Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Трофимов, Графы с проективными подорбитами. Исключительные случаи характеристики 2. IV, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2003, том 67, выпуск 6, 193–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/im464>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 14:42:59

УДК 512.542+512.544.42

В. И. Трофимов

Графы с проективными подорбитами. Исключительные случаи характеристики 2. IV

Статья является заключительной частью работы, в которой завершается описание конечных стабилизаторов вершин связных графов с проективными подорбитами и, как следствие, стабилизаторов вершин связных конечных графов в транзитивных на 2-дугах группах автоморфизмов. В этой части завершается рассмотрение случая коллинеации при условии, что проективная размерность подорбиты больше 4.

Библиография: 13 наименований.

Введение

Настоящая статья является четвертой заключительной частью работы, общие цели которой были изложены во введении к первой части (см. [1]). Используемые здесь обозначения – те же, что во второй и третьей частях работы [2], [3]. В частности, если Γ – неориентированный связный граф (неориентированный граф без петель и без кратных ребер) и $G \leq \text{Aut } \Gamma$, то для $x \in V(\Gamma)$, $i \in \mathbb{N}$ полагаем, что $\Gamma(x) = \{y \in V(\Gamma) \mid [x, y] \in E(\Gamma)\}$ – множество смежных с x вершин графа Γ , $\Gamma_i(x)$ – шар радиуса i с центром x графа Γ (в естественной метрике $d_\Gamma(\cdot, \cdot)$ на множестве $V(\Gamma)$), $G(x)$ – стабилизатор x в группе G , $G_i(x)$ – поэлементный стабилизатор $\Gamma_i(x)$ в группе G . Если, кроме того, $z_1, z_2, \dots \in V(\Gamma)$ и $Z_1, Z_2, \dots \subseteq V(\Gamma)$, то $G(z_1, z_2, \dots) = G(z_1) \cap G(z_2) \cap \dots$, $G_i(z_1, z_2, \dots) = G_i(z_1) \cap G_i(z_2) \cap \dots$ и $G(z_1, z_2, \dots, Z_1, Z_2, \dots)$ – стабилизатор в $G(z_1, z_2, \dots)$ каждого из множеств $Z_1, Z_2, \dots$.

Напомним, что в работе исследуется строение группы $G(x)$ при следующем предположении (см. [4], [1], [5]).

ОСНОВНОЕ УСЛОВИЕ. Γ – неориентированный связный граф, G – вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ , $x \in V(\Gamma)$, группа $G(x)$ конечна, группа $G(x)^{\Gamma(x)}$ (ограничение $G(x)$ на множество $\Gamma(x)$) содержит нормальную подгруппу, подстановочно изоморфную группе $\text{PSL}_n(q)$, где $n \geq 2$ и q – степень простого числа p , в естественном дважды транзитивном представлении степени $1 + q + \dots + q^{n-1}$ на точках проективного пространства $\text{PG}_{n-1}(q)$.

Если Γ и G удовлетворяют основному условию, то для произвольной вершины $z \in V(\Gamma)$ на множестве $\Gamma(z)$ однозначно определена структура проективного пространства $\text{PG}_{n-1}(q)$ такого, что $G(z)^{\Gamma(z)}$ – его группа коллинеаций. При этом для

Работа выполнена при поддержке гранта Фонда содействия отечественной науке для докторов наук.

$z' \in \Gamma(z)$ на множестве $[z : z']$ прямых проективного пространства $\Gamma(z)$, содержащих точку z' , естественным образом определена структура проективного пространства $\text{PG}_{n-2}(q)$. Проективное пространство $[z : z']$ в дальнейшем обозначается также через $\Gamma(z)/\langle z' \rangle$.

Предположим, что для Γ и G выполняется основное условие. Если при этом $n \geq 4$ и для некоторого (а тогда и для каждого) ребра $[z, z']$ графа Γ существует коллинеация проективного пространства $[z : z']$ на проективное пространство $[z' : z]$, перестановочная с естественным действием группы $G(z, z')$ на $[z : z'] \cup [z' : z]$, то говорят, что для Γ и G имеет место *случай коллинеации*.

После работ [6], [7] и частей I, II, III настоящей работы (см. [1]–[3]) для завершения описания групп $G(x)$ при выполнении основного условия остается рассмотреть случай коллинеации при $q = 2$, $n \geq 6$. Это сделано в настоящей статье (см. теорему I ниже). Предварительно отметим, что в случае $G_2(x) = 1$ строение группы $G(x)$ при выполнении основного условия известно (см. [1], [5]).

ТЕОРЕМА I. Пусть Γ и G удовлетворяют основному условию, причем имеет место случай коллинеации, $q = 2$ и $n \geq 6$. Тогда $G_2(x) = 1$.

Первоначально теорема I была доказана автором методом, разработанным и использованным в [6], [7], [1]–[3]. Однако в настоящей статье приводится другое доказательство, основанное на детальном исследовании стабилизатора вершины в случае 2) теоремы из [2] и доказательстве отсутствия у него в этом случае подгрупп, изоморфных $\text{SL}_4(2)$ (см. § 2, теорема II). Для доказательства теоремы I показано (см. § 3), что при наличии Γ и G , доставляющих контрпример к теореме I, их выбор можно осуществить таким образом, что для подходящего подграфа графа Γ и группы, индуцированной на этом подграфе его стабилизатором в G , реализуется случай 2) теоремы из [2], но, вопреки теореме II, стабилизатор вершины подграфа в этой индуцированной группе содержит подгруппу, изоморфную $\text{SL}_4(2)$. Преимуществом этого доказательства по сравнению с первоначальным является то, что оно включает в себя представляющее самостоятельный интерес детальное исследование стабилизатора вершины в случае 2) теоремы из [2] и несколько короче. Преимуществом же первоначального доказательства является общность используемого метода.

§ 1. Обозначения и предварительные результаты

Как было указано во введении, в настоящей статье используются обозначения из [2], [3]. Напомним некоторые из них. При этом (вплоть до предложения 1.1) будем считать, что для графа Γ и группы его автоморфизмов G выполнено основное условие (см. введение), причем либо имеет место случай коллинеации, либо $n = 3$ и группа G действует интранзитивно на множестве 3-дуг Γ . Предварительно заметим, что, как было отмечено в [7, ч. I, § 2], предложение 2.3 из [6] справедливо при любом q , т. е. в утверждение 4) этого предложения следует добавить условие $H^{[z_0:z_1]} = 1$.

Для произвольного ребра $[z, z']$ графа Γ через $\varphi_{z, z'}$ обозначим (однозначно определенное) биективное отображение множества подпространств пространства $\Gamma(z)$, содержащих z' , на множество подпространств пространства $\Gamma(z')$, содержащих z ,

перестановочное с действием группы $G(z, z')$ и являющееся коллинеацией проективного пространства $[z : z']$ на проективное пространство $[z' : z]$ (см. [7, ч. I, введение]).

При дополнительном предположении, что граф Γ является деревом, для $z \in V(\Gamma)$ и произвольного подпространства Z размерности $\dim Z \geq 1$ проективного пространства $\Gamma(z)$ через Γ_Z обозначим поддерево дерева Γ , для которого $z \in V(\Gamma_Z)$, $\Gamma_Z(z) = Z$ и из $[z', z''] \in E(\Gamma_Z)$ следует $\Gamma_Z(z'') = \varphi_{z', z''}(\Gamma_Z(z'))$. Ясно, что для произвольной вершины $z' \in V(\Gamma_Z)$ множество $\Gamma_Z(z')$ является подпространством размерности $\dim Z$ проективного пространства $\Gamma(z')$. Для произвольной подгруппы H группы G через H^{Γ_Z} обозначается группа автоморфизмов графа Γ_Z , индуцируемая стабилизатором $V(\Gamma_Z)$ в H . Кроме того, если элемент h группы G стабилизирует множество $V(\Gamma_Z)$, то через h^{Γ_Z} обозначается автоморфизм графа Γ_Z , индуцируемый h . Поскольку для произвольных $g \in G$ и $z', z'' \in V(\Gamma_Z)$ из $g(\Gamma_Z(z')) = \Gamma_Z(z'')$ следует, что g стабилизирует $V(\Gamma_Z)$, то Γ_Z и G^{Γ_Z} удовлетворяют основному условию (с тем же, что для Γ и G , значением q и $n = 1 + \dim Z$). Определяемая тем самым на $\Gamma_Z(z')$, $z' \in V(\Gamma_Z)$, структура проективного пространства совпадает, очевидно, с таковой, определенной на $\Gamma_Z(z')$ как на подпространстве проективного пространства $\Gamma(z')$. Наличие для произвольного ребра $[z', z''] \in E(\Gamma_Z)$ отображения $\varphi_{z', z''}$ позволяет при этом утверждать, что в случае $\dim Z > 1$ группа G^{Γ_Z} действует интранзитивно на множестве 3-дуг графа Γ_Z , а в случае $\dim Z > 2$ для Γ_Z и G^{Γ_Z} имеет место случай коллинеации. Более того, ясно, что ограничение $\varphi_{z', z''}$ на множество подпространств проективного пространства $\Gamma(z')$, содержащихся в $\Gamma_Z(z')$ и содержащих z'' , является той коллинеацией проективного пространства $\Gamma_Z(z')/\langle z'' \rangle$ на проективное пространство $\Gamma_Z(z'')/\langle z' \rangle$, которая перестановочна с действием группы $G^{\Gamma_Z}(z, z')$. Отсюда непосредственно следует, что если $z \in V(\Gamma)$, Z' – подпространство проективного пространства $\Gamma(z)$ и Z – подпространство Z' размерности не меньше 1, то $(\Gamma_{Z'})_Z = \Gamma_Z$. Кроме того, при этом $(G^{\Gamma_{Z'}})^{\Gamma_Z} = G^{\Gamma_Z}$.

Для доказательства последнего равенства в силу транзитивности подгруппы $(G^{\Gamma_{Z'}})^{\Gamma_Z}$ группы G^{Γ_Z} достаточно показать, что поэлементный стабилизатор $V(\Gamma_Z)$ в G действует транзитивно на множестве содержащих Z подпространств размерности $\dim Z'$ проективного пространства $\Gamma(z)$. Но при $Z \neq Z' \neq \Gamma(z)$ поточечный стабилизатор Z в G индуцирует на множестве содержащих Z подпространств размерности $\dim Z'$ проективного пространства $\Gamma(z)$ группу, содержащую транзитивную нормальную подгруппу, изоморфную $\text{PSL}_{n-1-\dim Z}(q)$. В то же время, если $\dim Z > 1$, то с учетом [6, предложение 2.3, 2)] поточечный стабилизатор Z в G индуцирует на $V(\Gamma_Z)$ группу, которая есть расширение p -группы посредством циклической группы порядка, делящего $q - 1$, а если $\dim Z = 1$, то с учетом [8, формула (2.3)] поточечный стабилизатор Z в G индуцирует на $V(\Gamma_Z)$ разрешимую группу, которая при $q \leq 3$ есть расширение p -группы посредством циклической группы порядка 1 или 2. Таким образом, при $Z \neq Z' \neq \Gamma(z)$ поточечный стабилизатор $V(\Gamma_Z)$ в G индуцирует на множестве содержащих Z подпространств размерности $\dim Z'$ проективного пространства $\Gamma(z)$ группу, содержащую транзитивную нормальную подгруппу, изоморфную $\text{PSL}_{n-1-\dim Z}(q)$. Этим установлена требуемая для доказательства равенства $(G^{\Gamma_{Z'}})^{\Gamma_Z} = G^{\Gamma_Z}$ транзи-

тивность действия поэлементного стабилизатора $V(\Gamma_Z)$ в G на множестве содержащих Z подпространств размерности $\dim Z'$ проективного пространства $\Gamma(z)$.

Предположим теперь, что $q = 2$ (более не предполагается, что граф Γ – дерево). Тогда для $z \in V(\Gamma)$ имеем $G(z)^{\Gamma(z)} \cong \mathrm{SL}_n(2)$ и, согласно [6, предложение 2.3, 2)], $G_1(z) = O_2(G(z))$. Если при этом $G_1(z) \neq 1$, то, согласно [6, предложение 2.3, 2)], для произвольной вершины $z' \in \Gamma(z)$ имеем $G_1(z)^{\Gamma(z')} = T_{z'}(z)$ и $G_1(z)G_1(z') = O_2(G(z, z'))$. Далее, естественным $\mathbf{F}_2G(z)/G_1(z)$ -модулем называется нетривиальный $\mathbf{F}_2G(z)/G_1(z)$ -модуль порядка 2^n такой, что для $z' \in \Gamma(z)$ группа $G(z, z')/G_1(z)$ оставляет на месте его ненулевой вектор. Говоря о некоторой группе V , на которой действует группа $G(z)$, как о $\mathbf{F}_2G(z)/G_1(z)$ -модуле, мы подразумеваем, что V – элементарная абелева 2-группа, централизованная $G_1(z)$, с $\mathbf{F}_2G(z)/G_1(z)$ -модульной структурой, определяемой естественным действием на V группы $G(z)/G_1(z)$.

