Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Существование счетного числа устойчивых циклов у обобщенного кубического уравнения Шрёдингера в плоской области, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 6, 137–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/im462>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 05:05:04

УДК 517.926

А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

**Существование счетного числа устойчивых
циклов у обобщенного кубического
уравнения Шрёдингера в плоской области**

В области $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ рассмотрена краевая задача

$$u_t + i\Delta u = \varepsilon(u - d|u|^2 u), \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

где u – комплекснозначная функция, Δ – оператор Лапласа, $0 < \varepsilon \ll 1$, $d = 1 + ic_0$, $c_0 \in \mathbb{R}$. Установлено существование счетного числа устойчивых периодических по t решений этой задачи. Исследован вопрос о сохранении данного феномена при изменении области или граничных условий.

Библиография: 17 наименований.

Введение

К настоящему времени задача об аттракторах нелинейных гиперболических уравнений в локальной постановке в случае одной пространственной переменной изучена достаточно подробно (см. монографию [1] и последующие обзорные публикации [2]–[4]). Анализ различных математических моделей (главным образом, радиофизики) показал, что даже устойчивые двумерные торы наблюдаются весьма редко, т. е., как правило, имеются устойчивые циклы, количество которых за счет подходящего выбора параметров может быть сколь угодно большим (это явление получило специальное название – буферность). Более того, в некоторых случаях реализуется даже гипербуферность, т. е. существует счетное число устойчивых циклов.

Явление гипербуферности было обнаружено сначала в одной конкретной гиперболической краевой задаче [5], а подробный его анализ проведен в статье [6], где дан новый, усиленный вариант определения дисперсии, отличный от общепринятого [7], и показано, что гипербуферность характерна именно для уравнений с сильной дисперсией (в [6] подробно проанализированы два типовых примера: уравнение Кортевега–де Фриса и уравнение колебаний балки).

Ниже на примере обобщенного кубического уравнения Шрёдингера исследуется новый в данной тематике вопрос о сохранении явления гипербуферности при переходе от отрезка к плоской области. Показывается, что ответ на него в зависимости от рассматриваемой области и типа граничных условий может быть как положительным, так и отрицательным.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-01286).

§ 1. Уравнение Шрёдингера с граничными условиями Дирихле

1.1. Постановка задачи. Кубическим уравнением Шрёдингера принято называть систему двух уравнений, которая в комплексной форме записи имеет вид

$$iu_t = \sigma_0 \Delta u + c_0 |u|^2 u, \quad (1.1)$$

где u – комплекснозначная функция, Δ – оператор Лапласа, σ_0 и c_0 – вещественные постоянные, причем $\sigma_0 > 0$, а знак c_0 произволен. Уравнение (1.1) возникает во многих задачах нелинейной оптики и гидродинамики [8]–[10], в частности в теории волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости. В случаях, когда необходимо учитывать диссипативные процессы, источники и стоки, это уравнение нуждается в обобщении. Простейшим из таких обобщений служит уравнение

$$iu_t = \sigma_0 \Delta u + iu + (c_0 - i)|u|^2 u, \quad (1.2)$$

получающееся из (1.1) при добавлении слагаемого iu , описывающего “подкачку энергии”, и слагаемого $-i|u|^2 u$, характеризующего нелинейную диссипацию.

Следует отметить, что (1.2) – это частный случай известного уравнения Гинзбурга–Ландау, в правой части которого учтена дифракция (слагаемое $\sigma_0 \Delta u$), но отсутствует диффузионный член $ia \Delta u$, $a > 0$. Такая ситуация характерна для лазерных резонаторов и других нелинейных оптических сред (см. [11]). Уравнение (1.2) описывает в этом случае пространственную эволюцию электромагнитного поля в указанных средах.

Предположим, что функция $u = u(t, x, y)$ из (1.2) зависит от двух пространственных переменных x, y , принадлежащих единичному квадрату Ω , и удовлетворяет нулевым граничным условиям Дирихле. В результате получим краевую задачу

$$u_t + i\sigma_0 \Delta u = u - d|u|^2 u, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0, \quad (1.3)$$

где $d = 1 + ic_0$, которая и является основным объектом дальнейшего анализа. Помимо того, что эта краевая задача имеет уже упоминавшиеся физические приложения, она представляет интерес как простейшая феноменологическая модель явления диффузионной буферности, возникающего в экологии [12], [13].

Рассмотрим вопрос о существовании и устойчивости так называемых автомодельных циклов краевой задачи (1.3), т. е. периодических по t решений вида

$$u = u_0(x, y) \exp(i\alpha_0 t), \quad \alpha_0 = \text{const} \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

При этом устойчивость будем понимать в метрике фазового пространства (пространства начальных условий $(\text{Re } u, \text{Im } u) \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$), где $\overset{\circ}{W}_2^2$ – замыкание в метрике W_2^2 линейного пространства гладких вектор-функций, удовлетворяющих граничным условиям из (1.3).

В случае одной пространственной переменной сформулированная проблема изучена достаточно подробно. В работах [1], [13] было доказано существование для аналогичной (1.3) краевой задачи

$$u_t + i\sigma_0 u_{xx} = u - d|u|^2 u, \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0 \quad (1.5)$$

счетного числа высокомодовых циклов

$$u = u_n(x) \exp(i\alpha_n t), \quad n \geq n_0. \quad (1.6)$$

Здесь натуральное n_0 достаточно велико и при $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические равенства

$$\alpha_n = \sigma_0 n^2 - c_0 + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad u_n(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(nx) + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (1.7)$$

второе из которых выполнено равномерно по x . Было установлено также, что все циклы (1.6), (1.7) экспоненциально орбитально устойчивы (неустойчивы) при $\sigma_0 - \frac{2}{3}c_0 > 0$ (< 0).

Для решения интересующего нас вопроса в случае краевой задачи (1.3) предположим, что $\sigma_0 \gg 1$. После замены $\sigma_0 t \rightarrow t$ и деления на σ_0 задача (1.3) преобразуется к квазилинейному виду

$$u_t + i\Delta u = \varepsilon(u - d|u|^2 u), \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0, \quad (1.8)$$

где $\varepsilon = 1/\sigma_0 \ll 1$, позволяющему применить к ней стандартные асимптотические методы из [14].

1.2. Теоремы о существовании автомодельных циклов. Нетрудно заметить, что линейная краевая задача, получающаяся из (1.8) при $\varepsilon = 0$, допускает волновые решения

$$u = \exp(i\omega_{n,k} t) e_{n,k}(x, y), \quad u = \exp(i\omega_{n,k} t) e_{k,n}(x, y), \quad (1.9)$$

где

$$\omega_{n,k} = \pi^2(n^2 + k^2), \quad e_{n,k}(x, y) = 2 \sin(n\pi x) \sin(k\pi y), \quad n, k = 1, 2, \dots \quad (1.10)$$

Поэтому естественным образом возникает вопрос о существовании у задачи (1.8) автомодельных циклов (1.4) с близкими к $\omega_{n,k}$ частотами, т. е. циклов вида

$$u = u_{n,k}(x, y, \varepsilon) \exp[i\alpha_{n,k}(\varepsilon)t], \quad \alpha_{n,k}(0) = \omega_{n,k}. \quad (1.11)$$

Разрешение этого вопроса сводится, очевидно, к нахождению комплекснозначной амплитуды $u_{n,k}$ и вещественной постоянной $\alpha_{n,k}$ из нелинейной краевой задачи

$$\begin{aligned} i(\Delta u_{n,k} + \alpha_{n,k} u_{n,k}) &= \varepsilon(u_{n,k} - d|u_{n,k}|^2 u_{n,k}), \\ u_{n,k}|_{x=0} &= u_{n,k}|_{x=1} = u_{n,k}|_{y=0} = u_{n,k}|_{y=1} = 0. \end{aligned} \quad (1.12)$$

В первую очередь рассмотрим автомодельные циклы (1.11) с номерами n и k , удовлетворяющими требованиям

$$n \neq k, \quad n^2 + k^2 \neq m^2 + s^2 \quad (1.13)$$

при любых натуральных m, s таких, что $(m, s) \neq (n, k), (k, n)$. Асимптотику таких циклов будем строить в виде рядов

$$\alpha_{n,k} = \omega_{n,k} + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j \alpha_j, \quad u_{n,k} = u_{n,k}^0(x, y) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j u_{n,k}^j(x, y), \quad (1.14)$$

где

$$u_{n,k}^0(x, y) = \xi_1^0 e_{n,k}(x, y) + \xi_2^0 e_{k,n}(x, y), \quad (1.15)$$

при этом произвольные комплексные амплитуды $\xi_j^0, j = 1, 2$, подлежат определению. Отметим, что наличие в (1.15) двух амплитуд связано с симметрией квадрата, так как в силу равенства $\omega_{n,k} = \omega_{k,n}$ и наложенных на n, k условий (1.13) одной и той же частоте $\omega_{n,k}$ отвечают два линейно независимых периодических решения (1.9).

Подставляя ряды (1.14) в краевую задачу (1.12) и приравнивая коэффициенты при ε , приходим к линейной неоднородной задаче

$$Lu_{n,k}^1 = f_1(x, y), \quad u_{n,k}^1|_{x=0, x=1} = u_{n,k}^1|_{y=0, y=1} = 0, \quad (1.16)$$

в которой $L = i(\Delta + \omega_{n,k})$, $f_1 = (1 - i\alpha_1 - d|u_{n,k}^0|^2)u_{n,k}^0$. Далее, из условий ее разрешимости, имеющих вид

$$\int_0^1 \int_0^1 f_1(x, y) e_{n,k}(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 f_1(x, y) e_{k,n}(x, y) dx dy = 0, \quad (1.17)$$

для определения фигурирующих в (1.14), (1.15) постоянных $\alpha_1, \xi_1^0, \xi_2^0$ выводим нелинейную систему

$$\begin{aligned} (1 - i\alpha_1)\xi_1^0 - d \left[\frac{9}{4} |\xi_1^0|^2 \xi_1^0 + 2 |\xi_2^0|^2 \xi_1^0 + (\xi_2^0)^2 \bar{\xi}_1^0 \right] &= 0, \\ (1 - i\alpha_1)\xi_2^0 - d \left[\frac{9}{4} |\xi_2^0|^2 \xi_2^0 + 2 |\xi_1^0|^2 \xi_2^0 + (\xi_1^0)^2 \bar{\xi}_2^0 \right] &= 0. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Полученная система используется при решении проблемы существования автомодельных циклов (1.11) с близкой к $\omega_{n,k}$ частотой, поскольку разным ее решениям отвечают циклы с различными нулевыми приближениями (1.15). Заметим далее, что при $\alpha_1 = -c_0$ система (1.18) допускает, к примеру, решения $\xi_1^0 = \xi_2^0 = 2/\sqrt{21}$ и $\xi_1^0 = 2/\sqrt{13}, \xi_2^0 = \pm 2i/\sqrt{13}$. Однако всюду ниже предполагается, что в качестве ее решения взят набор

$$\alpha_1 = -c_0, \quad \xi_1^0 = 2/\sqrt{13}, \quad \xi_2^0 = 2i/\sqrt{13} \quad (1.19)$$

(причины такого выбора поясним далее).

После определения параметров $\alpha_1, \xi_1^0, \xi_2^0$ посредством равенств (1.19) краевая задача (1.16) становится разрешимой, а ее решение задается формулой

$$u_{n,k}^1(x, y) = u_{n,k}^{1,0}(x, y) + \xi_1^1 e_{n,k}(x, y) + \xi_2^1 e_{k,n}(x, y). \quad (1.20)$$

Здесь $u_{n,k}^{1,0}$ – единственное решение краевой задачи (1.16), удовлетворяющее условиям

$$\int_0^1 \int_0^1 u_{n,k}^{1,0}(x, y) e_{n,k}(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 u_{n,k}^{1,0}(x, y) e_{k,n}(x, y) dx dy = 0, \quad (1.21)$$

а ξ_1^1, ξ_2^1 – произвольные комплексные постоянные.

В общем случае на шаге с номером $j, j \geq 2$, для $u_{n,k}^j(x, y)$ получаем аналогичную (1.16) линейную неоднородную краевую задачу

$$Lu_{n,k}^j = f_j(x, y), \quad u_{n,k}^j|_{x=0, x=1} = u_{n,k}^j|_{y=0, y=1} = 0. \quad (1.22)$$

Выполнения условий ее разрешимости, имеющих вид (1.17), достигаем за счет введения очередной поправки α_j к частоте, а также слагаемого

$$\xi_1^{j-1} e_{n,k}(x, y) + \xi_2^{j-1} e_{k,n}(x, y),$$

с точностью до которого определяется $u_{n,k}^{j-1}$ (см. (1.20)). Следует, однако, заметить, что здесь в отличие от (1.18) для нахождения $\xi_1^{j-1}, \xi_2^{j-1}, \alpha_j$ возникает линейная неоднородная система вида

$$Bv = \alpha_j v_0 + \psi_j, \quad (1.23)$$

где

$$v = \text{colon}(\xi_1^{j-1}, \bar{\xi}_1^{j-1}, \xi_2^{j-1}, \bar{\xi}_2^{j-1}), \quad v_0 = \frac{2}{\sqrt{13}} \text{colon}(i, -i, -1, -1), \quad (1.24)$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1^- & B_2 \\ B_2 & B_1^+ \end{pmatrix}, \quad B_1^\pm = \begin{pmatrix} -d & \pm \frac{5}{13}d \\ \pm \frac{5}{13}\bar{d} & -\bar{d} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{8i}{13}d \\ \frac{8i}{13}\bar{d} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

а $\psi_j = \text{colon}(\psi_j^1, \bar{\psi}_j^1, \psi_j^2, \bar{\psi}_j^2)$ – некоторый уже известный вектор.

