Общероссийский математический портал

П. Г. Доддс, Б. де Пагтер, А. А. Седаев, Е. М. Семёнов, Ф. А. Сукочев, Сингулярные симметричные функционалы и банаховы пределы с дополнительными свойствами инвариантности, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 6, 111–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/im461>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 16:14:38

УДК 517.51

П. Г. Доддс, Б. де Пагтер, А. А. Седаев, Е. М. Семенов, Ф. А. Сукочев

Сингулярные симметричные функционалы и банаховы пределы с дополнительными свойствами инвариантности

Для симметричных пространств измеримых функций на полуоси рассмотрена проблема существования положительных линейных функционалов, монотонных относительно полуупорядоченности Харди–Литтлвуда – симметричных функционалов. Построены два новых широких класса симметричных пространств, отличных от пространств Марцинкевича, для которых множество сингулярных симметричных функционалов не пусто. Рассмотрена новая конструкция сингулярных симметричных функционалов, основанная на свойстве инвариантности относительно сдвига банаховых пределов, заданных на пространстве ограниченных последовательностей. Доказано существование банаховых пределов, инвариантных относительно действия оператора Харди и всех операторов растяжения. С помощью этого результата получена устойчивость новой конструкции сингулярных симметричных функционалов для важного класса порождающих последовательностей.

Библиография: 12 наименований.

Введение

В работе [1] Ж. Диксмье показал существование сингулярных следов на факторе фон Неймана $B(H)$, т. е. таких следов, которые обращаются в нуль на всех конечномерных операторах. Впоследствии значение таких следов стало ясным ввиду их применения к задачам некоммутативной геометрии, описанным в монографии [2]. В работе [3] были рассмотрены положительные функционалы на пространстве измеримых функций, которые монотонны относительно специального отношения порядка – полуупорядоченности Харди–Литтлвуда. Такие функционалы называются *симметричными*. В [3] было показано, что изучение сингулярных следов в смысле Диксмье, а также сингулярных следов на более общих некоммутативных банаховых пространствах измеримых операторов [4] может быть сведено к изучению симметричных функционалов на (коммутативных) симметричных банаховых пространствах измеримых функций, определенных на полуоси. Поскольку единственным представителем нормальных (порядково непрерывных) симметричных функционалов является обычный интеграл [3], то интерес для исследования представляют только сингулярные симметричные функционалы. В настоящей работе продолжено изучение сингулярных симметричных функционалов (ССФ) на вполне симметричных банаховых пространствах измеримых функций.

Работа Ф. А. Сукочева поддержана Australian Research Council; работа А. А. Седаева и Е. М. Семенова поддержана РФФИ (грант № 02-01-00146) и программой “Университеты России” (грант УР.04.01.051).

Начиная с работы [1] все примеры пространств, допускающих существование ССФ, были связаны с пространствами Марцинкевича. В [3] показано, что необходимыми условиями существования ССФ на симметричном пространстве E являются его несепарабельность и равенство единице верхнего индекса Бойда β_E . Хотя эти условия являются также и достаточными для пространств Марцинкевича $M(\psi)$, в классе всех симметричных пространств это не так, поскольку для пространств Орлича–Лоренца множество ССФ пусто. В связи с этим естественно возникает вопрос о существовании таких симметричных пространств, которые были бы отличны от пространств Марцинкевича или их симметричных подпространств и, тем не менее, допускали бы существование ненулевых сингулярных симметричных функционалов. В настоящей статье мы отвечаем на этот вопрос положительно и строим два новых класса таких пространств. Первый из них основан на применении вещественного метода интерполяции и результатах работы [9]. Построение второго класса более конструктивно и позволяет убедиться в том, что в отличие от построения первого класса наличие ненулевых ССФ на симметричном пространстве E не обязательно влечет существование таких функционалов на пространстве Марцинкевича с той же фундаментальной функцией, что и пространство E . В результате удастся описать фундаментальные функции всех симметричных пространств, которые допускают непустое множество сингулярных симметричных функционалов.

Все известные сингулярные симметричные функционалы определяются с помощью банаховых пределов – специальных линейных функционалов, продолжающих понятие предела на множество ограниченных последовательностей или функций и обладающих некоторыми свойствами обычных пределов. В настоящей работе мы приводим новую конструкцию сингулярных симметричных функционалов на пространствах Марцинкевича, в которой применяются обобщенные пределы на пространстве ограниченных последовательностей, инвариантные относительно операции сдвига. Такие функционалы называются *банаховыми пределами*, а сам метод дополняет упомянутый выше оригинальный результат Диксмье [1], который использовал для своей конструкции обобщенные пределы, инвариантные относительно операции растяжения. При этом отметим, что для обоснования нашей конструкции мы существенно опирались на результаты работ [5] и [6] по теории банаховых пределов.

В настоящей статье исследованы обобщенные пределы и получено существование банаховых пределов, инвариантных относительно оператора Харди и всех операторов растяжения. С помощью этого результата доказана теорема об устойчивости предложенной конструкции сингулярных симметричных функционалов относительно ряда преобразований генерирующей последовательности.

§ 1. Определения и предварительные сведения

Напомним основные понятия и обозначения, применяемые в дальнейшем. Банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ вещественных, измеримых на интервале $[0, \infty)$ функций будет называться *симметричным пространством*, если:

- (i) E – идеальное пространство (решетка);
- (ii) E – перестановочно-инвариантное пространство, т. е. если $y \in E$ и x – некая измеримая функция на $[0, \infty)$ такая, что $x^* = y^*$, то $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Здесь x^* – невозрастающая непрерывная справа перестановка x , задаваемая формулой

$$x^*(t) = \inf \{s \geq 0: m(\{|x| > s\}) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Основные свойства перестановок и симметричных пространств изложены в монографиях [7], [8].

Пусть E_0, E_1 – симметричные пространства. Пересечение $E_0 \cap E_1$ и сумма $E_0 + E_1$, снабженные нормами $\|x\|_{E_0 \cap E_1} = \max(\|x\|_{E_0}, \|x\|_{E_1})$ и $\|x\|_{E_0 + E_1} = \inf \{\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{E_1}, x_i \in E_i: x = x_0 + x_1\}$, являются банаховыми симметричными пространствами. Отметим, что для произвольного симметричного пространства E справедливы непрерывные вложения

$$L^1[0, \infty) \cap L^\infty[0, \infty) \subset E \subset L^1[0, \infty) + L^\infty[0, \infty).$$

Обозначим через E' симметричное пространство, двойственное для E . Пространство E' состоит из измеримых функций y таких, что

$$\|y\|_{E'} := \sup \left\{ \int_0^\infty |x(t)y(t)| dt : x \in E, \|x\|_E \leq 1 \right\} < \infty.$$

Если E^* – банахово, сопряженное к E пространство, то, как известно, $E' \subset E^*$ и $E' = E^*$ в том и только том случае, когда норма $\|\cdot\|_E$ является порядково непрерывной, т.е. из $\{x_n\} \subseteq E, x_n \downarrow 0$, следует, что $\|x_n\|_E \rightarrow 0$. Норма $\|\cdot\|_E$ симметричного пространства E порядково непрерывна в том и только том случае, если E сепарабельно. При этом $\lim_{t \rightarrow \infty} x^*(t) = 0$ для всех $x \in E$.

Если $x, y \in L^1[0, \infty) + L^\infty[0, \infty)$, то x *мажорирован* y (т.е. $x \prec\!\prec y$) тогда и только тогда, когда

$$\int_0^t x^*(s) ds \leq \int_0^t y^*(s) ds \quad \forall t > 0.$$

Симметричное пространство E на $[0, \infty)$ называется *вполне симметричным* тогда и только тогда, когда $x \prec\!\prec y, y \in E$ влечет $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$. Хорошо известно (см., например, [7]), что $(E, \|\cdot\|_E)$ является вполне симметричным в том и только том случае, если E – интерполяционное пространство пары $(L^1[0, \infty), L^\infty[0, \infty))$ с интерполяционной константой 1. В частности, если норма E порядково непрерывна, то E вполне симметрично. Все рассматриваемые далее симметричные пространства (если не оговорено противное) являются вполне симметричными. Поэтому для краткости будем называть их просто *симметричными*.

Напомним, что для произвольной пары банаховых пространств (E_0, E_1) K -функционал Я. Петре определяется формулой (см. [8]–[10])

$$K(t, x) = K(t, x, E_0, E_1) = \inf \{\|x_0\|_{E_0} + t\|x_1\|_{E_1}, x_i \in E_i: x = x_0 + x_1\}.$$

С его помощью можно определить [8]–[10] семейство $E_{\theta, p}, 0 < \theta < 1, 1 \leq p \leq \infty$, интерполяционных пространств банаховой пары (E_0, E_1) :

$$E_{\theta, p} = \left\{ x \in E_0 + E_1: \|x\|_{\theta, p} = \left(\int_0^\infty (K(t, x, E_0, E_1)t^{-\theta})^p \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Для $\lambda > 0$ и функции f , определенной на $[0, \infty)$, оператор растяжения D_λ определяется равенством $D_\lambda f(t) := f(t/\lambda)$. Для каждого $\lambda > 0$ оператор растяжения D_λ является ограниченным линейным оператором на E (см. [7, гл. II]).

Согласно [3] положительный линейный функционал $0 \leq f \in E^*$ на вполне симметричном пространстве E называется *симметричным* тогда и только тогда, когда для $0 \leq x, y \in E$ из $x \prec y$ следует, что $f(x) \leq f(y)$. В работе [3] показано, что всякий нормальный (порядково непрерывный) симметричный функционал с точностью до неотрицательного множителя равен обычному интегралу по мере Лебега и не равен нулю лишь для $E \subset L^1[0, \infty)$. Поэтому интерес представляют лишь сингулярные симметричные функционалы. В рассматриваемом случае это такие симметричные функционалы, которые обращаются в нуль на $L_1 \cap L_\infty$. Через E_{sym}^* обозначим конус всех (положительных) симметричных сингулярных функционалов на E . Для каждого $f \in E_{\text{sym}}^*$ и $\lambda > 0$ имеем

$$f(D_\lambda x) = \lambda f(x), \quad x \in E \quad (1.1)$$

(см. [3, предложение 2.3]).