Помимо этого, если для дерева Γ и группы его автоморфизмов G выполнено основное условие, причем $q = 2$, то для $z \in V(\Gamma)$, $z' \in \Gamma(z)$, $z'' \in \Gamma(z) \setminus \{z'\}$ нам будет удобно обозначать через $z' + z''$ единственную вершину множества $\langle z', z'' \rangle \setminus \{z', z''\}$, где $\langle z', z'' \rangle$ – прямая проективного пространства $\Gamma(z)$, содержащая z' и z'' .

В настоящей статье используется ряд известных результатов о когомологиях групп $\mathrm{SL}_n(q)$. В качестве универсальной ссылки на эти результаты используется статья [9] (хотя некоторые из них были получены в более ранних работах). Кроме того, нам потребуется следующий результат, вытекающий из [10, теорема 2.2].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть $R \cong \mathrm{SL}_6(2)$ и V_1 – естественный $\mathbf{F}_2R$ -модуль. Тогда каждый неприводимый $\mathbf{F}_2R$ -модуль порядка не больше 2^{20} совпадает с одним из следующих: V_1 , V_1^* , $V_1 \wedge V_1$, $V_1^* \wedge V_1^*$, $V_1 \wedge V_1 \wedge V_1$, где V_1^* – $\mathbf{F}_2R$ -модуль, дуальный к V_1 .

Завершим настоящий параграф анализом двух ситуаций (см. условия (*) и (**)) ниже), которые встретятся при доказательстве теоремы II.

Итак, предположим сначала, что выполняется следующее условие.

(*) Дерево Γ и группа его автоморфизмов G удовлетворяют основному условию, причем $n = 2$ и $q = 2$; $G_2(x) = 1$, группа $G(x)$ есть прямое произведение группы $G_1(x)$ порядка 2 и группы, изоморфной $\mathrm{SL}_2(2)$.

Если (z_0, z_1, z_3) – 2-дуга графа Γ , то нетривиальность действия группы $G(z_0, z_1, z_2) = G_1(z_1)$ на $\Gamma(z_2)$ влечет регулярность действия G на множестве 3-дуг графа Γ . Следствием этого является наличие у группы G двух орбит на множестве 4-дуг графа Γ .

Обозначим через $\Psi^{(\Gamma, G)}$ множество таких 4-дуг $(z_0, \dots, z_4)$ графа Γ , что инволюция группы $G_1(z_1 + z_3)$ (меняющая местами z_1 и z_3) меняет местами z_0 и z_4 . Ясно, что множество $\Psi^{(\Gamma, G)}$ является G -орбитой на множестве 4-дуг графа Γ .

Для произвольной 2-дуги (z_0, z_1, z_2) графа Γ определим биекцию $\psi_{z_0, z_1, z_2}^{(\Gamma, G)}$ множества $\Gamma(z_0) \setminus \{z_1\}$ на множество $\Gamma(z_2) \setminus \{z_1\}$ условием:

$$(z, z_0, z_1, z_2, \psi_{z_0, z_1, z_2}^{(\Gamma, G)}(z)) \in \Psi^{(\Gamma, G)} \quad \text{для } z \in \Gamma(z_0) \setminus \{z_1\}.$$

Из определений вытекает справедливость следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. 1) *Предположим, что выполняется условие (*). Если (z_0, z_1, z_2) – 2-дуга графа Γ , $z \in \Gamma(z_0) \setminus \{z_1\}$ и $g \in G$, то*

$$\begin{aligned}\psi_{z_0, z_1, z_2}^{(\Gamma, G)} &= (\psi_{z_2, z_1, z_0}^{(\Gamma, G)})^{-1}, \\ \psi_{z_0, z_1, z_2}^{(\Gamma, G)}(z) &= \psi_{z_0+z_2, z_1, z_2}^{(\Gamma, G)}(\psi_{z_0, z_1, z_0+z_2}^{(\Gamma, G)}(z)), \\ g(\psi_{z_0, z_1, z_2}^{(\Gamma, G)}(z)) &= \psi_{g(z_0), g(z_1), g(z_2)}^{(\Gamma, G)}(g(z)).\end{aligned}$$

2) *Предположим, что выполняется условие (*). Если $(z_0, \dots, z_4)$ – 4-дуга графа Γ , то существует $h \in G$ такой, что $h(z_j) = z_{4-j}$ для $j = 0, \dots, 4$.*

Предположим теперь, что выполняется следующее условие.

(**) Дерево Γ и группа его автоморфизмов G удовлетворяют основному условию, причем G действует интранзитивно на множестве 3-дуг Γ , $n = 3$ и $q = 2$; $G_3(x) = 1$, группа $G(x)$ есть расщепляемое расширение элементарной абелевой группы $G_1(x)$ посредством группы $G(x)/G_1(x) \cong \text{SL}_3(2)$, причем (относительно естественного действия группы $G(x)/G_1(x)$) $G_1(x)$ является прямой суммой естественного $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуля и тривиального $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуля $G_2(x)$ порядка 2; $G_2(x)^{\Gamma(x'')} = T_{x''}(x', \varphi_{x', x''}(\langle x, x'' \rangle))$ для произвольной 2-дуги (x, x', x'') графа Γ ; для каждого $h \in G_1(x) \setminus G_2(x)$ найдется вершина $x_h \in \Gamma(x)$ такая, что $h^{\Gamma(x_h)} = 1$ и $1 \neq h^{\Gamma(x')} \in T_{x'}(x, \varphi_{x, x'}(\langle x_h, x' \rangle))$ для произвольной вершины $x' \in \Gamma(x) \setminus \{x_h\}$.

(Из работы [11] следует, что если дерево Γ и группа его автоморфизмов G удовлетворяют основному условию, причем G действует интранзитивно на множестве 3-дуг Γ , $n = 3$, $q = 2$ и $G_2(x) \neq 1$, то для Γ и G выполняется условие (**).)

Для произвольной вершины z графа Γ обозначим через c_z инволюцию из $G_2(z)$ (см. (**)). Заметим, что для произвольного ребра $[z_0, z_1]$ графа Γ справедливо равенство $G_1(z_0, z_1) = \{1, c_{z_0}, c_{z_1}, c_{z_0}c_{z_1}\}$.

Если $z \in V(\Gamma)$, $z' \in \Gamma(z)$ и $z'' \in \Gamma(z) \setminus \{z'\}$, то $c_{z'}c_{z''} = c_z c_{z'+z''}$. Действительно, для $z''' \in \Gamma(z' + z'') \setminus \varphi_{z, z'+z''}(\langle z', z'' \rangle)$ инволюция $c_{z'}c_{z''} = [c_{z'}, c_{z''}]$ из $G_1(z, z' + z'') = \{1, c_z, c_{z'+z''}, c_z c_{z'+z''}\}$ перестановочна с элементом группы G , отображающим 3-дугу $(z', z, z' + z'', z''')$ в 3-дугу $(z''', z' + z'', z, z')$, и, следовательно, совпадает с $c_z c_{z'+z''}$.

В качестве следствия получаем, что $\{c_x c_y \mid y \in \Gamma(x)\}$ – множество всех неединичных элементов $G(x)$ -допустимой элементарной абелевой группы порядка 2^3 , содержащейся в $G_1(x)$ и являющейся естественным $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модулем (см. (**)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. *Предположим, что выполняется условие (**). Если $z \in V(\Gamma)$ и Z – прямая проективного пространства $\Gamma(z)$, то условие (*) выполняется для Γ_Z (в качестве Γ) и G^{Γ_Z} (в качестве G).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, прежде всего, что для произвольной 4-дуги $(z_0, \dots, z_4)$ графа Γ_Z имеем $c_{z_0} \in G(z_0, \dots, z_4)$. Действительно, в противном случае $c_{z_0} \in G(z_0, \dots, z_3) \setminus G(z_0, \dots, z_4)$ и $c_{z_4} \in G(z_1, \dots, z_4) \setminus G(z_0, \dots, z_4)$, откуда $[c_{z_0}, c_{z_4}] = c_{z_4+z_2}c_{z_4} = c_{z_3}c_{z_2}$ и $[c_{z_0}, c_{z_4}] = c_{z_0}c_{z_0+z_2} = c_{z_1}c_{z_2}$ вопреки тому, что $c_{z_3} \neq c_{z_1}$.

Далее, легко видеть, что для доказательства предложения достаточно убедиться в справедливости для произвольной 4-дуги $(z_0, \dots, z_4)$ графа Γ_Z равенства $G(z_0, \dots, z_3) = G(z_0, \dots, z_4)$. Предположим, что, напротив, существует $g \in G(z_0, \dots, z_3) \setminus G(z_0, \dots, z_4)$. Из $g \in G(z_1, z_2, z_3)$ следует $g^{\Gamma(z_2)} \in T_{z_2}(z', \langle z_1, z_3 \rangle)$, где $z' \in \langle z_1, z_3 \rangle$. Пусть z'' – произвольная вершина из $\varphi_{z_2, z'}(\langle z_1, z_3 \rangle) \setminus \{z_2\}$. Тогда согласно условию $(**)$ имеем $1 \neq c_{z''}^{\Gamma(z_2)} \in T_{z_2}(z', \langle z_1, z_3 \rangle)$, причем в силу сделанного в начале доказательства наблюдения $c_{z''} \in G(z'', z', z_2, z_1, z_0, z_3, z_4) \leq G(z_0, \dots, z_4)$. Следовательно, либо элемент g , либо элемент $gc_{z''}$ содержится в $(G_1(z_2) \cap G(z_0)) \setminus G(z_4)$. В частности, $G_1(z_2) \cap G(z_0) \not\leq G(z_4)$, что противоречит $(**)$. Предложение доказано.

Следующее предложение, хотя непосредственно в дальнейшем не используется, проясняет ситуацию в случае выполнения условия $(**)$ и представляет интерес в связи с результатами § 2 (см. леммы 2.1, 1), 2.13, 2.14 и доказательство леммы 2.19).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Предположим, что выполняется условие $(**)$. Тогда группа $G(x)$ содержит такую подгруппу $L^* \cong \text{SL}_3(2)$, что для произвольной вершины $y \in \Gamma(x)$ существует (и притом единственная) коллинеация ω_y проективного пространства $\Gamma(x)$ на проективное пространство $\Gamma(y)$, коммутирующая с естественным действием группы $L^*(y)$ на $\Gamma(x) \cup \Gamma(y)$. При этом для $y \in \Gamma(x)$ и $z \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$ имеем $c_z c_{\omega_y(z)} \in L^*$ и $1 \neq (c_z c_{\omega_y(z)})^{\Gamma(x)} \in T_x(y, \langle y, z \rangle)$. Кроме того, группа $G(x)$ содержит такую подгруппу $L^{**} \cong \text{SL}_3(2)$, что для произвольной вершины $y \in \Gamma(x)$ группа $L^{**}(y)$ стабилизирует единственную прямую X_y проективного пространства $\Gamma(y)$. При этом для $y \in \Gamma(x)$, $z \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$ и $y' \in X_y \cap \varphi_{x, y}(\langle y, z \rangle)$ имеем $c_y c_{y'} \in L^{**}$ и $1 \neq (c_y c_{y'})^{\Gamma(x)} \in T_x(y, \langle y, z \rangle)$. Каждая подгруппа группы $G(x)$, изоморфная $\text{SL}_3(2)$, сопряжена либо с L^* , либо с L^{**} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся кратким изложением соответствующих рассуждений. Известно (см. [9]), что группа, являющаяся расщепляемым расширением элементарной абелевой группы порядка 2^3 посредством действующей на ней нетривиально группы, изоморфной $\text{SL}_3(2)$, имеет два класса сопряженных подгрупп, изоморфных $\text{SL}_3(2)$, причем инволюции подгрупп из различных классов не сопряжены во всей группе. Отсюда следует, что группа $G(x)$ имеет два класса сопряженных подгрупп, изоморфных $\text{SL}_3(2)$, причем для представителей $L_{(1)}, L_{(2)}$ этих классов инволюции из $L_{(1)}$ не сопряжены в группе $G(x)$ с инволюциями из $L_{(2)}$.