Из явного вида вектора v_0 и матрицы B (см. (1.24), (1.25)) вытекает, что $Bv_0 = 0$, а остальные три собственных значения этой матрицы имеют отрицательные действительные части. Следовательно, система (1.23) оказывается вырожденной, и ее разрешимость достигается за счет выбора постоянной α_j посредством равенства

$$\alpha_j = -(\psi_j, w_0). \quad (1.26)$$

Здесь $w_0 = (\sqrt{13}/8) \text{colon}(id, -i\bar{d}, -d, -\bar{d})$, а $(\cdot, \cdot)$ – евклидово скалярное произведение в $\mathbb{C}^4$ (из структуры векторов ψ_j и w_0 следует, что правая часть формулы (1.26) всегда является вещественным числом). И наконец, после нахождения α_j решение v системы (1.23), удовлетворяющее условию $(v, w_0) = 0$, определяется уже однозначно.

Возвращаясь к краевой задаче (1.22), заметим, что после всех проделанных построений она становится разрешимой. Решение ее задается аналогичным (1.20) равенством

$$u_{n,k}^j(x, y) = u_{n,k}^{j,0}(x, y) + \xi_1^j e_{n,k}(x, y) + \xi_2^j e_{k,n}(x, y),$$

где функция $u_{n,k}^{j,0}(x, y)$ удовлетворяет условиям вида (1.21), а ξ_1^j, ξ_2^j – произвольные комплексные постоянные. Далее переходим к шагу с номером $j+1$, и весь процесс повторяется.

Строгий смысл изложенным построениям придает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.1. Для любых натуральных чисел n и k , удовлетворяющих условиям (1.13), можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_{n,k} > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_{n,k}$ краевая задача (1.8) имеет автомодельный цикл (1.11), амплитуда

$$u_{n,k}(x, y, \varepsilon): \quad u_{n,k}(x, y, 0) = \frac{2}{\sqrt{13}} e_{n,k}(x, y) + \frac{2i}{\sqrt{13}} e_{k,n}(x, y), \quad (1.27)$$

и частота

$$\alpha_{n,k}(\varepsilon): \quad \alpha_{n,k}(0) = \omega_{n,k}, \quad \left. \frac{d\alpha_{n,k}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = -c_0, \quad (1.28)$$

которого разлагаются в сходящиеся ряды (1.14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дополним уравнение из (1.12) комплексно-сопряженным уравнением и подставим в получившуюся систему равенства

$$\begin{aligned} u_{n,k} &= u_{n,k}^0 + \varepsilon u_{n,k}^1 + \varepsilon^2 h_1, & \bar{u}_{n,k} &= \bar{u}_{n,k}^0 + \varepsilon \bar{u}_{n,k}^1 + \varepsilon^2 h_2, \\ \alpha_{n,k} &= \omega_{n,k} - \varepsilon c_0 + \varepsilon^2 \alpha_2, \end{aligned} \quad (1.29)$$

где h_1, h_2 – независимые комплексные переменные, функция $u_{n,k}^0$ определена формулами (1.15), (1.19), а фигурирующие в определении $u_{n,k}^1$ комплексные постоянные ξ_1^1, ξ_2^1 (см. (1.20)) и вещественную постоянную α_2 считаем произвольными. В итоге для $h = \text{colon}(h_1, h_2)$ получаем уравнение вида

$$\Pi h = G(x, y, h, \xi_1^1, \xi_2^1, \alpha_2, \varepsilon). \quad (1.30)$$

Здесь $\Pi = \text{colon}(L, -L)$, $G = \text{colon}(G_1, G_2)$, оператор L тот же, что и в (1.16), а компоненты вектор-функции G обладают следующими свойствами:

$$G_2 = \bar{G}_1^*, \quad (1.31)$$

$$G_1|_{\varepsilon=0} = -i\alpha_2 u_{n,k}^0 + d(u_{n,k}^1 - (u_{n,k}^0)^2 \bar{u}_{n,k}^1 - 2u_{n,k}^1 |u_{n,k}^0|^2), \quad (1.32)$$

где G_1^* получено из G_1 при замене h на $h^* = \text{colon}(\bar{h}_2, \bar{h}_1)$.

Рассмотрим введенный выше оператор Π в инвариантном подпространстве $V_0 \subset \overset{\circ}{W}_2^2 \times \overset{\circ}{W}_2^2$ вектор-функций (с комплексными компонентами), ортогональных в смысле $L_2 \times L_2$ вектор-функциям

$$a_j e_{n,k}(x, y), \quad a_j e_{k,n}(x, y), \quad j = 1, 2, \quad (1.33)$$

где $a_1 = \text{colon}(1, 0)$, $a_2 = \text{colon}(0, 1)$. Нетрудно видеть, что этот оператор имеет в V_0 ограниченный обратный. Поэтому, изменяя надлежащим образом неоднородность G и обращая Π , перейдем от (1.30) к интегральному уравнению в пространстве V_0 :

$$h = \Pi^{-1}(G - \gamma_1 a_1 e_{n,k} - \gamma_2 a_2 e_{n,k} - \gamma_3 a_1 e_{k,n} - \gamma_4 a_2 e_{k,n}), \quad (1.34)$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \int_0^1 \int_0^1 (G, a_1) e_{n,k}(x, y) dx dy, & \gamma_2 &= \int_0^1 \int_0^1 (G, a_2) e_{n,k}(x, y) dx dy, \\ \gamma_3 &= \int_0^1 \int_0^1 (G, a_1) e_{k,n}(x, y) dx dy, & \gamma_4 &= \int_0^1 \int_0^1 (G, a_2) e_{k,n}(x, y) dx dy.\end{aligned}\quad (1.35)$$

Заметим, далее, что правая часть уравнения (1.34) порождает в V_0 нелинейный оператор F , аналитически зависящий как от h , так и от вещественных параметров

$$\varepsilon, \alpha_2, \operatorname{Re} \xi_j^1, \operatorname{Im} \xi_j^1, \quad j = 1, 2. \quad (1.36)$$

Кроме того, из равенств (1.31), (1.32) очевидным образом следует, что оператор F преобразует в себя некоторый шар пространства V_0 не зависящего от ε радиуса с центром в нуле и является в нем сжимающим (с константой сжатия порядка ε). Тем самым, в силу принципа сжимающих отображений, соответствующий вариант которого приведен, например, в [15], из (1.34) однозначно определяется аналитически зависящая (в метрике V_0) от параметров (1.36) вектор-функция

$$h_0 = \operatorname{colon}(h_1^0(x, y, \alpha_2, \xi_1^1, \xi_2^1, \varepsilon), h_2^0(x, y, \alpha_2, \xi_1^1, \xi_2^1, \varepsilon)). \quad (1.37)$$

Отметим еще, что из свойства (1.31) правой части уравнения (1.34) вытекает равенство

$$h_2^0 = \bar{h}_1^0. \quad (1.38)$$

В заключение определим постоянную $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ и вектор $v = \operatorname{colon}(\xi_1^1, \bar{\xi}_1^1, \xi_2^1, \bar{\xi}_2^1)$, который будем предполагать ортогональным вектору w_0 , из условий равенства нулю фигурирующих в (1.34) поправок к неоднородности G . В связи с этим подставим в правые части равенств (1.35) вектор-функцию (1.37). В результате получим аналитические по совокупности переменных (1.36) функции $\gamma_j(\varepsilon, \alpha_2, v)$, $j = 1, \dots, 4$, для которых в силу (1.31), (1.38) справедливы тождества $\gamma_2 \equiv \bar{\gamma}_1$, $\gamma_4 \equiv \bar{\gamma}_3$. Тем самым проблема сводится к нахождению $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ и $v \in \mathbb{C}^4$, $(v, w_0) = 0$, из системы

$$\Gamma(\varepsilon, \alpha_2, v) = 0, \quad (1.39)$$

где $\Gamma = \operatorname{colon}(\gamma_1, \bar{\gamma}_1, \gamma_3, \bar{\gamma}_3)$.

Используя очередной раз формулы (1.31), (1.32), нетрудно убедиться в том, что при $\varepsilon = 0$ система (1.39) переходит в линейную неоднородную систему вида (1.23), которая, напомним, при подходящем выборе параметра α_2 (см. (1.26)) однозначно разрешима в требуемом классе векторов. Отсюда и из теоремы о неявной функции следует, что исходная система (1.39) также имеет аналитически зависящее от ε решение

$$(v(\varepsilon), \alpha_2(\varepsilon)): \quad (v(\varepsilon), w_0) \equiv 0 \quad (1.40)$$

при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Наконец, подставляя равенства (1.40), (1.37) в (1.29), получаем аналитически зависящий от ε автомодельный цикл краевой задачи (1.8) с требуемыми свойствами (1.27), (1.28). Теорема доказана.

Следует отметить, что в силу инвариантности краевой задачи (1.8) относительно замен $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$ наряду с циклом (1.11), (1.27), (1.28) она всегда имеет ассоциированный с ним автомодельный цикл

$$\begin{aligned} u &= u_{k,n}(x, y, \varepsilon) \exp[i\alpha_{k,n}(\varepsilon)t]: \quad u_{k,n}(x, y, \varepsilon) = u_{n,k}(y, x, \varepsilon), \\ \alpha_{k,n}(\varepsilon) &= \alpha_{n,k}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (1.41)$$

Отметим также, что циклу (1.41) в системе (1.18) соответствует решение $\alpha_1 = -c_0$, $\xi_1^0 = 2i/\sqrt{13}$, $\xi_2^0 = 2/\sqrt{13}$.

Полученная теорема, а также принцип подобия используются для решения проблемы существования счетного числа автомодельных циклов специального вида краевой задачи (1.8). Для пояснения этого положим $n = 1$, $k = 2$. Данная пара индексов удовлетворяет, очевидно, условиям (1.13). Поэтому найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ краевая задача (1.8) имеет пару ассоциированных автомодельных циклов

$$u = u_{1,2}(x, y, \varepsilon) \exp[i\alpha_{1,2}(\varepsilon)t], \quad u = u_{2,1}(x, y, \varepsilon) \exp[i\alpha_{2,1}(\varepsilon)t], \quad (1.42)$$

удовлетворяющих равенствам (1.27), (1.28).

Следующий шаг состоит в применении к циклам (1.42) принципа подобия, который, в свою очередь, разбивается на два этапа.

ЭТАП 1. Продолжим функцию $u_{1,2}(x, y, \varepsilon)$ из (1.42) по переменным x , y с единичного квадрата на всю плоскость следующим образом:

а) сначала в квадрат $\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 0\}$ по правилу $u_{1,2}(x, -y, \varepsilon) \equiv -u_{1,2}(x, y, \varepsilon)$;

б) затем в полосу $\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$ по закону периодичности $u_{1,2}(x, y + 2, \varepsilon) \equiv u_{1,2}(x, y, \varepsilon)$;

в) далее в полосу $\{(x, y): -1 \leq x \leq 0, y \in \mathbb{R}\}$ посредством равенства $u_{1,2}(-x, y, \varepsilon) \equiv -u_{1,2}(x, y, \varepsilon)$;

г) и наконец, на всю плоскость $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ с помощью равенства $u_{1,2}(x + 2, y, \varepsilon) \equiv u_{1,2}(x, y, \varepsilon)$.

После этого аналогичным образом продолжим функцию $u_{2,1}(x, y, \varepsilon)$. В результате получим пару автомодельных циклов, удовлетворяющих уравнению из (1.8) при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

ЭТАП 2. Введем в рассмотрение счетное семейство автомодельных циклов

$$\begin{aligned} u &= u_{2k,k}(x, y, \varepsilon) \exp[i\alpha_{2k,k}(\varepsilon)t], \\ u &= u_{k,2k}(x, y, \varepsilon) \exp[i\alpha_{k,2k}(\varepsilon)t], \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (1.43)$$

где

$$\begin{aligned} u_{k,2k} &= u_{1,2}\left(kx, ky, \frac{\varepsilon}{k^2}\right), \quad u_{2k,k} = u_{2,1}\left(kx, ky, \frac{\varepsilon}{k^2}\right), \\ \alpha_{k,2k} &= \alpha_{2k,k} = k^2 \alpha_{1,2}\left(\frac{\varepsilon}{k^2}\right). \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что все они являются решениями исходной краевой задачи (1.8).

