Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Прохоров, О разрешимости краевой задачи теории переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 6, 169–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/im463>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 12:10:36

УДК 517.958

И. В. Прохоров

**О разрешимости краевой задачи теории
переноса излучения с обобщенными условиями
сопряжения на границе раздела сред**

Исследована краевая задача для стационарного интегро-дифференциального уравнения переноса излучения в многокомпонентной среде, на границах раздела которой с помощью формул Френеля заданы условия сопряжения. Показана разрешимость краевой задачи при некоторых, типичных в теории переноса излучения, ограничениях. Получены оценки решения краевой задачи.

Библиография: 15 наименований.

Введение

В настоящей работе рассматривается краевая задача для стационарного монохроматического уравнения переноса излучения. Иногда это уравнение называют *односкоростным линеаризованным уравнением Больцмана*. Среда, в которой изучается процесс переноса излучения, состоит из разнородных по своим физическим характеристикам материалов с различными показателями преломления. На границах контакта сред (в точках разрыва коэффициентов уравнения или показателя преломления) задаются условия сопряжения, которые являются следствиями формул Френеля [1], [2]. Условия сопряжения выражают связь между падающим, отраженным и преломленным потоками на поверхности раздела сред. Изучаемую задачу по смыслу можно отнести к задачам дифракции [3], [4].

Более традиционными и гораздо более изученными являются задачи с условиями непрерывности решения уравнения переноса излучения на границе раздела сред [5]–[11]. Особо отметим фундаментальную работу [5] и монографию [8], в которых наиболее полно отражены основные вопросы теории краевых задач подобного типа. Заметим, что в случае непрерывности решения уравнения переноса излучения на границе раздела сред многие трудности, связанные с условиями сопряжения, можно обойти, выбрав соответствующий класс решений [5], [8]. Помимо причин физического характера, это, возможно, одна из причин, по которой термин “задача дифракции” в [5]–[11] не используется. Отметим, что и в рассматриваемом случае указанный термин применяется редко. Дело в том, что в оптике термин “дифракционная задача” понимается в некотором более узком смысле [1], нежели в [3], [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 01-01-00128) и гранта № 4 Шестого конкурса-экспертизы научных проектов молодых ученых РАН по фундаментальным и прикладным исследованиям.

В статье [12] данная задача исследовалась в случае, когда линейный оператор сопряжения $\hat{B}$, определяющий контактные граничные условия, обладал достаточно большой общностью задания, но имел некоторые ограничения. В частности, предполагалось выполнение неравенства $\|\hat{B}\| < 1$. Это противоречит граничным условиям настоящей работы. В работах [7]–[9] изучались задачи с условиями отражения на внешней границе. В этих задачах норма оператора отражения $\hat{R}$, моделирующего влияние внешней среды, могла принимать значения, равные единице. При этом налагались некоторые дополнительные ограничения на $\hat{R}$.

В настоящей статье результаты работы [12] обобщены для случая $\|\hat{B}\| \leq 1$, $\hat{B}$ – оператор конкретного вида (см. [2]). Доказана разрешимость краевой задачи при типичных ограничениях [8] на коэффициенты уравнения и без каких-либо других дополнительных условий на $\hat{B}$. Получены некоторые оценки для решения краевой задачи.

Работа состоит из четырех параграфов. В §1 вводятся функциональные пространства, необходимые для определения решения краевой задачи. Исследуются свойства этих пространств. Формулируются основные ограничения и определения. В §2 приводится постановка задачи. Устанавливаются некоторые свойства оператора сопряжения $\hat{B}$. Выводится эквивалентная постановка краевой задачи. В §3 доказываются некоторые вспомогательные утверждения с достаточно произвольным оператором $\hat{B}$. Леммы этого параграфа ввиду их общности имеют самостоятельный интерес. В §4 доказаны теоремы, касающиеся разрешимости основной граничной задачи с условиями сопряжения на основе формул Френеля.

§1. Основные обозначения, определения и ограничения

Обозначим через X измеримое (по мере Лебега) подмножество n -мерного евклидова пространства E^n . Пусть $\bar{X}$ – замыкание множества X , $\text{int}(X)$ – множество внутренних точек X , ∂X – граница X , а $\text{mes}_m(X)$, где $m \leq n$, есть m -мерная мера Лебега множества X .

Определим банахово пространство $L_\infty(X)$, состоящее из измеримых и ограниченных (почти всюду на X) функций, с нормой

$$\|\varphi\|_X = \sup_{x \in X} \text{vrai} |\varphi(x)|.$$

Пусть $\Omega = \{\omega \in E^3: |\omega|^2 = \omega \cdot \omega = 1\}$ – единичная сфера в E^3 , G – открытое ограниченное подмножество пространства E^3 , причем $\bar{G}$ – выпуклое множество. Обозначим через $r = (r^1, r^2, r^3)$ элементы G и через d – диаметр множества G .

Предметом исследования будет следующее интегро-дифференциальное уравнение переноса:

$$\omega \cdot \nabla_r f(r, \omega) + \mu(r) f(r, \omega) = \mu_s(r) \int_{\Omega} g(r, \omega \cdot \omega') f(r, \omega') d\omega' + J(r, \omega), \quad (1.1)$$

$$(r, \omega) \in G \times \Omega.$$

Уравнение (1.1) описывает стационарный процесс распространения монохроматического неполяризованного излучения. При этом функция $f(r, \omega)$ имеет смысл

плотности потока излучения в точке r и направлении ω . Величины μ , μ_s , g и J являются характеристиками среды G и называются соответственно *коэффициентом полного ослабления, коэффициентом рассеяния, фазовой функцией рассеяния и плотностью внутренних источников*.

Будем называть множество $\partial\bar{G}$ ($\partial\bar{G} \subset \partial G$) *внешней границей среды G* , а $\gamma = \partial G \setminus \partial\bar{G}$ – *внутренней границей* [5], [8]. Предположим, что G допускает разбиение на конечное число подобластей $G_1, G_2, \dots, G_p$:

$$G = \bigcup_{i=1}^p G_i, \quad G_i \cap G_j = \emptyset, \quad i \neq j. \quad (1.2)$$

Области G_i будем интерпретировать как неоднородности, входящие в состав многокомпонентной среды G . Часто, особенно в задачах дифракции, при введении разбиения $G_1, G_2, \dots, G_p$ придерживаются иного определения. Говорят [3], [4], что поверхность γ разбивает область $\text{int}(\bar{G})$ на подобласти $G_1, G_2, \dots, G_p$.

Границы областей G_i предполагаются кусочно гладкими класса $C^{(1)}$ [5]. Для определенности, говоря о единичном векторе $n(z)$ нормали к границе множества G в точке $z \in \partial G_i \subset \partial G$, будем иметь в виду внешнюю нормаль к ∂G_i . Если z является точкой контакта двух смежных областей G_i и G_j , $1 \leq i < j \leq p$, на участках гладкости ∂G_i и ∂G_j , то $n(z)$ выбирается внешней к поверхности с бóльшим индексом, т. е. к ∂G_j . Дополнительно предположим, что для ∂G выполнено условие обобщенной выпуклости, как оно понимается в [8], т. е. любая прямая, имеющая общую точку с G , пересекает ∂G в конечном числе точек. Заметим, что сделанных предположений достаточно для того, чтобы $\text{mes}_3(\partial G) = 0$ [10].

Обозначим через Π_ω ортогональную проекцию множества G на плоскость, перпендикулярную направлению ω и проходящую через фиксированную точку в E^3 . Пусть $\Pi_{\xi, \omega}$, где $\xi \in \Pi_\omega$, $\omega \in \Omega$, есть пересечение прямой $\{\xi + t\omega, -\infty < t < +\infty\}$ и множества G . По условию обобщенной выпуклости одномерное открытое множество $\Pi_{\xi, \omega}$ является объединением конечного числа интервалов

$$\Pi_{\xi, \omega}^i = \{\xi + t\omega, t_i(\xi, \omega) < t < t_{i+1}(\xi, \omega)\}, \quad i = 1, \dots, q(\xi, \omega), \quad (1.3)$$

$$-\infty < t_1(\xi, \omega) < \dots < t_{q+1}(\xi, \omega) < +\infty, \quad q(\xi, \omega) \leq \bar{q} = \sup_{(\xi, \omega) \in \Pi_\omega \times \Omega} q(\xi, \omega) < \infty,$$

$$\Pi_{\xi, \omega} = \bigcup_{i=1}^{q(\xi, \omega)} \Pi_{\xi, \omega}^i.$$

Отметим, что $r = \xi + t\omega$ есть взаимно однозначное преобразование множества G в $\Pi_\omega \times \Pi_{\xi, \omega}$. Оно является непрерывным и непрерывно дифференцируемым по всем аргументам с якобианом, равным единице, следовательно, преобразование $r = \xi + t\omega$, $\omega = \omega'$ переводит функции, измеримые на $G \times \Omega$, в функции, измеримые на $\Pi_\omega \times \Pi_{\xi, \omega} \times \Omega$ [5].

Обозначим через $\varphi(\xi, t, \omega)$ функцию, задаваемую равенствами

$$\varphi(\xi, t, \omega) = \frac{t_{i+1}(\xi, \omega) - t}{t_{i+1}(\xi, \omega) - t_i(\xi, \omega)}, \quad (\xi, t, \omega) \in \Pi_\omega \times \Pi_{\xi, \omega}^i \times \Omega, \quad i = \overline{1, q(\xi, \omega)}. \quad (1.4)$$

Пусть $t_i(\xi, \omega)$ таковы, что функции $\varphi(\xi, t, \omega)$ и $\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\xi, t, \omega)$ суммируемы на $\Pi_\omega \times \Pi_{\xi, \omega} \times \Omega$.