Напомним [3, определение 2.7], что симметричный функционал f называется *сосредоточенным в нуле* (соответственно, *сосредоточенным на бесконечности*), если $f = 0$ на $E \cap L^\infty[0, \infty)$ (соответственно, $f = 0$ на $E \cap L^1[0, \infty)$). Через $E_{\text{sym},0}^*$ (соответственно, $E_{\text{sym},\infty}^*$) обозначим множество тех элементов E_{sym}^* , которые сосредоточены в нуле (соответственно, на бесконечности). Согласно [3, теорема 2.10] имеем

$$E_{\text{sym}}^* = E_{\text{sym},0}^* \oplus E_{\text{sym},\infty}^*.$$

Через Ω обозначим множество всех вогнутых неотрицательных функций $\psi(t)$ на $[0, \infty)$ таких, что $\psi(0) = 0$. Через Ω_∞ обозначим совокупность всех $\psi \in \Omega$, для которых $\psi(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty$, и через Ω_0 – множество всех $\psi \in \Omega$, для которых $\psi(+0) = \lim_{t \downarrow 0} \psi(t) = 0$.

Напомним определение и основные свойства пространств Лоренца и Марцинкевича, более подробное изложение которых можно найти в [7].

Для каждого $\psi \in \Omega$ через $M(\psi)$ обозначим пространство Марцинкевича на $[0, \infty)$, состоящее из всех измеримых функций x , определенных на $[0, \infty)$, для которых

$$\|x\|_{M(\psi)} = \sup_{t>0} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t x^*(s) ds < \infty.$$

Обозначим через $M_0(\psi)$ замыкания в $M(\psi)$ пространства $L_1 \cap L_\infty$. В случае, когда $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 1/\psi(t) = 0$, $M_0(\psi)$ есть наибольшее сепарабельное симметричное подпространство пространства $M(\psi)$.

Пусть $\varphi(t) \in \Omega$. Симметричное пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ состоит из всех измеримых функций x , определенных на $[0, \infty)$, для которых

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^\infty x^*(s) d\varphi(s) < \infty.$$

В случае, когда $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$, пространство $\Lambda(\varphi)$ сепарабельно.

Пространства Лоренца и Марцинкевича взаимно двойственны:

$$\Lambda(\varphi)' = M(\varphi), \quad M(\psi)' = \Lambda(\psi).$$

При изучении свойств симметричных пространств используется фундаментальная функция. Пусть E – симметричное пространство; тогда его фундаментальная функция задается формулой $\varphi_E(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_E$, $t > 0$, где $\chi_e(t)$ – характеристическая функция измеримого множества e .

Хорошо известно, что

$$\begin{aligned} \varphi_{\Lambda(\varphi)}(t) &= \varphi(t), & \varphi_{M(\psi)}(t) &= t/\psi(t), & \varphi_{E'}(t) &= t/\varphi_E(t), \\ \varphi_{E_0+E_1}(t) &= \min(\varphi_{E_0}(t), \varphi_{E_1}(t)), & \varphi_{E_0 \cap E_1} &= \max(\varphi_{E_0}(t), \varphi_{E_1}(t)). \end{aligned}$$

При этом $\varphi_E(t)$ является, вообще говоря, не вогнутой, а квазивогнутой функцией на $[0, \infty)$, т. е. $\varphi_E(t)$ и $t/\varphi_E(t)$ не убывают. Хорошо известно, что если $\psi(t)$ – квазивогнутая функция, то ее наименьшая вогнутая мажоранта $\widetilde{\psi(t)}$ принадлежит Ω и удовлетворяет неравенствам

$$\psi(t) \leq \widetilde{\psi(t)} \leq 2\psi(t).$$

Среди всех симметричных пространств E с данной фундаментальной функцией $\varphi \in \Omega$ есть наименьшее – пространство Лоренца и наибольшее – пространство Марцинкевича:

$$\Lambda(\varphi) \subset E \subset M(t/\varphi).$$

Основной результат [3], касающийся существования ненулевых сингулярных симметричных функционалов на пространстве Марцинкевича $M(\psi)$, содержится в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1.1. *Если $\psi \in \Omega$, то:*

(i) *ненулевой сосредоточенный в бесконечности симметричный функционал на $M(\psi)$ существует тогда и только тогда, когда $\psi \in \Omega_\infty$ и*

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1; \quad (1.2)$$

(ii) *ненулевой сосредоточенный в нуле симметричный функционал на $M(\psi)$ существует тогда и только тогда, когда $\psi \in \Omega_0$ и*

$$\liminf_{t \downarrow 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1. \quad (1.3)$$

Начиная с работы [1] при построении сингулярных следов и симметричных функционалов используются банаховы (обобщенные) пределы.

Банаховым пределом назовем непрерывный положительный линейный функционал L , определенный на пространстве ограниченных последовательностей l_∞ , значение которого на любой сходящейся последовательности $\mathbf{x} = \{x_n\}_1^\infty$ равно ее пределу:

$$L(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Поскольку $L(c_0) = 0$, где c_0 – пространство сходящихся к нулю последовательностей, то L – сингулярный функционал на l_∞ . Далее будем предполагать, что ба-

нахов предел обладает свойством инвариантности относительно сдвига, а именно для любого натурального m

$$L(\{x_{n+m}\}) = L(\{x_n\}).$$

Множество таких пределов будем обозначать через $BL(l_\infty)$. Банаховы пределы из $BL(l_\infty)$ были подробно изучены в работах [5] и [6]. В [5] Г. Лоренц ввел и изучил понятие почти сходящейся последовательности. Последовательность $\{x_n\}$ называется *почти сходящейся к пределу a* , если для любого банахова предела L из $BL(l_\infty)$ выполнено $L(\{x_n\}) = a$. Например, последовательность $1, 0, 1, 0, \dots$ почти сходится к $1/2$.

ТЕОРЕМА 1.2 [5]. *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ почти сходилась к a , необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+q}}{q} \rightarrow a \quad (1.4)$$

равномерно по n .

Следуя терминологии Лоренца [5], обобщенный предел почти сходящейся последовательности $\{x_n\}$ будем называть *F-пределом* и обозначать $F\text{-}\lim_n x_n$.

В [6] доказана следующая важная теорема.

ТЕОРЕМА 1.3. *Для любой последовательности $\{x_n\}_1^\infty \in l_\infty$ справедлива точная оценка*

$$\sup\{L(\{x_n\}), L \in BL(l_\infty)\} = \lim_{q \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \frac{x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+q}}{q}. \quad (1.5)$$

Нам понадобится

СЛЕДСТВИЕ 1.4. *Пусть последовательность $\mathbf{x} = \{x_n\} \in l_\infty$ состоит из нулей и единиц и каждый промежуток вида $[qk, q(k+1)]$, $k = 0, 1, 2, \dots$, содержит не более одной единицы. Тогда $L(\mathbf{x}) \leq 1/q$ для любого банахова предела L .*

В заключение напомним следующий известный результат. Обозначим через $M_1(\psi)$ (соответственно, $M_\infty(\psi)$) замыкание в $M(\psi)$ множества $M(\psi) \cap L_1$ (соответственно, $M(\psi) \cap L_\infty$). Множества $M_1(\psi)$, $M_\infty(\psi)$ допускают внутреннее описание:

$$M_1(\psi) = \left\{ x \in M(\psi), \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t x^*(s) ds = 0 \right\}, \quad (1.6)$$

$$M_\infty(\psi) = \left\{ x \in M(\psi), \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t x^*(s) ds = 0 \right\}. \quad (1.7)$$

§ 2. Новые классы симметричных пространств, допускающие существование сингулярных симметричных функционалов

Все известные сингулярные симметричные функционалы (включая их некоммутативные аналоги) имеют своей естественной областью определения пространства Марцинкевича $M(\psi)$, где функция ψ удовлетворяет хотя бы одному из условий (1.2), (1.3), или заданы на подпространствах таких пространств (см. [3, замечание 3.6]). В связи с этим возникает вопрос: существуют ли другие, отличные

от пространств Марцинкевича, классы симметричных пространств, допускающие существование сингулярных симметричных функционалов? Этот вопрос особенно интересен, если учитывать, что любое пространство типа Лоренца–Орлича не имеет сингулярных симметричных функционалов [3, теорема 3.1].

Из результатов настоящего параграфа получим положительный ответ на этот вопрос. Существуют классы симметричных пространств, которые не совпадают с замкнутыми симметричными подпространствами пространств Марцинкевича и допускают существование сингулярных симметричных функционалов. Построим два таких класса. В обоих случаях будет использована конструкция сингулярных симметричных функционалов [3, лемма 3.7]. Коротко обсудим ее ниже, но сначала отметим, что ограничимся рассмотрением ССФ, сосредоточенных на бесконечности, хотя все наши аргументы (скорректированные соответствующим образом) остаются справедливыми и для случая ССФ, сосредоточенных в нуле (см., например, теорему 2.3).

Пусть $0 \leq \varphi \in (l_\infty)_s^*$ – положительный сингулярный функционал на l_∞ , функция $\psi \in \Omega_\infty$ такова, что $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$, и пусть последовательность t_n монотонно стремится к бесконечности и удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(2^n t_n)}{\psi(t_n)} = 1. \quad (2.1)$$

Для $0 < x \in M(\psi)$ положим

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi \left(\left\{ \frac{1}{\psi(2^k t_n)} \int_0^{2^k t_n} x^* ds \right\}_{n=1}^\infty \right). \quad (2.2)$$

Тогда для $t_n \uparrow \infty$, как доказано в [3, лемма 3.7], $f \in M(\psi)_{\text{sym}, \infty}^*$. Ниже без ограничения общности будем предполагать, что

$$2^n t_n < t_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

В построении первого класса пространств будет использовано то, что условие (2.1) не налагает ограничений на поведение ψ в пределах интервалов

$$(2^n t_n, t_{n+1}), \quad n = 1, 2, \dots$$

Определим функцию $\xi \in \Omega_\infty$, полагая $\xi(t) = \psi(t)$ для $t \in [t_n, 2^n t_n]$, $n \in \mathbb{N}$, и продолжим ξ на каждый промежуток $[2^n t_n, t_{n+1}]$, интерполируя ее линейно. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можно считать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{2^n t_n < t < t_{n+1}} \frac{\xi(t)}{\psi(t)} \right) = 0. \quad (2.3)$$

Положим для краткости $E_0 := M(\xi)$, $E_1 := M(\psi)$, $\|\cdot\|_0 := \|\cdot\|_{M(\xi)}$, $\|\cdot\|_1 := \|\cdot\|_{M(\psi)}$. Очевидно, $E_0 \subseteq E_1$, а из условия (2.3) следует, что нормы $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$ не эквивалентны. По построению ξ имеем $\xi(2^k t_n) = \psi(2^k t_n)$ для всех $1 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$. В частности, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi(2^k t_n)}{\xi(t_n)} = 1$, следовательно, формула (2.2), примененная к ψ и ξ , определяет один и тот же ССФ f на пространствах E_0 и E_1 . Функционал f нетривиален, поскольку $f(\xi') = f(\psi') = 1$, и, очевидно, сосредоточен

на бесконечности. Отсюда немедленно следует, что $0 \neq f \in E_{\text{sym}, \infty}^*$ для любого симметричного E такого, что $E_0 \subseteq E \subseteq E_1$. Однако заранее не ясно, можно ли выбрать E так, чтобы оно было отличным от симметричного подпространства любого пространства Марцинкевича. Следующая теорема показывает, как это можно сделать при помощи упомянутого выше интерполяционного K -метода Я. Петре (см., например, [8]–[10]).