Если L – некоторая подгруппа группы $G(x)$, изоморфная $\text{SL}_3(2)$, то она точно действует на $\Gamma(x)$, индуцируя на $\Gamma(x)$ группу $G(x)^{\Gamma(x)}$, и (с учетом свойств $\varphi_{x, y}$ для $y \in \Gamma(x)$) справедливо одно из следующих утверждений:

а) для произвольной вершины $y \in \Gamma(x)$ группа $L(y)$ действует точно на $\Gamma(y)$ и существует (единственная) коллинеация $\omega_{y, L}$ проективного пространства $\Gamma(x)$ на проективное пространство $\Gamma(y)$, коммутирующая с естественным действием группы $L(y)$ на $\Gamma(x) \cup \Gamma(y)$;

б) для произвольной вершины $y \in \Gamma(x)$ группа $L(y)$ индуцирует на $\Gamma(y)$ группу, изоморфную $\text{SL}_2(2)$, и существует (единственная) $L(y)$ -инвариантная прямая $X_{y, L}$ проективного пространства $\Gamma(y)$.

Предположим, что для L имеет место а). Пусть $y \in \Gamma(x)$, $z \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$, $a \in L$ и $1 \neq a^{\Gamma(x)} \in T_x(y, \langle y, z \rangle)$. Ясно, что

$$\omega_{y,L}(\langle y, z \rangle) = \varphi_{x,y}(\langle y, z \rangle) \quad \text{и} \quad 1 \neq a^{\Gamma(y)} \in T_y(x, \varphi_{x,y}(\langle y, z \rangle)).$$

Следовательно,

$$a^{\Gamma(x)} = (c_z c_{\omega_{y,L}(z)})^{\Gamma(x)} \quad \text{и} \quad a^{\Gamma(y)} = (c_z c_{\omega_{y,L}(z)})^{\Gamma(y)},$$

откуда $a = c_z c_{\omega_{y,L}(z)} c$ для некоторого $c \in G_1(x, y) = \{1, c_x, c_y, c_x c_y\}$. Пусть h – элемент порядка 3 группы $L(y)$, для которого множество $\{z, h(z), h^2(z)\}$ является прямой проективного пространства $\Gamma(x)$. (При этом $\{\omega_{y,L}(z), \omega_{y,L}(h(z)) = h(\omega_{y,L}(z)), \omega_{y,L}(h^2(z)) = h^2(\omega_{y,L}(z))\}$ – прямая проективного пространства $\Gamma(y)$.) Так как $ahah^{-1}h^2ah^{-2} = 1$ (поскольку $a^{\Gamma(x)}(hah^{-1})^{\Gamma(x)}(h^2ah^{-2})^{\Gamma(x)} = 1$), то

$$\begin{aligned} 1 &= c_z c_{\omega_{y,L}(z)} c h c_z c_{\omega_{y,L}(z)} c h^{-1} h^2 c_z c_{\omega_{y,L}(z)} c h^{-2} \\ &= c^3 c_z c_{\omega_{y,L}(z)} c h(z) c_{\omega_{y,L}(h(z))} c h^2(z) c_{\omega_{y,L}(h^2(z))} \\ &= c^3 c_z c_{h(z)} c_{\omega_{y,L}(z)+x} c_{\omega_{y,L}(h(z))} c h^2(z) c_{\omega_{y,L}(h^2(z))} \\ &= c^3 c_z c_{h(z)} c h^2(z) c_{\omega_{y,L}(z)} c_{\omega_{y,L}(h(z))+x} c_{\omega_{y,L}(h^2(z))} \\ &= c^3 c_x c_{z+h(z)} c h^2(z) c_y c_{\omega_{y,L}(z)+\omega_{y,L}(h(z))+x} c_{\omega_{y,L}(h^2(z))} \\ &= c^3 c_x c_{h^2(z)} c h^2(z) c_y c_{\omega_{y,L}(h^2(z))+x} c_{\omega_{y,L}(h^2(z))} \\ &= c^3 c_x c_y c_y c_x = c^3 = c. \end{aligned}$$

Таким образом, $a = c_z c_{\omega_{y,L}(z)} c = c_z c_{\omega_{y,L}(z)}$.

Предположим теперь, что для L имеет место б). Пусть $y \in \Gamma(x)$, $z \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$, $y' \in X_{y,L} \cap \varphi_{x,y}(\langle y, z \rangle)$, $a \in L$ и $1 \neq a^{\Gamma(x)} \in T_x(y, \langle y, z \rangle)$. Ясно, что $x \notin X_{y,L}$ и $a^{\Gamma(y)} = 1$. Следовательно, $a^{\Gamma(x)} = c_{y'}^{\Gamma(x)}$ и $a^{\Gamma(y)} = c_{y'}^{\Gamma(y)}$, откуда $a = c_{y'} c$ для некоторого $c \in G_1(x, y) = \{1, c_x, c_y, c_x c_y\}$. Пусть h – элемент порядка 3 группы $L(y)$. (При этом $\{y', h(y'), h^2(y')\} = X_{y,L}$.) Так как $ahah^{-1}h^2ah^{-2} = 1$ (поскольку $a^{\Gamma(x)}(hah^{-1})^{\Gamma(x)}(h^2ah^{-2})^{\Gamma(x)} = 1$), то

$$\begin{aligned} 1 &= c_{y'} c h c_{y'} c h^{-1} h^2 c_{y'} c h^{-2} = c^3 c_{y'} c_{h(y')} c_{h^2(y')} \\ &= c^3 c_{y' + h(y')} c_{h^2(y')} = c^3 c_y = c c_y. \end{aligned}$$

Таким образом, $a = c_{y'} c = c_{y'} c_y = c_y c_{y'}$.

Для завершения доказательства остается показать, что ни утверждение а), ни утверждение б) не может иметь места одновременно для обеих подгрупп $L_{(1)}$ и $L_{(2)}$. Предположим противное. Поскольку для произвольных $y_i \in \Gamma(x)$, $z_i \in \Gamma(x) \setminus \{y_i\}$, $y'_i \in \varphi_{x,y_i}(\langle y_i, z_i \rangle) \setminus \{x\}$, $i = 1, 2$, в группе $G(x)$ найдется такой элемент h' , что $h'(y_1) = y_2$, $h'(z_1) = z_2$ и $h'(y'_1) = y'_2$, то из доказанного следует, что при этом предположении инволюции из $L_{(1)}$ сопряжены с инволюциями из $L_{(2)}$. Полученное противоречие доказывает предложение.

§ 2. О строении стабилизаторов вершин в случае коллинеации при $n = 4$

В настоящем параграфе докажем теорему II (см. ниже), которая используется в § 3 при доказательстве теоремы I, но представляет и самостоятельный интерес. Эта теорема, а также приводимое ее доказательство позволяют детально описать строение (единственное с точностью до изоморфизма; см. замечание 2.4) и действие стабилизатора вершины графа в случае 2) теоремы из [2]. Теорема II была анонсирована в [2, замечание 4.1]. Для доказательства теоремы I важно, собственно, лишь отсутствие у рассматриваемых в теореме II стабилизаторов вершин подгрупп, изоморфных $SL_4(2)$. Однако доказательство последнего факта требует по существу исчерпывающего изучения указанных стабилизаторов. В связи с этим уместно включить в настоящую статью (основной целью которой является доказательство теоремы I) теорему II в форме несколько более точной, чем это необходимо для доказательства теоремы I.

ТЕОРЕМА II. Пусть для графа Γ и группы его автоморфизмов G имеет место случай 2) теоремы из [2], т. е. Γ и G удовлетворяют основному условию (см. введение), имеет место случай коллинеации, $q = 2$, $n = 4$, $G_4(x) = 1$, $G_3(x)$ – группа порядка 2, $G_2(x)/G_3(x)$ – естественный $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуль и $G_1(x)/G_2(x)$ – внешний квадрат естественного $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуля. Тогда $G_1(x) = Q \times E$, где $Q \cong D_8 * D_8 * D_8$ – экстраспециальная группа и E – нормальная элементарная абелева подгруппа порядка 2^4 группы $G(x)$, $G_3(x) = Z(Q)$, $G_2(x) = Z(Q) \times E$, $G(x)/Z(Q) = G_1(x)/Z(Q) \rtimes H$ – полупрямое произведение элементарной абелевой группы $G_1(x)/Z(Q)$ порядка 2^{10} на группу $H \cong SL_4(2)$, причем $G_1(x)/Z(Q)$ как $\mathbf{F}_2 H$ -модуль является (единственным) неразложимым расширением естественного $\mathbf{F}_2 H$ -модуля $EZ(Q)/Z(Q)$ посредством его внешнего квадрата $G_1(x)/Z(Q)E$, а полный прообраз группы H при естественном гомоморфизме $G(x) \rightarrow G(x)/Z(Q)$ изоморфен универсальному центральному расширению группы $SL_4(2)$. Группа $G(x)$ не содержит подгрупп, изоморфных $SL_4(2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя от графа Γ и группы G к универсальному накрывающему графа Γ и соответствующей накрывающей группы G , будем без потери общности (см. [7, ч. I, § 1]) предполагать далее, что Γ – дерево.

Для произвольной вершины z графа Γ обозначим через c_z (единственную) инволюцию из $G_3(z)$. Напомним, что для $z' \in \Gamma(z)$, $z'' \in \Gamma(z) \setminus \{z'\}$ через $z' + z''$ обозначается единственная вершина множества $\langle z', z'' \rangle \setminus \{z', z''\}$.

Сформулируем в следующей лемме используемые в дальнейшем свойства дерева Γ и группы его автоморфизмов G , установленные в работе [2, леммы 2.1, 2.2, 2.4, 4.1].

ЛЕММА 2.1. 1) Если $z \in V(\Gamma)$ и Z – плоскость проективного пространства $\Gamma(z)$, то условие $(**)$ из § 1 выполняется для Γ_Z (в качестве Γ) и G^{Γ_Z} (в качестве G).

2) Если $z \in V(\Gamma)$ и $z' \in \Gamma(z)$, то $G_1(z)^{\Gamma(z')} = T_{z'}(z)$ и для произвольного элемента $h \in G_1(z, z') \setminus G_2(z)$ найдется (единственная) прямая $Z_h \in [z : z']$ такая, что $h^{\Gamma(z'')} = 1$ при $z'' \in Z_h$ и $1 \neq h^{\Gamma(z'')} \in T_{z''}(z, \varphi_{z, z''}(\langle Z_h, z'' \rangle))$ при $z'' \in \Gamma(z) \setminus Z_h$.

3) Если $(z_0, \dots, z_3)$ – 3-дуга графа Γ , то $c_{z_0}^{\Gamma(z_3)} = 1$ при $z_3 \in \varphi_{z_1, z_2}(\langle z_0, z_2 \rangle)$ и $1 \neq c_{z_0}^{\Gamma(z_3)} \in T_{z_3}(z_2, \Phi_{z_3}(z_0))$ при $z_3 \notin \varphi_{z_1, z_2}(\langle z_0, z_2 \rangle)$.

4) Если $z \in V(\Gamma)$ и $h \in G_2(z) \setminus G_3(z)$, то существует (единственная в силу 3)) вершина $z_h \in \Gamma(z)$ такая, что $h = c_{z_h}$ или $h = c_{z_h}c_z$. В частности, если $z' \in \Gamma(z)$, то (с учетом 3)) $G_2(z, z') = G_3(z)G_3(z')$.

ЛЕММА 2.2. Если $z \in V(\Gamma)$ и Z – прямая проективного пространства $\Gamma(z)$, то условие $(*)$ из §1 выполняется для Γ_Z (в качестве Γ) и G^{Γ_Z} (в качестве G).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Z' – некоторая содержащая Z плоскость проективного пространства $\Gamma(z)$. Тогда, как было замечено в §1, $\Gamma_Z = (\Gamma_{Z'})_Z$ и $G^{\Gamma_Z} = (G^{\Gamma_{Z'}})^{\Gamma_Z}$, что в силу леммы 2.1, 1) и предложения 1.3 доказывает лемму.

