассматривается эллиптическое уравнение порядка $2m$ в области $G \subset \mathbb{R}^n$ с нелокальными условиями, связывающими значения искомой функции и ее производных на $(n - 1)$ -мерных многообразиях Υ_i , где $\bigcup_i \Upsilon_i = \partial G$, со значениями на $\omega_{is}(\Upsilon_i) \subset G$. Как уже отмечалось, наибольшие трудности при изучении этой задачи возникают в случае пересечения носителя нелокальных членов $\bigcup_{i,s} \overline{\omega_{is}(\Upsilon_i)}$ с границей области, что приводит к появлению степенных особенностей решений вблизи некоторого множества [9] (так, в случае задачи (0.1), (0.2) особенности могут возникать вблизи точек g_1 и g_2). Поэтому такие задачи естественно рассматривать в весовых пространствах; это позволяет исследовать эллиптические уравнения высокого порядка с общими нелокальными условиями. Изучается случай, когда преобразования ω_{is} в модельных задачах соответствуют *нелинейным* преобразованиям переменных. Оказывается, задача с нелинейными преобразованиями не является малым или компактным возмущением соответствующей задачи с линейными преобразованиями. Однако будет показано, что при переходе от линейных преобразований переменных к нелинейным оператор задачи остается фредгольмовым и индекс сохраняется.

Отметим, что более общая структура множества точек сопряжения и нелокальных членов для эллиптических уравнений второго порядка с нелокальными возмущениями условий Дирихле рассматривалась в [8], что также подчеркивает важность нелинейных преобразований ω_{is} . С нашей точки зрения, достоинством предлагаемого подхода является возможность изучать уравнения порядка $2m$ с общими краевыми условиями, нелокальные возмущения которых могут быть сколь угодно большими. С другой стороны, этот подход позволяет исследовать асимптотику решений вблизи точек сопряжения [9], [14].

Приведем краткий обзор статьи. В §1 рассматривается постановка задачи и обсуждаются условия, налагаемые на преобразования переменных в нелокальных членах. Там же вводятся основные функциональные пространства (пространства Соболева с весом) и выписываются модельные задачи в двугранных и плоских углах. В §2 приведен пример нелокальной задачи и показано, что оператор, соответствующий задаче с нелинейным преобразованием переменных, не является малым или компактным возмущением оператора, соответствующего задаче с линейаризованным преобразованием. В §3 изучаются свойства нелинейных преобразований вблизи точек сопряжения нелокальных условий и доказывается ряд лемм, которые используются в §4 для вывода априорных оценок решений. В §5 строится правый регуляризатор, который, совместно с априорной оценкой, гарантирует фредгольмову разрешимость нелокальной задачи. Наконец, в §6 показано, что индекс задачи с нелинейными преобразованиями переменных равен индексу задачи с преобразованиями, линейаризованными вблизи точек сопряжения нелокальных условий.

§1. Постановка задачи в ограниченной области

1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, – ограниченная область с границей $\partial G = \bigcup_{i=1}^{N_0} \bar{\Upsilon}_i$, где Υ_i – открытые связные (в топологии ∂G) $(n-1)$ -мерные многообразия класса C^∞ . Предположим, что в окрестности каждой точки $g \in \partial G \setminus \bigcup_{i=1}^{N_0} \Upsilon_i$ область G диффеоморфна n -мерному двугранному (плоскому, если $n = 2$) углу $\Omega = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : 0 < b' < \varphi < b'' < 2\pi, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, где (φ, r) – полярные координаты точки y .

Обозначим через $\mathbf{P}(x, D)$ и $B_{i\mu s}(x, D)$ дифференциальные операторы порядков $2m$ и $m_{i\mu}$ соответственно с комплекснозначными коэффициентами класса C^∞ , $i = 1, \dots, N_0$, $\mu = 1, \dots, m$, $s = 0, \dots, S_i$. Пусть операторы $\mathbf{P}(x, D)$, $B_{i\mu 0}(x, D)$ удовлетворяют следующим условиям (см., например, [23, гл. 2, §1]).

УСЛОВИЕ 1.1. При всех $x \in \bar{G}$ оператор $\mathbf{P}(x, D)$ собственнo эллиптический.

УСЛОВИЕ 1.2. Система операторов $\{B_{i\mu 0}(x, D)\}_{\mu=1}^m$ для всех $i = 1, \dots, N_0$ и $x \in \bar{\Upsilon}_i$ удовлетворяет условию накрытия по отношению к оператору $\mathbf{P}(x, D)$.

Пусть ω_{is} , $i = 1, \dots, N_0$, $s = 1, \dots, S_i$, – бесконечно дифференцируемые невырожденные преобразования, отображающие некоторую окрестность θ_i многообразия Υ_i на множество $\omega_{is}(\theta_i)$ так, что $\omega_{is}(\Upsilon_i) \subset G$. Предположим, что множество

$$\mathcal{K} = \left\{ \bigcup_i (\bar{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{i,s} \omega_{is}(\bar{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{j,p} \bigcup_{i,s} \omega_{jp}(\omega_{is}(\bar{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i) \cap \Upsilon_j) \right\}$$

представимо в виде $\mathcal{K} = \bigcup_{j=1}^3 \mathcal{K}_j$, где

$$\mathcal{K}_1 = \bigcup_{p=1}^{N_1} \mathcal{K}_{1p} = \partial G \setminus \bigcup_{i=1}^{N_0} \Upsilon_i, \quad \mathcal{K}_2 = \bigcup_{p=1}^{N_2} \mathcal{K}_{2p} \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} \Upsilon_i, \quad \mathcal{K}_3 = \bigcup_{p=1}^{N_3} \mathcal{K}_{3p} \subset G. \quad (1.1)$$

Здесь $\mathcal{K}_{jp}$ – непересекающиеся $(n - 2)$ -мерные связные многообразия без края класса C^∞ (точки, если $n = 2$).

Рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\mathbf{P}(x, D)u = f_0(x), \quad x \in G, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{i\mu}(x, D)u &\equiv \sum_{s=0}^{S_i} (B_{i\mu s}(x, D)u)(\omega_{is}(x))|_{\Upsilon_i} = g_{i\mu}(x), \\ x &\in \Upsilon_i, \quad i = 1, \dots, N_0, \quad \mu = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $(B_{i\mu s}(x, D)u)(\omega_{is}(x)) = B_{i\mu s}(x', D_{x'})u(x')|_{x'=\omega_{is}(x)}$, $\omega_{i0}(x) \equiv x$.

ПРИМЕР 1.1. Рассмотрим задачу (0.1), (0.2) в двумерном случае с преобразованиями ω_i , соответствующими рис. 1.1. Тогда $\mathcal{K}_1 = \{g_1, g_2\}$, $\mathcal{K}_2 = \{\omega_1(g_2)\}$, $\mathcal{K}_3 = \{\omega_2(g_2), \omega_1(\omega_1(g_2))\}$.

Рис. 1.1. Область G с границей $\partial G = \overline{\Upsilon}_1 \cup \overline{\Upsilon}_2$ при $n = 2$

В работе [9] показано, что решения задачи (1.2), (1.3) могут иметь степенные особенности вблизи точек множества $\mathcal{K}_1$. Поэтому задачу (1.2), (1.3) естественно рассматривать в весовых пространствах. Введем пространство $H_b^l(Q)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\overline{Q} \setminus M)$ по норме

$$\|u\|_{H_b^l(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \int_Q \rho^{2(b-l+|\alpha|)} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Здесь Q – область G , угол Ω или $\mathbb{R}^n$; $M = \mathcal{K}_1$, если $Q = G$, и $M = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : y = 0, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, если $Q = \Omega$ или $Q = \mathbb{R}^n$; $C_0^\infty(\overline{Q} \setminus M)$ – множество бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями, принадлежащими $\overline{Q} \setminus M$; $l \geq 0$ – целое; $b \in \mathbb{R}$; $\rho = \rho(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K}_1)$ – функция, удовлетворяющая

условию¹ $c_1 \operatorname{dist}(x, \mathcal{K}_1) \leq \rho(x) \leq c_2 \operatorname{dist}(x, \mathcal{K}_1)$ ($x \in G$, $c_1, c_2 > 0$, $\operatorname{dist}(x, \mathcal{K}_1)$ – расстояние от точки x до множества $\mathcal{K}_1$), если $Q = G$, и $\rho(x) = |y|$, если $Q = \Omega$ или $Q = \mathbb{R}^n$. Через $H_b^{l-1/2}(\Upsilon)$ при $l \geq 1$ обозначим пространство следов на гладком $(n-1)$ -мерном многообразии $\Upsilon \subset \overline{Q}$ с нормой

$$\|\psi\|_{H_b^{l-1/2}(\Upsilon)} = \inf \|u\|_{H_b^l(Q)}, \quad u \in H_b^l(Q): u|_{\Upsilon} = \psi.$$

Пусть $l + 2m - m_{i\mu} - 1 \geq 0$ при всех i, μ . Введем ограниченный оператор, соответствующий нелокальной задаче (1.2), (1.3):

$$\mathbf{L} = \{\mathbf{P}(x, D), \mathbf{B}_{i\mu}(x, D)\}:$$

$$H_b^{l+2m}(G) \rightarrow \mathcal{H}_b^l(G, \Upsilon) = H_b^l(G) \times \prod_{i=1}^{N_0} \prod_{\mu=1}^m H_b^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Upsilon_i).$$

Здесь и далее, если не оговорено противное, считаем, что $b > l + 2m - 1$.

Поясним смысл ограничения на показатель b . Пусть преобразование ω_{is} отображает некоторую точку $g \in \overline{\Upsilon}_i \cap \mathcal{K}_1$ в точку $\omega_{is}(g)$, причем $\omega_{is}(g) \in \mathcal{K}_2$ или $\omega_{is}(g) \in \mathcal{K}_3$. Поскольку функция u принадлежит вблизи точки $\omega_{is}(g)$ пространству Соболева W_2^{l+2m} , то и функция $u(\omega_{is}(x))$ принадлежит пространству Соболева W_2^{l+2m} , но уже вблизи точки g ; однако при $b \leq l + 2m - 1$ она, вообще говоря, не принадлежит весовому пространству H_b^{l+2m} . Поэтому след $(B_{i\mu s}(x, D)u)(\omega_{is}(x))|_{\Upsilon_i}$ может не принадлежать весовому пространству $H_b^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Upsilon_i)$. Если же $b > l + 2m - 1$, то согласно [12, лемма 5.2] $W_2^{l+2m}(G) \subset H_b^{l+2m}(G)$. Таким образом, в этом случае оператор $\mathbf{L}$ будет определен корректно.

Отметим, что в двумерном случае задачу (1.2), (1.3) можно рассматривать в весовых пространствах с произвольным показателем b (см. [9]). Для этого следует ввести определенные условия согласования (порождаемые преобразованиями ω_{is}), а именно предположить, что решение u и правая часть $\{f_0, g_{i\mu}\}$ принадлежат соответствующим весовым пространствам не только вблизи множества $\mathcal{K}_1$, но также вблизи $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$. Поскольку, с одной стороны, эта ситуация подробно рассмотрена в [9], где изучаются задачи с линейными вблизи $\mathcal{K}_1$ преобразованиями, а с другой стороны, описанные изменения никак не связаны с преобразованиями ω_{is} вблизи множества $\mathcal{K}_1$, то ограничимся лишь формулировкой соответствующих результатов в конце § 5.

2. Рассмотрим более подробно структуру преобразований ω_{is} вблизи множества $\mathcal{K}_1$. Обозначим преобразование $\omega_{is}: \mathcal{O}_i \rightarrow \omega_{is}(\mathcal{O}_i)$ через ω_{is}^{+1} , а через ω_{is}^{-1} : $\omega_{is}(\mathcal{O}_i) \rightarrow \mathcal{O}_i$ – преобразование, обратное к ω_{is} . Назовем *орбитой точки* $g \in \mathcal{K}_1$ и обозначим через $\operatorname{Orb}(g)$ множество всех точек вида $\omega_{i_p s_p}^{\pm 1}(\dots \omega_{i_1 s_1}^{\pm 1}(g)) \in \mathcal{K}_1$, $1 \leq s_j \leq S_{i_j}$, $j = 1, \dots, p$, т. е. всех тех, которые можно получить, применяя к g последовательно преобразования $\omega_{i_j s_j}^{+1}$ или $\omega_{i_j s_j}^{-1}$, отображающие точки множества $\mathcal{K}_1$ в $\mathcal{K}_1$.

Введем множество $\mathcal{S}_{i1} = \{0 \leq s \leq S_i: \omega_{is}(\overline{\Upsilon}_i) \cap \mathcal{K}_1 \neq \emptyset\}$. Очевидно, что $0 \in \mathcal{S}_{i1}$. Пусть выполнены следующие условия.

¹Существование функции $\rho(x)$ вытекает из [24, гл. 6, § 2, теорема 2].

УСЛОВИЕ 1.3. Для каждой точки $g \in \mathcal{K}_1$:

- а) множество $\text{Orb}(g)$ состоит из конечного числа точек g^j , $j = 1, \dots, N = N(g)$;
- б) для точек g^j существуют окрестности

$$\widehat{\mathcal{V}}(g^j) \subset \mathcal{V}(g^j) \subset \mathbb{R}^n \setminus \left\{ \bigcup_{i,s} \omega_{is}(\overline{\Upsilon}_i) \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3 \right\}, \quad s \notin \mathcal{S}_{i1},$$

такие, что $\mathcal{V}(g^j) \cap \mathcal{V}(g^k) = \emptyset$, $j \neq k$, и если $g^j \in \overline{\Upsilon}_i$ и $\omega_{is}(g^j) = g^k$, то $\mathcal{V}(g^j) \subset \mathcal{O}_i$ и $\omega_{is}(\widehat{\mathcal{V}}(g^j)) \subset \mathcal{V}(g^k)$.

УСЛОВИЕ 1.4. Для каждой точки $g \in \mathcal{K}_1$ и $j = 1, \dots, N(g)$ существует невырожденное гладкое преобразование координат $x \mapsto x'(g, j)$, отображающее $\mathcal{V}(g^j)$ ($\widehat{\mathcal{V}}(g^j)$) на некоторую окрестность нуля $\mathcal{V}_j(0)$ ($\widehat{\mathcal{V}}_j(0)$) так, что:

- а) образами множеств $G \cap \mathcal{V}(g^j)$ ($G \cap \widehat{\mathcal{V}}(g^j)$) и $\Upsilon_i \cap \mathcal{V}(g^j)$ ($\Upsilon_i \cap \widehat{\mathcal{V}}(g^j)$) будут соответственно пересечение двугранного угла $\Omega_j = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n: 0 < b'_j < \varphi < b''_j < 2\pi, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$ с окрестностью $\mathcal{V}_j(0)$ ($\widehat{\mathcal{V}}_j(0)$) и пересечение грани угла Ω_j с окрестностью $\mathcal{V}_j(0)$ ($\widehat{\mathcal{V}}_j(0)$);

б) преобразование $\omega_{is}(x)$, $s \in \mathcal{S}_{i1} \setminus \{0\}$, при $x \in \widehat{\mathcal{V}}(g^j)$ в новой системе координат имеет вид $(y', z') \mapsto (\omega'_{is}(y', z'), z')$, где $\omega'_{is}(y', z') = \mathcal{G}'_{is}y' + o(|x'|)$, $\mathcal{G}'_{is}$ – оператор поворота на угол φ'_{is} и растяжения в $\chi'_{is} > 0$ раз в плоскости $\{y'\}$; при этом предполагается, что $\omega'_{is}(0, z) \equiv 0$;

в) в новой системе координат оператор $\mathcal{G}'_{is}$ переводит грань соответствующего угла Ω_j , $j = j(i)$, в $(n-1)$ -мерную полуплоскость, лежащую строго внутри, быть может, другого угла Ω_k , $k = k(i, s)$.

Условия 1.3 и 1.4 аналогичны условиям работ [9], [11], в которых изучались преобразования, линейные в окрестности $\mathcal{K}_1$ (и произвольные вне окрестности $\mathcal{K}_1$).

Условие 1.3, а) в некотором смысле аналогично условию Т. Карлемана [4], используемому в теории эллиптических задач с нелокальными преобразованиями, отображающими границу области на себя.

Условие 1.4 означает, в частности, что если $g \in \omega_{is}(\overline{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i) \cap \overline{\Upsilon}_j \cap \mathcal{K}_1 \neq \emptyset$, то поверхности $\omega_{is}(\overline{\Upsilon}_i)$ и $\overline{\Upsilon}_j$ имеют различные касательные плоскости в точке g . При этом требование $\omega'_{is}(0, z) \equiv 0$ является необходимым для того, чтобы было возможно представление (1.1). Если $\omega_{is}(\overline{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i) \subset \overline{G} \setminus \mathcal{K}_1$, то на характер подхода поверхности $\omega_{is}(\overline{\Upsilon}_i)$ к границе ∂G , как и в [9], [11], не налагается никаких ограничений.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Можно рассматривать более общую ситуацию, когда преобразование $\omega_{is}(x)$, $s \in \mathcal{S}_{i1} \setminus \{0\}$, при $x \in \widehat{\mathcal{V}}(g^j)$ в новой системе координат имеет вид $(y', z') \mapsto (\omega'_{is}(y', z'), \omega''_{is}(y', z'))$, где $\omega'_{is}(y', z')$ – то же, что и выше, $\omega''_{is}(y', z') = z' + o(|x'|)$, $\omega''_{is}(0, z') \equiv z'$ (последнее требование гарантирует выполнение п. а) условия 1.3). Однако для простоты мы ограничимся рассмотрением преобразования, описанного в условии 1.4.

3. Выпишем модельные задачи, соответствующие точкам множества $\mathcal{K}_1$ и определяющие фредгольмовость оператора $\mathbf{L}$.