Введем в рассмотрение множества

$$\Gamma_{-\omega} = \{\xi + t_i(\xi, \omega)\omega, \xi \in \Pi_\omega, i = \overline{1, q(\xi, \omega)}\}, \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_\omega &= \{\xi + t_{i+1}(\xi, \omega)\omega, \xi \in \Pi_\omega, i = \overline{1, q(\xi, \omega)}\} \\ &= \{\xi - t_i(\xi, -\omega)\omega, \xi \in \Pi_{-\omega}, i = \overline{1, q(\xi, -\omega)}\}, \\ \Gamma^\pm &= (\Gamma_{\pm\omega} \times \Omega), \quad \Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Заметим, что $\text{mes}_4(\partial G \times \Omega \setminus \Gamma) = 0$ и $\text{mes}_4(\gamma \times \Omega \setminus \Gamma^\pm) = 0$. С точностью до множества меры нуль в E^4 можно записать

$$\Gamma^\pm = (\gamma \times \Omega) \cup (\partial \overline{G} \times \{\omega \in \Omega, \pm(n(z) \cdot \omega) > 0\}). \quad (1.7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Функция Φ принадлежит $L_\infty(\Gamma^-)$, если она ограничена почти всюду на Γ^- и

$$\sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)} \Phi(\xi + t_i(\xi, \omega)\omega, \omega) \in L_\infty(\Pi_\omega \times \Omega),$$

и принадлежит $L_\infty(\Gamma^+)$, если

$$\sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)} \Phi(\xi + t_{i+1}(\xi, \omega)\omega, \omega) \in L_\infty(\Pi_\omega \times \Omega).$$

Оператор $\omega \cdot \nabla_r f$ в точке $(r, \omega) = (\xi + t\omega, \omega) = (\xi, t, \omega)$ запишем в виде

$$\omega \cdot \nabla_r f = \frac{\partial}{\partial t} f(r + t\omega, \omega) \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} f(\xi + t\omega, \omega). \quad (1.8)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} f(z \pm 0\omega, \omega) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} f(z \pm \varepsilon\omega, \omega), \\ [f]_{\omega'}(z, \omega) &= f(z + 0\omega', \omega) - f(z - 0\omega', \omega). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Величину $[f]_{\omega'}(z, \omega)$ будем называть *скачком функции* (величиной разрыва) в точке (z, ω) и в направлении ω' .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Отнесем к классу D функции $f(r, \omega) = f(\xi + t\omega, \omega)$, которые после надлежащего изменения на множестве меры нуль в $G \times \Omega$ будут обладать следующими свойствами:

- 1) почти при всех $(\xi, \omega) \in \Pi_\omega \times \Omega$ функция $f(\xi + t\omega, \omega)$ абсолютно непрерывна по t на каждом полуоткрытом интервале $(t_i(\xi, \omega), t_{i+1}(\xi, \omega)]$, $i = \overline{1, q(\xi, \omega)}$;
- 2) функция f такова, что $f, \omega \cdot \nabla_r f \in L_\infty(G \times \Omega)$.

В определении 1.2 абсолютная непрерывность функции на незамкнутых (слева) интервалах понимается в том же смысле, что и в [13].

Исследуем вопрос о граничных значениях функции f из класса D . Пусть $f \in D$ и функция $\varphi(\xi, t, \omega)$ определяется равенствами (1.4). Построим функцию

$$\Phi(\xi, t, \omega) = f(\xi + t\omega, \omega) \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi(\xi, t, \omega) \right) + \left(\frac{\partial}{\partial t} f(\xi + t\omega, \omega) \right) \varphi(\xi, t, \omega).$$

Поскольку $f(\xi + t\omega, \omega), f'_t(\xi + t\omega, \omega) \in L_\infty(\Pi_\omega \times \Pi_{\xi, \omega} \times \Omega)$, а функции φ, φ'_t интегрируемы на множестве $\Pi_\omega \times \Pi_{\xi, \omega} \times \Omega$, то функция Φ суммируема на $\Pi_\omega \times \Pi_{\xi, \omega} \times \Omega$. Кроме того, по теореме Фубини [13]–[15] при почти всех $(\xi, \omega) \in \Pi_\omega \times \Omega$ существуют интегралы

$$I(\xi, \omega) = \int_{\Pi_{\xi, \omega}} \Phi(\xi, t, \omega) dt,$$

которые являются суммируемыми функциями на множестве $\Pi_\omega \times \Omega$. Поскольку выполнено (1.3) и $|\varphi| \leq 1$, то при почти всех $(\xi, \omega) \in \Pi_\omega \times \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_{\xi, \omega}} |\varphi(\xi, t, \omega)| dt &\leq \int_{\Pi_{\xi, \omega}} dt \leq d, \\ \int_{\Pi_{\xi, \omega}} \left| \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\xi, t, \omega) \right| dt &\leq \sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{dt}{|t_{i+1}(\xi, \omega) - t_i(\xi, \omega)|} \leq \sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)} 1 = q(\xi, \omega) \leq \bar{q}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|I\|_{\Pi_\omega \times \Omega} &= \left\| \int_{\Pi_{\xi, \omega}} \Phi(\xi, t, \omega) dt \right\|_{\Pi_\omega \times \Omega} \\ &\leq \|f(\xi + t\omega, \omega)\|_{\Pi_\omega \times \Pi_{\xi, \omega} \times \Omega} \left\| \int_{\Pi_{\xi, \omega}} \left| \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\xi, t, \omega) \right| dt \right\|_{\Pi_\omega \times \Omega} \\ &\quad + \left\| \frac{\partial}{\partial t} f(\xi + t\omega, \omega) \right\|_{\Pi_\omega \times \Pi_{\xi, \omega} \times \Omega} \left\| \int_{\Pi_{\xi, \omega}} |\varphi(\xi, t, \omega)| dt \right\|_{\Pi_\omega \times \Omega} \\ &\leq \|f\| \bar{q} + \|\omega \cdot \nabla_r f\| d < \infty, \end{aligned}$$

т. е. $I(\xi, \omega) \in L_\infty(\Pi_\omega \times \Omega)$. Учитывая абсолютную непрерывность функций $f(\xi + t\omega, \omega), f'_t(\xi + t\omega, \omega), \varphi, \varphi'_t$ по переменной $t \in (t_i, t_{i+1}]$, применим к интегралу I формулу интегрирования по частям [13]:

$$\begin{aligned} I(\xi, \omega) &= \sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(\xi, t, \omega) dt = \sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)} f(\xi + t\omega, \omega) \frac{t_{i+1}(\xi, \omega) - t}{t_{i+1}(\xi, \omega) - t_i(\xi, \omega)} \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \\ &= - \sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)} f(\xi + t_i(\xi, \omega)\omega + 0\omega, \omega). \end{aligned}$$

Поскольку $I(\xi, \omega) \in L_\infty(\Pi_\omega \times \Omega)$, то

$$\sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)} f(\xi + t_i(\xi, \omega)\omega + 0\omega, \omega) \in L_\infty(\Pi_\omega \times \Omega). \quad (1.10)$$

С помощью линейной комбинации

$$1 - \varphi(\xi, t, \omega) = \frac{t - t_i(\xi, \omega)}{t_{i+1}(\xi, \omega) - t_i(\xi, \omega)}$$

аналогично устанавливается, что

$$\sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)} f(\xi + t_{i+1}(\xi, \omega)\omega - 0\omega, \omega) = \sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)} f(\xi + t_{i+1}(\xi, \omega)\omega, \omega) \in L_\infty(\Pi_\omega \times \Omega). \quad (1.11)$$

Для функции $f \in D$ через

$$f^\pm(z, \omega) = f(z \mp 0\omega, \omega), \quad (z, \omega) \in \Gamma^\pm, \quad (1.12)$$

обозначим следы функции f на $\Gamma^\pm$. Таким образом, согласно определению 1.1, соотношениям (1.10) и (1.11) функции $f^\pm$, понимаемые как соответствующие предельные значения f из D , существуют и являются элементами пространств $L_\infty(\Gamma^\pm)$.

Учитывая (1.8), обозначим

$$lf = \omega \cdot \nabla_r f(r, \omega) + \mu(r)f(r, \omega) = \frac{\partial}{\partial t} f(\xi + t\omega, \omega) + \mu(\xi + t\omega)f(\xi + t\omega, \omega), \quad (1.13)$$

где функция $\mu \in L_\infty(G)$ удовлетворяет неравенству

$$0 < \underline{\mu} \leq \mu(r) \leq \bar{\mu}, \quad \underline{\mu}, \bar{\mu} = \text{const}, \quad (1.14)$$

почти всюду на G .