Если (z_0, z_1, z_2) – 2-дуга графа Γ и $Z = \langle z_0, z_2 \rangle$, то в соответствии с леммой 2.2 и §1 определена биекция $\psi_{z_0, z_1, z_2}^{(\Gamma_Z, G_Z)}$ множества $\Gamma_Z(z_0) \setminus \{z_1\} = \varphi_{z_1, z_0}(\langle z_0, z_2 \rangle) \setminus \{z_1\}$ на множество $\Gamma_Z(z_2) \setminus \{z_1\} = \varphi_{z_1, z_2}(\langle z_0, z_2 \rangle) \setminus \{z_1\}$, которую в дальнейшем будем обозначать через ψ_{z_0, z_1, z_2} . Из этого определения и предложения 1.2 вытекает справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 2.3. 1) Если (z_0, z_1, z_2) – 2-дуга графа Γ , $z \in \varphi_{z_1, z_0}(\langle z_0, z_2 \rangle) \setminus \{z_1\}$ и $g \in G$, то $\psi_{z_0, z_1, z_2} = \psi_{z_2, z_1, z_0}^{-1}$, $\psi_{z_0, z_1, z_2}(z) = \psi_{z_0+z_2, z_1, z_2}(\psi_{z_0, z_1, z_0+z_2}(z))$ и $g(\psi_{z_0, z_1, z_2}(z)) = \psi_{g(z_0), g(z_1), g(z_2)}(g(z))$.

2) Если $(z_0, \dots, z_4)$ – 4-дуга графа Γ такая, что $z_i \in \varphi_{z_{i-2}, z_{i-1}}(\langle z_{i-3}, z_{i-1} \rangle)$ для $i = 3, 4$, то существует $h \in G$ такой, что $h(z_j) = z_{4-j}$ для $j = 0, \dots, 4$.

ЛЕММА 2.4. 1) Если $z \in V(\Gamma)$, Z – плоскость проективного пространства $\Gamma(z)$ и $z' \in V(\Gamma_Z)$, то $c_{z'}$ действует тривиально на $V(\Gamma_Z)$.

2) Если $z \in V(\Gamma)$, Z – прямая проективного пространства $\Gamma(z)$ и $z' \in V(\Gamma_Z)$, то $c_{z'} \in G_1(z'')$ для всех $z'' \in V(\Gamma_Z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства 1) достаточно заметить, что из леммы 2.1, 1) следует $(G^{\Gamma_Z})_3(z') = 1$.

Справедливость 2) вытекает из 1), поскольку для $z'' \in V(\Gamma_Z)$ каждая вершина из $\Gamma(z'')$ принадлежит $V(\Gamma_{Z'})$ для некоторой плоскости Z' проективного пространства $\Gamma(z')$.

ЛЕММА 2.5. Если $z \in V(\Gamma)$, $z' \in \Gamma(z)$, $z'' \in V(\Gamma) \setminus \{z'\}$, то $c_{z'}c_{z''} = c_{z'+z''}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(z_0, \dots, z_4)$ – 4-дуга графа Γ такая, что $z_3 \notin \varphi_{z_1, z_2}(\langle z_0, z_2 \rangle)$ и $z_4 \notin \Phi_{z_3}(z_0)$. Тогда в силу леммы 2.1, 3) имеем $c_{z_0}(z_4) = z_2 + z_4$ и, следовательно, $c_{z_2+z_4}c_{z_4} = [c_{z_0}, c_{z_4}] \in G_2(z_1, z_2, z_3)$. Так как $G_2(z_1, z_2, z_3) = G_3(z_2)$ (см. лемму 2.1, 4)) и $c_{z_2+z_4}c_{z_4} \neq 1$ (см. лемму 2.1, 3)), это влечет $c_{z_2+z_4}c_{z_4} = c_{z_2}$, что доказывает лемму.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из доказательства леммы 2.5 следует, что $[G_1(x), G_1(x)] \neq 1$. Действительно, $1 \neq c_{z_2} = [c_{z_0}, c_{z_4}] \in [G_1(z_2), G_1(z_2)]$.

Из леммы 2.5 с учетом леммы 2.1, 3) следует, что множество $\{c_y \mid y \in \Gamma(x)\}$, которое нормализуется $G(x)$ и централизуется $G_1(x)$, является множеством всех неединичных элементов элементарной абелевой подгруппы порядка 2^4 группы $G_2(x)$. Обозначим эту подгруппу через E . Биекция $c_y \mapsto y, y \in \Gamma(x)$, осуществляет эквивалентность естественного действия группы $G(x)$ на множестве неединичных элементов нормальной подгруппы E (при котором $g \in G(x)$ отображает c_y в $gc_y g^{-1}$, $y \in \Gamma(x)$) и естественного действия $G(x)$ на $\Gamma(x)$. Таким образом, E – естественный $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуль. Так как группа $G_2(x)$ есть расширение группы $G_3(x)$ порядка 2 посредством элементарной абелевой группы $G_2(x)/G_3(x)$ порядка 2^4 , являющейся естественным $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модулем, то с учетом $H^1(\mathrm{SL}_4(2), V_1^*) = 0$ для дуального к естественному $\mathbf{F}_2 \mathrm{SL}_4(2)$ -модулю V_1^* (см., например, [9]) имеем $G_2(x) = G_3(x) \times E$.

ЛЕММА 2.6. *Группа $G_1(x)$ – прямое произведение групп Q и E , где $Q \cong D_8 * D_8 * D_8$ – экстраспециальная группа, причем $G_3(x) = Z(Q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа $G_1(x)/G_3(x)$ – расширение группы $G_2(x)/G_3(x)$, являющейся естественным $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модулем, посредством группы $G_1(x)/G_2(x)$, являющейся внешним квадратом естественного $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуля. Следовательно, $G_1(x)/G_3(x)$ – элементарная абелева группа. (Действительно, для каждого неединичного элемента u группы $G_1(x)/G_2(x)$ множество всех элементов v группы $G_1(x)/G_2(x)$ таких, что централизатор u и v в группе $G(x)/G_1(x)$ не централизует неединичные элементы группы $G_2(x)/G_3(x)$, порождает $G_1(x)/G_2(x)$.) В силу замечания 2.1 это влечет $[G_1(x), G_1(x)] = G_3(x)$. Далее, группа $G_1(x)/E$ – неабелево расширение группы $G_2(x)/E$ порядка 2 посредством группы $G_1(x)/G_2(x)$, являющейся внешним квадратом естественного $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуля (где $G(x)/G_1(x) \cong \mathrm{SL}_4(2)$). Следовательно, $G_1(x)/E$ – экстраспециальная группа $D_8 * D_8 * D_8$. Таким образом, утверждение леммы справедливо, если положить Q равной полному прообразу некоторого дополнения для подгруппы $G_2(x)/G_3(x)$ в группе $G_1(x)/G_3(x)$ при естественном гомоморфизме $G_1(x) \rightarrow G_1(x)/G_3(x)$.

ЛЕММА 2.7. *Если $(x_0, \dots, x_4)$ – 4-дуга графа Γ такая, что*

$$x_3 \notin \varphi_{x_1, x_2}(\langle x_0, x_2 \rangle), \quad x_4 \in \Phi_{x_3}(x_0),$$

то $1 \neq c_{x_0}^{\Gamma(x_4)} \in T_{x_4}(x_5, \Phi_{x_4}(x_0))$ для некоторой вершины $x_5 \in \varphi_{x_3, x_4}(\langle x_2, x_4 \rangle) \setminus \{x_3\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $X = \Phi_{x_4}(x_0)$ – плоскость проективного пространства $\Gamma(x_4)$ и $x_0 \in V(\Gamma_X)$, то в силу утверждения 1) леммы 2.4 заключаем, что $c_{x_0}^{V(\Gamma_X)} = 1$. Отсюда следует, что $c_{x_0}^{\Gamma(x_4)} \in T_{x_4}(x_5, \Phi_{x_4}(x_0))$ для некоторой вершины $x_5 \in \Phi_{x_4}(x_0)$. Поскольку согласно лемме 2.1, 3) имеем $1 \neq c^{\Gamma(x_3)} \in T_{x_3}(x_2, \Phi_{x_3}(x_0))$ и, в частности, элемент $c^{\Gamma(x_3)}$ действует нетривиально на $[x_3 : x_4]$, но оставляет на месте каждую содержащую $\langle x_2, x_4 \rangle$ плоскость проективного пространства $\Gamma(x_3)$, то с учетом свойств φ_{x_3, x_4} заключаем, что $c^{\Gamma(x_4)} \neq 1$ и $x_5 \in \varphi_{x_3, x_4}(\langle x_2, x_4 \rangle) \setminus \{x_3\}$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.8. Если $(x_0, \dots, x_4)$ – 4-дуга графа Γ такая, что

$$x_3 \in \varphi_{x_1, x_2}(\langle x_0, x_2 \rangle), \quad x_4 = \psi_{x_1, x_2, x_3}(x_0),$$

то $c_{x_0} \neq c_{x_4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, и пусть $(z_0, \dots, z_5)$ – 5-дуга графа Γ такая, что $z_i \notin \varphi_{z_{i-2}z_{i-1}}(\langle z_{i-3}, z_{i-1} \rangle)$ для $i = 3, 4, 5$ и $z_j \notin \Phi_{z_{j-1}}(z_{j-4})$ для $j = 4, 5$ (при этом, очевидно, $z_{i-3} \notin \varphi_{z_{i-1}, z_{i-2}}(\langle z_{i-2}, z_i \rangle)$ и $z_{j-4} \notin \Phi_{z_{j-3}}(z_j)$). Тогда, полагая $z'_3 \in \varphi_{z_4, z_3}(\langle z_3, z_5 \rangle) \cap \Phi_{z_3}(z_0)$ и $z''_3 = \psi_{z_4, z_3, z'_3}(z_5)$, имеем $c_{z_5} = c_{z'_3}$. Лемма 2.7 влечет $1 \neq c_{z_0}^{\Gamma(z'_3)} \in T_{z'_3}(\tilde{z}_3, \Phi_{z'_3}(z_0))$, где $\tilde{z}_3 \in \varphi_{z_3, z'_3}(\langle z_2, z'_3 \rangle) \setminus \{z_3\}$. Поскольку $z''_3 \notin \Phi_{z'_3}(z_0)$ (иначе $z_4 \in \Phi_{z_3}(z_0)$), то отсюда с учетом леммы 2.5 следует

$$[c_{z_0}, c_{z_5}] = c_{z_0}c_{z'_3}c_{z_0}c_{z''_3} = c_{z'_3+\tilde{z}_3}c_{z''_3} = c_{\tilde{z}_3}.$$

Аналогично, для $z'_2 \in \varphi_{z_1, z_2}(\langle z_0, z_2 \rangle) \cap \Phi_{z_2}(z_5)$ и некоторой вершины $\tilde{z}_2 \in \varphi_{z_2, z'_2}(\langle z_3, z'_2 \rangle) \setminus \{z_2\}$ имеем $[c_{z_0}, c_{z_5}] = c_{\tilde{z}_2}$. Таким образом, $c_{\tilde{z}_3} = c_{\tilde{z}_2}$. Но по предположению $c_{\tilde{z}_3} = c_z$, где $z = \psi_{z'_3, z_3, z_2}(\tilde{z}_3)$, и, в частности, $c_{\tilde{z}_3} \in G_2(z_2)$, а согласно лемме 2.1, 3) имеем $c_{\tilde{z}_2} \notin G_2(z_2)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

ЛЕММА 2.9. Если $(x_0, \dots, x_4)$ – 4-дуга графа Γ такая, что

$$x_3 \in \varphi_{x_1, x_2}(\langle x_0, x_2 \rangle), \quad x_4 \notin \varphi_{x_2, x_3}(\langle x_1, x_3 \rangle),$$

то $1 \neq c_{x_0}^{\Gamma(x_4)} \in T_{x_4}(x_3, \Phi_{x_4}(x_0))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x' – произвольная вершина из $\varphi_{x_2, x_3}(\langle x_1, x_3 \rangle) \setminus \{x_2\}$. Тогда из леммы 2.4, 2) следует, что $c_{x_0} \in G_1(x_2, x_3, x')$. В силу леммы 2.1, 2) это влечет

$$c_{x_0}^{\Gamma(x_4)} \in T_{x_4}(x_3, \varphi_{x_3, x_4}(\langle x_2, x', x_4 \rangle)) = T_{x_4}(x_3, \Phi_{x_4}(x_0)).$$

Предположим, что $c_{x_0}^{\Gamma(x_4)} = 1$. Тогда с учетом леммы 2.1, 2) имеем $c_{x_0} \in G_1(x_2, x_3, x', x_4) = G_2(x_3)$. Так как в группе $G(x_0, x_1, x_2)$ существует элемент, отображающий x_3 в $x_1 + x_3$, то имеем, кроме того, $c_{x_0} \in G_2(x_1 + x_3)$. Поскольку $c_{x_0} \notin G_2(x_2)$ (см. лемму 2.1, 3)), то отсюда с учетом утверждений 3), 4) леммы 2.1 и произвольности выбора вершины x' из $\varphi_{x_2, x_3}(\langle x_1, x_3 \rangle) \setminus \{x_2\}$ следует, что, не теряя общности, можно в дальнейшем предполагать выполненным включение $c_{x_0} \in G_2(x_3, x') \setminus \{1, c_{x_3}\} = \{c_{x'}, c_{x'}c_{x_3}\}$. Если $c_{x_0} = c_{x'}c_{x_3}$, то из существования в группе G элемента, отображающего 4-дугу $(x_0, \dots, x_3, x')$ в 4-дугу $(x', x_3, \dots, x_0)$ (см. лемму 2.3, 2)), следует, что также $c_{x'} = c_{x_0}c_{x_1}$. Но тогда

$$c_{x_1} = c_{x_0}c_{x_0}c_{x_1} = c_{x_0}c_{x'} = c_{x_0}c_{x'}c_{x_3}c_{x_3} = c_{x_0}c_{x_0}c_{x_3} = c_{x_3}$$