Объединяя все сказанное, приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть ε_0 – доставляемое теоремой 1.1 значение $\varepsilon_{n,k}$ при $n = 1$, $k = 2$. Тогда при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ краевая задача (1.8) имеет счетное число автомодельных циклов (1.43).

Из способа построения циклов (1.43) следует, что аналог теоремы 1.2 справедлив не только при малых ε , но и вообще при любом $\varepsilon > 0$. Однако в этом случае можно гарантировать лишь существование циклов с номерами k , удовлетворяющими неравенству $\varepsilon/k^2 \leq \varepsilon_0$.

1.3. Теорема об устойчивости циклов. Устойчивость построенных выше циклов зависит от расположения собственных значений спектральных задач

$$H_k z = \lambda z, \quad z|_{x=0} = z|_{x=1} = z|_{y=0} = z|_{y=1} = 0, \quad (1.44)$$

где $z = \text{colon}(z_1, z_2)$,

$$H_k = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \Delta + \begin{pmatrix} \varkappa_{1,k}(x, y, \varepsilon) & \varkappa_{2,k}(x, y, \varepsilon) \\ \bar{\varkappa}_{2,k}(x, y, \varepsilon) & \bar{\varkappa}_{1,k}(x, y, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad k \geq 1, \quad (1.45)$$

$$\varkappa_{1,k} = \varepsilon(1 - 2d|u_{2k,k}|^2) - i\alpha_{2k,k}, \quad \varkappa_{2,k} = -\varepsilon du_{2k,k}^2.$$

Действительно, операторы (1.45) получаются из уравнения (1.8) и комплексно-сопряженного к нему уравнения после замен

$$u \exp(-i\alpha_{k,2k}t) \rightarrow u, \quad \bar{u} \exp(i\alpha_{k,2k}t) \rightarrow \bar{u},$$

переводящих в состояния равновесия $(u_{2k,k}, \bar{u}_{2k,k})$, $(u_{k,2k}, \bar{u}_{k,2k})$ циклы (1.43), и последующей линеаризации на первом из этих состояний равновесия (случай второго цикла (1.43) рассматривать не будем, поскольку он сводится к данному посредством замен $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$). Отметим также, что каждый из операторов (1.45) имеет нулевое собственное значение, которому отвечает собственная функция

$$z_0(x, y, \varepsilon) = \text{colon}(iu_{2k,k}(x, y, \varepsilon), -i\bar{u}_{2k,k}(x, y, \varepsilon)).$$

И наконец, отметим, что если спектральная задача (1.44) имеет собственное значение λ_0 с собственной функцией $\text{colon}(z_1^0, z_2^0)$, то собственным будет и значение $\bar{\lambda}_0$ с собственной функцией $\text{colon}(\bar{z}_2^0, \bar{z}_1^0)$.

ТЕОРЕМА 1.3. Существуют такие положительные постоянные ε_0 и γ_0 , что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и при каждом натуральном k нулевое собственное значение краевой задачи (1.44) является простым, а весь остальной ее спектр лежит в комплексной полуплоскости $\{\lambda: \text{Re } \lambda \leq -\gamma_0\varepsilon\}$.

Доказательству теоремы 1.3 посвятим отдельный параграф. Здесь же отметим, что из ее утверждения следует устойчивость при любом фиксированном достаточно малом $\varepsilon > 0$ всех циклов (1.43). Тем самым в рамках краевой задачи (1.8) реализуется феномен гипербуферности. Более того, как и совокупность циклов (1.6) краевой задачи (1.5), циклы (1.43) обладают свойством *равномерной устойчивости*. Данное свойство заключается в том, что фигурирующая в теореме постоянная γ_0 не зависит от номера k .

1.4. О разрушении гипербуферности в прямоугольнике. Весьма неожиданным оказывается тот факт, что при переходе в краевой задаче (1.8) от квадрата к прямоугольнику

$$\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2\} \quad (1.46)$$

с иррациональным отношением l_1^2/l_2^2 феномен гипербуферности исчезает. Более того, в случае области (1.46) локальными методами не удастся обнаружить ни одного устойчивого цикла или тора.

Для удобства последующего анализа выполним в уравнении из (1.8) замены $x/l_1 \rightarrow x$, $y/l_2 \rightarrow y$. В результате снова получим краевую задачу в единичном квадрате:

$$u_t + iLu = \varepsilon(u - d|u|^2u), \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0, \quad (1.47)$$

где $L = \sigma_1^2 \partial^2 / \partial x^2 + \sigma_2^2 \partial^2 / \partial y^2$, $\sigma_j = 1/l_j$, $j = 1, 2$. Заметим, далее, что при $\varepsilon = 0$ она допускает аналогичные (1.9) волновые решения

$$u = \exp(i\omega_{n,k}t)e_{n,k}(x, y), \quad \omega_{n,k} = \pi^2(\sigma_1^2 n^2 + \sigma_2^2 k^2), \quad n, k \geq 1, \quad (1.48)$$

где для $e_{n,k}(x, y)$ сохраняются прежние формулы из (1.10). Поэтому для построения асимптотики возможных автоколебаний данной задачи воспользуемся бесконечномерным вариантом асимптотического метода Крылова–Боголюбова–Митропольского, предложенным в [16].

Используя существование волновых решений (1.48), подставим в (1.47) ряд

$$u = u_0(t, \tau, x, y) + \varepsilon u_1(t, \tau, x, y) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (1.49)$$

где

$$u_0 = \sum_{n,k=1}^{\infty} \xi_{n,k}(\tau) \exp(i\omega_{n,k}t) e_{n,k}(x, y), \quad (1.50)$$

а подлежащие определению комплексные амплитуды $\xi_{n,k}$ таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_{n,k}^2 |\xi_{n,k}|^2$ (в этом случае $u_0 \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$). Приравнявая затем коэффициенты при ε , для нахождения u_1 получим краевую задачу

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + iLu_1 = g(t, \tau, x, y), \quad u_1|_{x=0, x=1} = u_1|_{y=0, y=1} = 0, \quad (1.51)$$

в которой $g = -\partial u_0 / \partial \tau + (1 - d|u_0|^2)u_0$, а переменная τ рассматривается как параметр.

При анализе краевой задачи (1.51) существенную роль играет предполагаемая иррациональность числа σ_1^2/σ_2^2 , поскольку она исключает одновременное выполнение равенств вида

$$\omega_{n,k} = \omega_{n_1, k_1} + \omega_{n_2, k_2} - \omega_{n_3, k_3}, \quad n = n_1 \pm n_2 \pm n_3, \quad k = k_1 \pm k_2 \pm k_3$$

при произвольном выборе комбинаций знаков $+$ и $-$ во втором и третьем из них (тождественные резонансы, когда $(n, k) = (n_1, k_1)$, $(n_2, k_2) = (n_3, k_3)$, здесь, естественно, не рассматриваются). Таким образом, функция u_1 может быть найдена из (1.51) в виде формального тригонометрического ряда переменной t в том и только том случае, если в неоднородности $g(t, \tau, x, y)$ отсутствуют гармоники вида (1.48). Поэтому приравняем нулю коэффициенты при указанных гармониках. В результате для фигурирующих в (1.50) амплитуд $\xi_{n,k}$ приходим к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{n,k}}{d\tau} = & \xi_{n,k} - d \left[\frac{9}{4} |\xi_{n,k}|^2 + 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} |\xi_{m,k}|^2 + 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} |\xi_{n,m}|^2 \right. \\ & \left. + 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n, r \neq k}}^{\infty} |\xi_{m,r}|^2 \right] \xi_{n,k}, \quad n, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.52)$$

Далее, систему для $\rho_{n,k} = |\xi_{n,k}|^2$, которая после замены $2\tau \rightarrow \tau$ приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{n,k}}{d\tau} = & \left(1 - \frac{9}{4} \rho_{n,k} - 3 \sum_{m \neq k} \rho_{n,m} - 3 \sum_{m \neq n} \rho_{m,k} - 2 \sum_{m \neq n, r \neq k} \rho_{m,r} \right) \rho_{n,k}, \\ & n, k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.53)$$

будем рассматривать как абстрактное эволюционное уравнение в пространстве последовательностей $\rho = \{\rho_{n,k}, n, k = 1, 2, \dots\}$ с нормой

$$\|\rho\| = \sum_{n,k=1}^{\infty} \omega_{n,k}^2 |\rho_{n,k}| < \infty.$$

Из структуры входящих в (1.53) нелинейностей и дифференциальных неравенств

$$\frac{d\rho_{n,k}}{d\tau} \leq \rho_{n,k}, \quad n, k = 1, 2, \dots,$$

следует, что решение $\rho = \rho(\tau)$ этой системы с произвольным начальным условием $\rho(0) = \rho_0 \in K_+$, где K_+ – конус векторов с неотрицательными координатами, определено на полуоси $\tau \geq 0$ и остается при всех τ в конусе K_+ .

Предположим, что система (1.53) имеет состояние равновесия с конечным числом положительных координат, равным $p \geq 1$, т. е.

$$\rho_{n_j, k_j} = \eta_j > 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad \rho_{n,k} = 0 \quad \text{при} \quad (n, k) \neq (n_j, k_j). \quad (1.54)$$

Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1.4. *Любое состояние равновесия системы (1.53) вида (1.54) экспоненциально неустойчиво, причем бесконечна размерность его неустойчивого многообразия.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему для нахождения компонент η_j из (1.54), которая, очевидно, имеет вид

$$\alpha_{j,1}\eta_1 + \alpha_{j,2}\eta_2 + \cdots + \alpha_{j,p}\eta_p = 1, \quad j = 1, \dots, p, \quad (1.55)$$

где $\alpha_{j,j} = 9/4$, $j = 1, \dots, p$, а все остальные коэффициенты $\alpha_{j,k}$, $j \neq k$, равны 2 или 3. Тем самым, заменяя в (1.55) все $\alpha_{j,k}$ при $j \neq k$ на 2, приходим к серии оценок

$$2\eta_1 + \cdots + 2\eta_{j-1} + \frac{9}{4}\eta_j + 2\eta_{j+1} + \cdots + 2\eta_p \leq 1, \quad j = 1, \dots, p.$$

Суммируя все эти неравенства, убеждаемся в том, что

$$S \equiv \sum_{j=1}^p \eta_j \leq \frac{4p}{8p+1}. \quad (1.56)$$

Наконец, рассмотрим систему в вариациях на интересующем нас состоянии равновесия. Если заметить, что любое ее уравнение с индексами m, r , для которых $m \neq n_j$ и $r \neq k_j$, $j = 1, \dots, p$, имеет вид

$$\frac{dh_{m,r}}{d\tau} = (1 - 2S)h_{m,r},$$

то из оценки (см. (1.56))

$$1 - 2S \geq \frac{1}{8p+1}$$

требуемый факт вытекает очевидным образом. Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что состоянию равновесия (1.54) в системе (1.52) соответствует автомодельный p -мерный тор

$$\begin{aligned} \xi_{n_j, k_j}(\tau) &= \sqrt{\eta_j} \exp(i\psi_j \tau), \quad j = 1, \dots, p, \\ \xi_{n, k} &= 0 \quad \text{при } (n, k) \neq (n_j, k_j), \end{aligned} \quad (1.57)$$

где $\psi_j \in \mathbb{R}$. Далее, из равенства (1.57) можно однозначно определить первые два члена ряда (1.49). Тем самым получаем приближенный (с точностью до ε^2 по невязке) p -мерный инвариантный тор исходной краевой задачи (1.47). Однако, как следует из теоремы 1.4, соответствующий ему точный инвариантный тор если и существует, то заведомо неустойчив.

Вопрос об аттракторах краевой задачи (1.47) при иррациональном отношении σ_1^2/σ_2^2 остается открытым. Наиболее вероятной гипотезой представляется следующее: при $t \rightarrow \infty$ ее решения приобретают турбулентный характер, т.е. происходит их стохастизация по t с одновременной потерей гладкости по пространственным переменным. Некоторые аргументы в пользу данной гипотезы приведены в статье [17].

§ 2. Доказательство теоремы 1.3

2.1. Исследование устойчивости в нерезонансных случаях. Приступим к изложению алгоритмической части обоснования теоремы 1.3, которая заключается в асимптотическом вычислении собственных значений краевой задачи

$$\Pi_k z + \varepsilon A_k(x, y)z = \lambda z, \quad z|_{x=0} = z|_{x=1} = z|_{y=0} = z|_{y=1} = 0, \quad (2.1)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_k &= \text{diag}\{-i(\Delta + \omega_{2k,k}), i(\Delta + \omega_{2k,k})\}, \quad A_k(x, y) = \begin{pmatrix} \varkappa_{1,k}^0 & \varkappa_{2,k}^0 \\ \bar{\varkappa}_{2,k}^0 & \bar{\varkappa}_{1,k}^0 \end{pmatrix}, \\ \varkappa_{1,k}^0 &= d(1 - 2|u_{2k,k}(x, y, 0)|^2), \quad \varkappa_{2,k}^0 = -du_{2k,k}^2(x, y, 0). \end{aligned}$$

Отметим, что данная задача получается из исходной (1.44) в результате исключения из ее коэффициентов несущественных для дальнейшего слагаемых, имеющих равномерно по $k \geq 1$ и $(x, y) \in \Omega$ порядок малости не менее ε^2 .