Зафиксируем точку $g \in \mathcal{K}_1$. Пусть $\text{supp } u \subset (\bigcup_{j=1}^{N(g)} \widehat{\mathcal{V}}(g^j)) \cap \overline{G}$. Обозначим $u(x)$ при $x \in \mathcal{V}(g^j) \cap G$ через $u_j(x)$. Если $g^j \in \Upsilon_i$, $x \in \widehat{\mathcal{V}}(g^j)$, $\omega_{is}(x) \in \mathcal{V}(g^k)$, то обозначим $u(\omega_{is}(x))$ через $u_k(\omega_{is}(x))$; при этом, очевидно, $u(\omega_{i0}(x)) \equiv u(x) \equiv u_j(x)$. Тогда нелокальная краевая задача (1.2), (1.3) примет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x, D)u_j &= f_0(x), \quad x \in \widehat{\mathcal{V}}(g^j) \cap G, \\ \sum_{s \in \mathcal{S}_{i1}} (B_{i\mu s}(x, D)u_k)(\omega_{is}(x))|_{\Upsilon_i} &= g_{i\mu}(x), \\ x \in \widehat{\mathcal{V}}(g^j) \cap \Upsilon_i, \quad i \in \{1 \leq i \leq N_0: \widehat{\mathcal{V}}(g^j) \cap \Upsilon_i \neq \emptyset\}, \\ j &= 1, \dots, N = N(g), \quad \mu = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Согласно условию 1.4 в новой системе координат линейная часть $\mathcal{G}'_{is}$ преобразования ω'_{is} переводит одну из граней угла Ω_j , $j = j(i)$, в $(n-1)$ -мерную полуплоскость, лежащую строго внутри, быть может, другого угла Ω_k , $k = k(i, s)$. Обозначим все такие $(n-1)$ -мерные полуплоскости $\Gamma_{k2}, \dots, \Gamma_{k, R_k} \subset \Omega_k$ (если ни одна из граней углов $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ не отображается внутрь Ω_k , то положим $R_k = 1$). Обозначим также $b_{k1} = b'_k$, $b_{k, R_k+1} = b''_k$. Тогда множества

$$\Gamma_{k\sigma} = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n: \varphi = b_{k\sigma}, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}, \quad \sigma = 1, R_k + 1,$$

будут гранями угла Ω_k . При этом полуплоскости Γ_{kq} , очевидно, имеют вид

$$\Gamma_{kq} = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n: \varphi = b_{kq}, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}, \quad q = 2, \dots, R_k,$$

где $0 < b_{k1} < \dots < b_{k, R_k+1} < 2\pi$.

Введем функцию $U_j(x') = u_j(x(x'))$ и переобозначим x' через x . Тогда в силу условий 1.3, 1.4 задача (1.2), (1.3) окончательно примет вид

$$\mathcal{P}_j(x, D_y, D_z)U_j = f_j(x), \quad x \in \Omega_j, \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{j\sigma\mu}(x, D_y, D_z)U &\equiv B_{j\sigma\mu}(x, D_y, D_z)U_j|_{\Gamma_{j\sigma}} \\ &+ \sum_{k, q, s} (B_{j\sigma\mu kqs}(x, D_y, D_z)U_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y, z), z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \\ &= g_{j\sigma\mu}(x), \quad x \in \Gamma_{j\sigma}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь (и далее, если не оговорено противное) $j, k = 1, \dots, N$, $\sigma = 1, R_j + 1$, $q = 2, \dots, R_k$, $\mu = 1, \dots, m$, $s = 1, \dots, S_{j\sigma kq}$, $\mathcal{P}_j(x, D_y, D_z)$, $B_{j\sigma\mu}(x, D_y, D_z)$ и $B_{j\sigma\mu kqs}(x, D_y, D_z)$ – операторы порядков $2m$, $m_{j\sigma\mu}$ и $m_{j\sigma\mu}$ соответственно с переменными коэффициентами класса C^∞ , $\omega'_{j\sigma kqs}(y, z) = \mathcal{G}_{j\sigma kqs}y + o(|x|)$, $\mathcal{G}_{j\sigma kqs}$ – оператор поворота на угол $\varphi_{j\sigma kq}$ и растяжения в $\chi_{j\sigma kqs} > 0$ раз в плоскости $\{y\}$; при этом $\omega'_{j\sigma kqs}(0, z) \equiv 0$, $b_{k1} < b_{j\sigma} + \varphi_{j\sigma kq} = b_{kq} < b_{k, R_k+1}$.

Определим пространства вектор-функций

$$H_b^{l+2m,N}(\Omega) = \prod_j H_b^{l+2m}(\Omega_j), \quad \mathcal{H}_b^{l,N}(\Omega, \Gamma) = \prod_j \mathcal{H}_b^l(\Omega_j, \Gamma_j),$$

$$\mathcal{H}_b^l(\Omega_j, \Gamma_j) = H_b^l(\Omega_j) \times \prod_{\sigma, \mu} H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma}).$$

Введем ограниченные операторы

$$\mathcal{L}^\omega = \{ \mathcal{P}_j(D_y, D_z), \mathcal{B}_{j\sigma\mu}^\omega(D_y, D_z) \}: H_b^{l+2m,N}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}_b^{l,N}(\Omega, \Gamma),$$

$$\mathcal{L}^\mathcal{G} = \{ \mathcal{P}_j(D_y, D_z), \mathcal{B}_{j\sigma\mu}^\mathcal{G}(D_y, D_z) \}: H_b^{l+2m,N}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}_b^{l,N}(\Omega, \Gamma).$$

Здесь²

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{j\sigma\mu}^\omega(D_y, D_z)U &= B_{j\sigma\mu}(D_y, D_z)U_j|_{\Gamma_{j\sigma}} \\ &\quad + \sum_{k,q,s} (B_{j\sigma\mu kqs}(D_y, D_z)U_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y, z), z)|_{\Gamma_{j\sigma}}, \\ \mathcal{B}_{j\sigma\mu}^\mathcal{G}(D_y, D_z)U &= B_{j\sigma\mu}(D_y, D_z)U_j|_{\Gamma_{j\sigma}} \\ &\quad + \sum_{k,q,s} (B_{j\sigma\mu kqs}(D_y, D_z)U_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}y, z)|_{\Gamma_{j\sigma}}, \end{aligned}$$

$\mathcal{P}_j(D_y, D_z)$, $B_{j\sigma\mu}(D_y, D_z)$ и $B_{j\sigma\mu kqs}(D_y, D_z)$ – главные однородные части операторов $\mathcal{P}_j(0, D_y, D_z)$, $B_{j\sigma\mu}(0, D_y, D_z)$ и $B_{j\sigma\mu kqs}(0, D_y, D_z)$ соответственно.

Далее будем для краткости записывать $\mathcal{P}_j$, $B_{j\sigma\mu}$, $B_{j\sigma\mu kqs}$, $\mathcal{B}_{j\sigma\mu}^\omega$ и $\mathcal{B}_{j\sigma\mu}^\mathcal{G}$ вместо $\mathcal{P}_j(D_y, D_z)$, $B_{j\sigma\mu}(D_y, D_z)$, $B_{j\sigma\mu kqs}(D_y, D_z)$, $\mathcal{B}_{j\sigma\mu}^\omega(D_y, D_z)$ и $\mathcal{B}_{j\sigma\mu}^\mathcal{G}(D_y, D_z)$ соответственно.

Отметим, что оператор $\mathcal{B}_{j\sigma\mu}^\omega$ содержит нелокальные слагаемые с нелинейными преобразованиями $\omega'_{j\sigma kqs}$, тогда как оператор $\mathcal{B}_{j\sigma\mu}^\mathcal{G}$ – с линейными преобразованиями $\mathcal{G}_{j\sigma kqs}$. Таким образом, операторы $\mathcal{L}^\omega$ и $\mathcal{L}^\mathcal{G}$ отвечают модельным задачам с нелинейными и линеаризованными преобразованиями соответственно.

Как уже отмечалось, задача с линейными в окрестности $\mathcal{K}_1$ преобразованиями аргумента изучена в [9]–[11]; в частности, доказана ее фредгольмова разрешимость. В § 2 настоящей работы будет показано, что оператор $\mathcal{L}^\omega$ не является малым или компактным возмущением оператора $\mathcal{L}^\mathcal{G}$, как бы ни были малы носители функций U . Поэтому для доказательства фредгольмовой разрешимости задачи (1.2), (1.3) с нелинейными преобразованиями переменных мы заново получим априорные оценки и построим правый регуляризатор. Это будет сделано в § 4, 5.

²В дальнейшем рассматриваются функции U_k с компактным носителем, сосредоточенным в окрестности начала координат и таким, что $(\omega'_{j\sigma kqs}(y, z), z) \in \Omega_k$ при $x \in \text{supp } U_k$; это обеспечивает корректность определения оператора $\mathcal{B}_{j\sigma\mu}^\omega(D_y, D_z)$.

4. Доказательство априорных оценок и построение правого регуляризатора задачи в ограниченной области будет основано на обратимости оператора $\mathcal{L}^{\mathcal{G}}$. Укажем условия, при которых оператор $\mathcal{L}^{\mathcal{G}}$ является изоморфизмом. Для этого при $n \geq 3$ наряду с оператором в двугранных углах рассмотрим модельный оператор с параметром θ в плоских углах. Введем для любого угла $K = \{y \in \mathbb{R}^2: 0 < b' < \varphi < b'' < 2\pi\}$ пространство $E_b^l(K)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\overline{K} \setminus \{0\})$ по норме

$$\|u\|_{E_b^l(K)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \int_K |y|^{2b} (|y|^{2(|\alpha|-l)} + 1) |D_y^\alpha u(y)|^2 dy \right)^{1/2}.$$

Через $E_b^{l-1/2}(\gamma)$ при $l \geq 1$ обозначим пространство следов на луче $\gamma \subset \overline{K}$ с нормой

$$\|\psi\|_{E_b^{l-1/2}(\gamma)} = \inf \|u\|_{E_b^l(K)}, \quad u \in E_b^l(K): u|_\gamma = \psi.$$

(Конструктивные определения следовых пространств $H_b^{l-1/2}(\Upsilon)$ и $E_b^{l-1/2}(\gamma)$, эквивалентные данным, см. в [25, § 1].)

Определим пространства вектор-функций

$$\begin{aligned} E_b^{l+2m,N}(K) &= \prod_j E_b^{l+2m}(K_j), \quad \mathcal{E}_b^{l,N}(K, \gamma) = \prod_j \mathcal{E}_b^l(K_j, \gamma_j), \\ \mathcal{E}_b^l(K_j, \gamma_j) &= E_b^l(K_j) \times \prod_{\sigma, \mu} E_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\gamma_{j\sigma}), \end{aligned}$$

где $K_j = \{y \in \mathbb{R}^2: b_{j1} < \varphi < b_{j,R_j+1}\}$, $\gamma_{j\sigma} = \{y \in \mathbb{R}^2: \varphi = b_{j\sigma}\}$.

Рассмотрим ограниченный оператор

$$\mathcal{L}^{\mathcal{G}}(\theta) = \{ \mathcal{P}_j(D_y, \theta), \mathcal{B}_{j\sigma\mu}^{\mathcal{G}}(D_y, \theta) \}: E_b^{l+2m,N}(K) \rightarrow \mathcal{E}_b^{l,N}(K, \gamma),$$

где θ – произвольная точка единичной сферы $S^{n-3} = \{\theta \in \mathbb{R}^{n-2}: |\theta| = 1\}$.

5. Запишем операторы $\mathcal{P}_j(D_y, 0)$, $B_{j\sigma\mu}(D_y, 0)$, $B_{j\sigma\mu kqs}(D_y, 0)$ в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_j(D_y, 0) &= r^{-2m} \tilde{\mathcal{P}}_j(\varphi, D_\varphi, rD_r), \\ B_{j\sigma\mu}(D_y, 0) &= r^{-m_{j\sigma\mu}} \tilde{B}_{j\sigma\mu}(\varphi, D_\varphi, rD_r), \\ B_{j\sigma\mu kqs}(D_y, 0) &= r^{-m_{j\sigma\mu}} \tilde{B}_{j\sigma\mu kqs}(\varphi, D_\varphi, rD_r), \end{aligned}$$

где $D_\varphi = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$, $D_r = -i \frac{\partial}{\partial r}$. Рассмотрим аналитическую оператор-функцию $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda): W_2^{l+2m,N}(b_1, b_2) \rightarrow \mathcal{W}_2^{l,N}[b_1, b_2]$, определенную по формуле

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}^{\mathcal{G}}(\lambda) \tilde{U} &= \left\{ \tilde{\mathcal{P}}_j(\varphi, D_\varphi, \lambda) \tilde{U}_j, \tilde{B}_{j\sigma\mu}(\varphi, D_\varphi, \lambda) \tilde{U}_j(\varphi)|_{\varphi=b_{j\sigma}} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k,q,s} e^{(i\lambda - m_{j\sigma\mu}) \ln \chi_{j\sigma kqs}} \tilde{B}_{j\sigma\mu kqs}(\varphi, D_\varphi, \lambda) \tilde{U}_k(\varphi + \varphi_{j\sigma kqs})|_{\varphi=b_{j\sigma}} \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} W_2^{l+2m,N}(b_1, b_2) &= \prod_j W_2^{l+2m}(b_{j1}, b_{j,R_j+1}), \\ \mathcal{W}_2^{l,N}[b_1, b_2] &= \prod_j \mathcal{W}_2^l[b_{j1}, b_{j,R_j+1}], \\ \mathcal{W}_2^l[b_{j1}, b_{j,R_j+1}] &= W_2^l(b_{j1}, b_{j,R_j+1}) \times \mathbb{C}^{2m}. \end{aligned}$$

В силу [10, леммы 2.1, 2.2] существует конечно-мероморфная оператор-функция $(\tilde{\mathcal{L}}^g)^{-1}(\lambda)$ такая, что для λ , не являющегося ее полюсом, оператор $(\tilde{\mathcal{L}}^g)^{-1}(\lambda)$ есть ограниченный обратный к оператору $\tilde{\mathcal{L}}^g(\lambda)$, а для каждого ее полюса λ_0 существует $\delta > 0$ такое, что множество $\{\lambda \in \mathbb{C}: 0 < |\operatorname{Im} \lambda - \operatorname{Im} \lambda_0| < \delta\}$ не содержит полюсов $(\tilde{\mathcal{L}}^g)^{-1}(\lambda)$.

Если $n = 2$, то по теореме 2.1 из [10] оператор $\mathcal{L}^g$ – изоморфизм тогда и только тогда, когда на прямой $\operatorname{Im} \lambda = b + 1 - l - 2m$ нет полюсов $(\tilde{\mathcal{L}}^g)^{-1}(\lambda)$.

Пусть $n \geq 3$. Предположим дополнительно, что система $\{B_{j\sigma\mu}(D_y, D_z)\}_{\mu=1}^m$ нормальна на $\Gamma_{j\sigma}$ и порядки $m_{j\sigma\mu}$ операторов $B_{j\sigma\mu}(D_y, D_z)$, $B_{j\sigma\mu kqs}(D_y, D_z)$ не превосходят $2m - 1$. В этом случае в силу [13, теорема 9.1] отсутствие на прямой $\operatorname{Im} \lambda = b + 1 - l - 2m$ полюсов $(\tilde{\mathcal{L}}^g)^{-1}(\lambda)$ необходимо и достаточно для того, чтобы оператор $\mathcal{L}^g(\theta)$ был фредгольмов. По теореме 3.3 из [10], если к тому же $\dim \ker(\mathcal{L}^g(\theta)) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathcal{L}^g(\theta)) = 0$ при $l = 0$ и всех $\theta \in S^{n-3}$, то оператор $\mathcal{L}^g$ – изоморфизм для любого l (см. соответствующий пример в [13, § 10]). Отметим, что если $\mathcal{L}^g$ – не изоморфизм, то оператор $\mathcal{L}^g(\theta)$ не будет фредгольмовым (см. [13, теорема 9.3]).

Поскольку операторы $\mathcal{L}^\omega$, $\mathcal{L}^g$, $\mathcal{L}^g(\theta)$ и $\tilde{\mathcal{L}}^g(\lambda)$, отвечающие задаче (1.4), (1.5), зависят от выбора точки $g \in \mathcal{K}_1$, то обозначим их через $\mathcal{L}_g^\omega$, $\mathcal{L}_g^g$, $\mathcal{L}_g^g(\theta)$ и $\tilde{\mathcal{L}}_g^g(\lambda)$ соответственно.

§ 2. Пример нелокальной задачи с нелинейным преобразованием переменных

В настоящем параграфе покажем на простейшем примере, что задача с нелинейным в окрестности $\mathcal{K}_1$ преобразованием не является малым или компактным возмущением задачи с соответствующим линейным преобразованием.

1. Предположим для простоты, что задача (1.2), (1.3) рассматривается в плоской области. Пусть модельная задача (1.4), (1.5), соответствующая одной из точек множества $\mathcal{K}_1$, имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta u &= f(y), & y &\in K, \\ u|_{\gamma_1} + u(\omega'(y))|_{\gamma_1} &= g_1(y), & y &\in \gamma_1, \\ u|_{\gamma_2} &= g_2(y), & y &\in \gamma_2. \end{aligned}$$

Здесь $K = \{y \in \mathbb{R}^2: r > 0, |\varphi| < \pi/2\}$ – плоский угол (в данном случае раствора π) со сторонами $\gamma_i = \{y \in \mathbb{R}^2: r > 0, \varphi = (-1)^i \pi/2\}$, $i = 1, 2$. Пусть $\omega'(y) = \mu(\mathcal{G}y)$,

где $\mathcal{G}$ – оператор поворота на угол $\pi/2$, отображающий сторону γ_1 на луч $\gamma = \{y \in \mathbb{R}^2 : r > 0, \varphi = 0\}$;

$$\mu : (y_1, y_2) \mapsto \left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_1^2}}, y_2 + \frac{y_1^2}{\sqrt{1+y_1^2}} \right)$$

– бесконечно дифференцируемое преобразование, отображающее луч γ на кривую $\mu(\gamma)$, которая касается γ в начале координат (см. рис 2.1).