ТЕОРЕМА 2.1. *Если $0 < \theta < 1$, $1 \leq p < \infty$, то ни для какого $\eta \in \Omega_\infty$ пространство $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ не совпадает с замкнутым симметричным подпространством пространства $M(\eta)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем θ и p , где $0 < \theta < 1$, а $1 \leq p < \infty$. Пусть $\xi_1(t)$ (соответственно, $\psi_1(t)$) – наименьшая вогнутая мажоранта функции $\frac{t}{\xi(t)}$ (соответственно, $\frac{t}{\psi(t)}$). Рассмотрим пространства Лоренца $\Lambda(\xi_1)$ и $\Lambda(\psi_1)$ и напомним (см. [7, разд. II.5.1]), что

$$\Lambda(\xi_1) \subseteq M(\xi), \quad \Lambda(\psi_1) \subseteq M(\psi).$$

В частности, отсюда следует, что

$$(\Lambda(\xi_1), \Lambda(\psi_1))_{\theta, p} \subseteq (E_0, E_1)_{\theta, p}. \quad (2.4)$$

Учитывая вложения (см. [10, п. 3.4.1])

$$(E_0, E_1)_{\theta, 1} \subseteq (E_0, E_1)_{\theta, p} \subseteq (E_0, E_1)_{\theta, \infty},$$

из (2.4) получаем

$$(\Lambda(\xi_1), \Lambda(\psi_1))_{\theta, 1} \subseteq (E_0, E_1)_{\theta, p} \subseteq (E_0, E_1)_{\theta, \infty}. \quad (2.5)$$

Легко проверить, что для любых двух вогнутых положительных функций ω и τ , определенных на $[0, \infty)$, функция $\omega^\theta \tau^{1-\theta}$ также вогнута. Отсюда, учитывая [9, п. 3.3.24 и формула (3.9.22)], получим

$$\begin{aligned} (\Lambda(\xi_1), \Lambda(\psi_1))_{\theta, 1} &= \Lambda((\xi_1)^{1-\theta}(\psi_1)^\theta), \\ (E_0, E_1)_{\theta, \infty} &= (M(\xi), M(\psi))_{\theta, \infty} = M(\xi^{1-\theta}\psi^\theta), \end{aligned}$$

т. е. вложение (2.5) может быть переписано следующим образом:

$$\Lambda((\xi_1)^{1-\theta}(\psi_1)^\theta) \subseteq (E_0, E_1)_{\theta, p} \subseteq M(\xi^{1-\theta}\psi^\theta). \quad (2.6)$$

Заметим, что фундаментальные функции пространств $\Lambda((\xi_1)^{1-\theta}(\psi_1)^\theta)$ и $M(\xi^{1-\theta}\psi^\theta)$ эквивалентны. Действительно, фундаментальная функция пространства $\Lambda((\xi_1)^{1-\theta}(\psi_1)^\theta)$ эквивалентна функции $(\frac{t}{\xi(t)})^{1-\theta}(\frac{t}{\psi(t)})^\theta$, а фундаментальная функция пространства $M(\xi^{1-\theta}\psi^\theta)$ равна $\frac{t}{\xi^{1-\theta}(t)\psi^\theta(t)}$, что завершает доказательство эквивалентности.

Теперь из вложения (2.6) следует, что фундаментальные функции пространств $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ и $M(\xi^{1-\theta}\psi^\theta)$ эквивалентны.

Предположим, что $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ – замкнутое подпространство некоторого пространства Марцинкевича $M(\eta)$, $\eta \in \Omega_\infty$. Тогда фундаментальные функции пространств $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ и $M(\eta)$ эквивалентны, а значит, эквивалентны фундаментальные функции пространств $M(\xi^{1-\theta}\psi^\theta)$ и $M(\eta)$. Отсюда немедленно следует, что

$$M(\xi^{1-\theta}\psi^\theta) = M(\eta).$$

Другими словами, $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ – замкнутое подпространство $(E_0, E_1)_{\theta, \infty}$. Однако хорошо известно (см. [9, п. 4.6.24]), что если нормы пространств E_0, E_1 не эквивалентны, то все пространства $(E_0, E_1)_{\theta, p}$, $0 < \theta < 1$, $1 \leq p \leq \infty$, имеют попарно неэквивалентные нормы.

Из доказанного результата следует, что для пространства Марцинкевича $M(\psi)$, где функция $\psi \in \Omega_\infty$ удовлетворяет условию $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$, существует семейство симметричных пространств, множество сингулярных симметричных функционалов которых не пусто, а фундаментальная функция совпадает с фундаментальной функцией $t/\psi(t)$ пространства Марцинкевича $M(\psi)$. Отсюда возникает следующий вопрос. Пусть некоторое симметричное пространство E обладает непустым множеством $E_{\text{сум}}^*$, и пусть $\varphi_E(t)$ – фундаментальная функция такого пространства. Верно ли, что пространство Марцинкевича $M(t/\varphi_E)$ с той же фундаментальной функцией $\varphi_E(t)$ также имеет непустое множество ССФ?

Ниже мы построим второй анонсированный в начале параграфа класс симметричных пространств и получим отрицательный ответ на поставленный вопрос. Наша конструкция будет основана на том, что (как показывает анализ доказательства леммы 3.7, (ii) из [3]) формула (2.2) может быть применена к функциям y , вообще говоря, не принадлежащим $M(\psi)$, но удовлетворяющим условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(t_n)} \int_0^{t_n} y^*(t) dt = 0. \quad (2.7)$$

Как показано в [3, лемма 3.7, (ii)], в этом случае $f(y) = 0$. Таким образом, доказан следующий вспомогательный результат.

ЛЕММА 2.2. Пусть $\psi \in \Omega_\infty$ удовлетворяет условию (1.2), и пусть G – симметричное пространство на $[0, \infty)$ такое, что (2.7) выполнено для всех $y \in G$. Тогда функционал f , заданный формулой (2.2), продолжается до сингулярного симметричного функционала, заданного на $M(\psi) + G$.

Докажем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть φ – произвольная функция из Ω , удовлетворяющая в нуле (соответственно, в бесконечности) следующим условиям:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\varphi(t)} = 0 \\ \left(\text{соответственно, } \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\varphi(t)} = \infty \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Тогда существует симметричное пространство E такое, что:

- 1) фундаментальная функция пространства E совпадает с φ ;
- 2) множество $E_{\text{sym},0}^*$ (соответственно, $E_{\text{sym},\infty}^*$) не пусто;
- 3) если дополнительно $\sup\{\varphi(2t)/\varphi(t), t > 0\} < 2$, то E не является замкнутым симметричным подпространством пространства Марцинкевича.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем для функции φ , удовлетворяющей условиям (2.8) в бесконечности. Другой случай рассматривается аналогично.

Пусть функция φ из Ω_∞ не эквивалентна t на бесконечности. Тогда для φ и $\psi_0(t) = t/\varphi(t)$ выполнены условия

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \psi_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{\varphi(t)} = \infty.$$

Построим последовательности $t_n \uparrow \infty$, $t_0 = 2$, и $s_n \uparrow \infty$ по индукции так, чтобы $t_n < s_n < t_{n+1}$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi_0(s_n)}{\psi_0(t_n)} = \infty, \quad t_{n+1} > \max(2^n t_n, s_n), \quad (2.9)$$

$$\frac{t_{n+1}}{\varphi(t_{n+1})} > \frac{2t_n}{\varphi(t_n)}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2^n \varphi(t_n)}{\varphi(t_{n+1})} = 0, \quad \frac{s_n}{\varphi(t_{n+1})} = o(1). \quad (2.10)$$

Например, если $\varphi(t) = \sqrt{t}$, то $t_n = 2^{2^{2n}}$, а $s_n = 2^{2^{2n+1}}$. Далее положим

$$a_n := \frac{1}{2\varphi(t_n)}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_0 := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi_{[t_{n-1}, t_n)}, \quad t_{-1} := 0.$$

Наконец, определим функцию $\psi \in \Omega_\infty$, полагая

$$\psi(t) = \int_0^t x_0^*(s) ds, \quad t \in (0, \infty). \quad (2.11)$$

Очевидно, $x_0^* = x_0$, и так как согласно (2.10) $t_n a_n$ растет быстрее геометрической прогрессии со знаменателем 2, то, проводя непосредственные вычисления, получим

$$\frac{1}{2} \psi_0(t_n) = \frac{t_n}{2\varphi(t_n)} < \psi(t_n) < \frac{t_n}{\varphi(t_n)} = \psi_0(t_n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.12)$$

Тогда согласно (2.9) и (2.10) имеем

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(2^n t_n)}{\psi(t_n)} = \frac{\psi(t_n) + a_{n+1}(2^n - 1)t_n}{\psi(t_n)} < 1 + 2^{n-1} \frac{\varphi(t_n)}{\varphi(t_{n+1})} \rightarrow 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Иными словами, для функции ψ , заданной (2.11), условие (2.1) выполнено. Следовательно, функционал f , заданный (2.2), есть сингулярный симметричный функционал на $M(\psi)$ такой, что $f(x_0) = 1$.