Пусть $\hat{l}$ – линейный оператор с областью определения в D и со значениями в пространстве $L_\infty(G \times \Omega)$, задаваемый дифференциальным выражением lf из (1.13). Для любой функции $F \in L_\infty(G \times \Omega)$ найдем решение уравнения

$$\hat{l}f = F \quad (1.15)$$

в классе D . Нетрудно проверить, что при почти всех $(\xi, t, \omega) \in \Pi_\omega \times \Pi_{\xi, \omega} \times \Omega$

$$\begin{aligned} f(\xi + t\omega, \omega) &= f(\xi + t_i(\xi, \omega)\omega + 0\omega, \omega) \exp\left(-\int_{t_i(\xi, \omega)}^t \mu(\xi + t'\omega) dt'\right) \\ &+ \int_{t_i(\xi, \omega)}^t \exp\left(-\int_{t'}^t \mu(\xi + t''\omega) dt''\right) F(\xi + t'\omega, \omega) dt', \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $t_i(\xi, \omega)$ – ближайшая точка к t слева в представлении (1.3), т.е. такая, что $\{\xi + t'\omega, t_i(\xi, \omega) < t' \leq t\} \subset G$. Пусть луч $\{r + t\omega, t > 0\}$, $(r, \omega) \in G \times \Omega$, пересекает ∂G в точках $z_i(r, \omega) = r + t_i(r, \omega)\omega$, где

$$0 < t_1(r, \omega) < t_2(r, \omega) < \dots < t_{q+1}(r, \omega) \leq d.$$

Тогда, учитывая (1.16), решение уравнения (1.15) можно переписать в эквивалентном виде, справедливым при почти всех $(r, \omega) \in G \times \Omega$:

$$\begin{aligned} f(r, \omega) = & f(r - t_1(r, -\omega)\omega + 0\omega, \omega) \exp\left(-\int_0^{t_1(r, -\omega)} \mu(r - t\omega) dt\right) \\ & + \int_0^{t_1(r, -\omega)} \exp\left(-\int_0^t \mu(r - t'\omega) dt'\right) F(r - t\omega, \omega) dt. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Заметим, что согласно определению $f^\pm$ формулами (1.12) функция

$$f(r - t_1(r, -\omega)\omega + 0\omega, \omega)$$

существует и является следом f на Γ^- . Пусть $f \in D$ является решением (1.17). Оценим норму $\|f\| = \|f\|_{G \times \Omega}$ через $\|f^-\| = \|f^-\|_{\Gamma^-} = \sup \operatorname{vrai}_{(z, \omega) \in \Gamma^-} |f^-(z, \omega)|$ и норму $\|F/\mu\|$. Из (1.17), учитывая (1.14), имеем

$$\begin{aligned} \|f\| & \leq \left\| \|f^-\| \exp\left(-\int_0^{t_1(r, -\omega)} \mu(r - t\omega) dt\right) \right. \\ & \quad \left. + \left\| \frac{F}{\mu} \right\| \int_0^{t_1(r, -\omega)} \exp\left(-\int_0^t \mu(r - t'\omega) dt'\right) \mu(r - t\omega) dt \right\| \\ & \leq \max\left\{ \|f^-\|, \left\| \frac{F}{\mu} \right\| \right\} \left\| \exp\left(-\int_0^{t_1(r, -\omega)} \mu(r - t\omega) dt\right) \right. \\ & \quad \left. + 1 - \exp\left(-\int_0^{t_1(r, -\omega)} \mu(r - t\omega) dt\right) \right\| \\ & = \max\left\{ \|f^-\|, \left\| \frac{F}{\mu} \right\| \right\}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Отсюда вытекает, что если для любых двух решений $f_1, f_2 \in D$ уравнения (1.15) соответствующие им функции f_1^-, f_2^- совпадают почти всюду на Γ^- , то $f_1 = f_2$ почти везде в $G \times \Omega$.

На линейном множестве D определим норму

$$\|f\|_D = \max\left\{ \|f^-\|, \left\| \frac{\hat{I}f}{\mu} \right\| \right\}. \quad (1.19)$$

Согласно (1.18), (1.19)

$$\|f\| \leq \|f\|_D \quad (1.20)$$

и, следовательно, из сходимости последовательности функций в норме пространства D получаем сходимость в $L_\infty(G \times \Omega)$.

Покажем, что пространство D полное. Пусть последовательность f_n , $n = 1, 2, \dots$, фундаментальна в D :

$$\|f_n - f_m\|_D \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Отсюда, учитывая (1.19), получаем

$$\|f_n^- - f_m^-\| \rightarrow 0, \quad \left\| \frac{\hat{l}f_n}{\mu} - \frac{\hat{l}f_m}{\mu} \right\| \rightarrow 0, \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Поскольку пространства $L_\infty(\Gamma^-)$ и $L_\infty(G \times \Omega)$ банаховы, то существуют такие f^- и F , что

$$\|f_n^- - f^-\| \rightarrow 0, \quad \left\| \frac{\hat{l}f_n - F}{\mu} \right\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Так как решение уравнения $\hat{l}f = F$ в пространстве D при заданных значениях f на множестве Γ^- существует и единственно, то

$$\begin{aligned} \max \left\{ \|f_n^- - f^-\|, \left\| \frac{\hat{l}f_n - F}{\mu} \right\| \right\} &= \max \left\{ \|f_n^- - f^-\|, \left\| \frac{\hat{l}(f_n - f)}{\mu} \right\| \right\} \\ &= \|f_n - f\|_D \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, D – банахово пространство.

§ 2. Постановка задачи

Предположим, что функции, входящие в уравнение (1.1), таковы: $\mu(r), \mu_s(r) \in L_\infty(G)$, $J(r, \omega) \in L_\infty(G \times \Omega)$. Кроме того, $\mu_s \geq 0$ почти всюду в G , функция μ удовлетворяет неравенству (1.14), g – неотрицательная, измеримая на $G \times [-1, 1]$ и удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{\Omega} g(r, \omega \cdot \omega') d\omega' = 1 \quad (2.1)$$

почти при всех $r \in G$.

Решение f уравнения (1.1) будем находить в пространстве D . Опишем граничные условия для уравнения (1.1). На внешней границе множества G зададим величину плотности потока, входящего в среду G :

$$f^-(z, \omega) = h(z, \omega), \quad (z, \omega) \in \Gamma^- \cap (\partial \bar{G} \times \Omega), \quad (2.2)$$

где f^- – функция, определенная в (1.12). Функция $h(z, \omega) \in L_\infty(\Gamma^- \cap (\partial \bar{G} \times \Omega))$ предполагается неотрицательной.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. На внешней границе эффекты отражения и преломления не учитываются, т.е. поверхность $\partial \bar{G}$ является фиктивной границей раздела сред и служит только для задания входящего потока h .

Для описания условий сопряжения на внутренней границе (γ) нам понадобятся некоторые обозначения. Символом $k(r)$ обозначим показатель преломления в точке r среды G . Предположим, что $k(r)$ – кусочно постоянная функция в G , определяемая следующим образом:

$$k(r) = \sum_{i=1}^p \chi_i(r) k_i,$$

где $\chi_i(r)$ – характеристические функции областей G_i и $k_i > 0$, $i = 1, \dots, p$, – постоянные скалярные величины.

Пусть z – точка гладкости γ , лежащая на границе контакта двух областей G_i , G_j , $i < j$, $n(z)$ – единичный вектор внешней нормали в точке z . Как было оговорено в § 1, $n(z)$ – внешняя нормаль к ∂G_j , поэтому

$$k_i = k(z + 0n(z)), \quad k_j = k(z - 0n(z)).$$

Введем в рассмотрение функции

$$\tilde{k}(z, \nu) = \begin{cases} \frac{k_i}{k_j}, & \text{если } 0 < \nu \leq 1, \\ \frac{k_j}{k_i}, & \text{если } -1 \leq \nu < 0, \end{cases}$$

$$\psi(z, \nu) = \text{sign}(\nu) \sqrt{1 - \tilde{k}^2(z, \nu)(1 - \nu^2)},$$

где $\nu(z) = n(z) \cdot \omega$. Далее, там, где это не вызовет недоразумений, будем иногда опускать зависимость от переменной z . Запишем условия сопряжения на внутренней части границы G в виде

$$f^-(z, \omega) = (\hat{B}f^+)(z, \omega), \quad (z, \omega) \in \gamma \times \Omega. \quad (2.3)$$

Через $\hat{B}$ обозначим оператор сопряжения, определяемый выражением

$$(\hat{B}f^+)(z, \omega) = R(z, \nu)f^+(z, \omega_R) + T(z, \nu)f^+(z, \omega_T), \quad (2.4)$$

где

$$\omega_R = \omega - 2\nu n, \quad (2.5)$$

$$\omega_T = \psi(\nu)n + \tilde{k}(\nu)(\omega - \nu n), \quad (2.6)$$

$$\omega = -\psi(-\nu_T)n + \tilde{k}(-\nu_T)(\omega_T - \nu_T n), \quad \nu_T = \omega_T \cdot n, \quad (2.7)$$

$$R(\nu) = \frac{1}{2}(R_{\parallel}^2(\nu) + R_{\perp}^2(\nu)), \quad T(\nu) = \frac{1}{2}(T_{\parallel}^2(\nu) + T_{\perp}^2(\nu)) \frac{\tilde{k}(\nu)\nu}{\psi(\nu)}, \quad (2.8)$$

$$R_{\parallel}(\nu) = \frac{\tilde{k}(\nu)\psi(\nu) - \nu}{\tilde{k}(\nu)\psi(\nu) + \nu}, \quad R_{\perp}(\nu) = \frac{\psi(\nu) - \tilde{k}(\nu)\nu}{\psi(\nu) + \tilde{k}(\nu)\nu}, \quad (2.9)$$

$$T_{\parallel}(\nu) = \frac{2\psi(\nu)}{\tilde{k}(\nu)\psi(\nu) + \nu}, \quad T_{\perp}(\nu) = \frac{2\psi(\nu)}{\psi(\nu) + \tilde{k}(\nu)\nu}. \quad (2.10)$$

Здесь ω_R (или ω_T) – направление потока излучения, падающего на поверхность ∂G_j и в результате зеркального отражения (или, соответственно, преломления по закону Снеллиуса [1]) меняющего свое направление на ω . Векторы $\omega, \omega_R, \omega_T$ лежат в одной плоскости.

Коэффициенты R и T в формулах (2.8)–(2.10) характеризуют отражательную и пропускательную способности границы раздела сред G_i и G_j при френелевском отражении (преломлении) для неполяризованного излучения [1], [2].