Рис. 2.1. Угол K раствора π

Операторы $\mathcal{L}^\omega, \mathcal{L}^\mathcal{G} : H_b^{l+2}(K) \rightarrow H_b^l(K) \times \prod_{i=1}^2 H_b^{l+3/2}(\gamma_i)$, соответствующие модельным задачам с нелинейным и линеаризованным преобразованием переменных, имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\omega u &= \{\Delta u, u|_{\gamma_1} + u(\omega'(y))|_{\gamma_1}, u|_{\gamma_2}\}, \\ \mathcal{L}^\mathcal{G} u &= \{\Delta u, u|_{\gamma_1} + u(\mathcal{G}y)|_{\gamma_1}, u|_{\gamma_2}\}. \end{aligned}$$

Очевидно, ненулевой компонентой разности $\mathcal{L}^\mathcal{G} u - \mathcal{L}^\omega u$ будет выражение

$$u(\mathcal{G}y)|_{\gamma_1} - u(\omega'(y))|_{\gamma_1} = u(y)|_\gamma - u(\mu(y))|_\gamma.$$

Введем оператор $A_\varepsilon : H_b^{l+2}(K) \rightarrow H_b^{l+3/2}(\gamma)$ с областью определения $D(A_\varepsilon) = \{u \in H_b^{l+2}(K) : \text{supp } u \subset \{r < \varepsilon\} \cap \bar{K}\}$, действующий по формуле

$$A_\varepsilon u(y) = u(y)|_\gamma - u(\mu(y))|_\gamma.$$

Докажем, что оператор A_ε нельзя сделать малым или компактным за счет выбора достаточно малого ε . Покажем это в случае, когда A_ε действует из $H_b^1(K)$ в $H_b^{1/2}(\gamma)$, общий случай рассматривается аналогично. Построим последовательность $u_\varepsilon \in D(A_\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, такую, что

$$\|u_\varepsilon|_\gamma - u_\varepsilon(\mu(\cdot))|_\gamma\|_{H_b^{1/2}(\gamma)} \geq c \|u_\varepsilon\|_{H_b^1(K)},$$

где $c > 0$ не зависит от ε .

Запишем сужение преобразования μ на луч γ в полярных координатах (φ, r) :

$$\mu|_{\gamma}: (0, r) \mapsto (\Phi(r), r),$$

где $\Phi(r) = \arctg r$. Ясно, что $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) = \frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{\Phi}{r}, \frac{d\Phi}{dr} \leq 1$ на отрезке $[0, 1]$.

Рассмотрим преобразование

$$\tilde{\mu}: (\varphi, r) \mapsto (\varphi + \Phi(r), r).$$

Очевидно, $u(\mu(y))|_{\gamma} = u(\tilde{\mu}(y))|_{\gamma}$, так как $\mu|_{\gamma} = \tilde{\mu}|_{\gamma}$. Поэтому без ограничения общности будем считать, что преобразование μ имеет вид

$$\mu: (\varphi, r) \mapsto (\varphi + \Phi(r), r).$$

Отметим, что норма любой функции $u \in H_b^1(K)$, записанной в полярных координатах, эквивалентна следующему выражению:

$$\left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \int_0^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^{2b-1} |(rD_r)^{\alpha_1} D_\varphi^{\alpha_2} u(\varphi, r)|^2 d\varphi dr \right)^{1/2}.$$

Сделаем замену переменных $r = e^{-t}$. Тогда преобразование μ в новых координатах (φ, t) запишется в виде

$$\mu: (\varphi, t) \mapsto (\varphi + \Phi(e^{-t}), t).$$

Полагая $v(\varphi, t) = u(\varphi, e^{-t})$, получим, что норма $\|u\|_{H_b^1(K)}$ эквивалентна норме

$$\|v\|_{W_{2,b}^1(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-2bt} |D_t^{\alpha_1} D_\varphi^{\alpha_2} v(\varphi, t)|^2 d\varphi dt \right)^{1/2}, \quad (2.1)$$

где $Q = \{t \in \mathbb{R}, |\varphi| < \pi/2\}$, а $W_{2,b}^1(Q)$ – пространство с нормой (2.1). Очевидно, $W_{2,0}^1(Q)$ совпадает с пространством Соболева $W_2^1(Q)$.

Поскольку нормы $\|v\|_{W_{2,b}^1(Q)}$ и $\|e^{-bt}v\|_{W_2^1(Q)}$ эквивалентны, достаточно изучить случай $b = 0$. Далее будем рассматривать функции $v(\varphi, t)$, носитель которых содержится в полосе $\{|\varphi| < \pi/2\}$. Продолжая такие функции v нулем при $|\varphi| \geq \pi/2$, получим $\|v\|_{W_2^1(Q)} = \|v\|_{W_2^1(\mathbb{R}^2)}$.

Таким образом, требуемое утверждение будет доказано, если мы построим последовательность $v_s \in W_2^1(\mathbb{R}^2)$ такую, что $\text{supp } v_s \subset \{t > 2s, |\varphi| < \pi/2\}$ и

$$\|v_s(0, t) - v_s(\Phi(e^{-t}), t)\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R})} \geq c \|v_s\|_{W_2^1(\mathbb{R}^2)},$$

где $c > 0$ не зависит от s .

Для этого перейдем от переменных (φ, t) к переменным (φ, τ) : введем множества

$$Q_s = \left\{ |\theta| \leq \frac{\pi}{2}, 2s \leq \tau \leq 2s+1 \right\}, \quad s = 0, 1, 2, \dots,$$

и сделаем замену

$$\varphi = F(\theta, \tau), \quad t = \tau. \quad (2.2)$$

Здесь $F(\theta, \tau) = \theta e^{2s} \Phi(e^{-\tau})$ при $(\theta, \tau) \in Q_s, s = 0, 1, 2, \dots$, и $F(\theta, \tau)$ продолжена на множество $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{s=0}^{\infty} Q_s$ так, что преобразование (2.2) остается непрерывно дифференцируемым с якобианом $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ таким, что

$$0 < c_1 \leq \left| \frac{\partial F}{\partial \theta} \right| \leq c_2 \quad \text{на } \mathbb{R}^2. \quad (2.3)$$

Такое продолжение существует. Действительно,

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = e^{2s} \Phi(e^{-\tau}), \quad \frac{\partial F}{\partial \tau} = -\theta e^{-\tau+2s} \frac{d\Phi}{dr} \Big|_{r=e^{-\tau}}, \quad (\theta, \tau) \in Q_s,$$

поэтому (в силу указанных выше свойств функции Φ) в $\bigcup_{s=0}^{\infty} Q_s$ функция $F(\theta, \tau)$ непрерывно дифференцируема по θ и τ и выполнены неравенства (2.3).

Легко видеть, что при замене переменных (2.2) прообразом отрезка $Q_s \cap \{\theta = 0\}$ является отрезок прямой $\{\varphi = 0\}$, а преобразование μ на Q_s имеет вид

$$\mu: (\theta, \tau) \mapsto (\theta + e^{-2s}, \tau), \quad (\theta, \tau) \in Q_s. \quad (2.4)$$

Рассмотрим функции $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ такие, что $\text{supp } f \subset \{|\theta| < \frac{\pi}{2}\}$, $f(0) \neq f(1)$, $\text{supp } g \subset \{0 < \tau < 1\}$, $g(\tau) \not\equiv 0$. Зададим последовательность $w_s(\theta, \tau) = f_s(\theta)g_s(\tau)$, где

$$f_s(\theta) = f(\theta e^{2s}), \quad g_s(\tau) = g((\tau - 2s)e^{2s}), \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Очевидно, $\text{supp } w_s \subset Q_s$ (см. рис. 2.2).

Рис. 2.2. Носители функций w_s содержатся в заштрихованных областях

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \|w_s\|_{W_2^1(\mathbb{R}^2)}^2 &= \|f_s\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \|g_s\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \left\| \frac{df_s}{d\theta} \right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \|g_s\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \|f_s\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \left\| \frac{dg_s}{d\tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \\ &= e^{-4s} \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \|g\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \left\| \frac{df}{d\theta} \right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \|g\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \|f\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \left\| \frac{dg}{d\tau} \right\|_{L_2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Аналогично, используя формулу для нормы в $W_2^{1/2}(\mathbb{R})$ (см. [26])

$$\|g\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R})} = \left(\|g\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|g(\tau_1) - g(\tau_2)|^2}{|\tau_1 - \tau_2|^2} d\tau_1 d\tau_2 \right)^{1/2}$$

и вид (2.4) преобразования μ в координатах (θ, τ) , получим

$$\begin{aligned} \|w_s|_{\theta=0} - w_s(\mu(\cdot))|_{\theta=0}\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R})}^2 &= |f_s(0) - f_s(e^{-2s})|^2 \|g_s\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R})}^2 \\ &\geq |f(0) - f(1)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|g(\tau_1) - g(\tau_2)|^2}{|\tau_1 - \tau_2|^2} d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что

$$\|w_s|_{\theta=0} - w_s(\mu(\cdot))|_{\theta=0}\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R})}^2 \geq c \|w_s\|_{W_2^1(\mathbb{R}^2)}^2.$$

2. Используя последовательность w_s , легко показать, что оператор A_ε не является компактным ни при каком ε . Действительно, последовательность w_s ограничена в $W_2^1(\mathbb{R}^2)$. Однако из последовательности $w_s|_{\theta=0} - w_s(\mu(\cdot))|_{\theta=0}$ нельзя выделить сходящуюся в $W_2^{1/2}(\mathbb{R})$ подпоследовательность, так как согласно (2.6) выражение

$$\begin{aligned} &\| [w_s|_{\theta=0} - w_s(\mu(\cdot))|_{\theta=0}] - [w_h|_{\theta=0} - w_h(\mu(\cdot))|_{\theta=0}] \|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R})} \\ &= \|w_s|_{\theta=0} - w_s(\mu(\cdot))|_{\theta=0}\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R})} + \|w_h|_{\theta=0} - w_h(\mu(\cdot))|_{\theta=0}\|_{W_2^{1/2}(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

при любых натуральных $s \neq h$ ограничено снизу положительной константой.

§ 3. Преобразования переменных вблизи множества $\mathcal{K}_1$

Как следует из результатов § 2, для доказательства фредгольмовой разрешимости задачи с нелинейными в окрестности множества $\mathcal{K}_1$ преобразованиями необходимо заново получить априорные оценки решений и построить правый регуляризатор. Для этого предварительно изучим некоторые свойства преобразований ω_{is} вблизи множества $\mathcal{K}_1$.

Зафиксируем точку $g \in \mathcal{K}_1$, для каждого $j = 1, \dots, N$, $N = N(g)$, сделаем замену переменных $x \mapsto x'(g, j)$ и рассмотрим преобразования $\omega'_{j\sigma k q s}(y, z)$ при $(y, z) \in \mathcal{V}_{\varepsilon_0}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varepsilon_0\}$. Число ε_0 предполагается настолько малым, что $\mathcal{V}_{\varepsilon_0}(0) \subset \widehat{\mathcal{V}}_j(0)$, $j = 1, \dots, N$. Ниже на ε_0 будут наложены дополнительные условия.

1. Прежде чем изучать свойства преобразований ω_{is} , получим одно вспомогательное утверждение, которое будет использовано при доказательстве леммы о представлении преобразований ω_{is} в полярных координатах (см. лемму 3.2).

ЛЕММА 3.1. Пусть $h = h(r, z)$ – такая функция, что $|D_r^k D_z^\alpha h| \leq c_{k\alpha}$ при $r \geq 0$, $z \in \mathbb{R}^{n-2}$, $(r^2 + |z|^2)^{1/2} \leq \varepsilon_0$. Пусть $f(r, z) = r^{-l} h(r, z)$ при некотором $l \in \mathbb{N}$. Тогда если $|f| \leq c$, то $|D_r^k f| \leq c_k$ при $r \geq 0$, $z \in \mathbb{R}^{n-2}$, $(r^2 + |z|^2)^{1/2} \leq \varepsilon_0$ для любого $k = 1, 2, \dots$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $l = 1$, т.е. $f(r, z) = r^{-1} h(r, z)$. По формуле Лейбница

$$\frac{\partial^k f(r, z)}{\partial r^k} = \sum_{s=0}^k \frac{(-1)^s k!}{(k-s)!} r^{-s-1} \frac{\partial^{k-s} h(r, z)}{\partial r^{k-s}}.$$

Разлагая $\frac{\partial^{k-s} h}{\partial r^{k-s}}$ по формуле Тейлора в окрестности $r = 0$ и используя ограниченность производных функции h , получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k f(r, z)}{\partial r^k} &= \sum_{s=0}^k \frac{(-1)^s k!}{(k-s)!} r^{-s-1} \left[\sum_{p=0}^s \frac{1}{p!} \frac{\partial^{k-s+p} h}{\partial r^{k-s+p}}(0, z) r^p + \frac{\partial^{k+1} h}{\partial r^{k+1}}(\varkappa_{rz} r, z) r^{s+1} \right] \\ &= \sum_{s=0}^k \sum_{p=0}^s \frac{(-1)^s k!}{(k-s)! p!} \frac{\partial^{k-s+p} h}{\partial r^{k-s+p}}(0, z) r^{-s-1+p} + O(1), \end{aligned}$$

где $\varkappa_{rz} \in (0, 1)$.

В последней сумме сделаем замену $p' = s - p$ и вновь обозначим p' через p . В результате получим

$$\frac{\partial^k f(r, z)}{\partial r^k} = \sum_{s=0}^k \sum_{p=0}^s \frac{(-1)^s k!}{(k-s)! (s-p)!} \frac{\partial^{k-p} h}{\partial r^{k-p}}(0, z) r^{-p-1} + O(1).$$

Выпишем коэффициент $a_p(z)$ при r^{-p-1} в правой части последнего тождества:

$$\begin{aligned} a_p(z) &= \frac{\partial^{k-p} h}{\partial r^{k-p}}(0, z) \sum_{s=p}^k \frac{(-1)^s k!}{(k-s)! (s-p)!} \\ &= \frac{\partial^{k-p} h}{\partial r^{k-p}}(0, z) (-1)^p \sum_{s=0}^{k-p} k(k-1) \cdots (k-(s+p)+1) \frac{1}{s!} (-1)^s, \\ p &= 0, \dots, k. \end{aligned}$$

Поскольку $|r^{-1} h(r, z)| \leq c$ по условию, то $h(0, z) \equiv 0$; следовательно, $a_k(z) \equiv 0$. С другой стороны, заметим, что при $0 \leq p < k$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d^p}{dt^p} (t+1)^k \Big|_{t=-1} = \left(\sum_{s=0}^{k-p} k(k-1) \cdots (k-(s+p)+1) \frac{1}{s!} t^s \right) \Big|_{t=-1} \\ &= \sum_{s=0}^{k-p} k(k-1) \cdots (k-(s+p)+1) \frac{1}{s!} (-1)^s. \end{aligned}$$

Таким образом, $a_p(z) \equiv 0$ при всех $p = 0, \dots, k$, и лемма при $l = 1$ доказана.

2) При $l \geq 2$ применим метод математической индукции. Пусть лемма верна для $l = 1, \dots, l_1 - 1$. Докажем ее для $l = l_1$. Имеем $f = r^{-1}f_1$, где $f_1 = r^{-(l_1-1)}h$. Так как $|f| \leq c$, то $|f_1| \leq c$ и, следовательно, по индуктивному предположению (при $l = l_1 - 1$) выполняется оценка $|D_r^k D_z^\alpha f_1| \leq c_{k\alpha}$. Вновь применяя индуктивное предположение (теперь при $l = 1$), получаем утверждение леммы для $r^{-1}f_1$, т.е. для $f = r^{-l_1}h$. Лемма доказана.

Теперь приступим к изучению преобразований ω . Следующая лемма описывает структуру нелинейных преобразований $\omega'_{j\sigma kqs}$ в цилиндрических координатах. Такое представление оказывается более удобным в случае, когда задача рассматривается в весовых пространствах.

ЛЕММА 3.2. *При достаточно малом ε_0 преобразование*

$$\omega'_{j\sigma kqs}(y, z)|_{\Gamma_{j\sigma} \cap \mathcal{V}_{\varepsilon_0}(0)}$$

представимо в полярных координатах в виде

$$(b_{j\sigma}, r) \mapsto (b_{kq} + \Phi_{j\sigma kqs}(r, z), \chi_{j\sigma kqs}r + R_{j\sigma kqs}(r, z)), \quad (r^2 + |z|^2)^{1/2} \leq \varepsilon_0, \quad (3.1)$$

где $\Phi_{j\sigma kqs}(r, z)$, $R_{j\sigma kqs}(r, z)$ – бесконечно гладкие функции такие, что

$$|\Phi_{j\sigma kqs}| \leq c\varepsilon_0, \quad |R_{j\sigma kqs}| \leq c\varepsilon_0 r, \quad (3.2)$$

$$|D_r^k D_z^\alpha \Phi_{j\sigma kqs}| \leq c_{k\alpha}, \quad |D_r^k D_z^\alpha (R_{j\sigma kqs}/r)| \leq c_{k\alpha}. \quad (3.3)$$

Здесь $k + |\alpha| \geq 1$; $c, c_{k\alpha} > 0$ не зависят от ε_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\omega'_{j\sigma kqs}(y, z) = (\omega_{j\sigma kqs}^1(y, z), \omega_{j\sigma kqs}^2(y, z))$. По условию 1.4 $\omega_{j\sigma kqs}^i(0, z) \equiv 0$, $i = 1, 2$, поэтому, используя формулу Тейлора в окрестности $r = 0$, имеем

$$\begin{aligned} & \omega_{j\sigma kqs}^i(r \cos b_{j\sigma}, r \sin b_{j\sigma}, z) \\ &= \left(\frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^i}{\partial y_1}(0, z) \cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^i}{\partial y_2}(0, z) \sin b_{j\sigma} \right) r + O(r^2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь $O(r^2)$ – некоторая функция, не превосходящая по модулю cr^2 , где c не зависит от r и z , в чем легко убедиться, записав остаток формулы Тейлора в форме Лагранжа и воспользовавшись гладкостью преобразований $\omega_{j\sigma kqs}^i$. Разлагая $\frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^i}{\partial y_1}(0, z)$ и $\frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^i}{\partial y_2}(0, z)$ по формуле Тейлора в окрестности $z = 0$, из (3.4) получим

$$\omega_{j\sigma kqs}^i = \left(\frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^i}{\partial y_1}(0) \cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^i}{\partial y_2}(0) \sin b_{j\sigma} \right) r + O(|z|)r + O(r^2). \quad (3.5)$$

Заметим, что

$$\frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^1}{\partial y_1}(0) \cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^1}{\partial y_2}(0) \sin b_{j\sigma} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^2}{\partial y_1}(0) \cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^2}{\partial y_2}(0) \sin b_{j\sigma}$$

не обращаются в нуль одновременно; это вытекает из невырожденности матрицы Якоби преобразования $(y, z) \mapsto (\omega'_{j\sigma kqs}(y, z), z)$ в начале координат. Предположим для определенности, что

$$\frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^1}{\partial y_1}(0) \cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^1}{\partial y_2}(0) \sin b_{j\sigma} \neq 0. \quad (3.6)$$

Тогда в силу (3.5) при достаточно малом ε_0

$$\omega_{j\sigma kqs}^1 \neq 0 \quad \text{для} \quad (r^2 + |z|^2)^{1/2} \leq \varepsilon_0 \quad (3.7)$$

и преобразование $\omega'_{j\sigma kqs}|_{\Gamma_{j\sigma} \cap \mathcal{V}_{\varepsilon_0}(0)}$ в полярных координатах имеет вид

$$(b_{j\sigma}, r) \mapsto \left(\arctg \frac{\omega_{j\sigma kqs}^2}{\omega_{j\sigma kqs}^1} + \pi l, \sqrt{\sum_{i=1}^2 (\omega_{j\sigma kqs}^i)^2} \right), \quad (3.8)$$

где $l = 0$, если $\omega_{j\sigma kqs}^1 > 0$, $\omega_{j\sigma kqs}^2 \geq 0$; $l = 1$, если $\omega_{j\sigma kqs}^1 < 0$; $l = 2$, если $\omega_{j\sigma kqs}^1 > 0$, $\omega_{j\sigma kqs}^2 < 0$.