При $\varepsilon = 0$ спектр краевой задачи (2.1) ясен – это последовательность собственных значений

$$\lambda_{m,s}^{\pm} = \pm i(\omega_{m,s} - \omega_{k,2k}), \quad m, s = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

которым соответствуют собственные функции $a_1 e_{m,s}(x, y)$, $a_2 e_{m,s}(x, y)$, где, напомним, векторы a_1, a_2 определены в (1.33). Однако, поскольку наряду с комплексным собственным значением задача (2.1) всегда имеет комплексно-сопряженное значение, при некоторой общности положения относительно m и s достаточно найти “поправки” порядка ε лишь к группе значений (2.2), которой соответствует знак $+$. Исключение здесь составляют так называемые резонансные случаи, которые будут рассмотрены отдельно.

Итак, фиксируем произвольно индексы m, s . Асимптотики собственного значения и собственной функции спектральной задачи (2.1) с нулевыми приближениями $\lambda_{m,s}^+$, $a_1 e_{m,s}(x, y)$ будем строить (когда это возможно) в одномодовом виде:

$$z = a_1 e_{m,s}(x, y) + \varepsilon z_{m,s}(x, y) + \dots, \quad \lambda = \lambda_{m,s}^+ + \varepsilon \mu_{m,s} + \dots. \quad (2.3)$$

В результате после подстановки равенств (2.3) в (2.1) и приравнивания коэффициентов при ε получим краевую задачу

$$\begin{aligned} (\Pi_k - \lambda_{m,s}^+ I)z_{m,s} &= (\mu_{m,s} a_1 - A_k(x, y) a_1) e_{m,s}(x, y), \\ z_{m,s}|_{x=0, x=1} &= z_{m,s}|_{y=0, y=1} = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Анализ этой задачи стандартен: сначала, приравнявая в ее правой части нулю коэффициент при $a_1 e_{m,s}(x, y)$, находим комплексную постоянную $\mu_{m,s}$, а затем ищем $z_{m,s}$ в виде тригонометрического полинома переменных x, y той же структуры, что и получившаяся в итоге неоднородность.

Рассмотрим сначала случай, когда в (2.3), (2.4)

$$(m, s) = (k, p): \quad p \geq 1, \quad p \neq k, 2k. \quad (2.5)$$

Несложным подсчетом находим, что здесь, во-первых,

$$\mu_{k,p} = -\frac{7d}{13}, \quad (2.6)$$

во-вторых, после определения $\mu_{k,p}$ неоднородность в (2.4) становится линейной комбинацией гармоник вида

$$a_j e_{r,q}(x, y), \quad j = 1, 2, \quad (2.7)$$

где при $j = 1$ индексы r, q пробегает значения

$$(r, q) = (k, p \pm 4k), (3k, p), (3k, p \pm 4k), (k, p \pm 2k), \\ (3k, p \pm 2k), (5k, p \pm 2k), (5k, p), \quad (2.8)$$

а при $j = 2$ к этим значениям добавляются еще наборы индексов

$$(r, q) = (2k, p \pm k), (2k, p \pm 3k), (4k, p \pm k), (4k, p \pm 3k), (k, p). \quad (2.9)$$

Поэтому для нахождения $z_{k,p}$ в виде линейной комбинации тех же функций (2.7) необходимо и достаточно выполнение соответствующих условий нерезонансности

$$\omega_{k,p} - \omega_{r,q} \neq 0, \quad 2\omega_{k,2k} \neq \omega_{r,q} + \omega_{k,p}, \quad (2.10)$$

где в первом случае индексы (r, q) принимают только значения (2.8), а во втором – все значения (2.8), (2.9).

Следует отметить, что часть неравенств (2.10) справедлива автоматически, а некоторые из них при подходящем выборе натурального p могут нарушаться. Для того чтобы разобраться с данным вопросом, привлечем явные формулы для частот (см. (1.10)). В итоге убеждаемся в том, что все неравенства из второй группы (2.10) и большинство неравенств из первой группы выполняются при каждом натуральном p из (2.5). Исключение составляют только условия

$$\omega_{k,p} - \omega_{3k,p-4k} \neq 0, \quad \omega_{k,p} - \omega_{3k,p-2k} \neq 0, \quad \omega_{k,p} - \omega_{5k,p-2k} \neq 0,$$

первые два из которых нарушаются при $p = 3k$, а третье – при $p = 7k$. Поэтому предположим пока, что в (2.5)

$$p \neq 3k, 7k \quad (2.11)$$

(случаи $p = 3k$ и $p = 7k$ будут рассмотрены в следующем пункте).

Анализ краевой задачи (2.4) при

$$(m, s) = (p, k): \quad p \geq 1, \quad p \neq k, 2k, \quad (2.12)$$

идентичен описанному выше. Так, например, здесь для $\mu_{p,k}$ сохраняется прежнее равенство (2.6). Далее, после определения $\mu_{p,k}$ неоднородность в (2.4) становится линейной комбинацией гармоник (2.7), в которых r и q следует поменять местами. Поэтому возможность определения $z_{p,k}$ в виде линейной комбинации тех же гармоник по-прежнему обеспечивают условия (2.11).

Как и в двух предыдущих ситуациях, реализация алгоритма при

$$(m, s) = (2k, p), (p, 2k): \quad p \geq 1, \quad p \neq k, 2k, \quad (2.13)$$

связана с однотипными рассмотрениями. В частности, здесь по-прежнему

$$\mu_{2k,p} = \mu_{p,2k} = -\frac{7d}{13}, \quad (2.14)$$

а после определения, например, $\mu_{2k,p}$ неоднородность в соответствующей краевой задаче (2.4) становится линейной комбинацией гармоник (2.7), где при $j = 1$ индексы (r, q) принимают значения

$$(r, q) = (2k, p \pm 4k), (4k, p), (4k, p \pm 4k), (2k, p \pm 2k), (6k, p), (6k, p \pm 2k), \quad (2.15)$$

а при $j = 2$ к ним следует добавить еще значения

$$(r, q) = (k, p \pm k), (k, p \pm 3k), (3k, p \pm k), (3k, p \pm 3k), \\ (5k, p \pm k), (5k, p \pm 3k), (2k, p) \quad (2.16)$$

(если же $(m, s) = (p, 2k)$, то r и q в (2.15), (2.16) меняются местами). Таким образом, обе функции $z_{2k,p}$ и $z_{p,2k}$ могут быть найдены в виде соответствующих линейных комбинаций гармоник (2.7) при выполнении одних и тех же условий нерезонансности

$$\omega_{2k,p} - \omega_{r,q} \neq 0, \quad 2\omega_{k,2k} \neq \omega_{r,q} + \omega_{2k,p}, \quad (2.17)$$

где, как и выше, в первом из этих неравенств индексы (r, q) принимают значения (2.15), а во втором – значения (2.15), (2.16).

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что большинство условий (2.17) выполняется при всех допустимых значениях p из (2.13). Исключениями являются только два неравенства

$$\omega_{2k,p} \neq \omega_{6k,p-2k}, \quad \omega_{2k,p} \neq \omega_{4k,p-4k},$$

которые нарушаются соответственно при $p = 9k$ и $p = 7k/2$ (в последнем случае предполагается, естественно, что k четное). Поэтому будем считать, что в (2.13)

$$p \neq 9k, \quad \frac{7k}{2}. \quad (2.18)$$

Следует исключить пока из рассмотрения и случаи

$$(m, s) = (k, 2k), (2k, k), \quad (m, s) = (k, k), (2k, 2k), \quad (2.19)$$

в которых расчет асимптотики собственных значений в одномодовой форме (2.3) заведомо невозможен. Связано это с тем, что в первом из них $\lambda_{k,2k}^{\pm} = \lambda_{2k,k}^{\pm} = 0$, а во-втором $\lambda_{k,k}^{\pm} = \lambda_{2k,2k}^{\mp}$, т. е. наблюдается резонансное взаимодействие мод. Тем самым, остается разобраться с ситуацией, когда в (2.3), (2.4) индексы m, s таковы, что одновременно

$$m \neq k, 2k, \quad s \neq k, 2k. \quad (2.20)$$

При условиях (2.20) для $\mu_{m,s}$ получаем равенство

$$\mu_{m,s} = -\frac{3d}{13}. \quad (2.21)$$

Далее, после определения $\mu_{m,s}$ неоднородность в (2.4) представляет собой линейную комбинацию гармоник (2.7), где случаю $j = 1$ соответствуют наборы индексов

$$(r, q) = (m, s \pm 4k), (m \pm 2k, s), (m \pm 2k, s + 4k), (m \pm 2k, s - 4k), \\ (m, s \pm 2k), (m \pm 4k, s), (m + 4k, s \pm 2k), (m - 4k, s \pm 2k).$$

В случае же $j = 2$ к указанным значениям (r, q) добавляются еще пары

$$(r, q) = (m + k, s \pm k), (m + k, s \pm 3k), (m - k, s \pm k), (m - k, s \pm 3k), \\ (m + 3k, s \pm k), (m + 3k, s \pm 3k), (m - 3k, s \pm k), (m - 3k, s \pm 3k), (m, s).$$

Остановимся сначала на проверке условий нерезонансности

$$\omega_{m,s} \neq \omega_{r,q}, \quad (2.22)$$

отвечающих случаю $j = 1$. Несложным подсчетом находим, что нарушаться неравенства (2.22) могут только при

$$(r, q) = (m - 2k, s + 4k), (m + 2k, s - 4k), (m - 2k, s - 4k), \\ (m + 4k, s - 2k), (m - 4k, s + 2k), (m - 4k, s - 2k), \quad (2.23)$$

причем соответствующие им строгие равенства реализуются при

$$\begin{aligned} m &= 2s + 5k, & m &= 2s - 5k, & m &= 5k - 2s, \\ s &= 5k + 2m, & s &= 2m - 5k, & s &= 5k - 2m. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Рассмотрим группу условий нерезонансности

$$2\omega_{k,2k} \neq \omega_{m,s} + \omega_{r,q}, \quad (2.25)$$

соответствующую случаю $j = 2$. Как и в предыдущем случае, часть этих условий выполняется автоматически. Нарушаться же могут условия (2.25) при

$$(r, q) = (m, s - 4k), (m \pm 2k, s), (m, s \pm 2k), (m - 4k, s), \\ (m, s), (m + k, s \pm k), (m + k, s - 3k), (m - k, s \pm k), \\ (m - k, s \pm 3k), (m + 3k, s - k), (m - 3k, s \pm k), \\ (m - 3k, s - 3k), \quad (2.26)$$

которые эквивалентны соответственно неравенствам

$$\begin{aligned}
m^2 + (s - 2k)^2 &\neq k^2, & s^2 + (m \pm k)^2 &\neq 4k^2, & m^2 + (s \pm k)^2 &\neq 4k^2, \\
(m - 2k)^2 + s^2 &\neq k^2, & m^2 + s^2 &\neq 5k^2, & \Phi_{\mp, \pm}(s) + \Phi_{-, +}(m) &\neq 0, \\
\Phi_{-, -}(s) + \Phi_{-, +}(m) &\neq 0, & \Phi_{+, -}(m) + \Phi_{\mp, \pm}(s) &\neq 0, \\
\Phi_{+, -}(m) + \Phi_{\pm, \pm}(s) &\neq 0, & \Phi_{+, +}(m) + \Phi_{+, -}(s) &\neq 0, \\
\Phi_{-, -}(m) + \Phi_{\mp, \pm}(s) &\neq 0, & \Phi_{-, -}(m) + \Phi_{-, -}(s) &\neq 0,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

где

$$\Phi_{\pm, +}(r) = (r \pm k)(r + 2k), \quad \Phi_{\pm, -}(r) = (r \pm k)(r - 2k).$$

Подводя итог, отметим, что в случае (2.20) функция $z_{m,s}$ может быть определена из краевой задачи (2.4) в требуемом виде только при выполнении условий (2.22), (2.23) и (2.27). Если при некоторых m и s хотя бы одно из этих условий нарушается, то соответствующая краевая задача (2.4) оказывается неразрешимой. В связи с этим и другими отмеченными выше исключительными случаями возникает необходимость в подходящей модификации алгоритма, которая предлагается в следующем пункте.