Функции из формул (2.6) и (2.8)–(2.10) определены для всех $\omega \in \Omega$ таких, что $1 - \tilde{k}^2(z, \nu)(1 - \nu^2) \geq 0$, а при

$$1 - \tilde{k}^2(z, \nu)(1 - \nu^2) < 0, \quad \nu = n \cdot \omega, \quad (2.11)$$

положим $\psi(z, \nu) = 0$, $T(z, \omega) = 0$, $R(z, \omega) = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. При выполнении (2.11) не существует вещественного направления ω_T , для которого в результате действия преломления направление потока излучения изменилось бы с ω_T на ω . В оптике этот случай называется *полным внутренним отражением* [1].

Обозначим через Π'_ω подмножество Π_ω , состоящее из таких ξ , что прямая

$$\{\xi + t\omega, -\infty < t < +\infty\}$$

пересекает поверхности ∂G_i , $i = 1, \dots, p$, в точках гладкости и не является касательной ни к одной из них. Как показано в [10], множество Π'_ω открытое и функции $t_i(\xi, \omega)$, $i = 1, \dots, q(\xi, \omega)$, непрерывны на Π'_ω и имеют непрерывные частные производные по ξ_j . Будем предполагать, что $\text{mes}_2(\Pi_\omega \setminus \Pi'_\omega) = 0$ для любого $\omega \in \Omega$. Отметим, что поскольку множество Π'_ω открытое, то оно является объединением не более чем счетного числа областей, в которых $q(\xi, \omega)$ не зависит от ξ [10], и, как уже отмечалось, $t_i(\xi, \omega)$ и их производные – непрерывные функции.

ЛЕММА 2.1. Пусть оператор сопряжения определяется следующим образом:

$$(\hat{B}\varphi)(z, \omega) = 0, \quad (z, \omega) \in \Gamma^- \cap (\partial \bar{G} \times \Omega), \quad (2.12)$$

$$(\hat{B}\varphi)(z, \omega) = R(z, \nu)\varphi(z, \omega_R) + T(z, \nu)\varphi(z, \omega_T), \quad (z, \omega) \in \gamma \times \Omega, \quad (2.13)$$

где ω_R, ω_T, R, T введены формулами (2.5), (2.6), (2.8). Тогда

$$\hat{B}: L_\infty(\Gamma^+) \rightarrow L_\infty(\Gamma^-).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in L_\infty(\Gamma^+)$. Согласно определению 1.1 необходимо доказать, что

$$\begin{aligned} I(\xi, \omega) &= I_R(\xi, \omega) + I_T(\xi, \omega) = \sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)} R(\xi + t_i(\xi, \omega)\omega, n \cdot \omega) \varphi(\xi + t_i(\xi, \omega)\omega, \omega_R) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)} T(\xi + t_i(\xi, \omega)\omega, n \cdot \omega) \varphi(\xi + t_i(\xi, \omega)\omega, \omega_T) \end{aligned}$$

принадлежит $L_\infty(\Pi_\omega \times \Omega)$. Ограниченность I следует из ограниченности φ и условия обобщенной выпуклости ($q(\xi, \omega) \leq \bar{q}$). Покажем измеримость $I(\xi, \omega)$. Учитывая (1.7), (2.12), (2.13), обозначения и условия, сформулированные перед леммой, по теореме о замене переменных [15] в поверхностном интеграле имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_\omega \times \Omega} I(\xi, \omega) d\xi d\omega &= \int_{\Omega} \int_{\Pi_\omega} \sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)-1} (\widehat{B}\varphi)(\xi + t_i(\xi, \omega)\omega, \omega) d\xi d\omega \\ &= \int_{\Omega} \int_{\Pi'_\omega} \sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)-1} (\widehat{B}\varphi)(\xi + t_i(\xi, \omega)\omega, \omega) d\xi d\omega \\ &= \int_{\Omega} \int_{\gamma} (\widehat{B}\varphi)(z, \omega) |n(z) \cdot \omega| d\sigma_z d\omega \\ &= \int_{\gamma} \int_{\Omega} (\widehat{B}\varphi)(z, \omega) |n(z) \cdot \omega| d\omega d\sigma_z. \end{aligned}$$

Для почти всех $z \in \gamma$ введем новые переменные во внутреннем интеграле по формулам $\nu = n(z)\omega$, $-1 < \nu < 1$, $\beta = \arctg(\omega^2/\omega^1)$, $0 \leq \beta < 2\pi$,

$$\omega^1 = \cos(\beta)\sqrt{1-\nu^2}, \quad \omega^2 = \sin(\beta)\sqrt{1-\nu^2}, \quad \omega^3 = \nu.$$

Поскольку все векторы ω , ω_R , ω_T лежат в одной плоскости и

$$\nu_R = n\omega_R = -n\omega = -\nu, \quad \nu_T = n\omega_T = \psi(\nu),$$

ВЫВОДИМ

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_\omega \times \Omega} I(\xi, \omega) d\xi d\omega &= \int_{\gamma} \int_{\Omega} (\widehat{B}\varphi)(z, \omega) |n(z)\omega| d\omega d\sigma_z \\ &= \int_{\gamma} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (\widehat{B}\varphi)(z, \nu, \beta) |\nu| d\nu d\beta d\sigma_z \\ &= \int_{\gamma} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \{R(z, \nu)\varphi(z, -\nu, \beta) \\ &\quad + T(z, \nu)\varphi(z, \psi(\nu), \beta)\} |\nu| d\nu d\beta d\sigma_z. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Отсюда вытекает

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_\omega \times \Omega} I(\xi, \omega) d\xi d\omega &= \int_{\gamma} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 R(z, \nu)\varphi(z, -\nu, \beta) |\nu| d\nu d\beta d\sigma_z \\ &\quad + \int_{\gamma} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 T(z, \nu)\varphi(z, \psi(\nu), \beta) |\nu| d\nu d\beta d\sigma_z. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Во втором интеграле правой части соотношения (2.15) сделаем замену переменных

$$\nu' = \psi(\nu), \quad d\nu' = \psi'(\nu) d\nu = \frac{\text{sign}(\nu)\nu\tilde{k}^2(\nu)}{\sqrt{1-\tilde{k}^2(\nu)(1-\nu^2)}} d\nu = \frac{\nu\tilde{k}^2(\nu)}{\psi(\nu)} d\nu = \frac{\nu\tilde{k}^2(\nu)}{\nu'} d\nu. \quad (2.16)$$

Поскольку знаки функций $\nu' = \psi(\nu)$ и ν совпадают, т.е. $\text{sign}(\nu') = \text{sign}(\nu)$, то $\tilde{k}(\nu') = \tilde{k}(\nu)$, поэтому из (2.16) находим

$$|\nu| d\nu = \frac{|\nu| \nu' d\nu'}{\nu \tilde{k}^2(\nu)} d\nu = \frac{\text{sign}(\nu) \nu' d\nu'}{\tilde{k}^2(\nu)} = \frac{\text{sign}(\nu') \nu' d\nu'}{\tilde{k}^2(\nu')} = \frac{|\nu'| d\nu'}{\tilde{k}^2(\nu')}. \quad (2.17)$$

В первом интеграле (2.15) сделаем замену $\nu' = -\nu$, и, возвращаясь как в первом, так и во втором интегралах к старому обозначению переменной ν , получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_\omega \times \Omega} I(\xi, \omega) d\xi d\omega &= \int_\gamma \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 R(z, -\nu) \varphi(z, \nu, \beta) |\nu| d\nu d\beta d\sigma_z \\ &\quad + \int_\gamma \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 T(z, \psi^{-1}(\nu)) \varphi(z, \nu, \beta) |\nu| d\nu d\beta d\sigma_z. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Учитывая свойство функции ψ и обратной к ней ψ^{-1} :

$$\psi^{-1}(\nu) = -\psi(-\nu), \quad (2.19)$$

окончательно находим

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_\omega \times \Omega} I(\xi, \omega) d\xi d\omega \\ = \int_\gamma \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \left\{ R(z, -\nu) + \frac{T(z, -\psi(-\nu))}{\tilde{k}^2(\nu)} \right\} \varphi(z, \nu, \beta) |\nu| d\nu d\beta d\sigma_z. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Из принадлежности φ к $L_\infty(\Gamma^+)$ вытекает, в частности, существование интеграла

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_\omega \times \Omega} \sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)} \varphi(\xi + t_{i+1}(\xi, \omega) \omega, \omega) d\xi d\omega \\ = \int_{\partial \bar{G}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varphi(z, \nu, \beta) |\nu| d\nu d\beta d\sigma_z + \int_\gamma \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi(z, \nu, \beta) |\nu| d\nu d\beta d\sigma_z, \end{aligned}$$

откуда в силу (2.20) и непрерывности функции $R(z, -\nu) + T(z, -\psi(-\nu))/\tilde{k}^2(z, \nu)$ в точках гладкости γ следует существование интеграла от функции $I(\xi, \omega)$. Лемма доказана.

Из леммы 2.1 вытекает, что функция $(\widehat{B}f^+)(z, \omega)$ принадлежит пространству $L_\infty(\Gamma^-)$, если $f \in D$. Действительно, если $f \in D$, то ее след на Γ^+ принадлежит $L_\infty(\Gamma^+)$, и, следовательно, по лемме 2.1 $\widehat{B}f^+ \in L_\infty(\Gamma^-)$.