Из равенства (3.5) и формулы Тейлора имеем

$$\begin{aligned} \arctg \frac{\omega_{j\sigma kqs}^2}{\omega_{j\sigma kqs}^1} &= \arctg \frac{\frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^2}{\partial y_1}(0) \cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^2}{\partial y_2}(0) \sin b_{j\sigma}}{\frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^1}{\partial y_1}(0) \cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^1}{\partial y_2}(0) \sin b_{j\sigma}} + O(|z|) + O(r), \\ \sqrt{\sum_{i=1}^2 (\omega_{j\sigma kqs}^i)^2} &= r \sqrt{\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^i}{\partial y_1}(0) \cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^i}{\partial y_2}(0) \sin b_{j\sigma} \right)^2} \\ &\quad + O(|z|)r + O(r^2). \end{aligned}$$

Полагая

$$\begin{aligned} b_{kq} &= \arctg \frac{\frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^2}{\partial y_1}(0) \cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^2}{\partial y_2}(0) \sin b_{j\sigma}}{\frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^1}{\partial y_1}(0) \cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^1}{\partial y_2}(0) \sin b_{j\sigma}} + \pi l, \\ \chi_{j\sigma kqs} &= \sqrt{\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^i}{\partial y_1}(0) \cos b_{j\sigma} + \frac{\partial \omega_{j\sigma kqs}^i}{\partial y_2}(0) \sin b_{j\sigma} \right)^2}, \end{aligned}$$

получим формулу (3.1) и неравенства (3.2).

Докажем первое неравенство в (3.3). Согласно (3.7) имеем

$$\left| \frac{\omega_{j\sigma kqs}^2}{\omega_{j\sigma kqs}^1} \right| \leq c \quad \text{при} \quad (r^2 + |z|^2)^{1/2} \leq \varepsilon_0.$$

Поэтому в силу (3.1) и (3.8) достаточно доказать ограниченность частных производных $D_r^k D_z^\alpha \frac{\omega_{j\sigma kqs}^2}{\omega_{j\sigma kqs}^1}$. Запишем

$$\frac{\omega_{j\sigma kqs}^2}{\omega_{j\sigma kqs}^1} = \frac{r^{-1}\omega_{j\sigma kqs}^2}{r^{-1}\omega_{j\sigma kqs}^1}.$$

Из соотношений (3.5) и (3.6) вытекает, что $r^{-1}\omega_{j\sigma kqs}^1 \neq 0$ при $(r^2 + |z|^2)^{1/2} \leq \varepsilon_0$; поэтому достаточно доказать, что

$$|D_r^k D_z^\alpha (r^{-1}\omega_{j\sigma kqs}^i)| = |D_r^k (r^{-1}D_z^\alpha \omega_{j\sigma kqs}^i)| \leq c_{k\alpha}, \quad i = 1, 2.$$

Однако $D_z^\alpha \omega_{j\sigma kqs}^i$ – бесконечно гладкая при $(r^2 + |z|^2)^{1/2} \leq \varepsilon_0$ функция, и, так как $\omega_{j\sigma kqs}^i(0, z) \equiv 0$, имеет место соотношение $D_z^\alpha \omega_{j\sigma kqs}^i = O(r)$. Следовательно, $|r^{-1}D_z^\alpha \omega_{j\sigma kqs}^i| \leq c_\alpha$. Теперь требуемое утверждение следует из леммы 3.1.

Аналогично доказывается и второе неравенство в (3.3). Из (3.1) и (3.8) следует соотношение

$$\frac{R_{j\sigma kqs}(r, z)}{r} = \sqrt{\sum_{i=1}^2 \frac{(\omega_{j\sigma kqs}^i)^2}{r^2}} - \chi_{j\sigma kqs}.$$

В силу (3.5) и (3.6) имеем $\sum_{i=1}^2 (\omega_{j\sigma kqs}^i)^2 / r^2 \neq 0$ при $(r^2 + |z|^2)^{1/2} \leq \varepsilon_0$; следовательно, достаточно показать, что

$$\left| D_r^k D_z^\alpha \sum_{i=1}^2 \frac{(\omega_{j\sigma kqs}^i)^2}{r^2} \right| \leq c_{k\alpha}.$$

Однако $D_z^\alpha \sum_{i=1}^2 (\omega_{j\sigma kqs}^i)^2$ – бесконечно гладкая при $(r^2 + |z|^2)^{1/2} \leq \varepsilon_0$ функция, и, так как $\omega_{j\sigma kqs}^i(0, z) \equiv 0$, имеет место соотношение $D_z^\alpha \sum_{i=1}^2 (\omega_{j\sigma kqs}^i)^2 = O(r^2)$. Значит, $|D_z^\alpha \sum_{i=1}^2 (\omega_{j\sigma kqs}^i)^2 / r^2| \leq c_\alpha$, и вновь необходимое утверждение следует из леммы 3.1. Лемма доказана.

2. Обозначим $\delta = \min\{b_{j,q+1} - b_{jq}\}/2$, $j = 1, \dots, N$, $q = 1, \dots, R_j$, $d_1 = \min\{1, \chi_{j\sigma kqs}\}/2$, $d_2 = 2 \max\{1, \chi_{j\sigma kqs}\}$. Пусть ε_0 настолько мало, что

$$|\Phi_{j\sigma kqs}| \leq \delta/2, \quad |R_{j\sigma kqs}| \leq \chi_{j\sigma kqs} r/2 \quad \text{при} \quad (r^2 + |z|^2)^{1/2} \leq \varepsilon_0/d_1. \quad (3.9)$$

Существование такого ε_0 вытекает из леммы 3.2.

Введем бесконечно дифференцируемые функции $\zeta_{j\sigma,i}(\varphi)$, $\zeta_{kq,i}(\varphi)$ такие, что

$$\begin{aligned} \zeta_{j\sigma,i}(\varphi) &= 1 \quad \text{для} \quad |b_{j\sigma} - \varphi| \leq \delta/2^{i+1}, \\ \zeta_{j\sigma,i}(\varphi) &= 0 \quad \text{для} \quad |b_{j\sigma} - \varphi| \geq \delta/2^i, \\ \zeta_{kq,i}(\varphi) &= \zeta_{j\sigma,i}(\varphi - \varphi_{j\sigma kq}), \quad i = 0, \dots, 4. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Очевидно, $\zeta_{kq,i}(\varphi) = 1$ для $|b_{kq} - \varphi| \leq \delta/2^{i+1}$ и $\zeta_{kq,i}(\varphi) = 0$ для $|b_{kq} - \varphi| \geq \delta/2^i$.

Рассмотрим преобразование $\tilde{\omega}'_{j\sigma kqs}(y, z)$, действующее в полярных координатах по формуле

$$(\varphi, r) \mapsto (\varphi + \varphi_{j\sigma kq} + \Phi_{j\sigma kqs}(r, z), \chi_{j\sigma kqs}r + R_{j\sigma kqs}(r, z)). \quad (3.11)$$

В силу леммы 3.2 имеем

$$\tilde{\omega}'_{j\sigma kqs}(y, z)|_{\Gamma_{j\sigma} \cap \mathcal{V}_{\varepsilon_0}(0)} = \omega'_{j\sigma kqs}(y, z)|_{\Gamma_{j\sigma} \cap \mathcal{V}_{\varepsilon_0}(0)};$$

поэтому далее предположим, что преобразование $\omega'_{j\sigma kqs}(y, z)$ задается формулой (3.11). Теперь $\omega'_{j\sigma kqs}(y, z)$, вообще говоря, может иметь особенность в начале координат, так как новое преобразование $\omega'_{j\sigma kqs}(y, z)$ совпадает с прежним $\omega'_{j\sigma kqs}(y, z)$ только на $\Gamma_{j\sigma} \cap \mathcal{V}_{\varepsilon_0}(0)$.

Для любой функции $W(y, z)$ положим $\widehat{W}(y, z) = W(\omega'_{j\sigma kqs}(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}^{-1}y, z), z)$. В силу леммы 3.2 преобразование $\omega'_{j\sigma kqs}(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}^{-1}y, z)$ в полярных координатах имеет вид

$$(\varphi, r) \mapsto (\varphi + \Phi'_{j\sigma kqs}(r, z), r + R'_{j\sigma kqs}(r, z)), \quad (3.12)$$

где $\Phi'_{j\sigma kqs}(r, z) = \Phi_{j\sigma kqs}(\chi_{j\sigma kqs}^{-1}r, z)$, $R'_{j\sigma kqs}(r, z) = R_{j\sigma kqs}(\chi_{j\sigma kqs}^{-1}r, z)$. Легко видеть, что $\Phi'_{j\sigma kqs}$ и $R'_{j\sigma kqs}$ также удовлетворяют неравенствам (3.2), (3.3).

ЛЕММА 3.3. *При достаточно малом ε_0 для любой функции $W \in H_b^l(\Omega_k)$ такой, что $\text{supp } W \subset \overline{\Omega}_k \cap \mathcal{V}_{\varepsilon_0}(0)$, имеем $\zeta_{k,1}\widehat{W} \in H_b^l(\Omega_k)$ и*

$$\|\zeta_{k,1}\widehat{W}\|_{H_b^l(\Omega_k)} \leq c\|W\|_{H_b^l(\Omega_k)},$$

где $q = 2, \dots, R_k$; $c > 0$ не зависит от W и ε_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При доказательстве леммы будем пользоваться следующим очевидным утверждением:

$$W \in H_b^l(\Omega_k) \iff D^\alpha W \in H_{b+|\alpha|-l}^0(\Omega_k), \quad |\alpha| \leq l. \quad (3.13)$$

Из формулы (3.12) и неравенств (3.9) следует, что преобразование (3.12) отображает $\overline{\mathcal{V}_{\varepsilon_0}(0)} \cap \{\varphi: |\varphi - b_{kq}| < \delta\} \cap \Omega_k$ в Ω_k при $q = 2, \dots, R_k$. Кроме того, из неравенств (3.2), (3.3) следует, что модуль якобиана преобразования (3.12) при малых ε_0 ограничен и отличен от нуля в $\overline{\mathcal{V}_{\varepsilon_0}(0)} \cap \{\varphi: |\varphi - b_{kq}| < \delta\} \cap \Omega_k$; отсюда вытекает справедливость леммы при $l = 0$ с функцией $\zeta_{kq,0}$ вместо $\zeta_{kq,1}$.

Рассмотрим функции $\zeta_{kq,0}^p \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $p = 0, \dots, l$, такие, что $\zeta_{kq,0}^0 = \zeta_{kq,0}$, $\zeta_{kq,0}^l = \zeta_{kq,1}$, $\zeta_{kq,0}^{p-1}(\varphi) = 1$ при $\varphi \in \text{supp } \zeta_{kq,0}^p$, $p = 1, \dots, l$. Пусть лемма верна при $l = p - 1$ с функцией $\zeta_{kq,0}^{p-1}$ вместо $\zeta_{kq,1}$; докажем, что она верна при $l = p$ с функцией $\zeta_{kq,0}^p$ вместо $\zeta_{kq,1}$, $p \geq 1$.

Итак, пусть $W \in H_b^p(\Omega_k)$; тогда

$$\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi}, \frac{\partial W}{\partial r}, \frac{\partial W}{\partial z_\xi} \in H_b^{p-1}(\Omega_k), \quad \xi = 1, \dots, n-2.$$

Следовательно, по индуктивному предположению

$$\zeta_{kq,0}^{p-1} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right), \zeta_{kq,0}^{p-1} \frac{\partial W}{\partial r}, \zeta_{kq,0}^{p-1} \frac{\partial W}{\partial z_\xi} \in H_b^{p-1}(\Omega_k).$$

Отсюда и из соотношений

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{W}_k}{\partial \varphi} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) \left(1 + \frac{R'_{j\sigma kqs}}{r} \right), \\ \frac{\partial \widehat{W}_k}{\partial r} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) \left(1 + \frac{R'_{j\sigma kqs}}{r} \right) r \frac{\partial \Phi'_{j\sigma kqs}}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial r} \left(1 + \frac{\partial R'_{j\sigma kqs}}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial \widehat{W}_k}{\partial z_\xi} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) \left(1 + \frac{R'_{j\sigma kqs}}{r} \right) r \frac{\partial \Phi'_{j\sigma kqs}}{\partial z_\xi} + \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial R'_{j\sigma kqs}}{\partial z_\xi} + \frac{\partial W}{\partial z_\xi}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

неравенств (3.2), (3.3) и леммы 2.1 из [27] получим³

$$\zeta_{kq,0}^{p-1} \frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \varphi}, \zeta_{kq,0}^{p-1} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial r}, \zeta_{kq,0}^{p-1} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial z_\xi} \in H_b^{p-1}(\Omega_k). \quad (3.15)$$

Кроме того, из соотношения $W \in H_b^p(\Omega_k)$, вложения $H_b^p(\Omega_k) \subset H_{b-p}^0(\Omega_k)$ и утверждения леммы при $l = 0$ получим $\zeta_{kq,0}^p \widehat{W} \in H_{b-p}^0(\Omega_k)$. Отсюда и из (3.13), (3.15) следует, что $D^\alpha(\zeta_{kq,0}^p \widehat{W}) \in H_{b+|\alpha|-p}^0(\Omega_k)$, $|\alpha| \leq p$. Снова используя (3.13), получаем требуемое утверждение. Лемма доказана.

Таким образом, оператор $W \mapsto \zeta_{kq,1} \widehat{W}$ является ограниченным в $H_b^l(\Omega_k)$.

ЛЕММА 3.4. *Для любой функции $W \in H_b^l(\Omega_k)$ такой, что $\text{supp } W \subset \bar{\Omega}_k \cap \mathcal{V}_{\varepsilon_0}(0)$, и любого мультииндекса γ , $1 \leq |\gamma| \leq l$, выполнено неравенство*

$$\|\zeta_{kq,2} D^\gamma \widehat{W} - \zeta_{kq,2} \widehat{D^\gamma W}\|_{H_b^{l-|\gamma|}(\Omega_k)} \leq c\varepsilon_0 \|W\|_{H_b^l(\Omega_k)}, \quad (3.16)$$

где $q = 2, \dots, R_k$; $c > 0$ не зависит от W и ε_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции $\zeta_{kq,1}^p \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $p = 1, \dots, l$, такие, что $\zeta_{kq,1}^1 = \zeta_{kq,1}$, $\zeta_{kq,1}^l = \zeta_{kq,2}$, $\zeta_{kq,1}^{p-1}(\varphi) = 1$ при $\varphi \in \text{supp } \zeta_{kq,1}^p$, $p = 2, \dots, l$.

³Лемма 2.1 из [27], а также используемые далее леммы 2.2, 3.5, 3.6 из [27] доказаны В. А. Кондратьевым для областей с угловыми или коническими точками, однако легко видеть, что она остается справедливой и для рассматриваемых областей с ребрами.

Пусть $|\gamma| = 1$; тогда неравенство (3.16) достаточно доказать для случая, когда вместо оператора D^γ подставлены операторы $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial z_\xi}$. Рассмотрим, например, оператор $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ (остальные операторы рассматриваются аналогично). Из первого соотношения (3.14) и формулы Лейбница имеем

$$\begin{aligned} \left\| \zeta_{kq,1}^1 \frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \varphi} - \zeta_{kq,1}^1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \varphi} \right) \right\|_{H_b^{l-1}(\Omega_k)}^2 &= \left\| \zeta_{kq,1}^1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \varphi} \right) \frac{R'_{j\sigma qks}}{r} \right\|_{H_b^{l-1}(\Omega_k)}^2 \\ &\leq k_1 \sum_{|\alpha| \leq l-1} \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \int_{\Omega_k} r^{2(b+|\alpha|-(l-1))} \left| D^{\alpha-\beta} \frac{R'_{j\sigma qks}}{r} \right|^2 \\ &\quad \times \left| D^\beta \left(\zeta_{kq,1}^1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \varphi} \right) \right) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда и из последних неравенств в (3.2) и (3.3) получим

$$\left\| \zeta_{kq,1}^1 \frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \varphi} - \zeta_{kq,1}^1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \varphi} \right) \right\|_{H_b^{l-1}(\Omega_k)}^2 \leq k_2 \varepsilon_0^2 \left\| \zeta_{kq,1}^1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \varphi} \right) \right\|_{H_b^{l-1}(\Omega_k)}^2. \quad (3.17)$$

Оценка (3.17) и лемма 3.3 доказывают лемму при $|\gamma| = 1$ с функцией $\zeta_{kq,1}^1$ вместо $\zeta_{kq,2}$.