вопреки лемме 2.1, 3). Таким образом, $c_{x_0} = c_{x'}$. Согласно лемме 2.8 это влечет $x' = \psi_{x_1, x_2, x_3}(x_0) + x_2$. Так как в группе $G(x_0, x_1, x_2)$ существует элемент, отображающий x_3 в $x_1 + x_3$, то, полагая $x'' = \psi_{x_1, x_2, x_1+x_3}(x_0) + x_2$, имеем, кроме того, $c_{x_0} = c_{x''}$. Следовательно, $c_{x'} = c_{x''}$. Но $x'' = \psi_{x_3, x_2, x_1+x_3}(x')$ в силу леммы 2.3, 1). Полученное противоречие с леммой 2.8 завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 2.10. Если $(x_0, \dots, x_4)$ – 4-дуга графа Γ такая, что

$$x_3 \in \varphi_{x_1, x_2}(\langle x_0, x_2 \rangle), \quad x_4 = \psi_{x_1, x_2, x_3}(x_0),$$

то $c_{x_0}c_{x_4} = c_{x_1+x_3}$ и $c_{x_0}c_{x_1} = c_{x_4}c_{x_3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, прежде всего, что второе утверждение леммы следует из первого, поскольку с учетом лемм 2.1, 3), 2.5 имеем

$$c_{x_0}c_{x_1} = c_{x_4}c_{x_3}c_{x_0}c_{x_4}c_{x_3}c_{x_1} = c_{x_4}c_{x_3}c_{x_0}c_{x_4}c_{x_1+x_3}.$$

Докажем первое утверждение леммы. Если $z \in \Gamma(x_2)$, то лемма 2.1, 3) влечет $c_{x_0}^{\Gamma(z)} = c_{x_4}^{\Gamma(z)}$. Следовательно,

$$c_{x_0}c_{x_4} \in G_2(x_2). \quad (2.1)$$

Далее, если $z \in \Gamma(x_1) \setminus \langle x_0, x_2 \rangle$, то $c_{x_4} \notin G_1(z)$ в силу леммы 2.9. Аналогично, если $z \in \Gamma(x_3) \setminus \langle x_2, x_4 \rangle$, то $c_{x_0} \notin G_1(z)$. Следовательно,

$$c_{x_0}c_{x_4} \notin G_2(x_1) \cup G_2(x_3). \quad (2.2)$$

Поскольку по лемме 2.4, 2) имеем $c_{x_0}c_{x_4} \in G_1(x_4)$, то из (2.1), (2.2) и утверждений 3), 4) леммы 2.1 вытекает, что либо $c_{x_0}c_{x_4} = c_{x_1+x_3}$ (и лемма справедлива), либо $c_{x_0}c_{x_4} = c_{x_1+x_3}c_{x_2}$.

Предположим, что $c_{x_0}c_{x_4} = c_{x_1+x_3}c_{x_2}$. Так как $G_1(x_1+x_3)^{\Gamma(x_2)} = T_{x_2}(x_1+x_3)$ (см. лемму 2.1, 2)), то существует $h \in G_1(x_1+x_3)$ такой, что $h(x_1) = x_3$. Согласно лемме 2.3, 1) при этом $h(x_0) = x_4$ и, следовательно, $hc_{x_0}h^{-1} = c_{x_4}$. Заметим также, что $c_{x_0}, c_{x_4} \in G_1(x_1+x_3)$ в силу леммы 2.1, 3). Пусть X – некоторая не содержащая вершину x_2 плоскость проективного пространства $\Gamma(x_1+x_3)$. Тогда из $h, c_{x_0} \in G_1(x_1+x_3)$ и леммы 2.1, 1) следует, что элемент $h^{\Gamma X}$ централизует элемент $c_{x_0}^{\Gamma X}$. Таким образом,

$$c_{x_1+x_3}^{\Gamma X} c_{x_2}^{\Gamma X} = c_{x_0}^{\Gamma X} c_{x_4}^{\Gamma X} = c_{x_0}^{\Gamma X} (hc_{x_0}h^{-1})^{\Gamma X} = c_{x_0}^{\Gamma X} h^{\Gamma X} c_{x_0}^{\Gamma X} (h^{-1})^{\Gamma X} = 1.$$

Но $c_{x_1+x_3}^{\Gamma X} = 1$ по лемме 2.4, 1) и $c_{x_2}^{\Gamma X} \neq 1$ по лемме 2.1, 3). Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

ЛЕММА 2.11. Если $(x_0, \dots, x_5)$ – 5-дуга графа Γ такая, что

$$x_i \in \varphi_{x_{i-2}, x_{i-1}}(\langle x_{i-3}, x_{i-1} \rangle) \quad \text{для} \quad i = 3, 4, 5,$$

причем $x_j \neq \psi_{x_{j-3}, x_{j-2}, x_{j-1}}(x_{j-4})$ для $j = 4, 5$, то $c_{x_0} = c_{x_5}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 2.10 имеем

$$c_{x_0}c_{x_2+x_4} = c_{x_1+x_3}, \quad c_{x_1+x_3}c_{x_5} = c_{x_2+x_4}.$$

Отсюда $c_{x_0} = c_{x_1+x_3}c_{x_2+x_4} = c_{x_5}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Если $(x_0, \dots, x_6)$ – 6-дуга графа Γ такая, что

$$x_3 \in \varphi_{x_1, x_2}(\langle x_0, x_2 \rangle) \text{ и } x_j = \psi_{x_{j-3}, x_{j-2}, x_{j-1}}(x_{j-4}) \text{ для } j = 4, 5, 6,$$

то $c_{x_0} = c_{x_6}$. Действительно, с учетом лемм 2.10, 2.5 имеем

$$c_{x_0} = c_{x_4} c_{x_1 + x_3} = c_{x_4} c_{x_2 + x_4} c_{x_3 + x_5} = c_{x_2} c_{x_3 + x_5} = c_{x_6}.$$

Из леммы 2.6 следует, что $G_1(x)/G_3(x)$ – элементарная абелева 2-группа. В следующей лемме выясняется ее $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модульное строение.

ЛЕММА 2.12. *Элементарная абелева группа $G_1(x)/G_3(x)$ является неразложимым расширением естественного $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуля $G_2(x)/G_3(x)$ посредством изоморфного его внешнему квадрату $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуля $G_1(x)/G_2(x)$ (другими словами, является модулем квадратичных форм на естественном $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуле $G_2(x)/G_3(x)$).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для естественного $\mathbf{F}_2 \mathrm{SL}_4(2)$ -модуля V_1 имеет место равенство $\dim_{\mathbf{F}_2} H^1(\mathrm{SL}_4(2), \mathrm{Hom}_{\mathbf{F}_2}(V_1 \wedge V_1, V_1)) = 1$ (см. [9]), то достаточно доказать неразложимость расширения $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуля $G_2(x)/G_3(x)$ посредством $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуля $G_1(x)/G_2(x)$.

Предварительно заметим, что если X – прямая проективного пространства $\Gamma(x)$, $y \in X$, $y' \in \varphi_{x, y}(X) \setminus \{x\}$, то в силу лемм 2.5, 2.10 множество $c_y c_{y'} G_3(x) \subseteq G_1(x)$ не зависит от выбора y, y' с указанными свойствами. Следовательно, централизатор элемента $c_y c_{y'} G_3(x) \in G_1(x)/G_3(x)$ в группе $G(x)/G_3(x)$ содержит $G(x, X)/G_3(x)$, причем $c_y c_{y'} G_3(x) \notin G_2(x)/G_3(x)$ (см. лемму 2.1, 3)).

Предположим, что $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуль $G_1(x)/G_3(x)$ разлагается в прямую сумму естественного $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуля $V (= EG_3(x)/G_3(x))$ и его внешнего квадрата $V \wedge V$. Векторное пространство V можно рассматривать как ассоциированное с проективным пространством $\Gamma(x)$ посредством биекции $P: V \setminus \{0\} \rightarrow \Gamma(x)$, осуществляющей эквивалентность действий группы $G(x)/G_1(x)$ на $V \setminus \{0\}$ и на $\Gamma(x)$. Если X – прямая проективного пространства $\Gamma(x)$, $y \in X$, $y' \in \varphi_{x, y}(X) \setminus \{x\}$, то на основании предыдущего абзаца заключаем, что $c_y c_{y'} G_3(x)$ совпадает с $v' \wedge v'' \in V \wedge V$, где v', v'' – произвольные различные элементы из $P^{-1}(X)$.

Пусть $y_1 \in \Gamma(x)$, $y_2 \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$, $y_3 \in \Gamma(x) \setminus \langle y_1, y_2 \rangle$, $y' \in \varphi_{x, y_3}(\langle y_1, y_3 \rangle) \setminus \{x\}$, $y'' \in \varphi_{x, y_3}(\langle y_2, y_3 \rangle) \setminus \{x\}$. Тогда $c_{y_3} c_{y'} G_3(x)$ совпадает с $P^{-1}(y_1) \wedge P^{-1}(y_3)$, $c_{y_3} c_{y''} G_3(x)$ совпадает с $P^{-1}(y_2) \wedge P^{-1}(y_3)$, $c_{y_3} c_{y' + y''} G_3(x)$ совпадает с $P^{-1}(y_1 + y_2) \wedge P^{-1}(y_3)$. Так как

$$P^{-1}(y_1) \wedge P^{-1}(y_3) + P^{-1}(y_2) \wedge P^{-1}(y_3) = P^{-1}(y_1 + y_2) \wedge P^{-1}(y_3),$$

то отсюда следует

$$c_{y_3} c_{y'} G_3(x) c_{y_3} c_{y''} G_3(x) = c_{y_3} c_{y' + y''} G_3(x).$$

Однако, с другой стороны, в силу леммы 2.5 имеем

$$c_{y_3} c_{y'} G_3(x) c_{y_3} c_{y''} G_3(x) = c_{y'} c_{y''} G_3(x) = c_{y' + y''} G_3(x).$$

Поскольку $c_{y_3}c_{y'+y''}G_3(x) \neq c_{y'+y''}G_3(x)$ (иначе $c_{y_3} \in G_3(x)$, вопреки лемме 2.1, 3)), то это дает требуемое для доказательства леммы противоречие.

Так как для естественного $\mathbf{F}_2\mathrm{SL}_4(2)$ -модуля V_1 выполнено равенство $H^2(\mathrm{SL}_4(2), V_1 \wedge V_1) = 0$ (см. [9]), то группа $G(x)/G_2(x)$ есть расщепляемое расширение группы $G_1(x)/G_2(x)$ посредством группы, изоморфной $\mathrm{SL}_4(2)$. Если L – полный прообраз какого-либо дополнения для $G_1(x)/G_2(x)$ в $G(x)/G_2(x)$ при естественном гомоморфизме $G(x) \rightarrow G(x)/G_2(x)$, то группа $L^{\Gamma_2(x)}$ точно действует на $\Gamma(x)$, причем $L^{\Gamma(x)} = G(x)^{\Gamma(x)} \cong \mathrm{SL}_4(2)$. В следующей лемме мы конкретизируем выбор L .