Далее оценим величину $\psi(s_n)$. Согласно (2.11), второму условию в (2.9) и последнему соотношению в (2.10) имеем

$$\begin{aligned} \psi(s_n) &= \int_0^{s_n} x_0(s) ds = \int_0^{t_n} x_0(s) ds + \int_{t_n}^{s_n} x_0(s) ds \\ &< \psi(t_n) + s_n/(2\varphi(t_{n+1})) = O(\psi(t_n)). \end{aligned}$$

Поскольку согласно (2.12) $\psi(t_n) = O(\psi_0(t_n))$, то, учитывая первое условие в (2.9), получаем, что $\psi_0(s_n)/\psi(s_n) \rightarrow \infty$. Таким образом, справедливо

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Функции $\psi(t)$ и $\psi_0(t) = t/\varphi(t)$, а также функции $t/\psi(t)$ и $\varphi(t)$ не эквивалентны.

Построим симметричное пространство E , определенное в теореме 2.3. Пусть G – произвольное сепарабельное симметричное пространство с фундаментальной функцией, равной φ (например, пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ или сепарабельная часть пространства Марцинкевича $M(\psi_0)$, равная замыканию в $M(\psi_0)$ пространства $M(\psi_0) \cap L_1 \cap L_\infty$). Рассмотрим в качестве E пространство $G + M(\psi)$, где ψ – функция, построенная по φ (см. выше).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пространство $E = G + M(\psi)$ обладает следующими свойствами:

- (i) фундаментальная функция пространства E равна $\varphi(t)$;
- (ii) $E_{\text{sym},\infty}^*$ не пусто; в частности, функционал f , заданный в лемме 2.2, принадлежит $E_{\text{sym},\infty}^*$;
- (iii) $E \neq M(\psi)$;
- (iv) если дополнительно $\sup_{t>0} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} < 2$, то E не является замкнутым симметричным подпространством пространства Марцинкевича.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Поскольку $\psi(t)$ линейна на промежутках $[t_n, t_{n+1}]$, то из правого неравенства в (2.12) следует, что $t/\psi(t)$ (фундаментальная функция пространства Марцинкевича $M(\psi)$) строго больше фундаментальной функции $\varphi(t)$ пространства G . Так как фундаментальная функция суммы симметричных пространств равна инфимуму их фундаментальных функций, то утверждение (i) доказано.

(ii) Сначала установим, что для любой функции $y \in G$ условие (2.7) выполнено. Предположим противное: существуют $y \in G$, подпоследовательность $\{t_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$\gamma \int_0^{t_{n_k}} y^*(s) ds \geq \psi(t_{n_k}), \quad k \geq 1.$$

Поскольку

$$\psi(t_{n_k}) = \int_0^{t_{n_k}} \sum_{n=1}^\infty a_n \chi_{[t_{n-1}, t_n)}(s) ds \geq \int_0^{t_{n_k}} \sum_{i=1}^\infty a_{n_i} \chi_{[t_{n_i-1}, t_{n_i})}(s) ds,$$

то

$$\gamma \int_0^{t_{n_k}} y^*(s) ds \geq \int_0^{t_{n_k}} v^*(s) ds, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.13)$$

где

$$v = v^* := \sum_{i=1}^\infty a_{n_i} \chi_{[t_{n_i-1}, t_{n_i})}.$$

Поскольку функция

$$Y(t) := \gamma \int_0^t y^*(s) ds, \quad t > 0,$$

вогнута, а функция

$$V(t) := \int_0^t \sum_{i=1}^\infty a_{n_i} \chi_{[t_{n_i-1}, t_{n_i})}(s) ds, \quad t > 0,$$

линейна на каждом интервале $[t_{n_i}, t_{n_{i+1}})$, $i \geq 1$, из неравенства (2.13) вытекает, что

$$Y(t) \geq V(t) \quad \forall t > 0.$$

Иначе говоря, $v \ll \gamma y$, и поскольку G сепарабельно и, следовательно, интерполяционно, это означает, что $v \in G$ и $\|v\|_G \leq \gamma \|y\|_G$ (см. [7, теорема II.4.5]).

Полагая

$$v_k := \sum_{i=k}^{\infty} a_{n_i} \chi_{[t_{n_{i-1}}, t_{n_i})}, \quad k \in \mathbb{N},$$

замечаем, что $v_k \in G$, $v_k \downarrow 0$. Поскольку G сепарабельно, то отсюда следует, что

$$\|v_k\|_G \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Однако, согласно (2.10) для каждого $k \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \|v_k\|_G &\geq \|a_{n_{k+1}} \chi_{[t_{n_k}, t_{n_{k+1}})}\|_G \geq a_{n_{k+1}} (\varphi(t_{n_{k+1}}) - \varphi(t_{n_k})) \\ &= \frac{\varphi(t_{n_{k+1}}) - \varphi(t_{n_k})}{2\varphi(t_{n_{k+1}})} = \frac{1}{2} - o(1). \end{aligned}$$

Полученное противоречие показывает, что (2.7) выполнено для всех $y \in G$ и, следовательно, применение леммы 2.2 завершает доказательство (ii).

(iii) Если $E = M(\psi)$, то нормы, а значит, и фундаментальные функции этих пространств эквивалентны. Но это противоречит замечанию 2.5, что доказывает наше утверждение.

(iv) Прежде всего заметим, что из (ii) и равенства (1.1) следует, что

$$\|D_s\|_{E \rightarrow E} = s \quad \text{для всех } s > 1.$$

Предположим теперь, что E – симметричное подпространство пространства Марцинкевича $M(\psi_1)$, $\psi_1 \in \Omega$. Тогда их нормы на E , а значит, и фундаментальные функции $\varphi(t)$ и $t/\psi_1(t)$ эквивалентны друг другу. Отсюда $\psi_1(t)$ должна быть эквивалентна $\psi_0(t) = t/\varphi(t)$. Следовательно, единственным пространством Марцинкевича, которое может содержать E как замкнутое симметричное подпространство, является $M(\psi_0)$. Отсюда, в силу эквивалентности норм E и $M(\psi_0)$ на E , существует такая положительная константа C , что

$$\|D_s\|_{M(\psi_0)} > C \|D_s\|_E = Cs, \quad s > 1. \quad (2.14)$$

С другой стороны, известно (см. [7, формула II.4.21]), что

$$\|D_s\|_{M(\psi_0) \rightarrow M(\psi_0)} = s \cdot \sup_{t>0} \frac{\psi_0(t/s)}{\psi_0(t)} = \sup_{t>0} \frac{\varphi(t)}{\varphi(t/s)}, \quad s > 1.$$

Согласно предположению, сделанному в п. (iv) предложения 2.6,

$$\sup_{t>0} \frac{\varphi(t)}{\varphi(t/2)} = \alpha < 2.$$

Отсюда при $s = 2^n$ имеем $\|D_s\|_{M(\psi_0)} \leq \alpha^n = o(s)$, $n \rightarrow \infty$, что противоречит (2.14). Полученное противоречие доказывает утверждение (iv).

Доказательство теоремы 2.3 непосредственно вытекает из доказанного предложения 2.6.

Отметим, что если $\varphi(t) = \sqrt{t}$, то пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ имеет ту же фундаментальную функцию, что и E , но $M(\varphi)$ не допускает согласно теореме 1.1 сингулярных симметричных функционалов.

В заключение отметим следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.7. *Для того чтобы среди симметричных пространств с данной фундаментальной функцией $\varphi(t)$ существовали такие E , для которых множество ССФ было не пусто, необходимо и достаточно, чтобы либо в нуле, либо в бесконечности функция $\varphi(t)$ удовлетворяла условию (2.8), т. е. не была эквивалентна ни t , ни const .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что если условие теоремы не выполнено, то симметричное пространство изоморфно одному из пространств L_1 , L_∞ , $L_1 \cap L_\infty$, $L_1 + L_\infty$, которые согласно [3] не могут иметь ненулевых ССФ.

Если же условие теоремы выполнено, то существование нужного симметричного E следует из доказанной выше теоремы 2.3.

§ 3. Одна новая конструкция сингулярных симметричных функционалов

На пространстве Марцинкевича $M(\psi)$, где $\psi \in \Omega$, можно рассмотреть другую, отличную от примененной в предыдущем параграфе конструкцию ССФ. В этой конструкции сингулярный симметричный функционал также порождается последовательностью t_n , стремящейся к нулю или бесконечности, и банаховым пределом L , но существенно другим образом. Как обычно, при $t_n \downarrow 0$ возникает ССФ, сосредоточенный в нуле, а при $t_n \uparrow \infty$ – в бесконечности. Основная идея заключается в использовании значений функции

$$M_x(t) = \frac{1}{\psi(t)} \int_0^t x^* ds, \quad 0 < t < \infty,$$

в точках последовательности $\{t_n\}$, достаточно быстро возрастающей к бесконечности (или убывающей к нулю). Далее к полученной последовательности значений применяется обобщенный предел L с дополнительными свойствами инвариантности, что определяет ССФ на положительных элементах $x \in M(\psi)$. При таком подходе использование именно банаховых пределов становится естественным. Отметим, что в отличие от конструкции Диксмье [1], где в основном применяются обобщенные пределы, инвариантные относительно операторов растяжения, мы используем банаховы пределы, которые по определению инвариантны относительно операторов сдвига. Подробному исследованию других аспектов данной конструкции посвящена работа [4]. В настоящей работе мы рассмотрим только свойства соответствующих ССФ, зависящие от выбора определяющей последовательности $\{t_n\}$ и банахова предела L .

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть $\psi \in \Omega_0$ (соответственно, $\psi \in \Omega_\infty$) и монотонная последовательность $\mathbf{t} = \{t_n\}_1^\infty$ стремится к нулю (соответственно, к бесконечности). Если существует натуральное m такое, что:*

- 1) $t_{n+m} < t_n/2$ (соответственно, $t_{n+m} > 2t_n$) для всех n ,
- 2) $F\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(t_{n+m})}{\psi(t_n)} = 1$ (соответственно, $F\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+m})} = 1$),

то для любого банахова предела $L \in BL(l_\infty)$ формула

$$f(x) = f_{t,L}(x) = L(\{x_n\}), \quad x_n = \frac{1}{\psi(t_n)} \int_0^{t_n} x^* ds, \quad (3.1)$$

определяет для неотрицательных $x \in M(\psi)$ ненулевой функционал, который можно продолжить по линейности до ССФ, заданного на всем пространстве Марцинкевича $M(\psi)$ и сосредоточенного в нуле (соответственно, в бесконечности).