Предположим, что лемма верна для $1 \leq |\gamma| \leq p-1$ с функцией $\zeta_{kq,1}^{p-1}$ вместо $\zeta_{kq,2}$. Докажем, что она верна для $|\gamma| = p$ с функцией $\zeta_{kq,1}^p$ вместо $\zeta_{kq,2}$, $p \geq 2$. Имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \zeta_{kq,1}^p D^\gamma \widehat{W} - \zeta_{kq,1}^p \widehat{D^\gamma W} \right\|_{H_b^{l-|\gamma|}(\Omega_k)} \\ &\leq \left\| \zeta_{kq,1}^p D^{|\gamma|-1} (D^1 \widehat{W}) - \zeta_{kq,1}^p D^{|\gamma|-1} \widehat{D^1 W} \right\|_{H_b^{l-|\gamma|}(\Omega_k)} \\ &\quad + \left\| \zeta_{kq,1}^p D^{|\gamma|-1} \widehat{D^1 W} - \zeta_{kq,1}^p \widehat{D^{|\gamma|-1} (D^1 W)} \right\|_{H_b^{l-|\gamma|}(\Omega_k)} \\ &\leq k_3 \left(\left\| \zeta_{kq,1}^{p-1} D^1 \widehat{W} - \zeta_{kq,1}^{p-1} \widehat{D^1 W} \right\|_{H_b^{l-1}(\Omega_k)} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \zeta_{kq,1}^p D^{|\gamma|-1} \widehat{D^1 W} - \zeta_{kq,1}^p \widehat{D^{|\gamma|-1} (D^1 W)} \right\|_{H_b^{l-|\gamma|}(\Omega_k)} \right), \quad (3.18) \end{aligned}$$

где $D^{|\gamma|-1}$ и D^1 — некоторые обобщенные производные порядков $|\gamma|-1$ и 1 соответственно. В силу индуктивного предположения для каждой из двух норм в правой части (3.18) справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left\| \zeta_{kq,1}^{p-1} D^1 \widehat{W} - \zeta_{kq,1}^{p-1} \widehat{D^1 W} \right\|_{H_b^{l-1}(\Omega_k)} &\leq k_4 \varepsilon_0 \|W\|_{H_b^l(\Omega_k)}, \\ \left\| \zeta_{kq,1}^p D^{|\gamma|-1} \widehat{D^1 W} - \zeta_{kq,1}^p \widehat{D^{|\gamma|-1} (D^1 W)} \right\|_{H_b^{l-|\gamma|}(\Omega_k)} &\leq k_5 \varepsilon_0 \|D^1 W\|_{H_b^{l-1}(\Omega_k)} \\ &\leq k_6 \varepsilon_0 \|W\|_{H_b^l(\Omega_k)}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.18) вытекает требуемое утверждение. Лемма доказана.

По сути, множитель ε_0 возникает в оценке (3.16) за счет того, что как уменьшаемое, так и вычитаемое в левой части неравенства содержат одно и то же преобразование переменных $\omega'_{j\sigma kqs}(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}^{-1}y, z)$, но уменьшаемое есть производная от преобразованной функции, а вычитаемое – преобразование от производной.

ЛЕММА 3.5. Для любой функции $U_k \in H_b^{l+2m}(\Omega_k)$ такой, что $\text{supp } U_k \subset \overline{\Omega_k} \cap \mathcal{V}_{\varepsilon_0}(0)$, выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| (B_{j\sigma\mu kqs}U_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}y, z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \right. \\ & \quad \left. - (B_{j\sigma\mu kqs}U_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y, z), z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \right\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})} \\ & \leq c(\varepsilon_0 \|U_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)} + \|\zeta_{kq,3}U_k - \zeta_{kq,3}\widehat{U}_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)}), \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $c > 0$ не зависит от U и ε_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя непрерывность оператора следа в весовых пространствах, получим

$$\begin{aligned} & \left\| (B_{j\sigma\mu kqs}U_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs}y, z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \right. \\ & \quad \left. - (B_{j\sigma\mu kqs}U_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y, z), z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \right\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})} \\ & \leq k_1 \|\zeta_{kq,4}B_{j\sigma\mu kqs}U_k - \zeta_{kq,4}\widehat{B_{j\sigma\mu kqs}U_k}\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(\Omega_k)} \\ & \leq k_1 (\|\zeta_{kq,4}B_{j\sigma\mu kqs}U_k - \zeta_{kq,4}B_{j\sigma\mu kqs}\widehat{U}_k\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(\Omega_k)} \\ & \quad + \|\zeta_{kq,4}B_{j\sigma\mu kqs}\widehat{U}_k - \zeta_{kq,4}\widehat{B_{j\sigma\mu kqs}U_k}\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(\Omega_k)}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Оценим первую норму в правой части неравенства (3.20):

$$\begin{aligned} & \|\zeta_{kq,4}B_{j\sigma\mu kqs}U_k - \zeta_{kq,4}B_{j\sigma\mu kqs}\widehat{U}_k\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(\Omega_k)} \\ & \leq k_2 \|\zeta_{kq,3}U_k - \zeta_{kq,3}\widehat{U}_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Вторая норма в правой части неравенства (3.20) оценивается при помощи леммы 3.4:

$$\|\zeta_{kq,4}B_{j\sigma\mu kqs}\widehat{U}_k - \zeta_{kq,4}\widehat{B_{j\sigma\mu kqs}U_k}\|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(\Omega_k)} \leq k_3 \varepsilon_0 \|U_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)}. \quad (3.22)$$

Из (3.20)–(3.22) следует утверждение леммы.

Отметим, что правая часть неравенства (3.19) содержит норму разности преобразованной и преобразованной функций. Для оценки таких разностей необходима следующая

ЛЕММА 3.6. Для любой функции $W \in H_{b+1}^1(\Omega_k)$ такой, что $\text{supp } W \subset \bar{\Omega}_k \cap \mathcal{V}_{\varepsilon_0}(0)$, выполнено неравенство

$$\|\zeta_{kq,1}W - \zeta_{kq,1}\widehat{W}\|_{H_b^0(\Omega_k)} \leq c\varepsilon_0\|W\|_{H_{b+1}^1(\Omega_k)}, \quad (3.23)$$

где $c > 0$ не зависит от W и ε_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Записывая аргументы функций W и $\widehat{W}$ в цилиндрических координатах, получим

$$\begin{aligned} & \|\zeta_{kq,1}W - \zeta_{kq,1}\widehat{W}\|_{H_b^0(\Omega_k)} \\ & \leq \|\zeta_{kq,1}W(\varphi, r, z) - \zeta_{kq,1}W(\varphi + \Phi'_{j\sigma kqs}(r, z), r, z)\|_{H_b^0(\Omega_k)} \\ & \quad + \|\zeta_{kq,1}W(\varphi + \Phi'_{j\sigma kqs}(r, z), r, z) - \zeta_{kq,1}W(\varphi + \Phi'_{j\sigma kqs}(r, z), r + R'_{j\sigma kqs}(r, z), z)\|_{H_b^0(\Omega_k)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Оценим квадрат первой нормы в правой части (3.24), используя неравенство Коши–Буняковского:

$$\begin{aligned} & \|\zeta_{kq,1}W(\varphi, r, z) - \zeta_{kq,1}W(\varphi + \Phi'_{j\sigma kqs}(r, z), r, z)\|_{H_b^0(\Omega_k)}^2 \\ & = \int_{\mathbb{R}^{n-2}} dz \int_0^\infty r^{2b} r dr \int_{b_{k1}}^{b_{k2}} \left| \zeta_{kq,1} \int_\varphi^{\varphi + \Phi'_{j\sigma kqs}(r, z)} \frac{\partial W}{\partial \varphi'} d\varphi' \right|^2 d\varphi \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^{n-2}} dz \int_0^\infty r^{2b} r dr \int_{b_{k1}}^{b_{k2}} |\zeta_{kq,1}|^2 |\Phi'_{j\sigma kqs}(r, z)| \\ & \quad \times \left| \int_\varphi^{\varphi + \Phi'_{j\sigma kqs}(r, z)} \frac{\partial W}{\partial \varphi'} d\varphi' \right|^2 d\varphi. \end{aligned}$$

Учитывая ограничения на носители функций W , $\zeta_{kq,1}$ и неравенства (3.9), поменяем порядок интегрирования по φ и φ' ; в результате, используя (3.2), получим

$$\begin{aligned} & \|\zeta_{kq,1}W(\varphi, r, z) - \zeta_{kq,1}W(\varphi + \Phi'_{j\sigma kqs}(r, z), r, z)\|_{H_b^0(\Omega_k)}^2 \\ & \leq k_1 \int_{\mathbb{R}^{n-2}} dz \int_0^\infty r^{2b} r |\Phi'_{j\sigma kqs}(r, z)|^2 dr \int_{b_{k1}}^{b_{k2}} \left| \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right|^2 d\varphi \\ & \leq k_2 \varepsilon_0^2 \int_{\mathbb{R}^{n-2}} dz \int_0^\infty r^{2(b+1)} r dr \int_{b_{k1}}^{b_{k2}} \left| \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right|^2 d\varphi \\ & \leq k_3 \varepsilon_0^2 \|W\|_{H_{b+1}^1(\Omega_k)}^2. \end{aligned}$$

Аналогично оценивается квадрат второй нормы в правой части (3.24). Лемма доказана.

Таким образом, множитель ε_0 в неравенстве (3.23) возникает, если увеличить показатель дифференцируемости на единицу (левая часть (3.23) содержит норму в $H_b^0(\Omega_k)$, а правая – в $H_{b+1}^1(\Omega_k)$). Это объясняется тем, что, в отличие от неравенства (3.16), в данном случае оценивается разность двух функций, одна из которых не содержит преобразование переменных, а другая содержит.

§ 4. Априорные оценки решений

В настоящем параграфе докажем априорную оценку для оператора $\mathbf{L}$, гарантирующую конечномерность его ядра и замкнутость образа.

1. Вначале докажем априорную оценку для функций с носителями в окрестности множества $\mathcal{K}_1$. Для этого используем обратимость модельных операторов $\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}}$, $g \in \mathcal{K}_1$, с линейными преобразованиями, а также леммы 3.3–3.6. Затем, в п. 2, при помощи результатов работы [11] и леммы 5.2 из [12] получим априорную оценку для функций с носителями в замыкании области G .

Обозначим $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}_1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \mathcal{K}_1) < \varepsilon\}$.

ЛЕММА 4.1. Пусть выполнены условия 1.1–1.4, и пусть для каждой точки $g \in \mathcal{K}_1$ оператор $\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}}$ – изоморфизм⁴. Тогда существует $0 < \varepsilon < \text{dist}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3)/2$ такое, что для всех $u \in \{u \in H_b^{l+2m}(G) : \text{supp } u \subset \overline{G} \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}_1)\}$ выполнено неравенство

$$\|u\|_{H_b^{l+2m}(G)} \leq c(\|\mathbf{L}u\|_{\mathcal{H}_b^l(G, \Upsilon)} + \|u\|_{H_{b+1-l-2m}^0(G)}),$$

где $c > 0$ не зависит от u .

Используя принцип разбиения единицы, формулу Лейбница, лемму 2.1 из [27] и лемму 1.2 из [9], сведем доказательство леммы 4.1 к доказательству следующего утверждения.

ЛЕММА 4.2. Пусть выполнены условия леммы 4.1. Тогда для всякой точки $g \in \mathcal{K}_1$ найдется $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(g) > 0$ такое, что для любой функции $U \in \{U \in H_b^{l+2m, N}(\Omega) : \text{supp } U_j \subset \overline{\Omega}_j \cap \mathcal{V}_{\varepsilon_0}(0), j = 1, \dots, N, N = N(g)\}$, выполнено неравенство

$$\|U\|_{H_b^{l+2m, N}(\Omega)} \leq c\|\mathcal{L}_g^\omega U\|_{H_b^{l, N}(\Omega)},$$

где $\mathcal{V}_{\varepsilon_0}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < \varepsilon_0\}$, $c > 0$ не зависит от U .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя обратимость оператора $\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}}$ и лемму 3.5 настоящей работы, для функции $U \in H_b^{l+2m, N}(\Omega)$, $\text{supp } U_j \subset \overline{\Omega}_j \cap \mathcal{V}_{\varepsilon_0}(0)$, получим

$$\begin{aligned} \|U\|_{H_b^{l+2m, N}(\Omega)} &\leq k_1 \|\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}} U\|_{H_b^{l, N}(\Omega)} \\ &\leq k_2 \left(\|\mathcal{L}_g^\omega U\|_{H_b^{l, N}(\Omega)} + \varepsilon_0 \|U\|_{H_b^{l+2m, N}(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^N \sum_{q=2}^{R_k} \|\zeta_{qk,3} U_k - \zeta_{qk,3} \widehat{U}_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)} \right). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Оценим последнюю норму в (4.1). По теореме 4.1 из [25] имеем

$$\begin{aligned} \|\zeta_{qk,3} U_k - \zeta_{qk,3} \widehat{U}_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)} &\leq k_3 (\|\mathcal{P}_k(\zeta_{qk,3} U_k - \zeta_{qk,3} \widehat{U}_k)\|_{H_b^l(\Omega_k)} \\ &\quad + \|\zeta_{qk,3} U_k - \zeta_{qk,3} \widehat{U}_k\|_{H_{b-l-2m}^0(\Omega_k)}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

⁴Необходимое и достаточное условие того, что оператор $\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}}$ – изоморфизм, приведено в п. 5 §1.

В силу леммы 3.6 и непрерывности вложения $H_b^{l+2m}(\Omega_k) \subset H_{b-l-2m+1}^1(\Omega_k)$ имеем

$$\|\zeta_{kq,3}U_k - \zeta_{kq,3}\widehat{U}_k\|_{H_{b-l-2m}^0(\Omega_k)} \leq k_4\varepsilon_0\|U_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)}. \quad (4.3)$$

Для оценки первой нормы в правой части (4.2) воспользуемся формулой Лейбница и леммами 3.3 и 3.4:

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{P}_k(\zeta_{kq,3}U_k - \zeta_{kq,3}\widehat{U}_k)\|_{H_b^l(\Omega_k)} \\ & \leq k_5 \left(\|\zeta_{kq,3}\mathcal{P}_kU_k\|_{H_b^l(\Omega_k)} + \|\zeta_{kq,3}\mathcal{P}_k\widehat{U}_k\|_{H_b^l(\Omega_k)} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{|\beta| \leq 2m-1} \sum_{|\gamma|=2m-|\beta|} \|D^\gamma \zeta_{kq,3}D^\beta U_k - D^\gamma \zeta_{kq,3}D^\beta \widehat{U}_k\|_{H_b^l(\Omega_k)} \right) \\ & \leq k_6 \left(\|\mathcal{P}_kU_k\|_{H_b^l(\Omega_k)} + \varepsilon_0\|U_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{|\beta| \leq 2m-1} \sum_{|\gamma|=2m-|\beta|} \|D^\gamma \zeta_{kq,3}D^\beta U_k - D^\gamma \zeta_{kq,3}D^\beta \widehat{U}_k\|_{H_b^l(\Omega_k)} \right). \quad (4.4) \end{aligned}$$

Поскольку $|D^\gamma \zeta_{kq,3}| \leq k_7 r^{-|\gamma|} |\zeta_{kq,2}|$, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{|\beta| \leq 2m-1} \sum_{|\gamma|=2m-|\beta|} \|D^\gamma \zeta_{kq,3}D^\beta U_k - D^\gamma \zeta_{kq,3}D^\beta \widehat{U}_k\|_{H_b^l(\Omega_k)} \\ & \leq k_8 \sum_{|\alpha| \leq l+2m-1} \|\zeta_{kq,2}D^\alpha U_k - \zeta_{kq,2}D^\alpha \widehat{U}_k\|_{H_{b+|\alpha|-l-2m}^0(\Omega_k)} \\ & \leq k_9 \sum_{|\alpha| \leq l+2m-1} \left\{ \|\zeta_{kq,2}D^\alpha U_k - \zeta_{kq,2}\widehat{D^\alpha U_k}\|_{H_{b+|\alpha|-l-2m}^0(\Omega_k)} \right. \\ & \quad \left. + \|\zeta_{kq,2}\widehat{D^\alpha U_k} - \zeta_{kq,2}D^\alpha \widehat{U}_k\|_{H_{b+|\alpha|-l-2m}^0(\Omega_k)} \right\}. \quad (4.5) \end{aligned}$$

Используя лемму 3.6 и непрерывность вложения

$$H_b^{l+2m}(\Omega_k) \subset H_{b+1+|\alpha|-l-2m}^{1+|\alpha|}(\Omega_k)$$

при $|\alpha| \leq l+2m-1$, получим

$$\begin{aligned} \|\zeta_{kq,2}D^\alpha U_k - \zeta_{kq,2}\widehat{D^\alpha U_k}\|_{H_{b+|\alpha|-l-2m}^0(\Omega_k)} & \leq k_{10}\varepsilon_0\|D^\alpha U_k\|_{H_{b+1+|\alpha|-l-2m}^1(\Omega_k)} \\ & \leq k_{11}\varepsilon_0\|U_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)}. \quad (4.6) \end{aligned}$$

Аналогично, из леммы 3.4 следует, что

$$\|\zeta_{kq,2}\widehat{D^\alpha U_k} - \zeta_{kq,2}D^\alpha \widehat{U}_k\|_{H_{b+|\alpha|-l-2m}^0(\Omega_k)} \leq k_{12}\varepsilon_0\|U_k\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)}. \quad (4.7)$$

Теперь утверждение леммы вытекает из (4.1)–(4.7) при достаточно малом ε_0 .

2. Повторяя доказательство теоремы 2.1 из [11] и учитывая лемму 5.2 из [12], из леммы 4.1 настоящей работы и лемм 2.4, 2.5 работы [11] получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть выполнены условия леммы 4.1, и пусть $b > l + 2m - 1$. Тогда для всех $u \in H_b^{l+2m}(G)$ имеет место оценка

$$\|u\|_{H_b^{l+2m}(G)} \leq c(\|\mathbf{L}u\|_{\mathcal{H}_b^l(G, \Upsilon)} + \|u\|_{H_{b+1-l-2m}^0(G)}), \quad (4.8)$$

где $c > 0$ не зависит от u .