ЛЕММА 2.13. *Дополнение для $G_1(x)/G_2(x)$ в $G(x)/G_2(x)$ может быть выбрано таким образом, что для полного его прообраза L при естественном гомоморфизме $G(x) \rightarrow G(x)/G_2(x)$ и произвольной вершины $y \in \Gamma(x)$ группа $L(y)$ не стабилизирует плоскостей проективного пространства $\Gamma(y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для естественного $\mathbf{F}_2\mathrm{SL}_4(2)$ -модуля V_1 имеет место равенство $|H^1(\mathrm{SL}_4(2), V_1 \wedge V_1)| = 2$ (см. [9]), то в группе $G(x) = G(x)/G_2(x)$ имеется два класса сопряженных подгрупп, изоморфных $\mathrm{SL}_4(2)$. Пусть $L_{(1)}, L_{(2)}$ – полные прообразы некоторых представителей этих классов при естественном гомоморфизме $G(x) \rightarrow \overline{G(x)}$. Группа $\overline{G(x)}$ естественным образом действует на $\Gamma_2(x)$, причем каждая из ее подгрупп $\overline{L}_{(1)} = L_{(1)}/G_2(x)$, $\overline{L}_{(2)} = L_{(2)}/G_2(x)$ точно действует на $\Gamma(x)$, индуцируя на $\Gamma(x)$ группу $G(x)^{\Gamma(x)}$. Пусть $y_1 \in \Gamma(x)$, $y_2 \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$, $y_3 \in \Gamma(x) \setminus \langle y_1, y_2 \rangle$, и пусть $\bar{a}_1 \in \overline{L}_{(1)}$, $\bar{a}_2 \in \overline{L}_{(2)}$ таковы, что $1 \neq \bar{a}_1^{\Gamma(x)} = \bar{a}_2^{\Gamma(x)} \in T_x(y_1, \langle y_1, y_2, y_3 \rangle)$. Тогда элемент $\bar{a}_1$ не содержится в $\overline{G_1(x, y_1)}\bar{a}_2$, где (см. лемму 2.1, 2)) $\overline{G_1(x, y_1)} = G_1(x, y_1)/G_2(x)$ – единственная $G(x, y_1)/G_1(x)$ -допустимая подгруппа порядка 2^3 группы $G_1(x)/G_2(x)$. Действительно, если e_1, e_2, e_3, e_4 – базис естественного $\mathbf{F}_2\mathrm{SL}_4(2)$ -модуля V_1 и a – (нетривиальная) трансвекция из $\mathrm{SL}_4(2)$ с центром e_1 и осью $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, то согласно [9, с. 258] нетривиальный коцикл $c_{3,2}^1(2): \mathrm{SL}_4(2) \rightarrow V_1 \wedge V_1$ может быть выбран так, что $c_{3,2}^1(2)(a) = e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3$, а элемент $(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3)a$ группы $(V_1 \wedge V_1) \rtimes \mathrm{SL}_4(2)$ (с естественным действием $\mathrm{SL}_4(2)$) не сопряжен в этой группе ни с одним элементом из $\langle e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4 \rangle a$ (где, заметим, $\langle e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4 \rangle$ – единственная подгруппа порядка 2^3 из $V_1 \wedge V_1$, допустимая относительно стабилизатора e_1 в $\mathrm{SL}_4(2)$).

Предположим, что найдутся плоскости Y', Y'' проективного пространства $\Gamma(y_1)$, стабилизируемые соответственно группами $L_{(1)}(y_1), L_{(2)}(y_1)$. Поскольку $L_{(1)}^{\Gamma(x)} = G(x)^{\Gamma(x)} = L_{(2)}^{\Gamma(x)}$, эти плоскости не содержат x . Так как $\bar{a}_1^{\Gamma(x)} = \bar{a}_2^{\Gamma(x)} \in T_x(y_1)$ влечет $\bar{a}_1^{\Gamma(y_1)}, \bar{a}_2^{\Gamma(y_1)} \in T_{y_1}(x)$ (см. лемму 2.1, 2)), то из существования Y', Y'' следует $\bar{a}_1^{\Gamma(y_1)} = 1 = \bar{a}_2^{\Gamma(y_1)}$. Но тогда, вопреки установленному ранее, $\bar{a}_1 \in \overline{G_1(x, y_1)}\bar{a}_2$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Далее в этом параграфе через L обозначается некоторая фиксированная группа, определенная в соответствии с леммой 2.13.

ЛЕММА 2.14. *Если $y \in \Gamma(x)$, то существует (и притом единственная) коллинеация ω_y проективного пространства $\Gamma(x)$ на проективное пространство $\Gamma(y)$, коммутирующая с естественным действием группы $L(y)$ на $\Gamma(x) \cup \Gamma(y)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть h – элемент порядка 7 группы $L(y)$. Тогда группа $\langle h \rangle$ имеет на $\Gamma(x) \setminus \{y\}$ две орбиты, одна из которых, обозначаемая в дальнейшем через X , является плоскостью проективного пространства $\Gamma(x)$, а другая есть $\{x' + y \mid x' \in X\}$. Аналогично, группа $\langle h \rangle$ имеет две орбиты на $\Gamma(y) \setminus \{x\}$, одна из которых, обозначаемая в дальнейшем через Y , является плоскостью проективного пространства $\Gamma(y)$, а другая есть $\{y' + x \mid y' \in Y\}$.

Покажем, что $L(y, X) = L(y, Y)$. Для этого зафиксируем некоторую содержащую y плоскость X' проективного пространства $\Gamma(x)$.

Пусть $x' \in X' \cap X$. Так как $L(y, X)^{\Gamma(x)} = G(x, y, X)^{\Gamma(x)}$, то в группе $L(y, X)$ найдется элемент a_1 такой, что

$$1 \neq a_1^{\Gamma(x)} \in T_x(x', X'). \quad (2.3)$$

В силу $a_1^{\Gamma_{X'}(x)} = 1$ при этом либо $a_1^{\Gamma_{X'}(y)} = 1$, либо $a_1^{\Gamma_{X'}(y)}$ есть (нетривиальная) трансвекция с центром x проективного пространства $\Gamma_{X'}(y)$ (см. лемму 2.1, 1)). В последнем случае некоторый элемент b группы $L(y, X, X')$ сдвигает ось трансвекции $a_1^{\Gamma_{X'}(y)}$, что с учетом (2.3) дает $[a_1, b]^{\Gamma_{X'}(y)} \neq 1$ и $[a_1, b]^{\Gamma(x)} = 1$, причем $[a_1, b] \in L(y)$. Полученное противоречие с точностью до действия группы $L^{\Gamma_2(x)}$ на $\Gamma(x)$ означает, что $a_1^{\Gamma_{X'}(y)} = 1$. С учетом (2.3) отсюда следует, что $a_1^{\Gamma(y)}$ – (нетривиальная) трансвекция с осью $\Gamma_{X'}(y) = \varphi_{x,y}(X')$ и центром y' , принадлежащим $\varphi_{x,y}(\langle x', y \rangle) \setminus \{x\}$.

Аналогично, для $x'' \in X' \cap X \setminus \{x'\}$ в группе $L(y, X)$ найдется элемент a_2 такой, что $1 \neq a_2^{\Gamma(x)} \in T_x(x'', X')$ и $1 \neq a_2^{\Gamma(y)} \in T_y(y'', \varphi_{x,y}(X'))$ для некоторой вершины $y'' \in \varphi_{x,y}(\langle x'', y \rangle) \setminus \{x\}$. При этом $1 \neq (a_1 a_2)^{\Gamma(x)} \in T_x(x' + x'', X')$ и $1 \neq (a_1 a_2)^{\Gamma(y)} \in T_y(y' + y'', \varphi_{x,y}(X'))$.

Поскольку по крайней мере одна из вершин $y', y'', y' + y''$ содержится в Y , то среди элементов $a_1, a_2, a_1 a_2$ найдется такой элемент a , что $a^{\Gamma(x)}$ есть (неединичная) трансвекция с осью X' и центром, принадлежащим X , и $a^{\Gamma(y)}$ есть (неединичная) трансвекция с осью $\varphi_{x,y}(X')$ и центром, принадлежащим Y . Для такого элемента a имеем

$$\langle h, a \rangle^{\Gamma(x)} = G(x, y, X)^{\Gamma(x)} = L(y, X)^{\Gamma(x)},$$

причем $\langle h, a \rangle \leq L(y, X, Y)$. В силу точности действия $L^{\Gamma_2(x)}$ на $\Gamma(x)$ отсюда следует

$$L(y, X) = \langle h, a \rangle G_2(x) \leq L(y, Y).$$

Если $L(y, X)$ – собственная подгруппа группы $L(y, Y)$, то максимальность подгруппы $L(y, X)$ в группе $L(y)$ (которая следует из максимальности $L(y, X)^{\Gamma(x)} = G(x, y, X)^{\Gamma(x)}$ в $L(y)^{\Gamma(x)} = G(x, y)^{\Gamma(x)}$) влечет $L(y, Y) = L(y)$, что противоречит выбору L . Таким образом, как и утверждалось, $L(y, X) = L(y, Y)$.

Для произвольной вершины $z \in X$ зададим $\omega_y(z)$ как (единственную) вершину из $\varphi_{x,y}(\langle z, y \rangle) \cap Y$ и зададим $\omega_y(z + y)$ как $\omega_y(z) + x$. Положим, кроме того, $\omega_y(y) = x$. Легко понять, что в силу свойств $\varphi_{x,y}$ определенное таким образом отображение ω_y есть коллинеация проективного пространства $\Gamma(x)$ на проективное пространство $\Gamma(y)$, коммутирующая с действием на $\Gamma(x) \cup \Gamma(y)$ группы $L(y, X) = L(y, Y)$.

Покажем, что ω_y коммутирует с действием на $\Gamma(x) \cup \Gamma(y)$ группы $L(y)$. Пусть h_1 – такой элемент из $L(y)$, что $1 \neq h_1^{\Gamma(x)} \in T_x(y)$. Тогда с учетом $h_1 \notin L(y, X) = L(y, Y)$ и леммы 2.1, 2) имеем $1 \neq h_1^{\Gamma(y)} \in T_y(x)$. Если X_1 – ось трансвекции $h_1^{\Gamma(x)}$ и Y_1 – ось трансвекции $h_1^{\Gamma(y)}$, то при $Y_1 \neq \omega_y(X_1) = \varphi_{x,y}(X_1)$ некоторый элемент h_2 группы $L(y)$ стабилизирует X_1 , но сдвигает Y_1 , что влечет $[h_1, h_2]^{\Gamma(x)} = 1$ и $[h_1, h_2]^{\Gamma(y)} \neq 1$, а это противоречит точности действия $L^{\Gamma_2(x)}$ на $\Gamma(x)$. Таким образом, $Y_1 = \omega_y(X_1)$, и ω_y коммутирует с действием на $\Gamma(x) \cup \Gamma(y)$ элемента h_1 . Так как $L(y) = \langle L(y, X), h_1 \rangle$, то ω_y коммутирует с действием на $\Gamma(x) \cup \Gamma(y)$ группы $L(y)$.

Наконец, если ω'_y – отличная от ω_y коллинеация проективного пространства $\Gamma(x)$ на проективное пространство $\Gamma(y)$, коммутирующая с действием на $\Gamma(x) \cup \Gamma(y)$ группы $L(y)$, то $\omega'_y(y) = x$ и (в силу свойств $\varphi_{x,y}$ и транзитивности действия $L(y)$ на $\Gamma(x) \setminus \{y\}$) $\omega'_y(z) = \omega_y(z) + x$ для всех $z \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$. Но такое отображение (где ω_y – коллинеация $\Gamma(x)$ на $\Gamma(y)$) не является, очевидно, коллинеацией $\Gamma(x)$ на $\Gamma(y)$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Если $y_1 \in \Gamma(x)$ и $y_2 \in \Gamma(x) \setminus \{y_1\}$, то, очевидно, $\omega_{y_i}(y_{3-i}) \in \varphi_{x,y_i}(\langle y_1, y_2 \rangle) \setminus \{x\}$ для $i = 1, 2$. При этом $\psi_{y_1, x, y_2}(\omega_{y_1}(y_2)) \neq \omega_{y_2}(y_1)$. Действительно, в противном случае с учетом леммы 2.3, 1) имеем

$$\begin{aligned}\psi_{y_1, x, y_1+y_2}(\omega_{y_1}(y_1+y_2)) &= \omega_{y_1+y_2}(y_1), \\ \psi_{y_1+y_2, x, y_2}(\omega_{y_1+y_2}(y_2)) &= \omega_{y_2}(y_1+y_2).\end{aligned}$$

Но тогда

$$\begin{aligned}\psi_{y_1, x, y_2}(\omega_{y_1}(y_2)) &= \omega_{y_2}(y_1) \neq \omega_{y_2}(y_1+y_2) = \psi_{y_1+y_2, x, y_2}(\omega_{y_1+y_2}(y_2)) \\ &= \psi_{y_1+y_2, x, y_2}(\psi_{y_1, x, y_1+y_2}(\omega_{y_1}(y_2))),\end{aligned}$$

что противоречит лемме 2.3, 1).