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $s = F\text{-}\lim_n s_n$ и для всех n разность $s_n - s$ не меняет знак. Тогда для любого $L \in BL(l_\infty)$ и произвольной последовательности $\{x_n\} \in l_\infty$ справедливо равенство

$$L(\{s_n x_n\}) = L(\{s_n\})L(\{x_n\}). \quad (3.2)$$

Если дополнительно $\inf_n |s_n| > 0$, то

$$F\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n} = \frac{1}{F\text{-}\lim_n s_n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно критерию Лоренца (1.4) последовательность $|s_n - s|$, а вместе с ней и последовательность $|(s_n - s)| |x_n|$ почти сходятся к нулю. Следовательно,

$$L(\{s_n x_n\}) = L(\{(s_n - s)x_n\}) + sL(\{x_n\}) = L(\{s_n\})L(\{x_n\}).$$

Для доказательства второго утверждения имеем

$$L\left(\frac{1}{s_n} - \frac{1}{s}\right) = L\left(\frac{s - s_n}{s_n s}\right) = L(s - s_n)L\left(\frac{1}{s s_n}\right) = 0,$$

поскольку применение формулы (3.2) здесь законно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. Согласно [3] достаточно проверить аддитивность функционала f для положительных x и y из $M(\psi)$. По условию

$$\begin{aligned} \int_0^{t_n} (x + y)^* ds &\leq \int_0^{t_n} x^* ds + \int_0^{t_n} y^* ds \\ &\leq \int_0^{2t_n} (x + y)^* ds \leq \int_0^{t_{n+k}} (x + y)^* ds, \end{aligned}$$

где $k = -m$, если $t_n \rightarrow 0$, и $k = m$, если $t_n \rightarrow \infty$. Разделив обе части левого неравенства на $\psi(t_n)$ и применив к получившимся последовательностям банахов предел L , получаем неравенство $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$, т. е. функционал, определенный формулой (3.1), всегда субаддитивный.

Деля обе части правого неравенства на $\psi(t_{n+k})$ и учитывая, что L инвариантен относительно сдвига, получаем неравенство

$$f(x+y) = L(\{(x+y)_{n+k}\}) \geq L\left(\left\{\frac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+k})}(x_n+y_n)\right\}\right).$$

Поскольку всегда $\frac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+k})} \leq 1$, то в силу условия 2) теоремы 3.1 и формулы (3.2)

$$\begin{aligned} L\left(\left\{\frac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+k})}(x_n+y_n)\right\}\right) &= L\left(\left\{\frac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+k})}\right\}\right)L(\{x_n+y_n\}) \\ &= L(\{x_n\}) + L(\{y_n\}) = f(x) + f(y). \end{aligned}$$

Таким образом, аддитивность f , а значит, и линейность функционала доказаны.

Из равенств (1.6), (1.7) непосредственно следует, что функционал, определенный формулой (3.1), при $t_n \rightarrow \infty$ равен нулю на $M_1(\psi)$ (соответственно, при $t_n \rightarrow 0$ равен нулю на $M_\infty(\psi)$) и, следовательно, сосредоточен в бесконечности (соответственно, в нуле). В частности, f является сингулярным и, очевидно, симметричным.

Поскольку $f_{\mathbf{t},L}(\psi') = 1$, то, как нетрудно видеть, любой функционал вида (3.1) имеет норму, равную 1. Теорема доказана.

Для определенности все дальнейшие рассуждения проведем для случая $\psi \in \Omega_\infty$ и $t_n \rightarrow \infty$, хотя после соответствующего изменения формулировок они останутся справедливыми и для случая $\psi \in \Omega_0$ и $t_n \rightarrow 0$.

Как показывает следующее утверждение, условия 1), 2) теоремы 3.1 налагают на функцию ψ определенные жесткие ограничения.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. *Если последовательность, удовлетворяющая условиям 1), 2) теоремы 3.1, существует, то функция $\psi(t)$ удовлетворяет условию (1.2). Если в условии 2) F -предел можно заменить обычным пределом, то функция ψ удовлетворяет условию*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1. \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существует $A > 1$ такое, что $\psi(2t)/\psi(t) > A$ для всех достаточно больших t . Применяя условие 1) теоремы 3.1, для любого банахова предела L при больших n имеем

$$L\left(\left\{\frac{\psi(t_n)}{\psi(t_{n+m})}\right\}\right) \leq L\left(\left\{\frac{\psi(t_n)}{\psi(2t_n)}\right\}\right) \leq L\left(\left\{\frac{1}{A}\right\}\right) = \frac{1}{A} < 1.$$

Это противоречит условию 2) и доказывает первое утверждение следствия.

Для доказательства второго утверждения возьмем произвольное t и определим $n = n(t)$ так, чтобы $t_n \leq t \leq t_{n+1}$. Тогда $2t \leq t_{n+2m}$ и, следовательно, в силу сделанного предположения

$$\begin{aligned} 1 \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} &\leq \lim_{n=n(t) \rightarrow \infty} \frac{\psi(t_{n+2m})}{\psi(t_n)} \\ &= \lim_{n=n(t) \rightarrow \infty} \frac{\psi(t_{n+2m})}{\psi(t_{n+m})} \frac{\psi(t_{n+m})}{\psi(t_n)} = 1. \end{aligned}$$

Из следующего примера применения описываемой конструкции следует, что условие (3.3) в общем случае не является необходимым.

ПРИМЕР 3.4. Из каждого промежутка $[2^{2^n}, 2^{2^{n+1}} - 1]$ возьмем точки

$$2^{2^n}, 2^{2^n+1}, \dots, 2^{2^n+n^2}$$

и образуем из них последовательность $\bar{\tau} = \{\tau_k\}$. Определим функцию $\psi_0(t)$, полагая ее на промежутках $[2^{2^n}, 2^{2^{n+1}}]$, $n = 0, 1, 2, \dots$, равной

$$2^n \left(\frac{t - 2^{2^n}}{2^{2^{n+1}} - 2^{2^n}} + 1 \right), \quad \psi_0(t) = \frac{1}{2}t, \quad 0 < t < 2.$$

Заметим, что по построению

$$\psi_0(t) < \varphi(t) = \log_2(1 + t) \quad (3.4)$$

для всех t , так как функция $\varphi(t)$ вогнута, функция $\psi_0(t)$ кусочно линейна и на концах интервалов линейности неравенство (3.4) выполнено.

Отсюда имеем

$$\psi_0(2^{2^n}) = 2^n < \psi_0(2^{2^n+n^2}) < \log_2(2^{2^n+n^2} + 1) = 2^n + n^2 + o(1). \quad (3.5)$$

Значит, отношение $\psi_0(\tau_{k+1})/\psi_0(\tau_k)$ для первых n^2 членов последовательности $\{\tau_k\}$ из промежутка $[2^{2^n}, 2^{2^{n+1}} - 1]$ при большом n как угодно близко к 1. И только для одного $\tau_k = 2^{2^n+n^2}$ это отношение как угодно близко к 2. Следовательно, по критерию Лоренца (1.4) для последовательности τ_n и функции ψ условие 2) теоремы 3.1 выполнено.

Поскольку по построению $\tau_{k+1} \geq 2\tau_k$, то условие 1) также выполнено и, значит, формула (3.1) определяет на $M(\psi)$ ССФ, сосредоточенный в бесконечности. При этом $\psi_0(\tau_{k+1})/\psi_0(\tau_k) \not\rightarrow 1$ в обычном смысле. Легко видеть, что в нашем случае $\limsup \psi_0(2t)/\psi_0(t) = 4/3$. Иными словами, рассматриваемая конструкция применима и в том случае, когда $\psi(t)$ удовлетворяет только (1.2) и не удовлетворяет (3.3).

Теперь покажем, что конструкция (3.1) реально зависит от выбора последовательности t_n , даже если для $\psi(t)$ выполнено (3.3).

ПРИМЕР 3.5. Рассмотрим $F = M(\varphi)$, где $\varphi(t) = \log_2(1 + t)$. В качестве первой последовательности выберем каноническую последовательность $\mathbf{p} = \{2^n\}_{n=1}^\infty$, а в качестве второй – последовательность $\bar{\tau}$ из предыдущего примера. Пусть $x_0(t) = \psi'(t)$, где $\psi(t)$ – функция из примера 3.4. Тогда $x_0 = x_0^*$ и $\|x_0\|_F = 1$. Действительно, так как $\psi(t)$ вогнута и линейна между точками τ_n , то

$$\sup_t \frac{\psi_0(t)}{\varphi(t)} \geq \sup_n \frac{\psi_0(\tau_n)}{\varphi(\tau_n)} \geq \sup_n \frac{\psi_0(2^{2^n})}{\varphi(2^{2^n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{\log_2(2^{2^n} + 1)} = 1.$$

В силу (3.4) обратное неравенство очевидно.

Пусть $f_{\mathbf{p},L}(x)$ и $f_{\bar{\tau},L}(x)$ – ССФ, определенные на F по формуле (3.1) с помощью $\mathbf{p}$ и $\bar{\tau}$ и некоторого банахова предела L . Из оценки (3.5) следует, что $f_{\bar{\tau},L}(x_0) = 1$ для любого L . В то же время для $n \rightarrow \infty$ и $k = 1, 2, \dots, n$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(2^{2^{n+1}-k})} \int_0^{2^{2^{n+1}-k}} x_0^* ds &= \frac{\psi_0(2^{2^{n+1}-k})}{\varphi(2^{2^{n+1}-k})} = \frac{2^n(1 + 2^{-k} + o(1))}{2^{n+1} - k + o(1)} \\ &= \frac{1}{2}(1 + 2^{-k}) + o(1) < \frac{3}{4} + o(1). \end{aligned}$$

Следовательно, среднее значение этих величин для $k = 1, 2, \dots, n$ и $n \rightarrow \infty$ в пределе не превосходит $3/4$. Согласно критерию Лоренца (1.4) это означает, что последовательность

$$\frac{1}{\varphi(2^n)} \int_0^{2^n} x_0^* ds$$

не может быть почти сходящейся к 1. Следовательно, существует такой банахов предел L_1 , для которого $f_{\mathbf{p},L_1}(x_0) < 1 = f_{\bar{\tau},L_1}(x_0)$.

В то же время из неравенства (3.5) при $k = 1, 2, \dots, n^2$ имеем

$$1 \geq \frac{1}{\varphi(2^{2^n+k})} \int_0^{2^{2^n+k}} x_0^* ds = \frac{\psi_0(2^{2^n+k})}{\varphi(2^{2^n+k})} \geq \frac{2^n}{2^n + n^2} = 1 + o(1),$$

т. е.