В силу компактности вложения $H_b^{l+2m}(G) \subset H_{b+1-l-2m}^0(G)$ (см. [27, лемма 3.5]) из теоремы 4.1 следует, что оператор $\mathbf{L}$ имеет конечномерное ядро и замкнутый образ.

§ 5. Построение правого регуляризатора

В настоящем параграфе будет построен правый регуляризатор для оператора $\mathbf{L}$, что совместно с теоремой 4.1 позволит доказать фредгольмовость нелокальной краевой задачи (1.2), (1.3).

1. Вначале рассмотрим случай, когда функции имеют носитель, сосредоточенный в некоторой окрестности множества $\mathcal{K}_1$. Здесь будет использована обратимость модельных операторов $\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}}$, $g \in \mathcal{K}_1$, с линейными преобразованиями, а также некоторые специальные построения, позволяющие “скомпенсировать” наличие нелинейности в преобразованиях переменных. Затем, в п. 2, используя результаты работы [11] и лемму 5.2 из [12], построим регуляризатор во всей области G .

Прежде всего докажем одно вспомогательное утверждение.

ЛЕММА 5.1. Пусть H , H_1 , H_2 – гильбертовы пространства, $\mathcal{A}: H \rightarrow H_1$ – линейный ограниченный оператор, $\mathcal{T}_0: H \rightarrow H_2$ – линейный компактный оператор. Предположим, что для некоторых $\varepsilon, c > 0$ и всех $f \in H$ выполнено неравенство

$$\|\mathcal{A}f\|_{H_1} \leq \varepsilon\|f\|_H + c\|\mathcal{T}_0f\|_{H_2}. \quad (5.1)$$

Тогда существуют ограниченные операторы $\mathcal{M}, \mathcal{F}: H \rightarrow H_1$ такие, что

$$\mathcal{A} = \mathcal{M} + \mathcal{F},$$

причем $\|\mathcal{M}\| \leq 2\varepsilon$, а оператор $\mathcal{F}$ конечномерный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см., например, [28, гл. 5, п. 85]), что всякий компактный оператор есть предел равномерно сходящейся последовательности конеч-

номерных операторов. Следовательно, существуют ограниченные операторы $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{F}_0: H \rightarrow H_2$ такие, что $\mathcal{T}_0 = \mathcal{M}_0 + \mathcal{F}_0$, причем $\|\mathcal{M}_0\| \leq c^{-1}\varepsilon$, а оператор $\mathcal{F}_0$ конечномерный. Отсюда и из (5.1) следует, что

$$\|\mathcal{A}f\|_{H_1} \leq 2\varepsilon\|f\|_H + c\|\mathcal{F}_0f\|_{H_2} \quad \text{для всех } f \in H. \quad (5.2)$$

Обозначим через $\ker(\mathcal{F}_0)^\perp$ ортогональное дополнение в H к ядру оператора $\mathcal{F}_0$. Поскольку конечномерный оператор $\mathcal{F}_0$ отображает $\ker(\mathcal{F}_0)^\perp$ на свой образ взаимно однозначно, то подпространство $\ker(\mathcal{F}_0)^\perp$ конечномерно. Пусть $\mathcal{I}$ – единичный оператор в H , а $\mathcal{P}_0$ – ортопроектор на $\ker(\mathcal{F}_0)^\perp$. Очевидно, $\mathcal{A}\mathcal{P}_0: H \rightarrow H_1$ – конечномерный оператор. Кроме того, поскольку $\mathcal{I} - \mathcal{P}_0$ – ортопроектор на $\ker(\mathcal{F}_0)$, то $\mathcal{F}_0(\mathcal{I} - \mathcal{P}_0) = 0$. Следовательно, подставляя в (5.2) функцию $(\mathcal{I} - \mathcal{P}_0)f$ вместо f , получим

$$\|\mathcal{A}(\mathcal{I} - \mathcal{P}_0)f\|_{H_1} \leq 2\varepsilon\|(\mathcal{I} - \mathcal{P}_0)f\|_H \leq 2\varepsilon\|f\|_H \quad \text{для всех } f \in H.$$

Обозначая $\mathcal{M} = \mathcal{A}(\mathcal{I} - \mathcal{P}_0)$, $\mathcal{F} = \mathcal{A}\mathcal{P}_0$, получаем утверждение леммы.

Теперь начнем построение правого регуляризатора.

ЛЕММА 5.2. *Пусть выполнены условия леммы 4.1. Тогда для всех достаточно малых $0 < \varepsilon < \text{dist}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3)/2$ существуют ограниченные операторы $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{M}_1$ и компактный оператор $\mathbf{T}_1$, действующие из $\{f \in \mathcal{H}_b^l(G, \Upsilon): \text{supp } f \subset \bar{G} \cap \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}_1)\}$ в $H_b^{l+2m}(G)$, $\mathcal{H}_b^l(G, \Upsilon)$ и $\mathcal{H}_b^l(G, \Upsilon)$ соответственно и удовлетворяющие условию*

$$\mathbf{L}\mathbf{R}_1f = f + \mathbf{M}_1f + \mathbf{T}_1f,$$

где $\|\mathbf{M}_1f\|_{\mathcal{H}_b^l(G, \Upsilon)} \leq c\varepsilon\|f\|_{\mathcal{H}_b^l(G, \Upsilon)}$. Здесь $c > 0$ не зависит от ε и f .

Используя принцип разбиения единицы, формулу Лейбница и лемму 2.1 из [27], сведем доказательство леммы 5.2 к доказательству следующего утверждения.

ЛЕММА 5.3. *Пусть выполнены условия леммы 4.1. Тогда для всякой точки $g \in \mathcal{K}_1$ и всех достаточно малых $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(g) > 0$ существуют ограниченные операторы $\mathcal{R}_g$, $\mathcal{M}_g$ и компактный оператор $\mathcal{T}_g$, действующие из $\{f \in \mathcal{H}_b^{l,N}(\Omega, \Gamma): \text{supp } f \subset \mathcal{V}_{\varepsilon_1}(0)\}$ в $H_b^{l+2m,N}(\Omega)$, $\mathcal{H}_b^{l,N}(\Omega, \Gamma)$ и $\mathcal{H}_b^{l,N}(\Omega, \Gamma)$ соответственно и удовлетворяющие условию*

$$\mathcal{L}_g^\omega \mathcal{R}_g f = f + \mathcal{M}_g f + \mathcal{T}_g f, \quad (5.3)$$

где $\|\mathcal{M}_g f\|_{H_b^l(G, \Gamma)} \leq c\varepsilon_1\|f\|_{H_b^l(G, \Gamma)}$. Здесь $c > 0$ не зависит от ε_1 и f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть, как и ранее,

$$d_1 = \frac{1}{2} \min\{1, \chi_{j\sigma kqs}\}, \quad d_2 = 2 \max\{1, \chi_{j\sigma kqs}\}.$$

Выберем $\varepsilon_1 < d_1 \varepsilon_0 / 4$, где ε_0 определено в лемме 4.2. Введем функцию $\psi_{\varepsilon_1}(x) = \psi(x/\varepsilon_1)$, где $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi(x) = 1$ при $|x| \leq 1$, $\psi(x) = 0$ при $|x| \geq 2$. Очевидно, $\psi_{\varepsilon_1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\psi_{\varepsilon_1}(x) = 1$ при $|x| \leq \varepsilon_1$, $\psi_{\varepsilon_1}(x) = 0$ при $|x| \geq 2\varepsilon_1$. Поскольку при этом $|D^\alpha \psi_{\varepsilon_1}| \leq c_\alpha r^{-|\alpha|}$, то из [27, лемма 2.1] следует оценка

$$\|\psi_{\varepsilon_1} v\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)} \leq c \|v\|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)} \quad \text{для всех } v \in H_b^{l+2m}(\Omega_k), \quad (5.4)$$

где $c > 0$ не зависит от ε_1 . Пусть, кроме того, функция ψ_{ε_1} , будучи записанной в цилиндрических координатах, не зависит от φ .

Положим $f_0 = \{f_j\}$, $g = \{g_{j\sigma\mu}\}$, $\{f_0, g\} = \{f_j, g_{j\sigma\mu}\}$.

По предположению оператор $\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}}: H_b^{l+2m, N}(\Omega) \rightarrow \mathcal{H}_b^{l, N}(\Omega, \Gamma)$ имеет ограниченный обратный $(\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}})^{-1}: \mathcal{H}_b^{l, N}(\Omega, \Gamma) \rightarrow H_b^{l+2m, N}(\Omega)$. Поэтому можно ввести операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1: H_b^{l, N}(\Omega) &\rightarrow H_b^{l+2m, N}(\Omega), \\ \mathcal{R}_2: \mathcal{H}_b^{l, N}(\Gamma) &\rightarrow H_b^{l+2m, N}(\Omega) \end{aligned}$$

по формулам

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 f_0 &= \psi_{\varepsilon_1} (\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}})^{-1} \{f_0, 0\}, \\ \mathcal{R}_2 g &= \psi_{\varepsilon_1} (\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}})^{-1} \{0, g\}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{H}_b^{l, N}(\Gamma) = \prod_{j, \sigma, \mu} H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})$. Таким образом, носители функций $\mathcal{R}_1 f_0$ и $\mathcal{R}_2 g$ лежат в шаре радиуса $2\varepsilon_1$ с центром в начале координат.

Введем операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{P}: H_b^{l+2m, N}(\Omega) &\rightarrow H_b^{l, N}(\Omega), \\ \mathcal{B}^{\mathcal{G}}, \mathcal{B}^{\omega}: H_b^{l+2m, N}(\Omega) &\rightarrow \mathcal{H}_b^{l, N}(\Gamma), \end{aligned}$$

действующие по формулам

$$\mathcal{P}U = \{\mathcal{P}_j U_j\}, \quad \mathcal{B}^{\mathcal{G}}U = \{\mathcal{B}_{j\sigma\mu}^{\mathcal{G}}U\}, \quad \mathcal{B}^{\omega}U = \{\mathcal{B}_{j\sigma\mu}^{\omega}U\}.$$

Установим связь между операторами $\mathcal{P}$, $\mathcal{B}^{\mathcal{G}}$, $\mathcal{B}^{\omega}$ и $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$. Будем использовать известное свойство весовых пространств (см. [27, лемма 3.5]):

(*) оператор вложения $\{v \in H_b^{l+1}(\Omega_j): \text{supp } v \subset \mathcal{V}_d(0), d > 0\}$ в $H_b^l(\Omega_j)$ компактен.

Из формулы Лейбница, ограниченности $\supp \psi_{\varepsilon_1}$ и свойства $(*)$ следует, что

$$\mathcal{P}\mathcal{R}_1 f_0 = \psi_{\varepsilon_1} f_0 + \mathcal{T}_1 f_0, \quad \mathcal{P}\mathcal{R}_2 g = \mathcal{T}_2 g. \quad (5.5)$$

Здесь $\mathcal{T}_1: H_b^{l,N}(\Omega) \rightarrow H_b^{l,N}(\Omega)$, $\mathcal{T}_2: \mathcal{H}_b^{l,N}(\Gamma) \rightarrow H_b^{l,N}(\Omega)$ – компактные операторы. Аналогично,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{\mathcal{G}} \mathcal{R}_2 g = \psi_{\varepsilon_1} g + \left\{ \sum_{k,q,s} (\psi_{\varepsilon_1}(\chi_{j\sigma kqs} x) - \psi_{\varepsilon_1}(x)) \right. \\ \left. \times (B_{j\sigma\mu kqs}[(\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}})^{-1}\{0, g\}]_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs} y, z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \right\} + \mathcal{T}_3 g, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $\mathcal{T}_3$ – компактный оператор в $\mathcal{H}_b^{l,N}(\Gamma)$; здесь и далее через $[\cdot]_k$ обозначена k -я компонента N -мерного вектора, а через $\{\dots\}$ – вектор, компоненты которого определяются индексами j, σ, μ .

Покажем, что каждое слагаемое, стоящее под знаком суммы в (5.6), есть компактный оператор. Пусть $\zeta_{kq,i}$ – функции, введенные по формулам (3.10). Введем также функции $\widehat{\psi}_0, \widehat{\psi}_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}_1(x) = 1 \quad \text{при} \quad 2d_1\varepsilon_1 \leq |x| \leq d_2\varepsilon_1, \quad \widehat{\psi}_1(x) = 0 \quad \text{вне} \quad d_1\varepsilon_1 \leq |x| \leq 2d_2\varepsilon_1, \\ \widehat{\psi}_0(x) = 1 \quad \text{при} \quad d_1\varepsilon_1 \leq |x| \leq 2d_2\varepsilon_1, \quad \widehat{\psi}_0(x) = 0 \quad \text{вне} \quad d_1\varepsilon_1/2 \leq |x| \leq 4d_2\varepsilon_1. \end{aligned}$$

Тогда в силу непрерывности оператора следа в весовых пространствах

$$\begin{aligned} & \|(\psi_{\varepsilon_1}(\chi_{j\sigma kqs} x) - \psi_{\varepsilon_1}(x)) \\ & \quad \times (B_{j\sigma\mu kqs}[(\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}})^{-1}\{0, g\}]_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs} y, z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})} \\ & \leq k_2 \|\zeta_{kq,2}(\psi_{\varepsilon_1}(x) - \psi_{\varepsilon_1}^{-1}(\chi_{j\sigma kqs} x)) B_{j\sigma\mu kqs}[(\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}})^{-1}\{0, g\}]_k \|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}}(\Omega_k)} \\ & \leq k_3 \|\zeta_{kq,1} \widehat{\psi}_1[(\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}})^{-1}\{0, g\}]_k \|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Поскольку носитель функции $\widehat{\psi}_1$ ограничен и отделен от нуля, а функция $\zeta_{kq,1}$ равна нулю вблизи сторон угла Ω_k , то можно воспользоваться теоремой 5.1 из [23, гл. 2]: используя соотношение $\mathcal{P}_k[(\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}})^{-1}\{0, g\}]_k = 0$, из (5.7) получим

$$\begin{aligned} & \|(\psi_{\varepsilon_1}(\chi_{j\sigma kqs} x) - \psi_{\varepsilon_1}(x)) \\ & \quad \times (B_{j\sigma\mu kqs}[(\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}})^{-1}\{0, g\}]_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs} y, z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})} \\ & \leq k_4 \|\widehat{\psi}_0[(\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}})^{-1}\{0, g\}]_k \|_{H_b^{l+2m-1}(\Omega_k)}. \end{aligned}$$

Так как носитель функции $\widehat{\psi}_0$ ограничен, из последнего неравенства и свойства $(*)$ следует, что

$$\left\{ \sum_{k,q,s} (\psi_{\varepsilon_1}(\chi_{j\sigma kqs} x) - \psi_{\varepsilon_1}(x)) (B_{j\sigma\mu kqs}[(\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}})^{-1}\{0, g\}]_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs} y, z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \right\}$$

– компактный оператор в $\mathcal{H}_b^{l,N}(\Gamma)$. В силу (5.6) отсюда следует

$$\mathcal{B}^{\mathcal{G}} \mathcal{R}_2 g = \psi_{\varepsilon_1} g + \mathcal{T}_4 g, \quad (5.8)$$

где $\mathcal{T}_4$ – компактный оператор в $\mathcal{H}_b^{l,N}(\Gamma)$.

Наконец, из (5.8) получим формулу для композиции $\mathcal{B}^{\omega} \mathcal{R}_2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{\omega} \mathcal{R}_2 g = \psi_{\varepsilon_1} g + \mathcal{T}_4 g + \left\{ \sum_{k,q,s} ((B_{j\sigma\mu kqs}[\mathcal{R}_2 g]_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y,z),z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \right. \\ \left. - (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathcal{R}_2 g]_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs} y, z)|_{\Gamma_{j\sigma}}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

2) Введем оператор $\mathcal{R}_g: \mathcal{H}_b^{l,N}(\Omega, \Gamma) \rightarrow H_b^{l+2m,N}(\Omega)$, действующий по формуле

$$\mathcal{R}_g \{f_0, g\} = \mathcal{R}_1 f_0 - \mathcal{R}'_2 \mathcal{B}^{\omega} \mathcal{R}_1 f_0 + \mathcal{R}_2 g.$$

Здесь $\mathcal{R}'_2: \mathcal{H}_b^{l,N}(\Gamma) \rightarrow H_b^{l+2m,N}(\Omega)$ – ограниченный оператор, действующий по формуле

$$\mathcal{R}'_2 g = \psi_{\varepsilon_1} (d_1 x/2) (\mathcal{L}_g^{\mathcal{G}})^{-1} \{0, g\}.$$

Аналогично (5.5) и (5.9) доказывается, что

$$\mathcal{P} \mathcal{R}'_2 g = \mathcal{T}'_2 g, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{\omega} \mathcal{R}'_2 g = \psi_{\varepsilon_1} (d_1 x/2) g + \mathcal{T}'_4 g + \left\{ \sum_{k,q,s} ((B_{j\sigma\mu kqs}[\mathcal{R}'_2 g]_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y,z),z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \right. \\ \left. - (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathcal{R}'_2 g]_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs} y, z)|_{\Gamma_{j\sigma}}) \right\}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

где $\mathcal{T}'_2, \mathcal{T}'_4$ – компактные операторы, действующие в тех же пространствах, что и операторы $\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_4$.

Покажем, что $\mathcal{R}_g$ удовлетворяет соотношению (5.3). Из формул (5.5) и (5.10) следует, что

$$\mathcal{P} \mathcal{R}_g \{f_0, g\} = \psi_{\varepsilon_1} f_0 + \mathcal{T}_5 \{f_0, g\}, \quad (5.12)$$

где $\mathcal{T}_5: \mathcal{H}_b^{l,N}(\Omega, \Gamma) \rightarrow H_b^{l,N}(\Omega)$ – компактный оператор.