2.2. Исследование устойчивости в случае резонансов. Начнем с рассмотрения первого из случаев (2.19), т.е. рассчитаем асимптотику четырех близких к нулю собственных значений краевой задачи (2.1), которым при $\varepsilon = 0$ соответствуют собственные функции (1.33) (при $n = 2k$). С этой целью введем в рассмотрение матричную краевую задачу

$$\Pi_k V + \varepsilon A_k(x, y)V = V\Lambda, \quad V|_{x=0, x=1} = V|_{y=0, y=1} = 0, \tag{2.28}$$

где

$$\begin{aligned}
V &= V_0(x, y) + \varepsilon V_1(x, y), \quad V_j = [w_{j1}, w_{j2}, w_{j3}, w_{j4}], \quad j = 0, 1, \\
\Lambda &= \varepsilon \Lambda_0, \quad w_{01} = a_1 e_{2k, k}(x, y), \quad w_{02} = a_2 e_{2k, k}(x, y), \\
w_{03} &= a_1 e_{k, 2k}(x, y), \quad w_{04} = a_2 e_{k, 2k}(x, y),
\end{aligned} \tag{2.29}$$

а столбцы матрицы V_1 , являющиеся двумерными векторами, и элементы постоянной четырехмерной квадратной матрицы Λ_0 подлежат определению. Действуя, далее, обычным образом, т.е. приравнивая в (2.28) коэффициенты при ε , для нахождения w_{1j} , $j = 1, \dots, 4$, получаем линейные неоднородные краевые задачи

$$\Pi_k w_{1j} = \sum_{r=1}^4 \lambda_{rj} w_{0r} - A_k(x, y)w_{0j}, \quad w_{1j}|_{x=0, x=1} = w_{1j}|_{y=0, y=1} = 0,$$

а элементы λ_{rj} матрицы Λ_0 определяем из условий их разрешимости. В итоге убеждаемся, что $\Lambda_0 = B$, где B – матрица (1.25).

Напомним, что одно собственное значение матрицы Λ_0 нулевое (что естественно, так как (2.1) – линейаризация на цикле), а три других имеют отрицательные действительные части. Этим, в частности, и объясняется выбор набора (1.19) в качестве решения системы (1.18). В случае же $\alpha_1 = -c_0$, $\xi_1^0 = \xi_2^0 = 2/\sqrt{21}$ утверждения теорем 1.1, 1.2 остаются в силе, но получающиеся при этом циклы

заведомо неустойчивы: соответствующая им матрица Λ_0 имеет собственное значение в полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda > 0\}$.

Случаи $(m, s) = (k, k), (2k, 2k)$ (см. (2.19)) также приходится рассматривать совместно, поскольку здесь в силу равенства $\lambda_{k,k}^+ = \lambda_{2k,2k}^-$ наблюдается резонансное взаимодействие мод $a_1 e_{k,k}(x, y)$, $a_2 e_{2k,2k}(x, y)$. Поэтому в данной ситуации рассмотрению подлежит матричная краевая задача (2.28), в которой

$$V = V_0(x, y) + \varepsilon V_1(x, y), \quad V_j = [w_{j1}, w_{j2}], \quad j = 0, 1, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} w_{01} &= a_1 e_{k,k}(x, y), & w_{02} &= a_2 e_{2k,2k}(x, y), \\ \Lambda &= \lambda_{k,k}^+ I + \varepsilon D, & D &= \|d_{jp}\|, \quad j, p = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Здесь I – единичная матрица, а вектор-функции w_{11}, w_{12} , являющиеся тригонометрическими полиномами переменных x, y , и элементы d_{jp} постоянной матрицы D подлежат определению. Приравнивая затем в (2.28) коэффициенты при ε , для нахождения w_{1j} , $j = 1, 2$, приходим к краевым задачам

$$\begin{aligned} (\Pi_k - \lambda_{k,k}^+ I) w_{1j} &= d_{1j} w_{01} + d_{2j} w_{02} - A_k(x, y) w_{0j}, \\ w_{1j}|_{x=0, x=1} &= w_{1j}|_{y=0, y=1} = 0, \end{aligned} \quad (2.32)$$

анализ которых стандартен. Сначала, приравнивая нулю коэффициенты при w_{01}, w_{02} в правых частях, находим

$$D = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -11d & -8id \\ 8i\bar{d} & -11\bar{d} \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

После этого, как нетрудно убедиться, функции w_{1j} определяются из (2.32) уже однозначно в том же виде, что и соответствующие неоднородности.

Совместному рассмотрению подлежат и случаи $(m, s) = (k, 3k), (3k, k)$ (см. (2.5), (2.11), (2.12)), поскольку в каждом из них взаимодействуют одни и те же моды $a_1 e_{k,3k}(x, y)$ и $a_1 e_{3k,k}(x, y)$. Таким образом, здесь объектом анализа является краевая задача (2.28), в которой сохраняется равенство (2.30), а вместо (2.31) следует положить

$$\begin{aligned} w_{01} &= a_1 e_{k,3k}(x, y), & w_{02} &= a_1 e_{3k,k}(x, y), \\ \Lambda &= \lambda_{k,3k}^+ I + \varepsilon D, & D &= \|d_{jp}\|, \quad j, p = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Действуя далее описанным выше образом, для фигурирующей в (2.34) матрицы D приходим к равенству

$$D = -\frac{d}{13} \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Несколько сложнее случай, когда в (2.5), (2.12) $p = 7k$. Связано это с тем, что здесь взаимодействуют сразу три моды $a_1 e_{k,7k}(x, y)$, $a_1 e_{7k,k}(x, y)$ и $a_1 e_{5k,5k}(x, y)$,

а значит, при реализации алгоритма расчета спектра задачи (2.1) на данных модах следует положить в (2.28)

$$V = V_0(x, y) + \varepsilon V_1(x, y), \quad V_j = [w_{j1}, w_{j2}, w_{j3}], \quad j = 0, 1, \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} w_{01} &= a_1 e_{k,7k}(x, y), & w_{02} &= a_1 e_{7k,k}(x, y), & w_{03} &= a_1 e_{5k,5k}(x, y), \\ \Lambda &= \lambda_{k,7k}^+ I + \varepsilon D, & D &= \|d_{jp}\|, & j, p &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Приравнивая затем коэффициенты при ε , для w_{1j} , $j = 1, 2, 3$, получим аналогичные (2.32) линейные неоднородные краевые задачи, а элементы неизвестной матрицы D из (2.37) находим из условий их разрешимости. Опуская стандартные вычисления, приведем сразу окончательный результат:

$$D = -\frac{d}{13} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Случаи, когда в (2.13) нарушается одно из дополнительных условий (2.18), однотипны. Поэтому изучим, к примеру, резонансное взаимодействие мод

$$a_1 e_{2k,9k}(x, y), \quad a_1 e_{6k,7k}(x, y).$$

С этой целью положим в (2.28), (2.30)

$$\begin{aligned} w_{01} &= a_1 e_{2k,9k}(x, y), & w_{02} &= a_1 e_{6k,7k}(x, y), \\ \Lambda &= \lambda_{2k,9k}^+ I + \varepsilon D, & D &= \|d_{jp}\|, \quad j, p = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

В итоге после соответствующих вычислений для матрицы D из (2.39) приходим к равенству

$$D = -\frac{d}{13} \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Отметим также, что матрица (2.40) получается и при резонансном взаимодействии мод $a_1 e_{9k,2k}(x, y)$, $a_1 e_{7k,6k}(x, y)$. В других же двух исключительных случаях из (2.13), когда взаимодействуют соответственно пары мод $a_1 e_{2k,7k/2}(x, y)$, $a_1 e_{4k,k/2}(x, y)$ и $a_1 e_{7k/2,2k}(x, y)$, $a_1 e_{k/2,4k}(x, y)$, получается одна и та же матрица

$$D = -\frac{d}{13} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.41)$$

Оставшиеся резонансные случаи связаны с индексами m, s из множества (2.20). Возникающие здесь ситуации весьма разнообразны. Поэтому начнем с изучения двух простейших из них. Предположим сначала, что индексы m, s связаны равенством $m = 2s + 5k$ (см. (2.24)), т. е. наблюдается резонансное взаимодействие мод $a_1 e_{m,s}(x, y)$ и $a_1 e_{m_1,s_1}(x, y)$, где $m_1 = m - 2k$, $s_1 = s + 4k$. Тогда, как нетрудно проверить, каждая пара индексов (m, s) и (m_1, s_1) удовлетворяет только одному из равенств (2.24) (в частности, $m_1 = 2s_1 - 5k$) и для обеих пар выполняются

все условия (2.27). А это означает, что расчет асимптотики собственных значений задачи (2.1) на этих модах следует проводить в форме (2.28), (2.30), где

$$\begin{aligned} w_{01} &= a_1 e_{m,s}(x, y), & w_{02} &= a_1 e_{m_1, s_1}(x, y), \\ \Lambda &= \lambda_{m,s}^+ I + \varepsilon D, & D &= \|d_{jp}\|, \quad j, p = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.42)$$

С помощью несложных вычислений для матрицы D из (2.42) получаем равенство

$$D = -\frac{d}{13} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Все сказанное выше в полной мере сохраняется и для случая, когда индексы m, s связаны соотношением $s = 2m + 5k$. Поэтому здесь реализацию алгоритма также проводим в форме (2.28), (2.30), (2.42), где $m_1 = m + 4k, s_1 = s - 2k$, причем для матрицы D получаем прежнее равенство (2.43).

Немного сложнее случай

$$(m, s): \quad m = 2s - 5k > 0, \quad |s - 4k| \neq 0, k, 2k, \quad (2.44)$$

в котором взаимодействуют моды $a_1 e_{m,s}(x, y)$ и $a_1 e_{m_1, s_1}(x, y)$, где $m_1 = m + 2k, s_1 = |s - 4k|$. Заметим, что равенства $s_1 = k, 2k$ в (2.44) исключены из рассмотрения в силу того, что они приводят к уже изученным ситуациям (см. (2.36), (2.37), (2.39)). Случай $s_1 = 0$ не имеет смысла по той причине, что $a_1 e_{m_1, 0}(x, y) \equiv 0$.

Фиксируем произвольно индексы m, s из множества (2.44), (2.20). Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что каждая пара (m, s) и (m_1, s_1) удовлетворяет только одному из равенств (2.24) (в случае (m_1, s_1) имеем $m_1 = 2s_1 + 5k$ при $s > 4k$ или $m_1 = 5k - 2s_1$ при $s < 4k$). При проверке для этих пар выполнения условий (2.27) возникают две исключительные ситуации, которые будут рассмотрены отдельно. А именно, для наборов индексов

$$\begin{aligned} (m, s) &= (3k/5, 14k/5), & (m_1, s_1) &= (13k/5, 6k/5), \\ (m_2, s_2) &= (3k/5, 6k/5), \end{aligned} \quad (2.45)$$

а также для наборов

$$\begin{aligned} (m, s) &= (k/5, 13k/5), & (m_1, s_1) &= (11k/5, 7k/5), \\ (m_2, s_2) &= (4k/5, 8k/5) \end{aligned} \quad (2.46)$$

справедливы равенства вида

$$\omega_{m,s} = \omega_{m_1, s_1}, \quad 2\omega_{k, 2k} = \omega_{m,s} + \omega_{m_2, s_2}, \quad 2\omega_{k, 2k} = \omega_{m_1, s_1} + \omega_{m_2, s_2}. \quad (2.47)$$

Все остальные условия нерезонансности (2.22), (2.25) для данных наборов индексов выполняются.

Итак, пусть не имеет места ни один из исключительных случаев (2.45), (2.46). Тогда реализация алгоритма для данных пар индексов (m, s) и (m_1, s_1) проводится в прежнем виде (2.28), (2.30), (2.42), а для матрицы D получается формула

$$D = -\frac{d}{13} \begin{pmatrix} 3 & \pm 2 \\ \pm 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

где знак $+$ соответствует неравенству $s > 4k$, а знак $-$ возникает при $s < 4k$.

Случай (m, s) : $s = 2m - 5k > 0$, $|m - 4k| \neq 0, k, 2k$, не нуждается в отдельном рассмотрении, так как фактически сводится к предыдущему посредством замены $m \rightarrow s$, $s \rightarrow m$. В частности, здесь также возникают две исключительные ситуации:

$$\begin{aligned} (m, s) &= (14k/5, 3k/5), & (m_1, s_1) &= (6k/5, 13k/5), \\ (m_2, s_2) &= (6k/5, 3k/5); \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} (m, s) &= (13k/5, k/5), & (m_1, s_1) &= (7k/5, 11k/5), \\ (m_2, s_2) &= (8k/5, 4k/5). \end{aligned} \quad (2.50)$$

В остальных ситуациях применяется прежний алгоритм (2.28), (2.30), (2.42), а для матрицы D сохраняется равенство (2.48), в котором знаку $+$ соответствует условие $m > 4k$, а знак $-$ выбирается при $m < 4k$.