Обозначим через $\widehat{S}$ оператор, действующий из пространства $L_\infty(G \times \Omega)$ в $L_\infty(G \times \Omega)$ и определенный формулой

$$(\widehat{S}f)(r, \omega) = \mu_s(r) \int_\Omega g(r, \omega \omega') f(r, \omega') d\omega'.$$

Теперь сформулируем определение решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Решением краевой задачи* (1.1), (2.2), (2.3) будем называть функцию $f \in D$, удовлетворяющую:

1) уравнению (1.1) почти всюду в $G \times \Omega$:

$$\hat{l}f = \hat{S}f + J; \quad (2.21)$$

2) граничному условию (2.2) почти всюду на $\Gamma^- \cap (\partial\bar{G} \times \Omega)$:

$$f^- = h; \quad (2.22)$$

3) условию сопряжения (2.3) почти всюду на $\gamma \times \Omega$:

$$f^- = \hat{B}f^+. \quad (2.23)$$

Таким образом, задача состоит в том, чтобы определить функцию $f \in D$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и граничным условиям (2.2), (2.3) в смысле определения 2.1 при известных $\mu, \mu_s, g, J, h, \hat{B}$.

Из результатов, полученных в §1, следует, что для решения $f \in D$ уравнения (2.21) справедливо представление (1.17), которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{aligned} f(r, \omega) = & f(r - t_1(r, -\omega)\omega + 0\omega, \omega) \exp\left(-\int_0^{t_1(r, -\omega)} \mu(r - t\omega) dt\right) \\ & + \int_0^{t_1(r, -\omega)} \exp\left(-\int_0^t \mu(r - t'\omega) dt'\right) (\hat{S}f + J)(r - t\omega, \omega) dt. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Отметим, что соотношение (2.24) справедливо почти всюду в $G \times \Omega$.

Введем оператор $\hat{A}$, действующий по формуле

$$(\hat{A}f)(r, \omega) = \int_0^{t_1(r, -\omega)} \exp\left(-\int_0^t \mu(r - t'\omega) dt'\right) f(r - t\omega, \omega) dt.$$

Заметим, что из условий, сформулированных ранее, следует $\hat{A}: L_\infty(G \times \Omega) \rightarrow D(G \times \Omega)$. Из соотношений (2.21)–(2.24) вытекает, что f – решение краевой задачи тогда и только тогда, когда $f \in D$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} f(r, \omega) = & (\hat{B}f^+ + J_\Gamma)(r - t_1(r, -\omega)\omega, \omega) \\ & \times \exp\left(-\int_0^{t_1(r, -\omega)} \mu(r - t\omega) dt\right) + (\hat{A}\hat{S}f + \hat{A}J)(r, \omega) \end{aligned} \quad (2.25)$$

почти всюду в $G \times \Omega$. В уравнении (2.25) функция J_Γ определяется следующим образом:

$$J_\Gamma(z, \omega) = \begin{cases} h(z, \omega), & \text{если } (z, \omega) \in \Gamma^- \cap (\partial\bar{G} \times \Omega), \\ 0, & \text{если } (z, \omega) \in \gamma \times \Omega. \end{cases} \quad (2.26)$$

§ 3. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе докажем некоторые вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основных теорем о разрешимости краевой задачи (1.1), (2.2), (2.3). Однако, несмотря на вспомогательный характер этих утверждений, они имеют и самостоятельный интерес, так как обладают некоторой общностью при задании оператора сопряжения $\hat{B}$.

В настоящем параграфе $\hat{B}$ – неотрицательный, линейный и ограниченный оператор, действующий из $L_\infty(\Gamma^+)$ в $L_\infty(\Gamma^-)$. Здесь по технической причине, диктуемой логической схемой доказательства основного утверждения, будем полагать, что функция $J_\Gamma(z, \omega)$, введенная формулой (2.26) и характеризующая поверхностные источники, в отличие от (2.26) может принимать ненулевые значения и на $\gamma \times \Omega$. Кроме того, предположим, что $J_\Gamma \in L_\infty(\Gamma^-)$.

Пусть

$$\lambda(r) = \frac{\mu_s(r)}{\mu(r)}, \quad \bar{\lambda} = \|\lambda(r)\| = \sup_{r \in G} \text{vrai} |\lambda(r)|.$$

Функцию $\lambda(r)$ иногда называют *альбедо однократного рассеяния* [8].

ЛЕММА 3.1. Пусть $\bar{\lambda} < 1$ и $\|\hat{B}\| < 1$. Тогда существует единственное решение следующей краевой задачи:

$$(\hat{I}f)(r, \omega) = (\hat{S}f + J)(r, \omega), \quad (r, \omega) \in G \times \Omega, \quad (3.1)$$

$$f^-(z, \omega) = (\hat{B}f^+ + J_\Gamma)(z, \omega), \quad (z, \omega) \in \Gamma^-. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (2.25) достаточно доказать, что при сформулированных условиях в классе D однозначно разрешимо уравнение

$$f = f_0 + \hat{T}f, \quad (3.3)$$

где

$$f_0(r, \omega) = J_\Gamma(r - t_1(r, -\omega)\omega, \omega) \exp\left(-\int_0^{t_1(r, -\omega)} \mu(r - t\omega) dt\right) + (\hat{A}J)(r, \omega) \quad (3.4)$$

и оператор $\hat{T}: D \rightarrow D$ определяется через $\hat{A}$, $\hat{S}$ и $\hat{B}$:

$$\begin{aligned} (\hat{T}f)(r, \omega) &= (\hat{B}f^+)(r - t_1(r, -\omega)\omega, \omega) \exp\left(-\int_0^{t_1(r, -\omega)} \mu(r - t\omega) dt\right) \\ &\quad + (\hat{A}\hat{S}f)(r, \omega). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Если мы покажем, что норма оператора $\hat{T}$, переводящего банахово пространство D в себя, меньше единицы, то отсюда немедленно будет следовать разрешимость краевой задачи (3.1), (3.2), и, кроме того, для решения задачи будет справедливо представление в виде ряда Неймана [14]:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{T}^i f_0, \quad (3.6)$$

равномерно сходящегося в D .

Оценим норму $\widehat{T}$ в пространстве D . Учитывая условие нормировки (2.1), для любой функции $f \in D$ имеем

$$\|\widehat{T}f\|_D = \max\left\{\|(\widehat{T}f)^-\|, \left\|\frac{i\widehat{T}f}{\mu}\right\|\right\} = \max\left\{\|\widehat{B}f^+\|, \left\|\frac{\widehat{S}f}{\mu}\right\|\right\} \leq \max\{\|\widehat{B}\|, \bar{\lambda}\}\|f\|.$$

В силу оценки (1.20) имеем

$$\|\widehat{T}f\|_D \leq \max\{\|\widehat{B}\|, \bar{\lambda}\}\|f\|_D.$$

Поскольку $\bar{\lambda} < 1$ и $\|\widehat{B}\| < 1$, то $\|\widehat{T}\| < 1$. Лемма доказана.

В условиях леммы 3.1 при $J \geq 0$, $J_\Gamma \geq 0$ решение $f \geq 0$ почти всюду в $G \times \Omega$. Это вытекает из того факта, что в ряде (3.6) для решения краевой задачи (3.1), (3.2) все слагаемые – неотрицательные функции. Докажем утверждение о неотрицательности решения при выполнении условия $\lambda(r) \leq 1$, более слабого, нежели условие $\bar{\lambda} < 1$.

ЛЕММА 3.2. Пусть f – решение краевой задачи (3.1), (3.2) и

$$J \geq 0, \quad J_\Gamma \geq 0, \quad \lambda(r) \leq 1, \quad \|\widehat{B}\| < 1.$$

Тогда $f(r, \omega) \geq 0$ почти всюду в $G \times \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т. е. f – решение краевой задачи, но

$$f_{\inf} = \inf_{(r, \omega) \in G \times \Omega} \text{vrai} (f(r, \omega)) < 0.$$

В этом случае из неотрицательности оператора $\widehat{B}$ вытекает $(\widehat{B}f_{\inf}) \geq f_{\inf}\|\widehat{B}\| \geq f_{\inf}\|\widehat{B}\|$. Так как f удовлетворяет уравнению (3.3) и $J, J_\Gamma \geq 0$, то при почти всех $(r, \omega) \in G \times \Omega$ имеем

$$\begin{aligned} f(r, \omega) &\geq (\widehat{B}(f^+ - f_{\inf} + f_{\inf}) + J_\Gamma)(r - t_1(r, -\omega)\omega, \omega) \\ &\quad \times \exp\left(-\int_0^{t_1(r, -\omega)} \mu(r - t\omega) dt\right) \\ &\quad + \int_0^{t_1(r, -\omega)} \exp\left(-\int_0^t \mu(r - t'\omega) dt'\right) (\mu_s(r - t\omega)f_{\inf} + J(r - t\omega, \omega)) dt \\ &\geq f_{\inf}\|\widehat{B}\| \exp\left(-\int_0^{t_1(r, -\omega)} \mu(r - t\omega) dt\right) \\ &\quad + f_{\inf}\left(1 - \exp\left(-\int_0^{t_1(r, -\omega)} \mu(r - t\omega) dt\right)\right) \\ &= f_{\inf}\left(1 - (1 - \|\widehat{B}\|) \exp\left(-\int_0^{t_1(r, -\omega)} \mu(r - t\omega) dt\right)\right) \\ &\geq f_{\inf}(1 - (1 - \|\widehat{B}\|) \exp(-\bar{\mu}d)). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Отсюда вытекает

$$f_{\inf} = f_{\inf}(1 - (1 - \|\widehat{B}\|) \exp(-\bar{\mu}d)),$$

следовательно,

$$f_{\inf}(1 - \|\widehat{B}\|) \exp(-\bar{\mu}d) \geq 0. \quad (3.8)$$

Поскольку $\|\widehat{B}\| < 1$, то из (3.8) получаем $f_{\inf} \geq 0$. Противоречие. Лемма доказана.