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sup_m \frac{\frac{\psi_0(2^m)}{\varphi(2^m)} + \dots + \frac{\psi_0(2^{m+q})}{\varphi(2^{m+q})}}{q} = 1.$$

В силу теоремы 1.3 отсюда следует существование такого банахова предела L_2 , что $f_{\mathbf{p},L_2}(x_0) = 1 > f_{\mathbf{p},L_1}(x_0)$.

Приведенные примеры показывают, что функционал $f_{\mathbf{t},L}$ реально зависит как от генерирующей последовательности $\mathbf{t}$, так и от банахова предела L . Ниже, в § 5, рассмотрим вопрос об устойчивости данной конструкции для одного важного класса порождающих функционал последовательностей и банаховых пределов с дополнительными свойствами инвариантности.

§ 4. Банаховы пределы, обладающие дополнительными свойствами инвариантности

В этом параграфе мы докажем существование банахова предела, инвариантного не только относительно оператора сдвига, но и относительно оператора Харди и всех операторов растяжения. Хотя банаховы пределы, обладающие дополнительными свойствами инвариантности, представляют и самостоятельный интерес, мы продемонстрируем их непосредственное применение в следующем параграфе, где с их помощью будут установлены свойства устойчивости сингулярного симметричного функционала, задаваемого формулой (3.1), относительно некоторых преобразований генерирующей последовательности $\mathbf{t}$.

Для наглядности будем представлять элементы $\mathbf{x}$ пространства $l_\infty = l_\infty(\mathbb{N})$ как функции целочисленного аргумента: $\mathbf{x} = \{x(k)\}_{k=1}^\infty$.

Напомним, что оператор сдвига $T: l_\infty \rightarrow l_\infty$ (соответственно, оператор Харди или чезаровский оператор $H: l_\infty \rightarrow l_\infty$) определяется как $(Tx)(k) = x(k+1)$ (соответственно, $(Hx)(k) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k x(j)$). Напомним также, что для $n \in \mathbb{N}$ оператор растяжения $V_n: l_\infty \rightarrow l_\infty$ определяется равенством

$$V_n(x(1), x(2), \dots) = (\underbrace{x(1), \dots, x(1)}_n, \underbrace{x(2), \dots, x(2)}_n, \dots).$$

Все эти операторы положительны, переводят $\mathbf{1}$ в себя и имеют норму, равную единице. Более того, $\{V_n\}_{n=1}^\infty$ — абелева полугруппа, так как $V_m V_n = V_{m+n}$ для всех $m, n \geq 1$.

Будем использовать в нашей конструкции хорошо известную теорему Маркова–Какутани (см., например, [11, теорема V.20]) о существовании неподвижной точки.

ТЕОРЕМА 4.1 (Марков–Какутани). *Пусть F — локально выпуклое хаусдорфово пространство, и пусть K — непустое выпуклое компактное подмножество в F . Если $\mathcal{T}$ — абелева полугруппа линейных непрерывных операторов на F такая, что $T(K) \subseteq K$ для всех $T \in \mathcal{T}$, то существует элемент $x_0 \in K$ такой, что $Tx_0 = x_0$ для всех $T \in \mathcal{T}$.*

Легко видеть, что множество всех неподвижных точек из теоремы 4.1 образует выпуклое компактное подмножество в K .

ТЕОРЕМА 4.2. *Существует $0 \leq \mathcal{L} \in l_\infty^*$ такой, что $\mathcal{L}(\mathbf{1}) = 1$ и*

$$\mathcal{L}(Tx) = \mathcal{L}(Hx) = \mathcal{L}(V_n x) = \mathcal{L}(x)$$

для всех $x \in l_\infty$ и всех $n \geq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство основывается на следующих трех утверждениях:

- (i) $V_n T = T^n V_n$ для всех $n \geq 1$;
- (ii) $HTx - THx \in c_0$ для всех $x \in l_\infty$;
- (iii) $HV_n x - V_n Hx \in c_0$ для всех $x \in l_\infty$.

Доказательство утверждения (i) очевидно. Проводя вычисления, получим

$$(HTx)(k) - (THx)(k) = \frac{1}{k+1} \frac{x(2) + \dots + x(k+1)}{k} - \frac{1}{k+1} x(1)$$

для всех $x \in l_\infty$. Отсюда следует, что

$$|(HTx)(k) - (THx)(k)| \leq \frac{2}{k+1} \|x\|_\infty.$$

Это означает, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \{(HTx)(k) - (THx)(k)\} = 0$ и, следовательно, $HTx - THx \in c_0$.

Теперь наметим доказательство утверждения (iii). Пусть $n \geq 1$ фиксировано и $x \in l_\infty$. Если $1 \leq k \in \mathbb{N}$, то существуют $l \geq 1$ и $1 \leq r \leq n$ такие, что $k = (l-1)n + r$. Следовательно,

$$(HV_n x)(k) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (V_n x)(i) = \frac{n}{k} \sum_{j=1}^{l-1} x(j) + \frac{r}{k} x(l)$$

и

$$(V_n Hx)(k) = (Hx)(l) = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l x(j).$$

Отсюда

$$(HV_n x)(k) - (V_n Hx)(k) = \sum_{j=1}^{l-1} \left(\frac{nl-k}{kl} \right) x(j) + \left(\frac{rl-k}{kl} \right) x(l).$$

Заметим, что $0 \leq nl - k \leq n$ и $0 \leq rl - k \leq rl$, откуда

$$|(HV_n x)(k) - (V_n Hx)(k)| \leq \frac{n}{k} \left(\frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l-1} |x(j)| \right) + \frac{n}{k} |x(l)| \leq \frac{2n}{k} \|x\|_\infty.$$

Это означает, что $\lim_{k \rightarrow \infty} \{(HV_n x)(k) - (V_n Hx)(k)\} = 0$, т.е. $HV_n x - V_n Hx \in c_0$.

Переходим непосредственно к доказательству утверждения теоремы. Определим

$$K = \{0 \leq \varphi \in l_\infty^* : \varphi(\mathbf{1}) = 1, T^* \varphi = \varphi\}.$$

Поскольку K содержит обычные банаховы пределы, то $K \neq \emptyset$. Также ясно, что K выпукло и $*$ -слабо компактно. Тогда $V_n^*(K) \subseteq K$. Действительно, согласно (i) известно, что $T^* V_n^* = V_n^*(T^*)^n$. Следовательно, если $\varphi \in K$, то

$$T^*(V_n^* \varphi) = V_n^*(T^*)^n \varphi = V_n^* \varphi,$$

откуда $V_n^* \varphi \in K$. Значит, можно применить теорему Маркова–Какутани к множеству K и абелевой полугруппе $\{V_n^*\}_{n=1}^\infty$. Отсюда множество

$$K_1 = \{0 \leq \varphi \in l_\infty^* : \varphi(\mathbf{1}) = 1, T^* \varphi = \varphi, V_n^* \varphi = \varphi, n \geq 1\}$$

не пусто, выпукло и $*$ -слабо компактно.

Теперь покажем, что $H^*(K_1) \subseteq K_1$. Для этого сначала заметим, что $\varphi(z) = 0$ для всех $z \in c_0$ и всех $\varphi \in K_1$ (ибо $T^* \varphi = \varphi$). Тогда для $\varphi \in K_1$ из утверждения (iii) вытекает, что

$$(V_n^* H^* \varphi)(x) - (H^* V_n^* \varphi)(x) = \varphi(HV_n x - V_n Hx) = 0$$

для всех $x \in l_\infty$. Следовательно,

$$V_n^*(H^* \varphi) = H^*(V_n^* \varphi) = H^* \varphi.$$

Аналогично, из (ii) вытекает, что $T^*(H^* \varphi) = H^* \varphi$ для всех $\varphi \in K_1$. Поэтому $H^*(K_1) \subseteq K_1$. Теперь, применяя теорему Маркова–Какутани к множеству K_1 и абелевой полугруппе $\{(H^*)^n\}_{n=0}^\infty$, заключаем, что существует $\mathcal{L} \in K_1$ такой, что $H^*(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$.

В качестве приложения полученных результатов докажем два утверждения, которые будут применены в следующем параграфе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Пусть $\mathcal{L}$ – банахов предел, инвариантный относительно операторов растяжения (и, по определению, относительно операторов сдвига). Если для каждого целого k , $0 \leq k < m$, элемент $\mathbf{y}_k \in l_\infty$ по определению равен

$$\mathbf{y}_k = (\underbrace{0, \dots, 0, x(1)}_k, \underbrace{0, \dots, 0, x(2)}_{m-1}, \underbrace{0, \dots, 0, x(3)}_{m-1}, \dots),$$

где $\mathbf{x} = \{x(n)\}_{n=1}^\infty \in l_\infty$, то

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}_k) = \frac{1}{m} \mathcal{L}(\mathbf{x}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу инвариантности относительно сдвига

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}_0) = \mathcal{L}(\mathbf{y}_1) = \dots = \mathcal{L}(\mathbf{y}_{m-1}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} m\mathcal{L}(\mathbf{y}_k) &= \mathcal{L}(\mathbf{y}_0) + \mathcal{L}(\mathbf{y}_2) + \dots + \mathcal{L}(\mathbf{y}_{m-1}) \\ &= \mathcal{L}(\underbrace{x(1), \dots, x(1)}_m, \underbrace{x(2), \dots, x(2)}_m, \dots) = \mathcal{L}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

где последнее равенство следует в силу инвариантности $\mathcal{L}$ относительно растяжений.