Далее, учитывая, что $\psi_{\varepsilon_1} (d_1 x/2) \mathcal{B}^{\omega} \mathcal{R}_1 f_0 \equiv \mathcal{B}^{\omega} \mathcal{R}_1 f_0$, при помощи (5.11) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^{\omega} \mathcal{R}_g \{f_0, g\} &= \mathcal{B}^{\omega} \mathcal{R}_1 f_0 - \mathcal{B}^{\omega} \mathcal{R}'_2 \mathcal{B}^{\omega} \mathcal{R}_1 f_0 + \mathcal{B}^{\omega} \mathcal{R}_2 g \\ &= -\mathcal{T}'_4 \mathcal{B}^{\omega} \mathcal{R}_1 f_0 - \left\{ \sum_{k,q,s} ((B_{j\sigma\mu kqs}[\mathcal{R}'_2 \mathcal{B}^{\omega} \mathcal{R}_1 f_0]_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y,z),z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \right. \\ &\quad \left. - (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathcal{R}'_2 \mathcal{B}^{\omega} \mathcal{R}_1 f_0]_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs} y, z)|_{\Gamma_{j\sigma}}) \right\} + \mathcal{B}^{\omega} \mathcal{R}_2 g. \end{aligned}$$

Отсюда, используя (5.9), имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^\omega \mathcal{R}_g g = & \psi_{\varepsilon_1} g + \mathcal{T}_6 \{f_0, g\} + \left\{ \sum_{k,q,s} ((B_{j\sigma\mu kqs}[\mathcal{R}_2 g]_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y, z), z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \right. \\ & - (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathcal{R}_2 g]_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs} y, z)|_{\Gamma_{j\sigma}}) \Big\} \\ & - \left\{ \sum_{k,q,s} ((B_{j\sigma\mu kqs}[\mathcal{R}'_2 \mathcal{B}^\omega \mathcal{R}_1 f_0]_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y, z), z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \right. \\ & \left. - (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathcal{R}'_2 \mathcal{B}^\omega \mathcal{R}_1 f_0]_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs} y, z)|_{\Gamma_{j\sigma}}) \right\}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где $\mathcal{T}_6: \mathcal{H}_b^{l,N}(\Omega, \Gamma) \rightarrow \mathcal{H}_b^{l,N}(\Gamma)$ – компактный оператор.

Рассмотрим выражение, стоящее под знаком первой суммы в правой части (5.13). По лемме 3.5

$$\begin{aligned} & \| (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathcal{R}_2 g]_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y, z), z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \\ & - (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathcal{R}_2 g]_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs} y, z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})} \\ & \leq k_5 (\varepsilon_1 \| [\mathcal{R}_2 g]_k \|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)} + \|\zeta_{kq,3}[\mathcal{R}_2 g]_k - \zeta_{kq,3}[\widehat{\mathcal{R}_2 g}]_k \|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Из неравенств (4.2)–(4.7) для функции $U_k = [\mathcal{R}_2 g]_k$, неравенства (5.14) и второго соотношения (5.5) получим

$$\begin{aligned} & \| (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathcal{R}_2 g]_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y, z), z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \\ & - (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathcal{R}_2 g]_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs} y, z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})} \\ & \leq k_6 (\varepsilon_1 \| [\mathcal{R}_2 g]_k \|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)} + \| \mathcal{P}_k [\mathcal{R}_2 g]_k \|_{H_b^l(\Omega_k)}) \\ & = k_6 (\varepsilon_1 \| \psi_{\varepsilon_1} [(\mathcal{L}_g^\mathcal{G})^{-1} \{0, g\}]_k \|_{H_b^{l+2m}(\Omega_k)} + \| [\mathcal{T}_2 g]_k \|_{H_b^l(\Omega_k)}). \end{aligned}$$

Отсюда, из неравенства (5.4) и ограниченности оператора $(\mathcal{L}_g^\mathcal{G})^{-1}: \mathcal{H}_b^{l,N}(\Omega, \Gamma) \rightarrow H_b^{l+2m,N}(\Omega)$ окончательно выводим

$$\begin{aligned} & \| (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathcal{R}_2 g]_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y, z), z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \\ & - (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathcal{R}_2 g]_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs} y, z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \|_{H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma})} \\ & \leq k_7 (\varepsilon_1 \| g \|_{\mathcal{H}_b^{l,N}(\Gamma)} + \| [\mathcal{T}_2 g]_k \|_{H_b^l(\Omega_k)}). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Следовательно, по лемме 5.1

$$\begin{aligned} & (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathcal{R}_2 g]_k)(\omega'_{j\sigma kqs}(y, z), z)|_{\Gamma_{j\sigma}} - (B_{j\sigma\mu kqs}[\mathcal{R}_2 g]_k)(\mathcal{G}_{j\sigma kqs} y, z)|_{\Gamma_{j\sigma}} \\ & = \mathcal{M}_{j\sigma\mu kqs} g + \mathcal{F}_{j\sigma\mu kqs} g, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{M}_{j\sigma\mu kqs}, \mathcal{F}_{j\sigma\mu kqs}: \mathcal{H}_b^{l,N}(\Gamma) \rightarrow H_b^{l+2m-m_{j\sigma\mu}-1/2}(\Gamma_{j\sigma}),$$

причем $\|\mathcal{M}_{j\sigma\mu kqs}\| \leq 2k_7\varepsilon_1$, а оператор $\mathcal{F}_{j\sigma\mu kqs}$ конечномерный.

Аналогично можно доказать, что слагаемые, стоящие во второй сумме правой части (5.13), представимы в виде суммы оператора с малой нормой и конечномерного оператора. Отсюда и из (5.13), (5.12), полагая $\text{supp}\{f_0, g\} \subset \mathcal{V}_{\varepsilon_1}(0)$, получаем утверждение леммы.

2. Докажем фредгольмовость оператора $\mathbf{L}: H_b^{l+2m}(G) \rightarrow \mathcal{H}_b^l(G, \Upsilon)$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть выполнены условия леммы 4.1, и пусть $b > l + 2m - 1$. Тогда оператор $\mathbf{L}: H_b^{l+2m}(G) \rightarrow \mathcal{H}_b^l(G, \Upsilon)$ фредгольмов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 4.1 и [29, теоремы 7.1, 15.2] достаточно построить правый регуляризатор $\mathbf{R}$ для оператора $\mathbf{L}$.

Повторяя рассуждения из [11, §3], в силу [12, лемма 5.2] из леммы 5.2 настоящей работы выводим существование ограниченных операторов

$$\begin{aligned} \mathbf{R}' &: \mathcal{H}_b^l(G, \Upsilon) \rightarrow H_b^{l+2m}(G), \\ \mathbf{M}, \mathbf{T} &: \mathcal{H}_b^l(G, \Upsilon) \rightarrow \mathcal{H}_b^l(G, \Upsilon) \end{aligned}$$

таких, что

$$\mathbf{L}\mathbf{R}' = \mathbf{I} + \mathbf{M} + \mathbf{T},$$

причем $\|\mathbf{M}\| < 1$, а $\mathbf{T}$ компактный. Поскольку $\|\mathbf{M}\| < 1$, то оператор $\mathbf{I} + \mathbf{M}$ имеет ограниченный обратный. Очевидно, оператор $\mathbf{R} = \mathbf{R}'(\mathbf{I} + \mathbf{M})^{-1}$ будет правым регуляризатором для оператора $\mathbf{L}$. Теорема доказана.

3. До сих пор мы предполагали, что $b > l + 2m - 1$. В этом пункте, используя результаты работы [9], мы снимем ограничение на показатель b в случае, когда $n = 2$. Как отмечалось выше, для этого следует рассматривать решения и правые части задачи, имеющие степенные особенности не только вблизи множества $\mathcal{K}_1$, но также вблизи $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$, что соответствует условиям согласования (см. §1).

Итак, пусть $n = 2$. Введем пространство $\tilde{H}_b^l(G)$ как пополнение множества $C_0^\infty(\bar{G} \setminus \mathcal{K})$ по норме

$$\|u\|_{H_b^l(G)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq l} \int_G \tilde{\rho}^{2(b-l+|\alpha|)} |D^\alpha u|^2 dy \right)^{1/2},$$

где $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(y) = \text{dist}(y, \mathcal{K})$ (ср. с §1). Через $\tilde{H}_b^{l-1/2}(\Upsilon)$ при $l \geq 1$ обозначим пространство следов на гладкой кривой $\Upsilon \subset \bar{G}$ с нормой

$$\|\psi\|_{\tilde{H}_b^{l-1/2}(\Upsilon)} = \inf \|u\|_{\tilde{H}_b^l(G)}, \quad u \in \tilde{H}_b^l(G): u|_\Upsilon = \psi.$$

Предположим выполненным следующее условие.

УСЛОВИЕ 5.1. Если $g \in \mathcal{K}_3 \cap \omega_{is}(\Upsilon_i) \neq \emptyset$, то $\omega_{is}^{-1}(g) \in \mathcal{K}$.

Выполнение условия 5.1 обеспечивает конечность множества точек, в которых следует вводить условие согласования. Если условие 5.1 нарушается, то последовательные сдвиги множества $\mathcal{K}_1$ (осуществляемые преобразованиями ω_{is} и обратными к ним) могут образовывать бесконечное множество, которое должно быть использовано в определении весовых пространств вместо множества $\mathcal{K}$.

В настоящем пункте рассмотрим следующий ограниченный оператор, соответствующий задаче⁵ (1.2), (1.3):

$$\mathbf{L} = \{\mathbf{P}(y, D), \mathbf{B}_{i\mu}(y, D)\}: \tilde{H}_b^{l+2m}(G) \rightarrow \tilde{H}_b^l(G) \times \prod_{i=1}^{N_0} \prod_{\mu=1}^m \tilde{H}_b^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Upsilon_i),$$

$$b \in \mathbb{R}.$$

Поскольку теперь мы допускаем особенности решений и правых частей задачи вблизи точек множеств $\mathcal{K}_2$ и $\mathcal{K}_3$, то соответствующие этим точкам модельные задачи следует рассматривать уже не в пространствах Соболева, а в весовых пространствах.

Зафиксируем точку $g \in \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$. Пусть $y \mapsto y'(g)$ – невырожденное бесконечно дифференцируемое преобразование координат, отображающее некоторую окрестность $\mathcal{V}(g)$ точки g на окрестность начала координат $\mathcal{V}_g(0)$ и такое, что сама точка g отображается в начало координат. Обозначим через $\mathcal{P}(D_y)$, $\mathcal{B}_{i\mu 0}(D_y)$ главные однородные части операторов $\mathbf{P}(g, D)$, $\mathbf{B}_{i\mu 0}(g, D)$, записанных в новой системе координат $y' = y'(g)$ с последующим переобозначением y' на y . Запишем операторы $\mathcal{P}(D_y)$, $\mathcal{B}_{i\mu 0}(D_y)$ в полярных координатах:

$$\mathcal{P}(D_y) = r^{-2m} \tilde{\mathcal{P}}(\varphi, D_\varphi, rD_r), \quad \mathcal{B}_{i\mu 0}(D_y) = r^{-m_{i\mu}} \tilde{\mathcal{B}}_{i\mu 0}(\varphi, D_\varphi, rD_r).$$

Если $g \in \mathcal{K}_2$, то $g \in \Upsilon_i$ при некотором $i = i(g)$. В силу гладкости Υ_i в достаточно малой окрестности $\mathcal{V}(g)$ точки g существует невырожденное бесконечно дифференцируемое преобразование $y \mapsto y' = y'(g)$, отображающее $\mathcal{V}(g) \cap G$ на пересечение полуплоскости $\mathbb{R}_+^2 = \{y: |\varphi| < \pi/2\}$ с некоторой окрестностью $\mathcal{V}_g(0)$. Введем ограниченный оператор

$$\mathcal{L}_g: H_b^{l+2m}(K_{\pi/2}) \rightarrow H_b^l(K_{\pi/2}) \times \prod_{j=1}^2 \prod_{\mu=1}^m H_b^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\gamma_j)$$

по формуле

$$\mathcal{L}_g U = \{\mathcal{P}(D_y)U, \mathcal{B}_{i\mu 0}(D_y)U|_{\gamma_j}\},$$

где $K_{\pi/2} = \{y: |\varphi| < \pi/2\}$, $\gamma_j = \{y: \varphi = (-1)^j \pi/2\}$, $j = 1, 2$. Введем также ограниченный оператор

$$\tilde{\mathcal{L}}_g(\lambda): W_2^{l+2m}(-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathcal{W}_2^l[-\pi/2, \pi/2] = W_2^l(-\pi/2, \pi/2) \times \mathbb{C}^{2m}$$

⁵Заметим, что теперь уравнение (1.2) рассматривается не во всей области G , а в $G \setminus \mathcal{K}_3$.

по формуле

$$\tilde{\mathcal{L}}_g(\lambda)\tilde{U} = \{ \tilde{\mathcal{P}}(\varphi, D_\varphi, \lambda)\tilde{U}(\varphi), \tilde{\mathcal{B}}_{i\mu 0}(\varphi, D_\varphi, \lambda)\tilde{U}(\varphi)|_{\varphi=(-1)^j\pi/2} \}, \quad j = 1, 2.$$

Если $g \in \mathcal{K}_3$, то введем ограниченные операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g &= \mathcal{P}(D_y): H_b^{l+2m}(\mathbb{R}^2) \rightarrow H_b^l(\mathbb{R}^2), \\ \tilde{\mathcal{L}}_g(\lambda) &= \tilde{\mathcal{P}}(\varphi, D_\varphi, \lambda): W_{2,2\pi}^{l+2m}(0, 2\pi) \rightarrow W_{2,2\pi}^l(0, 2\pi), \end{aligned}$$

где $W_{2,2\pi}^l(0, 2\pi)$ – замыкание множества бесконечно дифференцируемых 2π -периодических функций в $W_2^l(0, 2\pi)$.

Из работ [27, § 1] и [9, § 1] следует, что для каждой точки $g \in \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$ существует конечно-мероморфная оператор-функция $\tilde{\mathcal{L}}_g^{-1}(\lambda)$ такая, что ее полюсы, за исключением, быть может, конечного числа, расположены внутри двойного угла раствора, меньшего π , содержащего мнимую ось, и для λ , не являющегося ее полюсом, оператор $\tilde{\mathcal{L}}_g^{-1}(\lambda)$ является ограниченным обратным к оператору $\tilde{\mathcal{L}}_g(\lambda)$.

Далее, из [27, теорема 1.1] и результатов [9, § 1] следует, что оператор $\mathcal{L}_g$ – изоморфизм тогда и только тогда, когда прямая $\text{Im } \lambda = b + 1 - l - 2m$ не содержит полюсов оператор-функции $\tilde{\mathcal{L}}_g^{-1}(\lambda)$.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть выполнены условия 1.1–1.4, 5.1, и пусть $b \in \mathbb{R}$ таково, что для всех точек $g \in \mathcal{K}_1$ оператор $\mathcal{L}_g^g$ – изоморфизм и для всех точек $g \in \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$ оператор $\mathcal{L}_g$ – изоморфизм. Тогда оператор $\mathbf{L}: \tilde{H}_b^{l+2m}(G) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_b^l(G, \Upsilon)$ фредгольмов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что леммы 4.1, 5.2 справедливы при любом $b \in \mathbb{R}$, для которого операторы $\mathcal{L}_g^g$, $g \in \mathcal{K}_1$, являются изоморфизмами. Поэтому, используя леммы 4.1 и 5.2, аналогично доказательству теоремы 3.4 из [9] можно вывести априорную оценку (4.8) (в пространствах $\tilde{H}_b^l(\cdot)$) и построить правый регуляризатор. Теорема доказана.

§ 6. Устойчивость индекса нелокальных эллиптических задач

В настоящем параграфе изучим влияние преобразований ω_{is} на индекс нелокальной эллиптической задачи. Докажем, что индекс задачи определяется только линейной частью преобразований ω_{is} в окрестности множества $\mathcal{K}_1$. Отметим, что в случае, когда носитель нелокальных данных $\bigcup_{i,s} \omega_{is}(\tilde{\Upsilon}_i)$ не пересекается с множеством $\mathcal{K}_1$ точек сопряжения нелокальных условий, устойчивость индекса нелокальной задачи доказана в работе [15].

1. Рассмотрим наряду с задачей (1.2), (1.3) следующую задачу:

$$\mathbf{P}(x, D)u = f_0(x), \quad x \in G, \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{B}}_{i\mu}(x, D)u &\equiv \sum_{s=0}^{\hat{S}_i} (\hat{B}_{i\mu s}(x, D)u)(\hat{\omega}_{is}(x))|_{\Upsilon_i} = g_{i\mu}(x), \\ x &\in \Upsilon_i, \quad i = 1, \dots, N_0, \quad \mu = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь $\mathbf{P}(x, D)$, $\widehat{B}_{i\mu 0}(x, D) = B_{i\mu 0}(x, D)$ – те же дифференциальные операторы⁶, что и в § 1, $\widehat{B}_{i\mu s}(x, D)$, $s = 1, \dots, \widehat{S}_i$, – некоторые дифференциальные операторы порядков $m_{i\mu}$ с комплекснозначными коэффициентами класса C^∞ ; $\widehat{\omega}_{is}$, $i = 1, \dots, N_0$, $s = 1, \dots, \widehat{S}_i$, – бесконечно дифференцируемые невырожденные преобразования, отображающие некоторую окрестность θ_i многообразия Υ_i на множество $\widehat{\omega}_{is}(\theta_i)$ так, что $\widehat{\omega}_{is}(\Upsilon_i) \subset G$, $\omega_{i0}(x) \equiv x$. Предположим, что множество

$$\widehat{\mathcal{K}} = \left\{ \bigcup_i (\overline{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{i,s} \widehat{\omega}_{is}(\overline{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{j,p} \bigcup_{i,s} \widehat{\omega}_{jp}(\widehat{\omega}_{is}(\overline{\Upsilon}_i \setminus \Upsilon_i) \cap \Upsilon_j) \right\}$$

представимо в виде $\widehat{\mathcal{K}} = \bigcup_{j=1}^3 \bigcup_{p=1}^{\widehat{N}_j} \widehat{\mathcal{K}}_{jp}$, где

$$\widehat{\mathcal{K}}_1 = \bigcup_{p=1}^{\widehat{N}_1} \widehat{\mathcal{K}}_{1p} = \partial G \setminus \bigcup_{i=1}^{N_0} \Upsilon_i, \quad \widehat{\mathcal{K}}_2 = \bigcup_{p=1}^{\widehat{N}_2} \widehat{\mathcal{K}}_{2p} \subset \bigcup_{i=1}^{N_0} \Upsilon_i, \quad \widehat{\mathcal{K}}_3 = \bigcup_{p=1}^{\widehat{N}_3} \widehat{\mathcal{K}}_{3p} \subset G$$

(ср. с (1.1)). Здесь $\widehat{\mathcal{K}}_{jp}$ – непересекающиеся $(n-2)$ -мерные связные многообразия без края класса C^∞ (точки, если $n = 2$), причем $\widehat{N}_1 = N_1$, $\widehat{\mathcal{K}}_{1p} = \mathcal{K}_{1p}$, $p = 1, \dots, N_1$.