ЛЕММА 2.15. Если X – плоскость проективного пространства $\Gamma(x)$, $y \in X$, X' – не содержащая вершину y прямая из X , $x' \in X'$, $x'' \in \varphi_{x, x'}(X') \setminus \{x\}$, $y' \in \omega_y(X')$, $y'' \in \varphi_{y, y'}(\omega_y(X')) \setminus \{y\}$, то множество

$$A_{X, y} = c_{x'} c_{x''} c_{y'} c_{y''} G_2(x, y) \subseteq G(x)$$

не зависит от выбора X' , x' , x'' , y' , y'' с указанными свойствами, а элемент $c_{x'} c_{x''} c_{y'} c_{y''} G_2(x)$ группы $G(x)/G_2(x)$ является трансвекцией из $L/G_2(x)$, действующей на $\Gamma(x)$ как неединичный элемент из $T_x(y, X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что при заданных X , y , X' множество $A_{X, y}$ не зависит от выбора x' , x'' , y' , y'' . Предположим, что наряду с x' , x'' , y' , y'' имеются $x'_1 \in X'$, $x''_1 \in \varphi_{x, x'_1}(X') \setminus \{x\}$, $y'_1 \in \omega_y(X')$, $y''_1 \in \varphi_{y, y'_1}(\omega_y(X')) \setminus \{y\}$. Тогда на основании лемм 2.5, 2.10 заключаем $c_{x'_1} c_{x''_1} \in c_{x'} c_{x''} G_3(x)$ и $c_{y'_1} c_{y''_1} \in c_{y'} c_{y''} G_3(y)$, что влечет $c_{x'_1} c_{x''_1} c_{y'_1} c_{y''_1} \in c_{x'} c_{x''} c_{y'} c_{y''} G_3(x) G_3(y)$, т. е.

$$c_{x'_1} c_{x''_1} c_{y'_1} c_{y''_1} G_2(x, y) = c_{x'} c_{x''} c_{y'} c_{y''} G_2(x, y).$$

Покажем теперь, что при заданных X, y множество $A_{X,y}$ не зависит от выбора X', x', x'', y', y'' . Предположим, что наряду с X', x', x'', y', y'' имеются не содержащая вершину y прямая X'_1 из X , $x'_1 \in X'_1$, $x''_1 \in \varphi_{x,x'_1}(X'_1) \setminus \{x\}$, $y'_1 \in \omega_y(X'_1)$, $y''_1 \in \varphi_{y,y'_1}(\omega_y(X'_1)) \setminus \{y\}$. Для доказательства равенства

$$c_{x'}c_{x''}c_{y'}c_{y''}G_2(x, y) = c_{x'_1}c_{x''_1}c_{y'_1}c_{y''_1}G_2(x, y)$$

в силу уже доказанной независимости множества $c_{x'}c_{x''}c_{y'}c_{y''}G_2(x, y)$ от выбора x', x'', y', y'' и независимости множества $c_{x'_1}c_{x''_1}c_{y'_1}c_{y''_1}G_2(x, y)$ от выбора x'_1, x''_1, y'_1, y''_1 достаточно рассмотреть случай, когда $X' \neq X'_1$, $x' = x'_1$, $y' = \omega_y(x') = \omega_y(x'_1) = y'_1$. В этом последнем случае согласно лемме 2.5 имеем

$$\begin{aligned} c_{x'}c_{x''}c_{x'_1}c_{x''_1} &= c_{x''}c_{x''_1} \in c_{\psi_{y,x,x'}(y')}G_3(x), \\ c_{y'}c_{y''}c_{y'_1}c_{y''_1} &= c_{y''}c_{y''_1} \in c_{\psi_{x,y,y'}(x')}G_3(y), \end{aligned}$$

причем $c_{\psi_{y,x,x'}(y')}c_{\psi_{x,y,y'}(x')}c_y = 1$ в силу лемм 2.5, 2.11. Следовательно,

$$\begin{aligned} c_{x'}c_{x''}c_{y'}c_{y''}G_2(x, y) &= c_{x'}c_{x''}c_{\psi_{y,x,x'}(y')}c_{\psi_{x,y,y'}(x')}c_y c_{y'}c_{y''}G_2(x, y) \\ &= c_{x'_1}c_{x''_1}c_{y'_1}c_{y''_1}G_2(x, y). \end{aligned}$$

Первое утверждение леммы доказано.

Для доказательства второго утверждения леммы заметим, прежде всего, что по лемме 2.1, 3)

$$(c_{x'}c_{x''}c_{y'}c_{y''})^{\Gamma(x)} = c_{x'}^{\Gamma(x)}c_{x''}^{\Gamma(x)}c_{y'}^{\Gamma(x)}c_{y''}^{\Gamma(x)} = c_{y''}^{\Gamma(x)} \in T_x(y, X) \setminus \{1\}.$$

Следовательно, если элемент $c_{x'}c_{x''}c_{y'}c_{y''}G_2(x)$ группы $G(x)/G_2(x)$ не является трансвекцией из $L/G_2(x)$, действующей на $\Gamma(x)$ как неединичный элемент из $T_x(y, X)$, то он является произведением такой трансвекции из $L/G_2(x)$ на неединичный элемент из $G_1(x)/G_2(x)$. Но тогда, поскольку $LG_1(x) = G(x)$ и группа $G_1(x)/G_2(x)$ является внешним квадратом естественного $\mathbf{F}_2G(x)/G_1(x)$ -модуля, группа $L(y, X)/G_2(x)$ не централизует элемент $c_{x'}c_{x''}c_{y'}c_{y''}G_2(x)$, что противоречит первому утверждению леммы, согласно которому множество $c_{x'}c_{x''}c_{y'}c_{y''} \times G_2(x, y)$ является $L(y, X)$ -допустимым. Лемма доказана.

ЛЕММА 2.16. *Группа $L/G_3(x)$ является расщепляемым расширением группы $G_2(x)/G_3(x)$ посредством группы, изоморфной $\mathrm{SL}_4(2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X – плоскость проективного пространства $\Gamma(x)$. Тогда стабилизатор X в $L/G_3(x)$ – расширение группы $G_2(x)/G_3(x)$ посредством стабилизатора X в $L/G_2(x)$ (здесь и далее имеются в виду естественные действия групп $G(x)/G_3(x)$ и $G(x)/G_2(x)$ на $\Gamma_3(x)$ и $\Gamma_2(x)$ соответственно), причем по теореме Гашюца утверждение леммы эквивалентно утверждению о расщепляемости этого последнего расширения.

Стабилизатор X в $L/G_2(x)$ является расщепляемым расширением поточечного стабилизатора X в $L/G_2(x)$ (неединичные элементы которого действуют на $\Gamma(x)$ как нетривиальные трансвекции с осью X) посредством группы, изоморфной $\mathrm{SL}_3(2)$. В качестве изоморфного $\mathrm{SL}_3(2)$ дополнительного множителя при этом может быть взят стабилизатор в $L/G_2(x)$ плоскости X и вершины $y \in \Gamma(x) \setminus X$, т.е. группа $L(y, X)/G_2(x)$. Обозначим через W подгруппу

$\langle c_{x'} \mid x' \in X \rangle G_3(x)/G_3(x)$ группы $G_2(x)/G_3(x)$ (см. лемму 2.5). Как поточечный стабилизатор X в $L/G_2(x)$, так и централизованная поточечным стабилизатором X в $L/G_3(x)$ группа W являются естественными $\mathbf{F}_2 L(y, X)/G_3(x)$ -модулями (таким образом, действия $L(y, X)/G_2(x) \cong \mathrm{SL}_3(2)$ на неединичных элементах этих групп подстановочно эквивалентны действию на X). Заметим также, что согласно утверждениям 3), 4) леммы 2.1 группа W совпадает с ядром естественного действия группы $G_2(x)/G_3(x)$ на $(\Gamma_X)_3(x)$.

Положим $Y = \omega_y(X)$. Группа $L(y, X)/G_3(x)$ естественным образом действует на $Y = \Gamma_Y(y)$, индуцируя группу $\mathrm{SL}_3(2)$. Ядро этого действия совпадает с $G_2(x)/G_3(x)$ и в силу утверждений 3), 4) леммы 2.1 индуцирует на $(\Gamma_Y)_2(y)$ элементарную абелеву группу порядка 2^3 . Ядро действия $G_2(x)/G_3(x)$ на $(\Gamma_Y)_2(y)$ согласно тем же утверждениям 3), 4) леммы 2.1 есть $G_2(x, y)/G_3(x)$. В силу леммы 2.1, 1) отсюда следует существование в $L(y, X)/G_2(x, y)$ подгруппы, изоморфной $\mathrm{SL}_3(2)$. Обозначим через D полный прообраз этой подгруппы при естественном гомоморфизме $L(y, X)/G_3(x) \rightarrow L(y, X)/G_2(x, y)$. Тогда D – расширение изоморфной $\mathbf{Z}_2$ группы $G_2(x, y)/G_3(x) = G_3(x)G_3(y)/G_3(x)$ (см. лемму 2.1, 4)) посредством группы, изоморфной $\mathrm{SL}_3(2)$. По лемме 2.1, 3) группа $G_3(x)G_3(y)/G_3(x)$ индуцирует на $(\Gamma_X)_3(x)$ группу порядка 2. В то же время D индуцирует на $\Gamma_X(x)$ группу, изоморфную $\mathrm{SL}_3(2)$. Таким образом, группа D точно действует на $(\Gamma_X)_3(x)$ (как расширение группы порядка 2 посредством группы, изоморфной $\mathrm{SL}_3(2)$), что с учетом леммы 2.1, 1) влечет $D = (G_3(x)G_3(y)/G_3(x)) \times D'$, где $D' \cong \mathrm{SL}_3(2)$.

Для завершения доказательства леммы теперь достаточно найти в стабилизаторе X в $L/G_3(x)$ элементарную абелеву подгруппу порядка 2^3 , которая не содержится в $G_2(x)/G_3(x)$, нормализуется группой D' и является естественным $\mathbf{F}_2 D'$ -модулем. Действительно, произведение такой подгруппы и D' дополняет $G_2(x)/G_3(x)$ в стабилизаторе X в $L/G_3(x)$, что, как было замечено в начале доказательства леммы, влечет утверждение леммы.

Обозначим через R поточечный стабилизатор X в $L/G_3(x)$, а через K – ядро естественного действия R на $(\Gamma_X)_3(x)$. Тогда стабилизатор X в $L/G_3(x)$ есть $R \rtimes D'$ и (см. выше) $(G_2(x)/G_3(x)) \cap K = W$, $R/(G_2(x)/G_3(x))$ – элементарные абелевы группы порядка 2^3 , являющиеся естественными $\mathbf{F}_2 D'$ -модулями. Далее, поскольку группа R тривиально действует на $(\Gamma_X)_2(x)$ (в силу наличия $\omega_{x'}$ для каждого $x' \in X$; см. лемму 2.14), то из леммы 2.1, 1) и $\mathbf{Z}_2 \cong (G_2(x)/G_3(x))/K \leq R/K$ следует, что $R/K \cong \mathbf{Z}_2$. Таким образом, $R/W = (G_2(x)/G_3(x))/W \times K/W$, где каждый из множителей $(G_2(x)/G_3(x))/W$ и K/W выдерживает действие группы D' , причем $K/W \cong R/(G_2(x)/G_3(x))$ – элементарная абелева группа порядка 2^3 , являющаяся естественным $\mathbf{F}_2 D'$ -модулем. Следовательно, D' -допустимая не содержащаяся в $G_2(x)/G_3(x)$ группа K есть расширение элементарной абелевой группы W порядка 2^3 посредством элементарной абелевой группы K/W порядка 2^3 , причем каждая из этих групп является естественным $\mathbf{F}_2 D'$ -модулем. Так как в силу лемм 2.4, 1), 2.5 в $K \setminus W$ имеется инволюция (например, $c_{x''} G_3(x)$, где $x'' \in (\Gamma_X)_2(x) \setminus \Gamma_1(x)$), то отсюда (и из $\mathrm{Ext}_{\mathrm{SL}_3(2)}(V_1, V_1) = 0$ для естественного $\mathbf{F}_2 \mathrm{SL}_3(2)$ -модуля V_1 ; см. [9]) следует, что $K = W \times K^*$ для некоторой D' -допустимой элементарной абелевой группы K^* порядка 2^3 , не содержащейся в $G_2(x)/G_3(x)$ и являющейся естественным $\mathbf{F}_2 D'$ -модулем. Как было замечено выше, это завершает доказательство леммы.

Обозначим через L^* полный прообраз некоторой изоморфной $\mathrm{SL}_4(2)$ подгруппы группы $L/G_3(x)$ (см. лемму 2.16) при естественном гомоморфизме $L \rightarrow L/G_3(x)$.