Обратимся теперь к случаям, когда в дополнение к (2.20) имеем $m = 5k - 2s > 0$, $|m - 2k| \neq k, 2k$; $4k - s \neq 0, k$ или $s = 5k - 2m > 0$, $|s - 2k| \neq k, 2k$; $4k - m \neq 0, k$. Заметим, что если исключить ситуации (2.45)–(2.47), (2.49), (2.50), а также случай резонансного взаимодействия мод

$$\begin{aligned} w_{01} &= a_1 e_{5k/3, 5k/3}(x, y), & w_{02} &= a_1 e_{k/3, 7k/3}(x, y), \\ w_{03} &= a_1 e_{7k/3, k/3}(x, y), \end{aligned} \quad (2.51)$$

то и здесь алгоритм сохраняет прежнюю форму (2.28), (2.30), (2.42), где $m_1 = |m - 2k|$, $s_1 = 4k - s$ или $m_1 = 4k - m$, $s_1 = |s - 2k|$ соответственно. Для матрицы D оказывается справедливым равенство (2.48), в котором в первом случае знаки $+$ или $-$ выбираются в соответствии с условиями $m < 2k$ или $m > 2k$, а во втором случае $-$ в соответствии с условиями $s < 2k$ или $s > 2k$.

Анализ четырех обнаруженных выше исключительных случаев (2.45), (2.46), (2.49), (2.50) производится схожим образом, так как в силу равенств (2.47) здесь взаимодействуют моды

$$w_{01} = a_1 e_{m, s}(x, y), \quad w_{02} = a_1 e_{m_1, s_1}(x, y), \quad w_{03} = a_2 e_{m_2, s_2}(x, y), \quad (2.52)$$

где пары индексов (m, s) , (m_1, s_1) , (m_2, s_2) принимают соответственно значения (2.45), (2.46), (2.49), (2.50). Поэтому для расчета асимптотики собственных значений краевой задачи (2.1) на данных модах подставим в (2.28) равенства (2.36), (2.37), в которых теперь w_{0j} , $j = 1, 2, 3$, задаются формулами (2.52), а $\lambda_{k, 7k}^+$ заменено на $\lambda_{m, s}^+$. Действуя далее обычным образом, убеждаемся, что в случаях (2.45), (2.49) матрица D определяется соответственно равенствами

$$D = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -3d & 2d & \pm 2d \\ 2d & -3d & \mp 2d \\ \pm 2\bar{d} & \mp 2\bar{d} & -3\bar{d} \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

а в случаях (2.46), (2.50) – одним и тем же равенством

$$D = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -3d & 2d & 2id \\ 2d & -3d & -2id \\ -2i\bar{d} & 2i\bar{d} & -3\bar{d} \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

Исследование оставшегося из пяти исключительных случаев, а именно резонансного взаимодействия мод (2.51), проводится по схеме (2.36), (2.37), где, естественно, $\lambda_{k,7k}^+$ следует заменить на $\lambda_{5k/3,5k/3}^+$, а функции w_{0j} , $j = 1, 2, 3$, определить формулами (2.51). Не останавливаясь на вполне понятных вычислениях, приведем сразу окончательный результат:

$$D = -\frac{d}{13} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2.55)$$

Заключительный этап расчета асимптотики собственных значений задачи (2.1) состоит в рассмотрении тех резонансных случаев, когда для индексов (m, s) из множества (2.20) выполняются условия (2.22), (2.23), но нарушается по крайней мере одно из неравенств (2.27). Анализ этих неравенств показывает, что помимо двух особых случаев (о которых скажем чуть позже) все возникающие здесь ситуации укладываются в следующую схему: пары индексов (m, s) и $(m_1, s_1) = (r, q)$, где (r, q) – одно из значений (2.26), связаны соотношением

$$2\omega_{k,2k} = \omega_{m,s} + \omega_{m_1,s_1},$$

а все остальные условия нерезонансности (2.22), (2.25) для каждой из этих пар выполняются. Иными словами, резонансно взаимодействуют только моды

$$w_{01} = a_1 e_{m,s}(x, y), \quad w_{02} = a_2 e_{m_1,s_1}(x, y). \quad (2.56)$$

В этом случае, как и в других рассмотренных выше аналогичных ситуациях, реализация алгоритма проводится в форме (2.28), (2.30), (2.42), где, естественно, функции w_{01} , w_{02} определены равенствами (2.56). Результатом алгоритма здесь являются двумерные матрицы одного из следующих видов:

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{3}{13}d & \pm\frac{2}{13}d \\ \pm\frac{2}{13}\bar{d} & -\frac{3}{13}\bar{d} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{3}{13}d & 0 \\ 0 & -\frac{3}{13}\bar{d} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{3}{13}d & \mp\frac{2i}{13}d \\ \pm\frac{2i}{13}\bar{d} & -\frac{3}{13}\bar{d} \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Итак, для завершения алгоритмической части доказательства теоремы 1.3 осталось разобраться только с двумя упомянутыми выше исключительными случаями. Первый из них связан с набором индексов

$$\begin{aligned} (m_0, s_0) &= (4k/5, 13k/5), & (m_1, s_1) &= (k/5, 8k/5), \\ (m_2, s_2) &= (4k/5, 7k/5), & (m_3, s_3) &= (11k/5, 8k/5), \end{aligned} \quad (2.58)$$

а второй – с набором, получающимся из (2.58) при заменах $(m_j, s_j) \rightarrow (s_j, m_j)$, $j = 0, \dots, 3$. Особенность данных случаев состоит в том, что здесь в силу равенств

$$2\omega_{k,2k} = \omega_{m_0,s_0} + \omega_{m_j,s_j}, \quad 2\omega_{k,2k} = \omega_{m_3,s_3} + \omega_{m_j,s_j}, \quad j = 1, 2,$$

резонансно взаимодействуют сразу четыре моды:

$$\begin{aligned} w_{01} &= a_1 e_{m_0,s_0}(x, y), & w_{02} &= a_2 e_{m_1,s_1}(x, y), \\ w_{03} &= a_2 e_{m_2,s_2}(x, y), & w_{04} &= a_1 e_{m_3,s_3}(x, y). \end{aligned}$$

Поэтому при реализации алгоритма на указанных модах подставим в (2.28) матрицы

$$\begin{aligned} V &= V_0(x, y) + \varepsilon V_1(x, y), & V_j &= [w_{j1}, w_{j2}, w_{j3}, w_{j4}], \quad j = 0, 1, \\ \Lambda &= \lambda_{m_0,s_0}^+ I + \varepsilon D, & D &= \|d_{jp}\|, \quad j, p = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

В итоге убеждаемся, что в первом и втором случае матрица D задается соответственно равенствами

$$D = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -3d & 2id & \pm 2d & 0 \\ -2i\bar{d} & -3\bar{d} & 0 & \mp 2\bar{d} \\ \pm 2\bar{d} & 0 & -3\bar{d} & 2i\bar{d} \\ 0 & \mp 2d & -2id & -3d \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

2.3. Завершение доказательства теоремы 1.3. Проблема обоснования теоремы 1.3 сводится, очевидно, к обоснованию описанного выше алгоритма расчета асимптотики собственных значений задачи (2.1). Соответствующий анализ разобьем на два этапа. На первом этапе введем в рассмотрение вектор-функции

$$v_{m,s}^j(x, y, \varepsilon) = v_{m,s,0}^j(x, y) + \varepsilon v_{m,s,1}^j(x, y), \quad j = 1, \dots, j_{m,s}^*, \quad (2.60)$$

которые определяются следующим образом. В случае, когда для пары индексов (m, s) алгоритм реализуется в одномодовом виде (2.3), полагаем в (2.60)

$$j_{m,s}^* = 1, \quad v_{m,s}^1 = a_1 e_{m,s}(x, y) + \varepsilon z_{m,s}(x, y),$$

где $z_{m,s}$ – решение задачи (2.4). Далее, если при $(m, s) \neq (2k, k), (k, 2k)$ имеем резонансный случай, то $j_{m,s}^*$ считаем равным количеству взаимодействующих мод, а в качестве функций (2.60) берем столбцы соответствующей матрицы $V_0 + \varepsilon V_1$ (см. (2.30), (2.36) и т. д.). И наконец, при $(m, s) = (2k, k), (k, 2k)$ положим

$$j_{2k,k}^* = j_{k,2k}^* = 1, \quad v_{2k,k}^1 = w_{01} + \varepsilon w_{11}, \quad v_{k,2k}^1 = w_{03} + \varepsilon w_{13},$$

где $w_{j1}, w_{j3}, j = 0, 1$, – первый и третий столбцы матриц V_0, V_1 из (2.29).

На втором этапе выполним в краевой задаче (1.44) замену переменных

$$z = \sum_{m,s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{j_{m,s}^*} (\xi_{m,s}^j v_{m,s}^j(x, y, \varepsilon) + \eta_{m,s}^j [v_{m,s}^j(x, y, \varepsilon)]^*), \quad (2.61)$$

где, как и в равенстве (1.31), операция $*$ означает, что $v^* = \text{colop}(\bar{v}_2, \bar{v}_1)$, если $v = \text{colop}(v_1, v_2)$, а относительно комплексных постоянных $\xi_{m,s}^j, \eta_{m,s}^j$ предполагаем, что $\xi = \{\xi_{m,s}^j, \eta_{m,s}^j : m, s \geq 1\} \in l_2$, т. е. сходится ряд

$$\sum_{m,s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{j_{m,s}^*} (|\xi_{m,s}^j|^2 + |\eta_{m,s}^j|^2).$$

Основная трудность, с которой обычно сталкиваемся при работе с бесконечномерными заменами, состоит в решении так называемой проблемы малых знаменателей. Однако в нашем случае данная проблема не возникает. Связано это с тем, что каждая функция $v_{m,s,1}^j(x, y)$ из (2.60) представляет собой линейную комбинацию конечного (не зависящего от m, s, k) числа гармоник (2.7) с коэффициентами вида

$$\text{const} \cdot (\omega_{m,s} - \omega_{r,q})^{-1}, \quad \text{const} \cdot (2\omega_{k,2k} - \omega_{m,s} - \omega_{r,q})^{-1},$$

причем для соответствующих знаменателей заведомо справедливы оценки

$$|\omega_{m,s} - \omega_{r,q}| \geq \pi^2, \quad |2\omega_{k,2k} - \omega_{m,s} - \omega_{r,q}| \geq \pi^2.$$

Отсюда и из того факта, что при $\varepsilon = 0$ вектор-функции (2.60) образуют ортонормированный базис в пространстве $E = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, следует, что равенство (2.61) индуцирует линейный оператор из l_2 в E , ограниченный равномерно по ε и $k \geq 1$ вместе со своим обратным. Иными словами, замена (2.61) является равномерно корректной.

Из способа построения функций (2.60) вытекает также, что результатом проведения замены (2.61) в краевой задаче (1.44) оказывается спектральная задача в l_2 :

$$(L_{1,k}(\varepsilon) + \varepsilon^2 L_{2,k}(\varepsilon))\xi = \lambda\xi, \quad (2.62)$$

где линейный оператор $L_{2,k}(\varepsilon)$ ограничен равномерно по $k \geq 1$ и ε , а $L_{1,k}(\varepsilon)$ имеет блочно-диагональную структуру вида

$$L_{1,k}(\varepsilon)\xi = \{\tilde{\xi}_{m,s}^j, \tilde{\eta}_{m,s}^j : j = 1, \dots, j_{m,s}^*, m, s \geq 1\}. \quad (2.63)$$

Здесь в нерезонансных случаях компоненты $\tilde{\xi}_{m,s}^1, \tilde{\eta}_{m,s}^1$ задаются равенствами

$$\tilde{\xi}_{m,s}^1 = (\lambda_{m,s}^+ + \varepsilon\mu_{m,s})\xi_{m,s}^1, \quad \tilde{\eta}_{m,s}^1 = (\lambda_{m,s}^- + \varepsilon\bar{\mu}_{m,s})\eta_{m,s}^1. \quad (2.64)$$

Далее, в случае резонансного набора $(m, s) \neq (k, 2k), (2k, k)$ в качестве $\tilde{\xi}_{m,s}^j, \tilde{\eta}_{m,s}^j$ берутся соответственно координаты векторов

$$(\lambda_{m,s}^+ I + \varepsilon D)\xi_{m,s}, \quad (\lambda_{m,s}^- I + \varepsilon \bar{D})\eta_{m,s}, \quad (2.65)$$

где D – матрица из алгоритма, отвечающая данному резонансному случаю, а $\xi_{m,s}$ и $\eta_{m,s}$ – векторы с компонентами $\xi_{m,s}^j$ и $\eta_{m,s}^j$, $j = 1, \dots, j_{m,s}^*$. Наконец, при $(m, s) = (k, 2k), (2k, k)$ справедливо соотношение

$$\text{colon}(\tilde{\xi}_{2k,k}^1, \tilde{\eta}_{2k,k}^1, \tilde{\xi}_{k,2k}^1, \tilde{\eta}_{k,2k}^1) = \varepsilon Bv, \quad (2.66)$$

где B – матрица из (1.25), $v = \text{colon}(\xi_{2k,k}^1, \eta_{2k,k}^1, \xi_{k,2k}^1, \eta_{k,2k}^1)$.