Далее нам понадобится утверждение для сравнения двух решений [8] краевой задачи (3.1), (3.2).

ЛЕММА 3.3. Пусть f – решение краевой задачи (3.1), (3.2), функция $\tilde{f}$ – решение следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} \omega \cdot \nabla_r \tilde{f}(r, \omega) + \tilde{\mu}(r) \tilde{f}(r, \omega) \\ = \tilde{\mu}_s(r) \int_{\Omega} \tilde{g}(r, \omega \cdot \omega') \tilde{f}(r, \omega') d\omega' + \tilde{J}(r, \omega), \quad (r, \omega) \in G \times \Omega, \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\tilde{f}^-(z, \omega) = (\widehat{B} \tilde{f}^+ + \tilde{J}_{\Gamma})(z, \omega), \quad (z, \omega) \in \Gamma^-, \quad (3.10)$$

и выполняются условия

$$\lambda(r) \leq 1, \quad \tilde{\lambda}(r) \leq 1, \quad \|\widehat{B}\| < 1, \quad \|\widehat{\widehat{B}}\| < 1, \quad (3.11)$$

$$\tilde{\mu}(r) \leq \mu(r), \quad \tilde{\mu}_s(r) \geq \mu_s(r), \quad (3.12)$$

$$\tilde{g}(r, \omega \cdot \omega') \geq g(r, \omega \cdot \omega'), \quad \tilde{J}(r, \omega) \geq |J(r, \omega)|,$$

$$\tilde{J}_{\Gamma}(r, \omega) \geq |J_{\Gamma}(r, \omega)|, \quad ((\widehat{\widehat{B}} - \widehat{B})\varphi)(z, \omega) \geq 0, \quad \varphi \geq 0.$$

Тогда

$$|f(r, \omega)| \leq \tilde{f}(r, \omega) \quad (3.13)$$

почти всюду в $G \times \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 3.2 вытекает, что $\tilde{f} \geq 0$ почти всюду в $G \times \Omega$. Положим $\Phi = \tilde{f} - f$. Функция Φ удовлетворяет краевой задаче

$$\omega \cdot \nabla_r \Phi(r, \omega) + \mu(r) \Phi(r, \omega) = \mu_s(r) \int_{\Omega} g(r, \omega \cdot \omega') \Phi(r, \omega') d\omega' + J'(r, \omega), \quad (3.14)$$

$$\Phi^-(z, \omega) = (\widehat{B} \Phi^+ + J'_{\Gamma})(z, \omega), \quad (3.15)$$

где

$$\begin{aligned} J'(r, \omega) &= \int_{\Omega} (\tilde{\mu}_s(r) \tilde{g}(r, \omega \cdot \omega') - \mu_s(r) g(r, \omega \cdot \omega')) \tilde{f}(r, \omega') d\omega' \\ &\quad + \tilde{J}(r, \omega) - J(r, \omega) + (\mu(r) - \tilde{\mu}(r)) \tilde{f}(r, \omega), \\ J'_{\Gamma}(z, \omega) &= ((\widehat{\widehat{B}} - \widehat{B}) \tilde{f}^+)(z, \omega) + \tilde{J}_{\Gamma}(z, \omega) - J_{\Gamma}(z, \omega). \end{aligned}$$

В силу условий (3.12) и леммы 3.2 имеем $\Phi \geq 0$ почти всюду в $G \times \Omega$, следовательно, $f(r, \omega) \leq \tilde{f}(r, \omega)$.

Полагая $\Phi = \tilde{f} + f$, будем иметь краевую задачу (3.14), (3.15) при

$$\begin{aligned} J'(r, \omega) &= \int_{\Omega} (\tilde{\mu}_s(r) \tilde{g}(r, \omega \cdot \omega') - \mu_s(r) g(r, \omega \cdot \omega')) \tilde{f}(r, \omega') d\omega' \\ &\quad + \tilde{J}(r, \omega) + J(r, \omega) + (\mu(r) - \tilde{\mu}(r)) \tilde{f}(r, \omega), \\ J'_\Gamma(z, \omega) &= ((\widehat{B} - \widehat{B}) \tilde{f}^+)(z, \omega) + \tilde{J}_\Gamma(z, \omega) + J_\Gamma(z, \omega). \end{aligned}$$

Снова получаем $\Phi \geq 0$, следовательно, $-f(r, \omega) \leq \tilde{f}(r, \omega)$ почти всюду в $G \times \Omega$. Таким образом, получаем оценку (3.13). Лемма доказана.

ЛЕММА 3.4. Пусть $\lambda(r) \leq 1$, $\|\widehat{B}\| < 1$. Тогда краевая задача (3.1), (3.2) имеет не более одного решения, которое удовлетворяет неравенству

$$|f(r, \omega)| \leq M \equiv \frac{\exp(\bar{\mu}d)}{1 - \|\widehat{B}\|} \max \left\{ \|J_\Gamma\|, \left\| \frac{J}{\mu} \right\| \right\} \quad (3.16)$$

почти всюду в $G \times \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Получение оценки (3.16) аналогично доказательству неотрицательности решения краевой задачи в лемме 3.2.

Пусть f – решение задачи (3.1), (3.2); тогда оно удовлетворяет уравнению (3.3) и, следовательно, при почти всех $(r, \omega) \in G \times \Omega$ имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} |f(r, \omega)| &\leq (\|\widehat{B}\| \|f^+\| + \|J_\Gamma\|) \exp \left(- \int_0^{t_1(r, -\omega)} \mu(r - t\omega) dt \right) \\ &\quad + \bar{\lambda} \|f\| \left(1 - \exp \left(- \int_0^{t_1(r, -\omega)} \mu(r - t\omega) dt \right) \right) \\ &\quad + \left\| \frac{J}{\mu} \right\| \left(1 - \exp \left(- \int_0^{t_1(r, -\omega)} \mu(r - t\omega) dt \right) \right) \\ &\leq \|f\| (1 - (1 - \|\widehat{B}\|) \exp(-\bar{\mu}d)) + \max \left\{ \|J_\Gamma\|, \left\| \frac{J}{\mu} \right\| \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Поскольку (3.17) выполняется при почти всех (r, ω) , то

$$\|f\| \leq \|f\| (1 - (1 - \|\widehat{B}\|) \exp(-\bar{\mu}d)) + \max \left\{ \|J_\Gamma\|, \left\| \frac{J}{\mu} \right\| \right\},$$

откуда следует (3.16). Из неравенства (3.16) в силу линейности краевой задачи вытекает единственность решения задачи (3.1), (3.2). Лемма доказана.

Усилим требования к оператору $\widehat{B}$. Предположим, что для любой последовательности $\varphi_n \in L_\infty(\Gamma^+)$, сходящейся почти всюду на Γ^+ к $\varphi \in L_\infty(\Gamma^+)$, выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{B} \varphi_n = \widehat{B} \varphi \quad (3.18)$$

почти всюду на Γ^- .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Оператор $\widehat{B}$, определенный равенствами (2.12), (2.13), удовлетворяет условию (3.18).

ЛЕММА 3.5. Пусть $\lambda(r) \leq 1$, $\|\widehat{B}\| < 1$. Тогда существует единственное решение краевой задачи (3.1), (3.2), удовлетворяющее неравенству (3.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функции $f_n \in D$, $n = 1, 2, \dots$, — решения следующих краевых задач:

$$\hat{l}f_n = \widehat{S}_n f_n + J, \quad (3.19)$$

$$f_n^- = \widehat{B}f_n^+ + J_\Gamma, \quad (3.20)$$

где

$$(\widehat{S}_n f)(r, \omega) = \mu_s(r) \left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_{\Omega} g(r, \omega \cdot \omega') f(r, \omega') d\omega'.$$

Поскольку

$$\left\| \frac{\mu_s}{\mu} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right\| < 1,$$

то по лемме 3.1 решение краевой задачи (3.19), (3.20) существует и единственно. Причем согласно леммам 3.3, 3.4 последовательность f_n не убывает с ростом n и для любого n справедливо неравенство $\|f_n\| \leq M$, где M определено в (3.16). По теореме Леви [14] последовательность f_n почти всюду в $G \times \Omega$ сходится к функции $f \in L_\infty(G \times \Omega)$. Так как $f_n \in D$, то f_n^+ существуют и принадлежат пространству $L_\infty(\Gamma^+)$. Поэтому $f_n^+ \leq f_{n+1}^+$ и $\|f_n^+\| \leq M$ для любого n . Следовательно, последовательность f_n^+ почти всюду на Γ^+ сходится к некоторой функции $\tilde{f}^+ \in L_\infty(\Gamma^+)$.