Пусть преобразования $\widehat{\omega}_{is}$ удовлетворяют условиям 1.3, 1.4. Более того, предположим, что операторы $\widehat{B}_{i\mu s}(x, D)$ и преобразования $\widehat{\omega}_{is}$, $s = 1, \dots, \widehat{S}_i$, таковы, что для каждой точки $g \in \widehat{\mathcal{K}}_1 = \mathcal{K}_1$ оператор $\mathcal{L}_g^{\widehat{\omega}}$ (который вводится аналогично оператору $\mathcal{L}_g^\omega$ из § 1) совпадает с оператором $\mathcal{L}_g^g$, определенным в § 1.

Таким образом, $\widehat{\omega}_{is}$ – линейная в окрестности $\mathcal{K}_1$ часть преобразования ω_{is} .

Введем ограниченный оператор, соответствующий нелокальной задаче (6.1), (6.2),

$$\widehat{\mathbf{L}} = \{\mathbf{P}(x, D), \widehat{\mathbf{B}}_{i\mu}(x, D)\}: H_b^{l+2m}(G) \rightarrow \mathcal{H}_b^l(G, \Upsilon).$$

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть выполнены условия леммы 4.1, и пусть $b > l + 2m - 1$. Тогда операторы $\mathbf{L}$, $\widehat{\mathbf{L}}: H_b^{l+2m}(G) \rightarrow \mathcal{H}_b^l(G, \Upsilon)$ фредгольмовы и $\text{ind } \mathbf{L} = \text{ind } \widehat{\mathbf{L}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем оператор $\mathbf{L}_t: H_b^{l+2m}(G) \rightarrow \mathcal{H}_b^l(G, \Upsilon)$ по формуле

$$\mathbf{L}_t u = \{\mathbf{P}(x, D)u, \mathbf{B}_{i\mu}(x, D) + t(\widehat{\mathbf{B}}_{i\mu}(x, D) - \mathbf{B}_{i\mu}(x, D))\}.$$

Очевидно, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}$, $\mathbf{L}_1 = \widehat{\mathbf{L}}$.

Преобразования ω_{is} и $\widehat{\omega}_{is}$ совпадают с точностью до бесконечно малых в некоторой окрестности множества $\mathcal{K}_1$; поэтому в силу теоремы 5.1 операторы $\mathbf{L}_t$ будут фредгольмовы при всех t . Далее, для любых t_0, t

$$\|\mathbf{L}_t u - \mathbf{L}_{t_0} u\|_{\mathcal{H}_b^l(G, \Upsilon)} \leq k_{t_0} |t - t_0| \|u\|_{H_b^{l+2m}(G)},$$

⁶ Достаточно потребовать, чтобы совпадали главные однородные части операторов $\mathbf{P}(x, D)$ и $\widehat{B}_{i\mu 0}(x, D)$ из данного параграфа и соответствующих операторов из § 1. Однако для простоты будем считать, что совпадают и младшие члены.

где $k_{t_0} > 0$ не зависит от $t \in [0, 1]$. Следовательно, в силу [29, теорема 16.2] имеем $\text{ind } \mathbf{L}_t = \text{ind } \mathbf{L}_{t_0}$ для всех t из некоторой достаточно малой окрестности точки t_0 . Указанные окрестности покрывают отрезок $[0, 1]$. Выделяя конечное подпокрытие, получаем $\text{ind } \mathbf{L} = \text{ind } \mathbf{L}_0 = \text{ind } \mathbf{L}_1 = \text{ind } \widehat{\mathbf{L}}$. Теорема доказана.

Аналогично предыдущему при помощи теоремы 5.2, вместо теоремы 5.1, доказывается устойчивость индекса нелокальной краевой задачи (1.2), (1.3) при $n = 2$, $b \in \mathbb{R}$.

Предположим, что $\widehat{N}_j = N_j$, $\widehat{\mathcal{K}}_{jp} = \mathcal{K}_{jp}$, $j = 1, 2, 3$, $p = 1, \dots, N_j$.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть выполнены условия теоремы 5.2. Тогда операторы $\mathbf{L}$, $\widehat{\mathbf{L}}: \widetilde{H}_b^{l+2m}(G) \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}}_b^l(G, \Upsilon)$ фредгольмовы и $\text{ind } \mathbf{L} = \text{ind } \widehat{\mathbf{L}}$.

2. Приведем другое доказательство теоремы 6.2, использующее идеи работы [15] (теорема 6.1 может быть доказана аналогичным образом, но с привлечением леммы 5.2 из [12]; мы не будем на этом останавливаться). Это доказательство более громоздко, однако оно проясняет суть явления: почему индекс оператора полностью определяется линейной частью преобразований ω_{is} в окрестности множества $\mathcal{X}_1$. Будет показано, что если оба оператора $\mathbf{L}$ и $\widehat{\mathbf{L}}$ фредгольмовы, то разность их сужений на ядро $\ker(\mathbf{P}) \subset \widetilde{H}_b^{l+2m}(G)$ оператора $\mathbf{P} = \mathbf{P}(y, D)$ (напомним, что $x = y$ при $n = 2$) можно “свести” к сумме двух операторов, один из которых имеет сколь угодно малую норму, а квадрат другого – компактный. При этом оператор с малой нормой возникает за счет нелинейной добавки в преобразованиях ω_{is} в окрестности множества $\mathcal{X}_1$, а оператор, квадрат которого компактен, – за счет преобразований, порождающих множества $\mathcal{X}_2$ и $\mathcal{X}_3$ (см. § 1). Отметим, что указанная процедура не противоречит примеру из § 2, поскольку она содержит такую операцию, как проектирование на подпространство $\ker(\mathbf{P})$, имеющее бесконечномерное ортогональное дополнение. По той же причине описанный прием сам по себе не доказывает, что оператор $\widehat{\mathbf{L}}$ фредгольмов, если $\mathbf{L}$ фредгольмов (или наоборот), а только позволяет доказать, что $\text{ind } \mathbf{L} = \text{ind } \widehat{\mathbf{L}}$, если априори известно, что оба оператора фредгольмовы.

1) Итак, введем операторы

$$\mathbf{B}, \widehat{\mathbf{B}}: \widetilde{H}_b^{l+2m}(G) \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}}_b^l(\partial G) = \prod_{i=1}^{N_0} \prod_{\mu=1}^m \widetilde{H}_b^{l+2m-m_{i\mu}-1/2}(\Upsilon_i),$$

действующие по формулам $\mathbf{B} = \{\mathbf{B}_{i\mu}(y, D)\}$, $\widehat{\mathbf{B}} = \{\widehat{\mathbf{B}}_{i\mu}(y, D)\}$. Обозначим через $\mathbf{C}$, $\widehat{\mathbf{C}}$ сужения операторов $\mathbf{B}$, $\widehat{\mathbf{B}}$ на подпространство $\ker(\mathbf{P}) \subset \widetilde{H}_b^{l+2m}(G)$. По теореме 5.1 операторы $\mathbf{L}$, $\widehat{\mathbf{L}}$ фредгольмовы. Следовательно, в силу [15, лемма 1.1] операторы $\mathbf{C}$, $\widehat{\mathbf{C}}$ также фредгольмовы, и для доказательства теоремы достаточно показать, что $\text{ind } \mathbf{C} = \text{ind } \widehat{\mathbf{C}}$.

2) Обозначим через $\mathbf{C}^1$, $\widehat{\mathbf{C}}^1$ сужения операторов $\mathbf{C}$, $\widehat{\mathbf{C}}$ на подпространство $\ker(\mathbf{C})^\perp \subset \ker(\mathbf{P})$. Очевидно, $\mathbf{C}^1 = \mathbf{C}\mathbf{I}_0$, $\widehat{\mathbf{C}}^1 = \widehat{\mathbf{C}}\mathbf{I}_0$, где $\mathbf{I}_0: \ker(\mathbf{C})^\perp \rightarrow \ker(\mathbf{P})$ – оператор вложения $\ker(\mathbf{C})^\perp$ в $\ker(\mathbf{P})$. Очевидно, $\dim \ker(\mathbf{I}_0) = 0$, $\text{codim } \mathcal{R}(\mathbf{I}_0) = \dim \ker(\mathbf{C}) = m_0 < \infty$. Следовательно, по теореме 12.2 из [29]

$$\text{ind } \mathbf{C}^1 = \text{ind } \mathbf{C} + \text{ind } \mathbf{I}_0 = \text{ind } \mathbf{C} - m_0,$$

$$\text{ind } \widehat{\mathbf{C}}^1 = \text{ind } \widehat{\mathbf{C}} + \text{ind } \mathbf{I}_0 = \text{ind } \widehat{\mathbf{C}} - m_0.$$

Таким образом, достаточно доказать, что $\text{ind } \mathbf{C}^1 = \text{ind } \widehat{\mathbf{C}}^1$.

3) Обозначим через $\mathbf{P}_\perp$ оператор ортогонального проектирования $\widetilde{\mathcal{H}}_b^l(\partial G)$ на $\mathcal{R}(\mathbf{C}^1)^\perp$. Поскольку $\text{codim } \mathcal{R}(\mathbf{C}^1) < \infty$, оператор $\mathbf{P}_\perp$ является конечномерным. Следовательно,

$$\text{ind } \widehat{\mathbf{C}}^1 = \text{ind}(\mathbf{C}^1 + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1)).$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$\text{ind } \mathbf{C}^1 = \text{ind}(\mathbf{C}^1 + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1)).$$

Так как $\mathbf{C}^1 u, \mathbf{C}^1 u + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1)u \in \mathcal{R}(\mathbf{C}^1)$ при $u \in \ker(\mathbf{C})^\perp$, то можно рассматривать $\mathbf{C}^1, \mathbf{C}^1 + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1)$ как операторы, действующие из $\ker(\mathbf{C})^\perp$ в $\mathcal{R}(\mathbf{C}^1)$. Тогда индексы этих операторов увеличатся на одно и то же число $m_1 = \text{codim } \mathcal{R}(\mathbf{C}^1)$.

Очевидно, оператор $\mathbf{C}^1: \ker(\mathbf{C})^\perp \rightarrow \mathcal{R}(\mathbf{C}^1)$ имеет ограниченный обратный $\mathbf{R}_1 = (\mathbf{C}^1)^{-1}: \mathcal{R}(\mathbf{C}^1) \rightarrow \ker(\mathbf{C})^\perp$ и $\text{ind } \mathbf{C}^1 = 0$. По теореме 12.2 из [29]

$$\text{ind}(\mathbf{C}^1 + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1)) = \text{ind}(\mathbf{I} + \mathbf{R}_1(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1)).$$

Осталось показать, что $\text{ind}(\mathbf{I} + \mathbf{R}_1(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1)) = 0$.

4) Введем функцию $\psi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ такую, что $\psi_\varepsilon(y) = 1$ при $y \in \mathcal{O}_{\varepsilon/2}(\mathcal{K})$, $\psi_\varepsilon(y) = 0$ при $y \notin \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K})$,

$$|D^\alpha \psi_\varepsilon(y)| \leq k_\alpha (\tilde{\rho}(y))^{-|\alpha|}, \quad y \in \mathcal{O}_\varepsilon(\mathcal{K}), \quad (6.3)$$

где $k_\alpha > 0$ не зависят от ε .

Рассмотрим операторы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2: \ker(\mathbf{C})^\perp \rightarrow \ker(\mathbf{C})^\perp$, действующие по формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 u &= \mathbf{R}_1(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})\psi_\varepsilon u, \\ \mathbf{A}_2 u &= \mathbf{R}_1(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})(1 - \psi_\varepsilon)u. \end{aligned}$$

Очевидно, $\mathbf{I} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{I} + \mathbf{R}_1(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\widehat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1)$. Носитель функции $(1 - \psi_\varepsilon)u$ отделен от множества $\mathcal{K}_1$, поэтому в силу доказательства теоремы 3.1 из [15] оператор $(\mathbf{A}_2)^2$ компактный.

Рассмотрим оператор $\mathbf{A}_1$. Поскольку оператор $\mathbf{R}_1(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)$ ограниченный, имеем

$$\|\mathbf{A}_1 u\|_{\widetilde{H}_b^{l+2m}(G)} \leq c \|(\widehat{\mathbf{B}} - \mathbf{B})\psi_\varepsilon u\|_{\widetilde{\mathcal{H}}_b^l(\partial G)}.$$

Отсюда, используя метод разбиения единицы, а также оценки (4.2)–(4.7) и (6.3), получим

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_1 u\|_{\widetilde{H}_b^{l+2m}(G)} &\leq c_1 (\varepsilon \|\psi_\varepsilon u\|_{\widetilde{H}_b^{l+2m}(G)} \\ &\quad + \|\mathbf{P}\psi_\varepsilon u\|_{\widetilde{H}_b^l(G)} + k_1(\varepsilon) \|u\|_{\widetilde{H}_b^{l+2m-1}(G)}) \\ &\leq c_2 (\varepsilon \|u\|_{\widetilde{H}_b^{l+2m}(G)} \\ &\quad + \|\mathbf{P}\psi_\varepsilon u\|_{\widetilde{H}_b^l(G)} + k_1(\varepsilon) \|u\|_{\widetilde{H}_b^{l+2m-1}(G)}). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Так как $u \in \ker(\mathbf{P})$, из неравенства (6.4) и формулы Лейбница получаем

$$\|\mathbf{A}_1 u\|_{\tilde{H}_b^{l+2m}(G)} \leq c_2 \varepsilon \|u\|_{\tilde{H}_b^{l+2m}(G)} + k_2(\varepsilon) \|u\|_{\tilde{H}_b^{l+2m-1}(G)}, \quad (6.5)$$

где c_2 не зависит от ε . Из (6.5), компактности вложения $\tilde{H}_b^{l+2m}(G) \subset \tilde{H}_b^{l+2m-1}(G)$ и леммы 5.1 следует, что $\mathbf{A}_1 = \mathbf{M}_1 + \mathbf{F}_1$, где $\|\mathbf{M}_1\| \leq 2c_2 \varepsilon$, а $\mathbf{F}_1$ — конечномерный оператор.

Таким образом, $\mathbf{R}_1(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\hat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1) = \mathbf{M}_1 + \mathbf{F}_1 + \mathbf{A}_2$. Следовательно, при достаточно малом ε из [29, теоремы 15.4 и 16.2] вытекает, что

$$\text{ind}(\mathbf{I} + \mathbf{R}_1(\mathbf{I} - \mathbf{P}_\perp)(\hat{\mathbf{C}}^1 - \mathbf{C}^1)) = 0.$$

Теорема 6.2 доказана.

Автор выражает глубокую признательность профессору А. Л. Скубачевскому за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. *Sommerfeld A.* Ein Beitrag zur hydrodinamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen // Proc. Intern. Congr. Math. (Rome, 1908). Reale Accad. Lincei. Roma. 1909. V. 3. P. 116–124.
2. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Петроград, 1917.
3. *Picone M.* Equazione integrale traducete il più generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Ser. IV. 1932. V. 15. P. 942–948.
4. *Carleman T.* Sur la théorie des équations intégrales et ses applications // Verh. Internat. Math. Kongr. Zürich. 1932. V. 1. P. 132–151.
5. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. 1969. Т. 185. № 4. С. 739–740.
6. *Бицадзе А. В.* Об одном классе условно разрешимых нелокальных краевых задач для гармонических функций // ДАН СССР. 1985. Т. 280. № 3. С. 521–524.
7. *Кишикс К. Ю.* Об индексе задачи Бицадзе–Самарского для гармонических функций // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 1. С. 105–110.
8. *Гуцин А. К., Михайлов В. П.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений второго порядка // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 1. С. 121–160.
9. *Скубачевский А. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы // Матем. сб. 1986. Т. 129(171). № 2. С. 279–302.
10. *Скубачевский А. Л.* Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26. № 1. С. 120–131.
11. *Скубачевский А. Л.* О методе срезающих функций в теории нелокальных задач // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. № 1. С. 128–139.
12. *Ковалева О. А., Скубачевский А. Л.* Разрешимость нелокальных эллиптических задач в пространствах с весом // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 6. С. 882–898.
13. *Gurevich P. L.* Nonlocal problems for elliptic equations in dihedral angles and the Green formula // Mitt. Math. Semin. Gießen. 2001. V. 247. P. 1–74.
14. *Гуревич П. Л.* Асимптотика решений нелокальных эллиптических задач в плоских углах // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. 2003. Т. 23.
15. *Skubachevskii A. L.* On the stability of index of nonlocal elliptic problems // J. Math. Anal. Appl. 1991. V. 160. № 2. P. 323–341.

16. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 16. № 11. С. 1925–1935.
17. Feller W. The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations // Ann. of Math. 1952. V. 55. P. 468–519.
18. Feller W. Diffusion processes in one dimension // Trans. Amer. Math. Soc. 1954. V. 77. P. 1–30.
19. Taira K. On the existence of Feller semigroups with boundary conditions // Mem. Amer. Math. Soc. 1992. V. 99. P. 1–65.
20. Вентцель А. Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теор. вероятн. и ее применения. 1959. Т. 4. № 2. С. 172–185.
21. Skubachevskii A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997.
22. Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л. Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела // Прикладная механика. 1979. Т. 15. № 5. С. 39–47.
23. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
24. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
25. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. L_p -оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами // Тр. Моск. матем. об-ва. 1978. Т. 37. С. 49–93.
26. Слободецкий Л. Н. Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Учен. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 197. С. 54–112.
27. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. матем. об-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
28. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: ИЛ, 1954.
29. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.

Московский авиационный институт
(государственный технический университет)
E-mail: gurevichp@yandex.ru

Поступило в редакцию
15.III.2002