Далее нам понадобится следующее обозначение. Пусть $\mathbf{x} = \{x_n\}_1^\infty \in l_\infty$, $m > 0$ – натуральное число, и пусть для каждого i , $1 \leq i \leq m$,

$$\mathbf{z}_i(\mathbf{x}) := (x(i), x(i+m), \dots, x(i+km), \dots),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{z}}_i(\mathbf{x}) &:= (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{i-1}, x(i), \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-1}, x(i+m), \\ &\quad \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-1}, \dots, x(i+km), \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-1}, \dots). \end{aligned}$$

В качестве следствия из предложения 4.3 имеем

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{z}}_i(\mathbf{x})) = \frac{1}{m} \mathcal{L}(\mathbf{z}_i(\mathbf{x})), \quad 1 \leq i \leq m, \quad \mathbf{x} \in l_\infty. \quad (4.1)$$

Пусть $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots)$ – возрастающая последовательность целых чисел. Определим линейный оператор $T_{\mathbf{r}}$ на l_∞ , полагая

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{r}}(y_1, y_2, \dots) &= (y_1, y_2, \dots, y_{r_1-1}, 0, y_{r_1}, y_{r_1+1}, \dots, y_{r_2-1}, 0, y_{r_2}, \dots), \\ \mathbf{y} &= \{y_n\} \in l_\infty. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Если $\mathcal{L}$ обладает свойствами инвариантности, рассмотренными в теореме 4.2, и для некоторого целого $q > 1$ множество $\{i: (k-1)q + 1 \leq r_i < kq\}$ состоит из не более чем одного элемента для каждого $k \in \mathbb{N}$, то для любого положительного $\mathbf{y} \in l_\infty$

$$\mathcal{L}(T_{\mathbf{r}}\mathbf{y}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{y}) \leq \left(1 + \frac{1}{q-1}\right) \mathcal{L}(T_{\mathbf{r}}\mathbf{y}). \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольные $\mathbf{y}$, $0 \leq \mathbf{y} = \{y_i\}_{i=1}^\infty \in l_\infty$, и натуральное m . Используя (4.1), в силу инвариантности $\mathcal{L}$ относительно операторов сдвига и растяжения имеем

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}_k(\mathbf{y})) = \mathcal{L}(y(k), y(k+m), y(k+2m), \dots) = m\mathcal{L}(\tilde{\mathbf{z}}_k(\mathbf{y})), \quad 1 \leq k \leq m. \quad (4.3)$$

Поскольку

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^m \tilde{\mathbf{z}}_i(\mathbf{y}),$$

то из (4.3) и предположения, что $\mathcal{L}$ инвариантен относительно оператора Харди H , имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{z}}_1(\mathbf{y}) + \tilde{\mathbf{z}}_2(\mathbf{y}) + \cdots + \tilde{\mathbf{z}}_m(\mathbf{y})) = \frac{1}{m} \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^m \mathbf{z}_i(\mathbf{y})\right) \\ &= \frac{1}{m} \mathcal{L}\left(\sum_{i=1}^m y(i), \sum_{i=m+1}^{2m} y(i), \dots, \sum_{i=nm+1}^{(n+1)m} y(i), \dots\right) \\ &= \frac{1}{m} \mathcal{L}\left(H\left(\sum_{i=1}^m y(i), \sum_{i=m+1}^{2m} y(i), \dots, \sum_{i=nm+1}^{(n+1)m} y(i), \dots\right)\right) \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y(i), \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{2m} y(i), \dots, \frac{1}{nm} \sum_{i=1}^{nm} y(i), \dots\right). \end{aligned}$$

Введем обозначение $D_m(\mathbf{x}) = \{x(m), x(2m), \dots, x(nm), \dots\}$, $\mathbf{x} \in l_\infty$. Тогда предыдущий результат можно записать следующим образом:

$$L(\mathbf{y}) = L(D_m H(\mathbf{y})). \quad (4.4)$$

Теперь можно завершить доказательство. По определению $T_{\mathbf{r}}$ для любого натурального i существует такое $j(i)$, что $y(i) = (T_{\mathbf{r}}\mathbf{y})(j(i))$. В силу сделанного для $\mathbf{r}$ предположения $j(q) \leq q+1$, $j(2q) \leq 2(q+1)$ и $j(kq) \leq k(q+1)$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{kq} (T_{\mathbf{r}}\mathbf{y})(i) \leq \sum_{i=1}^{kq} y(i) \leq \sum_{i=1}^{k(q+1)} (T_{\mathbf{r}}\mathbf{y})(i), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Комбинируя первое неравенство из (4.5) и соотношение (4.4) и полагая $m = q$, получаем первое неравенство из (4.2):

$$\mathcal{L}(T_{\mathbf{r}}\mathbf{y}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{y}).$$

Аналогично, применяя (4.4) ко второму неравенству из (4.5), получаем второе неравенство из (4.2):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{y}) &= \mathcal{L}(D_q(H(\mathbf{y}))) = \mathcal{L}\left(\left\{\frac{1}{kq} \sum_{i=1}^{kq} y(i)\right\}_{k=1}^{\infty}\right) \\ &\leq \mathcal{L}\left(\left\{\frac{q+1}{q} \frac{1}{k(q+1)} \sum_{i=1}^{k(q+1)} (T_{\mathbf{r}}\mathbf{y})(i)\right\}_{k=1}^{\infty}\right) \\ &= \frac{q+1}{q} \mathcal{L}(D_{q+1}(HT_{\mathbf{r}}\mathbf{y})) = \left(1 + \frac{1}{q}\right) L(T_{\mathbf{r}}\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

§ 5. Свойство устойчивости одного класса сингулярных симметричных функционалов на пространстве Марцинкевича

Вернемся к изучению сингулярных симметричных функционалов вида $f_{\mathbf{t},L}(\cdot)$ на пространстве Марцинкевича $M(\psi)$, которые определены формулой (3.1). Здесь последовательность $\mathbf{t} = \{t_n\}$ удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы 3.1, а L – произвольный банахов предел:

$$f_{\mathbf{t},L}(x) = L\left(\left\{\frac{1}{\psi(t_n)} \int_0^{t_n} x^*(s) ds\right\}\right). \quad (5.1)$$

В § 3 мы показали, что функционал $f_{\mathbf{t},L}(\cdot)$ зависит от выбора последовательности $\mathbf{t}$ и банахова предела L . В этом параграфе будет получен ряд результатов противоположного характера, показывающих неизменность (устойчивость) $f_{\mathbf{t},L}(\cdot)$ при определенных преобразованиях порождающей последовательности $\mathbf{t}$. В частности, если банахов предел L обладает дополнительными свойствами инвариантности, отмеченными в теореме 4.2, то для любой геометрической последовательности $\mathbf{q}$ справедливо равенство $f_{\mathbf{q},L}(\cdot) = f_{\mathbf{p},L}(\cdot)$, где $\mathbf{p}$ – каноническая последовательность $\{2^n\}$.

Хотя все результаты параграфа справедливы (после соответствующих переформулировок) как для последовательностей $\mathbf{t} = \{t_n\}_{n=1}^\infty$, стремящихся к бесконечности, так и для последовательностей, стремящихся к нулю, мы, для определенности, рассмотрим их для последовательностей, стремящихся к нулю.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть последовательности $\mathbf{t} = \{t_n\}$, $\mathbf{u} = \{u_n\}$ и функция $\psi \in \Omega_0$ удовлетворяют условиям 1) и 2) теоремы 3.1, и пусть $u_{n+1} \leq t_n \leq u_n$, $n \geq 1$. Тогда $f_{\mathbf{t},L}(x) = f_{\mathbf{u},L}(x)$, $x \in M(\psi)$, для любого банахова предела L .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\frac{\psi(t_{n+m})}{\psi(t_n)} \leq \frac{\psi(t_{n+1})}{\psi(t_n)} \leq 1$ для любого $m \geq 1$, то в силу условия 2) теоремы 3.1

$$F\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(t_{n+1})}{\psi(t_n)} = 1. \quad (5.2)$$

Поскольку

$$\frac{1}{\psi(t_n)} \int_0^{t_n} x^*(t) dt \leq \frac{1}{\psi(t_n)} \int_0^{u_n} x^*(t) dt \leq \frac{\psi(t_{n+1})}{\psi(t_n)} \frac{1}{\psi(u_n)} \int_0^{u_n} x^*(t) dt,$$

то из (5.2) и предложения 3.2 получаем

$$f_{\mathbf{t},L}(x) \leq f_{\mathbf{u},L}(x), \quad x \in M(\psi).$$

Обратное неравенство следует из очевидной равноправности последовательностей $\mathbf{u}$ и $\mathbf{t}$.

Далее будем предполагать, что функция $\psi \in \Omega_0$, порождающая пространство Марцинкевича $M(\psi)$, удовлетворяет аналогу условия (3.3) в нуле:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1. \quad (5.3)$$

В этом случае всякая стремящаяся к нулю геометрическая прогрессия будет автоматически удовлетворять условиям 1), 2) теоремы 3.1.

Пусть $0 < s \in \mathbb{R}$, $t_n = 2^{-ns}$, $n = 1, 2, \dots$, и пусть $\mathcal{L}$ – некоторый банахов предел. Обозначим через $F_{s,\mathcal{L}}$ ССФ, заданный формулой

$$F_{s,\mathcal{L}}(x) = f_{t,\mathcal{L}}(x) = \mathcal{L}\left(\left\{\frac{1}{\psi(2^{-ns})} \int_0^{2^{-ns}} x^*(t) dt\right\}\right).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть банахов предел $\mathcal{L}$ инвариантен относительно всех операторов растяжения; тогда для любых рациональных s и всех $x \in M(\psi)$ справедливо равенство $F_{s,\mathcal{L}}(x) = F_{1,\mathcal{L}}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем натуральное $m > 0$ и вещественное $s > 0$. Для $x \in M(\psi)$ положим

$$x_n := \frac{1}{\psi(2^{-ns})} \int_0^{2^{-ns}} x^*(t) dt, \quad \mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots) \in l_\infty$$

и для $1 \leq i \leq m$ определим

$$\mathbf{z}_i(x) := (x_i, x_{i+m}, \dots, x_{i+km}, \dots)$$

и

$$\tilde{\mathbf{z}}_i(x) := (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{i-1}, x_i, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-1}, x_{i+m}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-1}, \dots, x_{i+km}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m-1}, \dots).$$

Тогда в силу предложения 4.3

$$\frac{1}{m} \mathcal{L}(\mathbf{z}_i(x)) = \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{z}}_i(x)), \quad 1 \leq i \leq m, \quad x \in M(\psi). \quad (5.4)$$

Теперь докажем, что

$$\mathcal{L}(\mathbf{z}_i(x)) = \mathcal{L}(\mathbf{z}_j(x)), \quad 1 \leq i, j \leq m. \quad (5.5)$$

В самом деле, поскольку $1 \leq i, j \leq n$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{z}_i(x)) &= \mathcal{L}\left(\left\{\frac{1}{\psi(2^{-(i+mn)s})} \int_0^{2^{-(i+mn)s}} x^*(t) dt\right\}\right), \\ \mathcal{L}(\mathbf{z}_j(x)) &= \mathcal{L}\left(\left\{\frac{1}{\psi(2^{-(j+mn)s})} \int_0^{2^{-(j+mn)s}} x^*(t) dt\right\}\right), \end{aligned}$$

то последовательности $\{2^{-(i+mn)s}\}_{n=1}^\infty$ и $\{2^{-(j+mn)s}\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяют условию предложения 5.1, откуда следует (5.5). Теперь, по определению $\tilde{\mathbf{z}}_i(x)$, $1 \leq i \leq m$, мы имеем

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^m \tilde{\mathbf{z}}_i(x).$$

Тогда из (5.4) и (5.5) следует, что

$$F_{s,\mathcal{L}}(x) = \sum_{i=1}^m \mathcal{L}(\tilde{\mathbf{z}}_i(x)) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathcal{L}(\mathbf{z}_i(x)) = \mathcal{L}(\mathbf{z}_m(x)).$$

Другими словами, $F_{s,\mathcal{L}}(x) = \mathcal{L}(x_m, x_{2m}, x_{3m}, \dots) = F_{ms,\mathcal{L}}(x)$. В частности, для произвольного натурального $n > 0$

$$F_{\frac{n}{m},\mathcal{L}}(x) = F_{n,\mathcal{L}}(x),$$

а также

$$F_{1,\mathcal{L}}(x) = F_{n,\mathcal{L}}(x).$$

Поскольку m и n произвольны, утверждение предложения 5.2 следует из двух последних равенств.