Из структуры оператора (2.63) следует, что его спектр – это числа $\lambda_{m,s}^+ + \varepsilon\mu_{m,s}$, $\lambda_{m,s}^- + \varepsilon\bar{\mu}_{m,s}$ (см. (2.64)) и совокупность собственных значений матриц из (2.65), (2.66). Заметим, далее, что в силу равенств (2.6), (2.14), (2.21) все фигурирующие в (2.64) постоянные $\mu_{m,s}$ имеют отрицательные действительные части. Опираясь

на явный вид (2.33), (2.35), (2.38), (2.40), (2.41), (2.43), (2.48), (2.53)–(2.55), (2.57), (2.59) матриц D из (2.65), нетрудно убедиться в том, что и они являются гурвицевыми. Исключение составляет только матрица B из (2.66), имеющая одно простое нулевое собственное значение и три собственных значения в полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. Тем самым, заведомо найдется такая не зависящая от ε и $k \geq 1$ постоянная $\gamma_0 > 0$, что весь спектр операторов $L_{1,k}(\varepsilon)$, $k \geq 1$ (за исключением упомянутых выше простых нулевых собственных значений), содержится в комплексной полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma_0 \varepsilon\}$.

При переходе от операторов $L_{1,k}(\varepsilon)$ к исходным спектральным задачам (2.62) в силу равномерной по ε и $k \geq 1$ ограниченности “добавок” $L_{2,k}(\varepsilon)$ описанная ситуация сохраняется. А именно, найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ нулевое собственное значение каждой из этих задач по-прежнему является простым, а остальные их точки спектра находятся в той же самой полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma_0 \varepsilon\}$. Теорема 1.3 полностью доказана.

Следует отметить, что семействами (1.43) исчерпываются все устойчивые автомодельные циклы краевой задачи (1.8), которые удастся обнаружить локальными методами. Действительно, при

$$n \neq k, \quad n \neq 2k, \quad k \neq 2n \quad (2.67)$$

любой цикл (1.11), доставляемый теоремой 1.1, является неустойчивым (с размерностью неустойчивого многообразия, равной трем). Связано это с тем, что здесь реализация описанного выше алгоритма исследования устойчивости в одном из случаев, а именно при резонансном взаимодействии мод $a_1 e_{n+k, n-k}(x, y)$ и $a_1 e_{n-k, n+k}(x, y)$, приводит к матрице

$$D = -\frac{d}{13} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},$$

имеющей собственное значение с положительной действительной частью. Далее, если отказаться от требования аналитичности по ε фигурирующих в (1.11) амплитуды $u_{n,k}$ и частоты $\alpha_{n,k}$, то аналог теоремы 1.1 справедлив без дополнительных предположений (1.13) относительно номеров n, k (при ее обосновании в основном используется прежняя схема, но вместо оператора Π следует взять оператор вида (2.1), получающийся при линеаризации на приближенном цикле и имеющий в подходящем подпространстве коразмерности один норму обратного порядка ε^{-1}). Но и в этом случае доставляемые данной теоремой циклы, отличные от (1.43), оказываются неустойчивыми.

В заключение отметим, что все сказанное выше отнюдь не исключает существования у краевой задачи (1.8) наряду с циклами (1.43) устойчивых автоколебательных режимов более сложной природы. В самом деле, характер неустойчивости циклов (1.11), (1.27), (1.28) при условии (2.67) порождает вопрос о существовании устойчивых двумерных торов, сосредоточенных на модах $e_{n,k}, e_{k,n}, e_{n+k, n-k}, e_{n-k, n+k}$. Однако разрешение этого вопроса сопряжено со значительными аналитическими трудностями и требует отдельного рассмотрения, выходящего за рамки настоящей статьи.

§ 3. Уравнение Шрёдингера с граничными условиями Неймана

3.1. Исследование гипербуферности в прямоугольнике и квадрате.

Рассмотрим случай прямоугольника с неравными сторонами, т. е. в области

$$\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq l\} \quad (3.1)$$

рассмотрим краевую задачу

$$u_t + i\Delta u = \varepsilon(u - d|u|^2 u), \quad u_x|_{x=0, x=1} = u_y|_{y=0, y=l} = 0. \quad (3.2)$$

Заметим, что эта задача допускает, очевидно, решения, зависящие только от одной пространственной переменной x или y . В частности, из результатов монографии [1] следует существование такого достаточно малого числа $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ задача (3.2) имеет счетное число автомодельных циклов

$$u = u_n^1(x, \varepsilon) \exp(i\omega_n^1(\varepsilon)t), \quad u = u_n^2(y, \varepsilon) \exp(i\omega_n^2(\varepsilon)t), \quad n \geq 1. \quad (3.3)$$

Здесь достаточно гладкие по своим переменным функции u_n^j, ω_n^j , $j = 1, 2$, таковы, что равномерно по $n \geq 1$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, l]$

$$\begin{aligned} u_n^1(x, \varepsilon) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(n\pi x) + O(\varepsilon), & u_n^2(y, \varepsilon) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{n\pi y}{l}\right) + O(\varepsilon), \\ \omega_n^1(\varepsilon) &= n^2\pi^2 - c_0\varepsilon + O(\varepsilon^2), & \omega_n^2(\varepsilon) &= \frac{n^2\pi^2}{l^2} - c_0\varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Кроме того, в [1] установлена равномерная экспоненциальная орбитальная устойчивость всех циклов (3.3), (3.4) по отношению к возмущениям начальных условий, зависящим только от x или y соответственно. Тем самым, естественным образом возникает проблема исследования их устойчивости по отношению к произвольным возмущениям начальных условий $(u, \bar{u}) \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega) \times \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$, где $\overset{\circ}{W}_2^2$ – замыкание в метрике W_2^2 линейала гладких функций, удовлетворяющих нулевым граничным условиям Неймана. Решение этой проблемы приводится ниже.

ТЕОРЕМА 3.1. *Фиксируем произвольно натуральное n_0 и будем считать параметр l из (3.1) таковым, что при каждом $n = 1, 2, \dots, n_0$ и при всех целых $k \geq 0$, $m \geq 1$ выполняются неравенства*

$$k^2 + \frac{m^2}{l^2} \neq n^2, \quad k^2 + m^2 l^2 \neq n^2. \quad (3.5)$$

Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n_0, l) > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ циклы (3.3) краевой задачи (3.2) с номерами $n = 1, 2, \dots, n_0$ экспоненциально орбитально устойчивы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольно номер $n \leq n_0$ и покажем устойчивость соответствующего цикла семейства (3.3), зависящего только от x (случай цикла, зависящего от y , разбирается аналогично). Как и при доказательстве теоремы 1.3, интересующая нас проблема с учетом формул (3.4) сводится к анализу расположения спектра аналогичной (2.1) краевой задачи

$$\Pi_n h + \varepsilon A_n(x)h = \lambda h, \quad h_x|_{x=0, x=1} = h_y|_{y=0, y=l} = 0, \quad (3.6)$$

где $h = \text{colon}(h_1, h_2)$,

$$\begin{aligned} \Pi_n &= \text{diag}\{-i(\Delta + \pi^2 n^2), i(\Delta + \pi^2 n^2)\}, \quad A_n(x) = \begin{pmatrix} \varkappa_{1,n}(x) & \varkappa_{2,n}(x) \\ \bar{\varkappa}_{2,n}(x) & \bar{\varkappa}_{1,n}(x) \end{pmatrix}, \\ \varkappa_{1,n} &= d\left(1 - \frac{8}{3} \cos^2(n\pi x)\right), \quad \varkappa_{2,n} = -\frac{4}{3}d \cos^2(n\pi x). \end{aligned}$$

При исследовании этой краевой задачи удобно положить

$$h = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(x) \cos\left(\frac{m\pi y}{l}\right).$$

В результате в силу независимости ее коэффициентов от y она “расслаивается” на счетное число краевых задач для $h = h_m(x)$:

$$\Pi_{m,n} h + \varepsilon A_n(x)h = \lambda h, \quad \left. \frac{dh}{dx} \right|_{x=0, x=1} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.7)$$

где

$$\Pi_{m,n} = \text{diag}\{-iL_{m,n}, iL_{m,n}\}, \quad L_{m,n} = \frac{d^2}{dx^2} + \pi^2 n^2 - \frac{\pi^2 m^2}{l^2}.$$

Отметим, что случай $m = 0$ в (3.7) рассматривать нет необходимости, так как, что уже отмечалось выше, интересующий нас цикл устойчив по отношению к возмущениям начальных условий, зависящим только от x . В случае же $m \geq 1$ при $\varepsilon = 0$ спектр каждой из задач (3.7) состоит из чисто мнимых собственных значений

$$\lambda_k, \bar{\lambda}_k: \quad \lambda_k = i\pi^2 \left(k^2 + \frac{m^2}{l^2} - n^2 \right), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.8)$$

которым отвечают собственные функции

$$v_k(x) = a_1 \cos(k\pi x), \quad w_k(x) = a_2 \cos(k\pi x), \quad (3.9)$$

где, напомним, векторы a_1, a_2 – те же, что и в (1.33).

Как и в п. 2.1, для нахождения поправок порядка ε к собственным значениям (3.8) подставим в (3.7) выражения

$$h = v_k(x) + \varepsilon v_{k,1}(x), \quad \lambda = \lambda_k + \varepsilon \lambda_{k,1}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

и приравняем коэффициенты при ε . В итоге приходим к уравнению

$$(\lambda_k I - \Pi_{m,n})v_{k,1} = A_n(x)v_k(x) - \lambda_{k,1}v_k(x), \quad (3.10)$$

решение которого в случае $k \neq n$ ищем в виде линейной комбинации функций $\cos(k\pi x)$, $\cos((k \pm 2n)\pi x)$. На этом пути сначала, приравнявая нулю в его правой части коэффициент при $a_1 \cos(k\pi x)$, находим

$$\lambda_{k,1} = -\frac{d}{3}, \quad (3.11)$$

а затем определяем и функцию $v_{k,1}(x)$, имеющую вид

$$v_{k,1}(x) = r_1 \cos(k\pi x) + r_2 \cos((k + 2n)\pi x) + r_3 \cos((k - 2n)\pi x), \quad (3.12)$$

где

$$\begin{aligned} r_1 &= \text{colon}(r_1^1, r_1^2), \quad r_2 = \text{colon}(r_+^1, r_+^2), \quad r_3 = \text{colon}(r_-^1, r_-^2), \\ r_1^1 &= 0, \quad r_1^2 = \frac{id}{3\pi^2(k^2 + m^2/l^2 - n^2)}, \quad r_\pm^1 = -\frac{id}{6\pi^2 n(n \pm k)}, \\ r_\pm^2 &= \frac{i\bar{d}}{6\pi^2((n \pm k)^2 + m^2/l^2)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Отметим, что знаменатели в формулах для $r_\pm^2$ отличны от нуля в силу условий теоремы (см. (3.5)).

В случае $k = n$ рассмотрению подлежит то же самое уравнение (3.10), но теперь его решение следует искать в виде линейной комбинации только двух функций $\cos(n\pi x)$ и $\cos(3n\pi x)$. Проводя соответствующие вычисления, убеждаемся, что здесь

$$\lambda_{n,1} = -d, \quad v_{n,1} = r_1 \cos(n\pi x) + r_2 \cos(3n\pi x), \quad (3.14)$$

где $r_1 = \text{colon}(0, i\bar{d}l^2/(2\pi^2 m^2))$, а для компонент вектора r_2 справедливы прежние формулы (3.13) (при $k = n$).

Для обоснования полученных асимптотических формул сделаем при каждом $m \geq 1$ в краевой задаче (3.7) замену переменных

$$h = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_{k,1}(v_k(x) + \varepsilon v_{k,1}(x)) + \eta_{k,2}(w_k(x) + \varepsilon w_{k,1}(x)), \quad (3.15)$$

где $\eta = \text{colon}(\eta_{0,1}, \eta_{0,2}, \dots, \eta_{k,1}, \eta_{k,2}, \dots) \in l_2$, $w_{k,1} = v_{k,1}^*$, а операция $*$ та же, что и в (2.61). Из описанного выше способа построения входящих в правую часть формулы (3.15) функций следует, что, во-первых, равенством (3.15) задается ограниченный (вместе со своим обратным) линейный оператор, действующий из l_2 в $L_2(0,1) \times L_2(0,1)$; во-вторых, результатом выполнения данной замены в (3.7) является спектральная задача в l_2 :

$$(\Gamma_{0,m,n} + \varepsilon^2 \Gamma_{1,m,n}(\varepsilon))\eta = \lambda\eta, \quad (3.16)$$

где

$$\Gamma_{0,m,n} = \text{diag}\{\lambda_0 + \varepsilon\lambda_{0,1}, \bar{\lambda}_0 + \varepsilon\bar{\lambda}_{0,1}, \dots, \lambda_k + \varepsilon\lambda_{k,1}, \bar{\lambda}_k + \varepsilon\bar{\lambda}_{k,1}, \dots\}, \quad (3.17)$$

а линейный оператор $\Gamma_{1,m,n}(\varepsilon)$ ограничен равномерно по ε .