Почти всюду в $G \times \Omega$ для любого n справедливо представление

$$\begin{aligned} f_n(r, \omega) &= f_0(r, \omega) + (\widehat{B}f_n^+)(r - t_1(r, -\omega)\omega, \omega) \\ &\quad \times \exp\left(-\int_0^{t_1(r, -\omega)} \mu(r - t\omega) dt\right) + (\hat{A}\widehat{S}_n f_n)(r, \omega), \end{aligned} \quad (3.21)$$

где f_0 — функция, определенная в (3.4). Учитывая условия (3.18) и $\|\widehat{S}_n - \widehat{S}\| \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$, по теореме Лебега о предельном переходе [15] из (3.21) при $n \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned} f(r, \omega) &= f_0(r, \omega) + (\widehat{B}\tilde{f}^+)(r - t_1(r, -\omega)\omega, \omega) \\ &\quad \times \exp\left(-\int_0^{t_1(r, -\omega)} \mu(r - t\omega) dt\right) + (\hat{A}\widehat{S}f)(r, \omega). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Поскольку функция f удовлетворяет (3.22), то $f \in D$ и, следовательно, $\tilde{f}^+ = f^+$. Таким образом, почти везде в $G \times \Omega$ функция f удовлетворяет уравнению

$$f = f_0 + \widehat{T}f, \quad (3.23)$$

т. е. f — решение (3.1), (3.2). Единственность решения следует из леммы 3.4. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.6. Пусть $\|\widehat{B}\| \leq 1$, $\widehat{B}1 = 1$. Тогда краевая задача

$$\widehat{I}f = \widehat{S}f + J, \quad (r, \omega) \in G \times \Omega, \quad (3.24)$$

$$f^- = h, \quad (z, \omega) \in \Gamma^- \cap (\partial\overline{G} \times \Omega), \quad (3.25)$$

$$f^- = \widehat{B}f^+, \quad (z, \omega) \in \gamma \times \Omega, \quad (3.26)$$

а) имеет решение при выполнении условия $\bar{\lambda} < 1$, и оно почти всюду в $G \times \Omega$ удовлетворяет неравенству

$$|f(r, \omega)| \leq \frac{1}{1 - \bar{\lambda}} \max \left\{ \|h\|, \left\| \frac{J}{\mu} \right\| \right\}; \quad (3.27)$$

б) имеет решение при выполнении условий $\bar{\lambda} \leq 1$, $J \equiv 0$, и оно почти всюду в $G \times \Omega$ удовлетворяет неравенству

$$|f(r, \omega)| \leq \|h\|. \quad (3.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проводится по схеме, аналогичной доказательству леммы 3.5.

Докажем п. а). Введем операторы $\widehat{B}_n = (1 - 1/n)\widehat{B}$ и рассмотрим краевые задачи

$$\widehat{I}f_n = \widehat{S}f_n + J, \quad (r, \omega) \in G \times \Omega, \quad (3.29)$$

$$f_n^- = h, \quad (z, \omega) \in \Gamma^- \cap (\partial\overline{G} \times \Omega), \quad (3.30)$$

$$f_n^- = \widehat{B}_n f_n^+, \quad (z, \omega) \in \gamma \times \Omega, \quad (3.31)$$

$$\widehat{I}\tilde{f}_n = \widehat{S}\tilde{f}_n + \mu(r)C_1, \quad (r, \omega) \in G \times \Omega, \quad (3.32)$$

$$\tilde{f}_n^- = C, \quad (z, \omega) \in \Gamma^- \cap (\partial\overline{G} \times \Omega), \quad (3.33)$$

$$\tilde{f}_n^- = \widehat{B}_n \tilde{f}_n^+ + \frac{C}{n}, \quad (z, \omega) \in \gamma \times \Omega, \quad (3.34)$$

где

$$\widehat{S}\tilde{f}_n = \bar{\lambda}\mu(r) \int_{\Omega} g(r, \omega \cdot \omega') \tilde{f}_n(r, \omega') d\omega', \quad C_1 = \max \left\{ \|h\|, \left\| \frac{J}{\mu} \right\| \right\}, \quad C = \frac{C_1}{1 - \bar{\lambda}}.$$

Поскольку $|J(r, \omega)| \leq \mu(r)C_1$, $h \leq C$, $J_{\Gamma} = 0 \leq \tilde{J}_{\Gamma} = C/n$ и $\mu_s(r) \leq \bar{\lambda}\mu(r)$, то из леммы 3.3 вытекает $f_n(r, \omega) \leq \tilde{f}_n(r, \omega)$. Так как $\widehat{B}1 = 1$, $\widehat{B}_n 1 = (1 - 1/n)$, то нетрудно увидеть, что $\tilde{f}_n = C$ при любом n , поэтому $f_n \leq C$. Таким образом, f_n — неубывающая последовательность, ограниченная сверху. Следовательно, она почти всюду в $G \times \Omega$ имеет предел $f \in L_{\infty}(G \times \Omega)$.

Точно так же, как и в лемме 3.5, покажем, что предел последовательности f_n удовлетворяет краевой задаче (3.24)–(3.26). Неравенство (3.27) является очевидным следствием приведенных построений.

Для доказательства п. б) достаточно в качестве мажорирующей последовательности функций $\tilde{f}_n$ взять решения следующих краевых задач:

$$\hat{l}\tilde{f}_n = \hat{S}\tilde{f}_n + (\mu(r) - \mu_s(r))\|h\|, \quad (r, \omega) \in G \times \Omega, \quad (3.35)$$

$$\tilde{f}_n^- = \|h\|, \quad (z, \omega) \in \Gamma^- \cap (\partial\bar{G} \times \Omega), \quad (3.36)$$

$$\tilde{f}_n^- = \hat{B}_n\tilde{f}_n^+ + \frac{\|h\|}{n}, \quad (z, \omega) \in \gamma \times \Omega, \quad (3.37)$$

которые в силу построения все равны постоянной величине $\|h\|$, и повторить предыдущие рассуждения. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Оператор $\hat{B}$, определенный равенствами (2.12), (2.13), удовлетворяет условиям $\|\hat{B}\| \leq 1$, $\hat{B}1 = 1$.

§ 4. Основные утверждения

Отметим, что в формулировке леммы 3.6 утверждается только существование решения задачи (3.24)–(3.26) с определенными свойствами, и при доказательстве леммы фактически дан способ его построения. В общем случае единственность решения краевой задачи гарантировать нельзя. Более того, нетрудно привести пример оператора сопряжения, для которого нарушается единственность краевой задачи. Например, пусть $G = G_1 \cup G_2$, $\bar{G}_1 \subset \bar{G}$, причем область G_1 строго выпуклая с гладкой границей, и для всех $(z, \omega) \in \gamma \times \Omega = \partial G_1 \times \Omega$

$$(\hat{B}f^+)(z, \omega) = \begin{cases} \sup_{(z', \omega') \in \gamma \times \Omega} f(z', \omega'), & n(z) \cdot \omega > 0, \\ 0, & n(z) \cdot \omega \leq 0. \end{cases}$$

Тогда функция, определенная равенствами

$$f(r, \omega) = \begin{cases} \text{const} \cdot \exp\left(-\int_0^{t_1(r, -\omega)} \mu(r - t\omega) dt\right), & (r, \omega) \in G_1 \times \Omega, \\ 0, & (r, \omega) \in G_2 \times \Omega, \end{cases}$$

является решением однородной краевой задачи при $\mu_s \equiv J \equiv h \equiv 0$.

В этом параграфе оператор сопряжения $\hat{B}$ определяется равенствами (2.12), (2.13). В силу свойств этого оператора (см. лемму 2.1, замечания 3.1 и 3.2) для него верно утверждение леммы 3.6. Содержание настоящего параграфа составляет доказательство единственности краевой задачи (1.1), (2.2), (2.3) в рассматриваемом конкретном случае. Сначала докажем вспомогательное утверждение.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\hat{B}$ определяется равенствами (2.12), (2.13), $F \in L_\infty(G \times \Omega)$. Тогда краевая задача

$$\hat{l}f = F, \quad (r, \omega) \in G \times \Omega, \quad (4.1)$$

$$f^- = h, \quad (z, \omega) \in \Gamma^- \cap (\partial\bar{G} \times \Omega), \quad (4.2)$$

$$f^- = \hat{B}f^+, \quad (z, \omega) \in \gamma \times \Omega, \quad (4.3)$$

имеет единственное решение и

$$|f(r, \omega)| \leq \max\left\{\|h\|, \left\|\frac{F}{\mu}\right\|\right\} \quad (4.4)$$

при почти всех $(r, \omega) \in G \times \Omega$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование решения краевой задачи (4.1)–(4.3) и оценка (4.4) вытекают из леммы 3.6. Докажем единственность.

Пусть f_1, f_2 – решения краевой задачи (4.1)–(4.3). Поскольку коэффициент преломления $k(r)$ является постоянной величиной в каждой области G_i , то функция

$$f(r, \omega) = \frac{f_1(r, \omega) - f_2(r, \omega)}{k^2(r)}$$

удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\hat{L}f = 0, \quad (r, \omega) \in G \times \Omega, \quad (4.5)$$

$$f^- = 0, \quad (z, \omega) \in \Gamma^- \cap (\partial\bar{G} \times \Omega), \quad (4.6)$$

$$f^- = \hat{B}f^+ \equiv R(z, \nu)f^+(z, \omega_R) + \tilde{k}^2(z, \nu)T(z, \nu)f^+(z, \omega_T), \quad (4.7)$$

$$(z, \omega) \in \gamma \times \Omega.$$

Здесь $\nu = \omega \cdot n(z)$, а определение величин $n, R, T, \omega_R, \omega_T, \tilde{k}(z, \nu)$ дано в § 2.