Заметим, что важную роль инвариантности банаховых пределов относительно растяжений (см. предложение 5.2, а также теорему 5.3) в свое время отметил Диксмье в работе [1], в которой впервые было введено понятие сингулярного следа (следа Диксмье).

Теперь докажем основной результат этого параграфа.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть банахов предел $\mathcal{L}$ инвариантен относительно операторов растяжения V_n , $n = 1, 2, \dots$, и оператора Харди H , функция $\psi \in \Omega_0$ удовлетворяет условию $\lim_{t \rightarrow 0} \psi(2t)/\psi(t) = 1$, а последовательность t_n монотонно стремится к нулю и такова, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_{n+1}}{t_n} = r, \quad 0 < r < 1. \quad (5.6)$$

Тогда если $\mathbf{p} = \{2^{-n}\}_{n=1}^\infty$, то $f_{\mathbf{t},\mathcal{L}}(x) = f_{\mathbf{p},\mathcal{L}}(x)$ для всех $x \in M(\psi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $r = 2^{-s}$, $s > 0$, и пусть $2 < q \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0, s/(2q+1))$ таковы, что $s + \varepsilon$ есть рациональное число. Тогда для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$

$$2^{-(s+\varepsilon)} < \frac{t_{n+1}}{t_n} < 2^{-(s-\varepsilon)}, \quad (5.7)$$

и, поскольку $\mathcal{L}$ инвариантен относительно сдвига, без ограничения общности можно считать, что это неравенство выполнено для всех $n \geq 1$. Так как $(s + \varepsilon)q < (s - \varepsilon)(q + 1)$, то, выполняя несложные вычисления, покажем, что любой промежуток $[2^{-(s+\varepsilon)(n+q)}, 2^{-(s+\varepsilon)n})$, $n \geq 1$, содержит не более чем $q + 1$ элементов последовательности $\{2^{-(s-\varepsilon)k}\}_{k=1}^\infty$. Действительно, если предположим противное, т. е. что

$$[2^{-(s-\varepsilon)(k+q+1)}, 2^{-(s-\varepsilon)k}) \subseteq [2^{-(s+\varepsilon)(n+q)}, 2^{-(s+\varepsilon)n})$$

для некоторых $n, k \in \mathbb{N}$, то $(s + \varepsilon)q \geq (s - \varepsilon)(q + 1)$. Это противоречит выбору ε .

Учитывая (5.7), аналогично получаем:

- 1) каждый промежуток $[2^{-(s+\varepsilon)(n+q)}, 2^{-(s+\varepsilon)n})$, $n \geq 1$, содержит не более $q + 1$ элемента последовательности $\{t_k\}_{k=1}^\infty$;
- 2) каждый промежуток $[2^{-(s+\varepsilon)(n+1)}, 2^{-(s+\varepsilon)n})$, $n \geq 1$, содержит по крайней мере один элемент последовательности $\{t_k\}_{k=1}^\infty$.

Таким образом, каждый промежуток $[2^{-(s+\varepsilon)(n+1)}, 2^{-(s+\varepsilon)n}]$, $n \geq 1$, содержит не менее одного и не более двух элементов последовательности $\{t_k\}_{k=1}^\infty$. Пусть $\mathbf{r} = \{r_i\}$ – последовательность натуральных чисел таких, что t_{r_i}, t_{r_i+1} одновременно содержатся в некотором промежутке $[2^{-(s+\varepsilon)(n+1)}, 2^{-(s+\varepsilon)n}]$, $n \geq 1$. Последовательность $\mathbf{r}$ удовлетворяет условиям предложения 4.4, так как нами доказано, что множество $\{i: (k-1)q \leq r_i < kq\}$ содержит не более одного ее элемента для каждого $k = 1, 2, \dots$.

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$, где

$$x_n := \frac{1}{\psi(t_n)} \int_0^{t_n} x^*(s) ds, \quad n \geq 1,$$

и пусть $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots)$, где

$$u_n := \begin{cases} x_n, & n = r_i, \\ 0, & n \neq r_i, \end{cases} \quad v_n := \begin{cases} x_n, & n \neq r_i, \\ 0, & n = r_i, \end{cases} \quad n \geq 1.$$

Рассмотрим последовательность $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots)$, полученную из $\mathbf{v}$ удалением нулевых элементов, стоящих на местах с номерами r_i , $i = 1, 2, \dots$. В силу предложения 4.4

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{w}) \leq \left(1 + \frac{1}{q}\right) \mathcal{L}(\mathbf{v}),$$

откуда

$$0 \leq \mathcal{L}(\mathbf{w}) - \mathcal{L}(\mathbf{v}) \leq \frac{1}{q} \mathcal{L}(\mathbf{v}).$$

Поскольку $\mathbf{v} \leq \mathbf{x}$, то $\mathcal{L}(\mathbf{v}) \leq \mathcal{L}(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{t}, \mathcal{L}}(x) \leq \|x\|_{M(\psi)}$, и, следовательно,

$$0 \leq \mathcal{L}(\mathbf{w}) - \mathcal{L}(\mathbf{v}) \leq \frac{1}{q} \|x\|_{M(\psi)}. \quad (5.8)$$

Очевидно, существует последовательность $\{t_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ такая, что

$$w_k = x_{n_k}, \quad k \geq 1,$$

и такая, что для нее и последовательности $\{2^{-(s+\varepsilon)k}\}_{k=1}^\infty$ выполнены предположения предложения 5.1. Поэтому

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}) = f_{\{t_{n_k}\}_{k=1}^\infty, \mathcal{L}}(x) = F_{s+\varepsilon, \mathcal{L}}(x)$$

и, далее, по предложению 5.2

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}) = F_{1, \mathcal{L}}(x). \quad (5.9)$$

Рассмотрим последовательность $\mathbf{a} = \{a_n\}_{n=1}^\infty$, которая принимает значения 1 для $n = r_i$ и 0 в противном случае. По следствию 1.4 $\mathcal{L}(\mathbf{a}) \leq 1/q$. Учитывая, что $u_n \leq x_n \leq \|x\|_{M(\psi)}$, заключаем, что

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) \leq \frac{1}{q} \|x\|_{M(\psi)}. \quad (5.10)$$

Наконец, в силу определения $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и (5.9) имеем

$$f_{\mathbf{t}, \mathcal{L}}(x) = \mathcal{L}(\mathbf{u}) + \mathcal{L}(\mathbf{v}) - \mathcal{L}(\mathbf{w}) + F_{1, \mathcal{L}}(x),$$

и согласно (5.8) и (5.10) справедливо неравенство

$$|f_{\mathbf{t}, \mathcal{L}}(x) - F_{1, \mathcal{L}}(x)| \leq \frac{2}{q} \|x\|_{M(\psi)}.$$

Поскольку q произвольно, это завершает доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Если $\mathcal{L}$ обладает свойствами инвариантности из теоремы 4.2 и функция $\psi \in \Omega_0$ удовлетворяет (5.3), то

$$F_{s, \mathcal{L}}(x) = F_{1, \mathcal{L}}(x), \quad x \in M(\psi), \quad \forall s > 0.$$

Заметим, что условие (5.6) не является необходимым, поскольку существуют примеры последовательностей $\mathbf{t}$, для которых (5.6) не выполнено, но для которых утверждение теоремы 5.3 остается верным. Например, пусть $0 < \alpha < \beta < 1$ и $t_0 = 1$,

$$\frac{t_{n+1}}{t_n} = \begin{cases} \alpha, & n = 2k, \\ \beta, & n = 2k + 1, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Согласно предложению 5.1 $f_{\mathbf{t}, L} = f_{s, L}$, где

$$s_n = \frac{2}{\beta + 1} (\alpha\beta)^{n/2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

В свою очередь, по теореме 5.3 имеем $f_{s, L} = F_{1, L}$. Следовательно, $f_{\mathbf{t}, L} = F_{1, L}$.

Авторы считают своим долгом отметить, что еще в 1974 г. Г. Я. Лозановский в работе [12] построил на пространстве Марцинкевича, удовлетворяющем условию (1.3), множество *нелокализованных* функционалов, примерами которых являются симметричные функционалы, рассмотренные в настоящей статье.

Список литературы

1. Dixmier J. Existence de traces non normales // C.R. Acad. Sci. Paris. 1966. V. 262. P. A1107–A1108.
2. Connes A. Noncommutative Geometry. San Diego: Academic Press, 1994.
3. Dodds P. G., de Pagter B., Semenov E. M., Sukochev F. A. Symmetric functionals and singular traces // Positivity. 1998. V. 2. P. 47–75.
4. Доддс П. Г., де Пагтер Б., Седаев А. А., Семенов Е. М., Сукочев Ф. А. Сингулярные симметричные функционалы // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2002. Т. 290. С. 42–71.
5. Lorentz G. G. A contribution to the theory of divergent sequences // Acta Math. 1948. V. 80. P. 167–190.
6. Sucheston L. Banach limits // Amer. Math. Monthly. 1967. V. 74. P. 308–311.
7. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
8. Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operators. London: Academic Press, 1988.
9. Brudnyi Yu. A., Kruglyak N. Ya. Interpolation Functors and Interpolation Spaces. V. 1. Amsterdam: North Holland, 1991.
10. Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
11. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. I. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
12. Лозановский Г. Я. О локализованных функционалах в векторных структурах // Теор. функций, функц. анализ и их прилож. 1974. Т. 19. С. 66–80.