Итак, проблема устойчивости выбранного нами цикла свелась к исследованию расположения спектра оператора $\Gamma_{0,m,n} + \varepsilon^2\Gamma_{1,m,n}$ из (3.16). В связи с этим обратим внимание на следующие обстоятельства: в силу (3.8), (3.11), (3.14) все собственные значения диагонального оператора (3.17) имеют отрицательные действительные части порядка ε , а из характера зависимости от m входящих в (3.15) функций $v_{k,1}$, $w_{k,1}$ (см. (3.12)–(3.14)) вытекает, что оператор $\Gamma_{1,m,n}$ равномерно ограничен также и по $m \geq 1$. Тем самым, по любому фиксированному $\gamma_0 \in (0, 1/3)$ можно указать такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n_0, l, \gamma_0) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ спектр каждой из краевых задач (3.7) при $m \geq 1$, $n = 1, 2, \dots, n_0$ лежит в комплексной полуплоскости $\{\lambda: \text{Re } \lambda \leq -\gamma_0\varepsilon\}$. Теорема доказана.

Отдельно остановимся на случае $l = 1$, который в силу условий (3.5) оказывается исключенным из рассмотрения в рамках теоремы 3.1. При $l = 1$, как нетрудно увидеть, циклы (3.3) становятся симметричными, т. е. переходят друг в друга в результате замен $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$. Обозначим, далее, через S – совокупность таких номеров n , что $n^2 \neq k^2 + m^2$ при любых натуральных k, m . Справедливо следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.2. *Пусть в (3.1) $l = 1$. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и при каждом $n \in S$ соответствующая пара циклов (3.3) краевой задачи (3.2) экспоненциально орбитально устойчива.*

Для доказательства достаточно заметить, что при любом $n \in S$ все проделанные в процессе обоснования теоремы 3.1 построения сохраняются и, в частности, оператор $\Gamma_{1,m,n}$ из (3.16) оказывается равномерно ограниченным по ε , $m \geq 1$, $n \in S$ (малые знаменатели в (3.13) не появляются, так как при каждом $n \in S$ имеем $|k^2 + m^2 - n^2| \geq 1$).

Из теоремы 3.2 и того факта, что множество S состоит из бесконечного числа элементов, вытекает, что при $l = 1$ в рамках краевой задачи (3.2) реализуется феномен гипербуферности. Более того, как и циклы (1.43) задачи (1.8), соответствующие циклы (3.3) обладают свойством равномерной устойчивости по $n \in S$, т. е. для них справедлив аналог теоремы 1.3. Действительно, существование требуемой постоянной $\gamma_0 > 0$ для краевых задач (3.7) в случае $m \geq 1$, $n \in S$ следует из упомянутых выше свойств оператора $\Gamma_{1,m,n}(\varepsilon)$, а в случае $m = 0$, $n \geq 1$ – из результатов монографии [1].

Предположим теперь, что по-прежнему $l = 1$, а номер n удовлетворяет равенству $n^2 = k_0^2 + m_0^2$ при некоторых натуральных k_0 и m_0 . Тогда соответствующая пара циклов (3.3) экспоненциально неустойчива. Действительно, в этом случае при $\varepsilon = 0$ краевая задача (3.7) с номером m_0 имеет двукратное нулевое собственное значение, которому отвечают собственные функции (3.9) при $k = k_0$. Поэтому для расчета поправок порядка ε для данных собственных значений составим уравнение

$$\Pi_{m_0,n}H + \varepsilon A_n(x)H = HB, \quad (3.18)$$

в котором $H = H_0 + \varepsilon H_1$, $H_0 = [v_{k_0}(x), w_{k_0}(x)]$, $H_1 = [v_{k_0,1}(x), w_{k_0,1}(x)]$, $B = \varepsilon B_0$,

$$B_0 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ \bar{b}_2 & \bar{b}_1 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Приравнивая в (3.18) коэффициенты при ε , для $v_{k_0,1}$, $w_{k_0,1}$ получим аналогичные (3.10) линейные неоднородные уравнения, а неизвестные элементы матрицы (3.19) определим из условий разрешимости этих уравнений в классе функций вида (3.12) (при $k = k_0$). Опуская соответствующие вычисления, аналогичные описанным в п. 2.2, приведем сразу окончательный результат:

$$b_1 = -d/3, \quad b_2 = -2d/3. \quad (3.20)$$

Из равенств (3.20) вытекает существование у матрицы (3.19) положительного собственного значения, что и доказывает неустойчивость всех циклов (3.3) при $l = 1$, $n \notin S$. Отсюда косвенным образом следует, что по крайней мере в случае $l = 1$ краевая задача (3.2) кроме циклов (3.3) должна иметь и другие аттракторы, нетривиально зависящие от обеих пространственных переменных.

Интересно то, что все результаты, полученные выше при $l = 1$, в полной мере сохраняются и в случае произвольного рационального значения l^2 . Действительно, пусть $l^2 = p_0/q_0$, где p_0 и q_0 взаимно просты. Рассмотрим, далее, множества номеров n

$$\begin{aligned} S_l^1 &= \{n: n^2 \neq k^2 + m^2/l^2, k, m \in \mathbb{N}\}, \\ S_l^2 &= \{n: n^2 \neq k^2 + m^2 l^2, k, m \in \mathbb{N}\} \end{aligned} \quad (3.21)$$

и предположим, к примеру, что $n \in S_l^1$. Тогда, повторяя практически дословно доказательство теоремы 3.1, убеждаемся в существовании такого не зависящего от n достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ все циклы первого подсемейства (3.3) с номерами $n \in S_l^1$ равномерно экспоненциально орбитально устойчивы (равномерность этого свойства вытекает из оценок $|k^2 + m^2/l^2 - n^2| \geq 1/p_0$, гарантирующих отсутствие малых знаменателей в (3.13)). Если же номер n таков, что $n^2 = k_0^2 + m_0^2/l^2$ при некоторых натуральных k_0 , m_0 , то сохраняются равенства (3.18), (3.19), а значит, рассматриваемый цикл оказывается неустойчивым. Отметим еще, что аналогичные выводы справедливы и для циклов второго подсемейства (3.3) при $n \in S_l^2$ и $n \notin S_l^2$ соответственно. И наконец, остается добавить, что поскольку каждое из множеств (3.21) содержит бесконечное число элементов, то в данном случае имеет место свойство гипербуферности.

Заканчивая исследование феномена гипербуферности для краевой задачи (3.2), предположим, что l^2 иррационально. Тогда условия (3.5) выполняются при всех n , а значит, теорема 3.1 гарантирует устойчивость при надлежащем уменьшении ε любого конечного набора циклов (3.3). Иными словами, в этом случае наблюдается буферность. Вопрос о наличии здесь гипербуферности остается открытым и, по всей видимости, зависит от более тонких свойств числа l^2 , а именно от скорости его аппроксимации рациональными числами. Для пояснения этого заметим, что при иррациональном l^2 могут существовать такие последовательности номеров m_s, k_s, n_s , $s \geq 1$, что, например,

$$k_s^2 + m_s^2/l^2 - n_s^2 \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty. \quad (3.22)$$

Это означает, что во избежание малых знаменателей (см. (3.13)) алгоритм расчета асимптотики собственных значений краевой задачи (3.7) при $m = m_s$, $n = n_s$ на модах (3.9) с номерами $k = k_s$ следует проводить в форме (3.18), где

$$B = \text{diag}\{\lambda_{k_s}, \bar{\lambda}_{k_s}\} + \varepsilon B_0. \quad (3.23)$$

Несложным подсчетом убеждаемся в том, что для матрицы B_0 из (3.23) справедливы прежние формулы (3.19), (3.20). Отсюда и из предельного равенства $\lim \lambda_{k_s} = 0$, $s \rightarrow \infty$ (см. (3.22)), вытекает существование такого $s = s_0(\varepsilon)$, $\lim s_0(\varepsilon) = \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, что при всех $s \geq s_0(\varepsilon)$ матрица (3.23) имеет собственное значение в полуплоскости $\{\lambda: \text{Re} > 0\}$. Тем самым, в случае (3.22) оказываются неустойчивыми циклы первого подсемейства (3.3) с номерами $n = n_s$, $s \geq s_0(\varepsilon)$.

Итак, установлено, что появление малых знаменателей в (3.13) приводит к неустойчивости соответствующих циклов (3.3). Не ясно, однако, могут ли при этом оказаться неустойчивыми сразу все циклы (3.3) с достаточно большими номерами n .

3.2. Заключение. Рассмотрим уравнение (1.2) в произвольной ограниченной плоской области Ω и дополним его нулевыми граничными условиями Дирихле или Неймана на $\partial\Omega$. Из всей совокупности проделанных выше исследований можно вывести некоторый эвристический критерий наличия или отсутствия у получившейся краевой задачи свойства гипербуферности. Для его формулировки потребуются понятие спектральной щели:

$$\nu(\Omega) = \inf_{\lambda_n, \lambda_m: \lambda_n \neq \lambda_m} |\lambda_n - \lambda_m|,$$

где λ_n , $n \geq 1$, – собственные значения оператора $-\Delta$ в Ω , соответствующие выбранным граничным условиям.

Упомянутый критерий состоит в следующем: если для области Ω выполняется условие $\nu(\Omega) > 0$, то соответствующая краевая задача для уравнения (1.2) обладает свойством гипербуферности; если же $\nu(\Omega) = 0$, то, вообще говоря, в такой области указанное свойство уравнения (1.2) отсутствует.

Для обоснования данного критерия в случае прямоугольника (3.1) заметим, что вне зависимости от граничных условий равенство $\nu(\Omega) = 0$ эквивалентно требованию иррациональности l^2 . Если же $l^2 = p_0/q_0$ для некоторых натуральных p_0, q_0 , то $\nu(\Omega) \geq \pi^2/p_0$. Таким образом, отсутствие феномена гипербуферности при $\nu(\Omega) = 0$ иллюстрирует краевая задача (1.47), а наличие этого феномена при $\nu(\Omega) > 0$ установлено выше для краевых задач (1.8), (3.2).

В заключение обратим внимание на еще одну характерную особенность, а именно существенную зависимость аттракторов рассматриваемого уравнения при $\nu(\Omega) = 0$ от граничных условий. Действительно, при иррациональном l^2 в рамках краевой задачи (3.2) наблюдается феномен буферности, в то время как у аналогичной краевой задачи с условиями Дирихле все циклы и торы оказываются неустойчивыми (см. п. 1.4).

Список литературы

1. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений // Тр. МИАН. 1998. Т. 222.
2. Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Явление буферности в резонансных системах нелинейных гиперболических уравнений // УМН. 2000. Т. 55. № 2(332). С. 95–120.
3. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Асимптотическая теория колебаний в системе Витта // Итоги науки и техники. Современная математика и ее прилож. Т. 67. М.: ВИНТИ, 1999. С. 5–69.
4. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Явление буферности в RCLG-автогенераторе: теоретический анализ и результаты эксперимента // Тр. МИАН. 2001. Т. 233. С. 153–207.
5. Колесов А. Ю., Колесов Ю. С. Бифуркация автоколебаний сингулярно возмущенного волнового уравнения // ДАН СССР. 1990. Т. 315. № 2. С. 281–283.
6. Колесов А. Ю. Существование счетного числа устойчивых циклов в средах с дисперсией // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 3. С. 141–158.
7. Лейбович С., Сибасс А. (ред.). Нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
8. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М.: Советское радио, 1977.
9. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
10. Ланда П. С. Нелинейные колебания и волны. М.: Физматлит, 1997.
11. Scheuer J., Malomed B. A. Stable and chaotic solutions of the complex Ginzburg–Landau equation with periodic boundary conditions // Physica D. 2002. V. 161. P. 102–115.
12. Захаров А. А., Колесов Ю. С. Пространственно неоднородные режимы в задаче хищник–жертва // Нелинейные колебания и экология. Ярославль. 1984. С. 3–15.
13. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Диффузионная буферность в одной математической модели биологии // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 5. С. 135–164.
14. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
15. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М.: Мир, 1985.
16. Колесов Ю. С. Бифуркация инвариантных торов параболических систем с малой диффузией // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 3. С. 121–136.
17. Колесов А. Ю., Розов Н. Х. Особенности динамики уравнения Гинзбурга–Ландау в плоской области // ТМФ. 2000. Т. 125. № 2. С. 205–220.

Поступило в редакцию
17.VI.2002