Учитывая определение множеств $\Pi_\omega, \Pi_{\xi, \omega}$ (см. § 1), запишем решение уравнения (4.5), справедливое при почти всех $(\xi, t, \omega) \in \Pi_\omega \times \Pi_{\xi, \omega} \times \Omega$:

$$f(\xi + t\omega, \omega) = f(\xi + t_i(\xi, \omega)\omega + 0\omega, \omega) \exp\left(-\int_{t_i(\xi, \omega)}^t \mu(\xi + t'\omega) dt'\right),$$

откуда непосредственно вытекает, что функция $f(\xi + t\omega, \omega)$ при $t \in (t_i(\xi, \omega), t_{i+1}(\xi, \omega)]$ не меняет знака. Учитывая это обстоятельство, а также (4.2), (4.3) и то, что $G = \Pi_\omega \times \Pi_{\xi, \omega}$, умножим уравнение (4.1) на функцию $\text{sign}(f(r, \omega))$ и проинтегрируем на множестве $G \times \Omega$:

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega \int_G \{ \text{sign}(f(r, \omega)) \omega \cdot \nabla_r f(r, \omega) + \mu(r) \text{sign}(f(r, \omega)) f(r, \omega) \} dr d\omega \\ &= \int_\Omega \int_{\Pi_\omega} \int_{\Pi_{\xi, \omega}} \text{sign}(f(\xi + t\omega, \omega)) \frac{\partial f(\xi + t\omega, \omega)}{\partial t} dt d\xi d\omega \\ &\quad + \int_\Omega \int_G \mu(r) |f(r, \omega)| dr d\omega \\ &= \int_\Omega \int_{\Pi_\omega} \sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)} \int_{\Pi_{\xi, \omega}^i} \frac{\partial |f(\xi + t\omega, \omega)|}{\partial t} dt d\xi d\omega + \int_G \mu(r) |f(r, \omega)| dr d\omega \\ &= \int_\Omega \int_{\Pi_\omega} \left\{ |f(\xi + t_q(\xi, \omega)\omega, \omega)| + \sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)-1} [|f|]_\omega(\xi + t_i(\xi, \omega)\omega, \omega) \right\} d\xi d\omega \\ &\quad + \int_\Omega \int_G \mu(r) |f(r, \omega)| dr d\omega. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Учитывая

$$\begin{aligned}
|[f]|_\omega(\xi + t_i\omega, \omega) &= |f(\xi + t_i\omega + 0\omega, \omega)| - |f(\xi + t_i(\xi, \omega)\omega - 0\omega, \omega)| \\
&= |(\widehat{B}f^+)(\xi + t_i\omega, \omega)| - |f^-(\xi + t_i\omega, \omega)| \\
&= (\widehat{B}|f^+|)(\xi + t_i\omega, \omega) - |f^-(\xi + t_i\omega, \omega)| \\
&\quad + |(\widehat{B}f^+)(\xi + t_i\omega, \omega)| - (\widehat{B}|f^+|)(\xi + t_i\omega, \omega) \\
&\leq (\widehat{B}|f^+|)(\xi + t_i\omega, \omega) - |f^-(\xi + t_i\omega, \omega)|
\end{aligned}$$

и $|f(\xi + t_q\omega, \omega)| \geq 0$, получаем

$$\begin{aligned}
I &\leq \int_{\Omega} \int_{\Pi_{\omega}} \sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)-1} \left\{ (\widehat{B}|f^+|)(\xi + t_i(\xi, \omega)\omega, \omega) - |f^-(\xi + t_i(\xi, \omega)\omega, \omega)| \right\} d\xi d\omega \\
&\quad + \int_{\Omega} \int_G \mu(r) |f(r, \omega)| dr d\omega = I_1 + I_2 \leq 0.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Покажем, что

$$I_1 = \int_{\Omega} \int_{\Pi_{\omega}} \sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)-1} \left\{ (\widehat{B}|f^+|)(\xi + t_i(\xi, \omega)\omega, \omega) - |f^-(\xi + t_i(\xi, \omega)\omega, \omega)| \right\} d\xi d\omega = 0. \tag{4.10}$$

Далее для интеграла I_1 проводятся точно такие же выкладки, что и при доказательстве леммы 2.1. Сначала I_1 преобразуется к следующему виду:

$$I_1 = \int_{\Omega} \int_{\gamma} \sum_{i=1}^{q(\xi, \omega)-1} \left\{ (\widehat{B}|f^+|)(z, \omega) - |f^-(z, \omega)| \right\} d\sigma_z d\omega. \tag{4.11}$$

Затем вводятся новые переменные: $\nu = n(z) \cdot \omega$, $-1 < \nu < 1$, $\beta = \arctg(\omega^2/\omega^1)$, $0 \leq \beta < 2\pi$,

$$\omega^1 = \cos(\beta)\sqrt{1-\nu^2}, \quad \omega^2 = \sin(\beta)\sqrt{1-\nu^2}, \quad \omega^3 = \nu.$$

В силу условия (4.7) из соотношения (4.11) так же, как в лемме 2.1 (формула (2.18)), получаем

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\gamma} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \{ R(z, -\nu)\varphi(z, \nu, \beta) + T(z, \psi^{-1}(\nu)) \} |f^+(z, \nu, \beta)| |\nu| d\nu d\beta d\sigma_z \\
&\quad - \int_{\gamma} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 |f^+(z, \nu, \beta)| |\nu| d\nu d\beta d\sigma_z.
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Согласно (2.9), (2.19) имеем

$$\begin{aligned}
R_{\parallel}(-\nu) &= \frac{\tilde{k}(-\nu)\psi(-\nu) + \nu}{\tilde{k}(-\nu)\psi(-\nu) - \nu} = \frac{\psi(-\nu) - \nu\tilde{k}(-\nu)}{\psi(-\nu) + \nu\tilde{k}(-\nu)} = -R_{\parallel}(\psi^{-1}(\nu)), \\
R_{\perp}(\nu) &= \frac{\psi(-\nu) - \tilde{k}(-\nu)\nu}{\psi(-\nu) - \tilde{k}(-\nu)\nu} = \frac{-\tilde{k}(\nu)\psi(\nu) + \nu}{-\tilde{k}(\nu)\psi(\nu) - \nu} = -R_{\perp}(\psi^{-1}(\nu)).
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} R(-\nu) &= 0.5\{R_{\parallel}^2(-\nu) + R_{\perp}^2(-\nu)\} \\ &= 0.5\{R_{\parallel}^2(\psi^{-1}(\nu)) + R_{\perp}^2(\psi^{-1}(\nu))\} = R(\psi^{-1}(\nu)), \\ R(\psi^{-1}(\nu)) + T(\psi^{-1}(\nu)) &= 1, \end{aligned}$$

из (4.12) находим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\gamma} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 |f^+(z, \nu, \beta)| |\nu| d\nu d\beta d\sigma_z \\ &\quad - \int_{\gamma} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 |f^-(z, \nu, \beta)| |\nu| d\nu d\beta d\sigma_z = 0. \end{aligned}$$

Так как $I_1 = 0$, $I_2 \geq 0$ и $I = I_1 + I_2 \leq 0$, то необходимо $I_2 = 0$. Из условия (1.14) и $I_2 = 0$ следует, что $f = 0$ почти всюду в $G \times \Omega$. Таким образом, $f_1 = f_2$ почти всюду в $G \times \Omega$, следовательно, $f_1 = f_2$ в D . Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\hat{B}$ определено равенствами (2.12), (2.13) и $\bar{\lambda} < 1$. Тогда существует единственное решение краевой задачи

$$\hat{l}f = \hat{S}f + J, \quad (r, \omega) \in G \times \Omega, \quad (4.13)$$

$$f^- = h, \quad (z, \omega) \in \Gamma^- \cap (\partial\bar{G} \times \Omega), \quad (4.14)$$

$$f^- = \hat{B}f^+, \quad (z, \omega) \in \gamma \times \Omega, \quad (4.15)$$

которое удовлетворяет неравенству (3.27) в случае $J \not\equiv 0$ или (3.28) в случае $J \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование решения и соответствующие оценки (3.27), (3.28) следуют из леммы 3.6. Покажем единственность. Пусть f_1, f_2 – два решения задачи (4.13)–(4.15); тогда $f = f_1 - f_2$ удовлетворяет однородной краевой задаче (4.13)–(4.15) ($J \equiv h \equiv 0$). Применяя неравенство (4.4) к функции $f = f_1 - f_2$ при $F = \hat{S}f$, для почти всех $(r, \omega) \in G \times \Omega$ получаем

$$|f(r, \omega)| \leq \max\left\{0, \left\|\frac{\hat{S}f}{\mu}\right\|\right\} \leq \bar{\lambda}\|f\|. \quad (4.16)$$

Из (4.16) вытекает

$$\|f\| \leq \bar{\lambda}\|f\|.$$

Поскольку $\bar{\lambda} < 1$, то $f = 0$ почти всюду в $G \times \Omega$. Теорема доказана.

Список литературы

1. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1973.
2. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 1, 2. М.: Мир, 1981.
3. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1964.
4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
5. Владимиров В. С. Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. МИАН СССР. 1961. Т. 61. С. 3–158.
6. Смелов В. В. Лекции по теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1978.
7. Марчук Г. И., Лебедев В. И. Численные методы по теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1981.
8. Гермогенова Т. А. Локальные свойства решений уравнения переноса. М.: Наука, 1986.
9. Гермогенова Т. А. Обобщенные решения краевых задач для уравнения переноса // ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9. № 3. С. 605–625.
10. Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В. Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000.
11. Прохоров И. В. Некоторые свойства решений уравнения переноса // Дальневосточный матем. сб. 1996. № 2. С. 161–173.
12. Прохоров И. В. Краевая задача теории переноса излучения в неоднородной среде с условиями отражения на границе // Дифференц. уравнения. 2000. Т. 36. № 6. С. 848–851.
13. Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л. Интеграл, мера и производная. М.: Наука, 1964.
14. Лаврентьев М. М., Савельев Л. А. Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Изд-во Института математики, 1999.
15. Акилов Г. П., Макаров Б. М., Хавин В. П. Элементарное введение в теорию интеграла. Л.: Изд-во ЛГУ, 1969.

E-mail: prh@iam-mail.febras.ru

Поступило в редакцию
13.III.2002