ЛЕММА 2.17. *Пусть X – плоскость проективного пространства $\Gamma(x)$ и $y \in X$. Тогда трансвекция из $L^*/G_3(x)$, действующая на $\Gamma(x)$ как неединичный элемент из $T_x(y, X)$, содержится как смежный класс группы $G(x)$ по подгруппе $G_3(x)$ в $A_{X,y}$ (определяемом по X, y в соответствии с леммой 2.15).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть a – некоторый элемент группы $G(x)$, принадлежащий $A_{X,y}$. Тогда согласно леммам 2.15, 2.1, 4) трансвекция из $L^*/G_3(x)$, действующая на $\Gamma(x)$ как неединичный элемент из $T_x(y, X)$, есть $aG_3(x)$ или $ac_zG_3(x)$ для некоторой вершины $z \in \Gamma(x)$. Поскольку эта трансвекция группы $L^*/G_3(x)$ должна, кроме того, централизоваться стабилизатором X и y в группе $L^*/G_3(x)$, действующей естественным образом на $\Gamma(x)$, то она совпадает с $aG_3(x)$ или $ac_yG_3(x)$, т. е. содержится в $A_{X,y}$.

ЛЕММА 2.18. *Группа L^* изоморфна универсальному центральному расширению группы $\mathrm{SL}_4(2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда $L^* = L' \times G_3(x)$, где $L' \cong \mathrm{SL}_4(2)$ действует точно на $\Gamma(x)$. Пусть X, X_1 – различные плоскости проективного пространства $\Gamma(x)$, $y \in X \cap X_1$, $y_1 \in X \cap X_1 \setminus \{y\}$. Обозначим через b трансвекцию из L' , действующую на $\Gamma(x)$ как неединичный элемент из $T_x(y, X)$, а через b_1 – трансвекцию из L' , действующую на $\Gamma(x)$ как неединичный элемент из $T_x(y_1, X_1)$. Тогда $[b, b_1] = 1$, что с учетом леммы 2.17 и $[G_2(x, y), b_1] = [G_3(x)G_3(y), b_1] = 1$ (см. лемму 2.1, 4)) влечет $[A_{X,y}, b_1] = 1$. Пусть X' – содержащая y_1 , но не содержащая y прямая из X , $x' = y_1$, $x'' \in \varphi_{x,x'}(X') \setminus \{x\}$, $y' = \omega_y(x')$, $y'' \in \varphi_{y,y'}(\omega_y(X')) \setminus \{y\}$. Так как $c_{x'}c_{x''}c_{y'}c_{y''} \in A_{X,y}$, то $[c_{x'}c_{x''}c_{y'}c_{y''}, b_1] = 1$. Поскольку из $b_1(x') = x'$ и $b_1(y') = b_1(\omega_y(x')) = \omega_y(b_1(x')) = \omega_y(x') = y'$ следует $[c_{x'}, b_1] = 1$ и $[c_{y'}, b_1] = 1$, то заключаем отсюда, что $[c_{x''}c_{y''}, b_1] = 1$. Таким образом, $c_{x''}c_{b_1(x'')} = c_{y''}c_{b_1(y'')}$. Но элемент b_1 , действующий на $\Gamma(x)$ как (нетривиальная) трансвекция с центром x' и осью X_1 , не содержащей X' , меняет местами вершины из $X' \setminus \{x'\}$, а потому меняет местами и их $\omega_{x'}$ -образы, что с учетом леммы 2.5 влечет $c_{x''}c_{b_1(x'')} = c_x$. В то же время элемент b_1 , стабилизируя вершины x', y и прямую X' , стабилизирует также вершину $y' = \omega_y(x')$ и прямую $\omega_y(X')$, а потому $b_1(y'') \in \varphi_{y,y'}(\omega_y(X')) \setminus \{y\}$, что с учетом леммы 2.5 влечет $c_{y''}c_{b_1(y'')} \in \{1, c_y\}$. Так как $c_{x''}c_{b_1(x'')} = c_x \notin \{1, c_y\}$, то полученное противоречие доказывает лемму.

Из доказанных результатов, используя явный вид нетривиального коцикла $c_{3,2}^1(2)$ (см. [9, с. 258]), легко получить единственность с точностью до изоморфизма группы $G(x)$ (см. замечание 2.4 ниже) и отсутствие в ней подгрупп, изоморфных $\mathrm{SL}_4(2)$. Определенный концептуальный интерес представляет, однако, приводимое ниже геометрическое доказательство последнего утверждения.

ЛЕММА 2.19. *Если H – подгруппа группы $G(x)/G_3(x)$, изоморфная $\mathrm{SL}_4(2)$, и H^* – полный прообраз H при естественном гомоморфизме $G(x) \rightarrow G(x)/G_3(x)$, то группа H^* изоморфна универсальному центральному расширению группы $\mathrm{SL}_4(2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \in \Gamma(x)$. По выбору L, L^* и лемме 2.18 достаточно доказать, что $H^*(y)$ не стабилизирует плоскостей проективного пространства $\Gamma(y)$. Предположим, что, напротив, $H^*(y)$ стабилизирует некоторую плоскость Y проективного пространства $\Gamma(y)$. Заметим, что $x \notin Y$, поскольку $(H^*)^{\Gamma(x)} = G(x)^{\Gamma(x)}$.

Пусть $y_1 \in \Gamma(x) \setminus \{y\}$, $y_2 \in \Gamma(x) \setminus \langle y, y_1 \rangle$, и пусть $y'_i \in \varphi_{x,y}(\langle y, y_i \rangle) \cap Y$ для $i = 1, 2$. В группе H^* найдется элемент h , для которого $1 \neq h^{\Gamma(x)} \in T_x(y, X)$, где $X = \langle y, y_1, y_2 \rangle$. Согласно лемме 2.1, 2) при этом $h^{\Gamma(y)} \in T_y(x)$, что с учетом h -допустимости Y дает $h \in G_1(y)$.

Из леммы 2.1, 2) с учетом леммы 2.3, 1) и $h \in G(y_i, x, y, y'_i)$ для $i = 1, 2$ следует, что $h^{\Gamma(y'_i)} \in T_{y'_i}(y, \varphi_{y,y'_i}(\langle x, y'_i \rangle))$ для $i = 1, 2$. Вместе с тем поскольку группа $H^*(y, X)$ нормализует $hG_3(x)$ (другими словами, централизует трансекцию $hG_3(x)$ группы $H = H^*/G_3(x)$) и действует транзитивно на $X \setminus \{y\}$ и на $\Gamma(x) \setminus X$, а следовательно, действует транзитивно также на $Y \cap \varphi_{x,y}(X)$ и на $Y \setminus \varphi_{x,y}(X)$, то из $h^{\Gamma_Y(y)} = 1$ и леммы 2.1, 1) вытекает тривиальность действия h на $(\Gamma_Y)_2(y)$. Таким образом, $h \in G_1(y, y'_1, y'_2)$.

Пусть $y'' \in \varphi_{y,y'_1}(\langle y'_1, y'_2 \rangle) \setminus \{y\}$. Тогда лемма 2.1, 3) влечет $c_{y''} \in G_1(y, y'_1, y'_2)$ и $1 \neq c_{y''}^{\Gamma(x)} \in T_x(y, X)$. Таким образом, $c_{y''}h \in G_1(x, y, y'_1, y'_2)$, т.е. (см. лемму 2.1, 2)) $c_{y''}h \in G_2(y)$. Следовательно, в силу лемм 2.1, 4), 2.5 либо $c_{y''}h \in G_2(x, y)$, либо $c_{y''}h \in c_{y'}G_2(x, y)$ для некоторой вершины $y' \in Y$.

Предположим, что $c_{y''}h \in G_2(x, y)$. В группе $H^*(y, X)$ найдется элемент h_1 такой, что $h_1(y'_i) = y'_{3-i}$ для $i = 1, 2$. Имеем $h_1hh_1^{-1} \in hG_3(x)$. Кроме того, леммы 2.10, 2.5 влекут $c_{y''}h_1c_{y''}h_1^{-1} = c_{y''}c_{h_1(y'')} \in c_{y'_1+y'_2}G_3(y)$. Следовательно,

$$h_1c_{y''}hh_1^{-1} \in c_{y''}c_{y'_1+y'_2}G_3(y)hG_3(x) = c_{y'_1+y'_2}c_{y''}hG_3(y)G_3(x) \subseteq c_{y'_1+y'_2}G_2(x).$$

В то же время

$$h_1c_{y''}hh_1^{-1} \in h_1G_2(x, y)h_1^{-1} = G_2(x, y) \subseteq G_2(x).$$

Но тогда $c_{y'_1+y'_2} \in G_2(x)$, что противоречит лемме 2.1, 3).

Предположим, что $c_{y''}h \in c_{y'}G_2(x, y)$ для некоторой вершины $y' \in Y \setminus \{y'_1\}$. Тогда в группе $H^*(y, X)$ найдется элемент h_2 такой, что $h_2^{\Gamma(y)} \in T_y(y'_1)$ и $h_2(y') \neq y'$. Имеем $h_2hh_2^{-1} \in hG_3(x)$. Кроме того, поскольку $h_2(y'') \in h_2(\varphi_{y,y'_1}(\langle y'_1, y'_2 \rangle) \setminus \{y\}) = \varphi_{y,y'_1}(\langle y'_1, y'_2 \rangle) \setminus \{y\}$, то лемма 2.5 влечет $h_2c_{y''}h_2^{-1} \in c_{y''}G_3(y)$. Следовательно,

$$h_2c_{y''}hh_2^{-1} \in c_{y''}G_3(y)hG_3(x) = c_{y''}hG_3(y)G_3(x) \subseteq c_{y''}hG_2(x) = c_{y'}G_2(x).$$

В то же время

$$h_2c_{y''}hh_2^{-1} \in h_2c_{y'}G_2(x, y)h_2^{-1} = c_{h_2(y')}G_2(x, y) \subseteq c_{h_2(y')}G_2(x).$$

Но тогда, с учетом леммы 2.5, $c_{y'_1} = c_{y'+h_2(y')} = c_{y'}c_{h_2(y')} \in G_2(x)$, что противоречит лемме 2.1, 3).

Предположим, наконец, что $c_{y''}h \in c_{y'_1}G_2(x, y)$. В группе $H^*(y, y'_1)$ найдется элемент h_3 порядка 3 такой, что группа $\langle h \rangle$ действует транзитивно на множестве

содержащих $\langle y, y_1 \rangle$ плоскостей проективного пространства $\Gamma(x)$, а следовательно, и на множестве содержащих y'_1 прямых плоскости Y . Заметим, что при этом либо $\{y'', h_3(y''), h_3^2(y'')\}$, либо $\{y'' + y, h_3(y'') + y, h_3^2(y'') + y\}$ есть прямая проективного пространства $\Gamma(y'_1)$, и потому $c_{y''}c_{h_3(y'')}c_{h_3^2(y'')} \in G_3(y)$ в силу леммы 2.5. Поскольку, кроме того, $hh_3hh_3^{-1}h_3^2hh_3^{-2} \in G_1(x) \cap H^* = G_3(x)$, $h \in G_1(y'_1)$, $h_3hh_3^{-1} \in G_1(y'_1)$, то

$$\begin{aligned} c_{y''}hh_3c_{y''}hh_3^{-1}h_3^2c_{y''}hh_3^{-2} &= c_{y''}hc_{h_3(y'')}h_3hh_3^{-1}c_{h_3^2(y'')}h_3^2hh_3^{-2} \\ &= c_{y''}c_{h_3(y'')}c_{h_3^2(y'')}hh_3hh_3^{-1}h_3^2hh_3^{-2} \in G_2(x). \end{aligned}$$

В то же время элемент h_3 нормализует множество $c_{y'_1}G_2(x, y)$, содержащее $c_{y''}h$, и потому

$$c_{y''}hh_3c_{y''}hh_3^{-1}h_3^2c_{y''}hh_3^{-2} \in c_{y'_1}G_2(x, y)c_{y'_1}G_2(x, y)c_{y'_1}G_2(x, y) = c_{y'_1}G_2(x, y).$$

Но тогда $c_{y'_1} \in G_2(x)$, что противоречит лемме 2.1, 3). Лемма доказана.

Справедливость теоремы II следует из лемм 2.6, 2.12, 2.16, 2.19.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Из доказательства теоремы II следует единственность с точностью до изоморфизма группы $G(x)$. Поскольку в доказательстве теоремы I этот факт не используется, ограничимся наброском соответствующих рассуждений. Зафиксируем экстраспециальную группу $Q_* \cong D_8 * D_8 * D_8$ и элементарную абелеву группу E_* порядка 2^4 . Пусть H_* – некоторая изоморфная $SL_4(2)$ группа автоморфизмов группы $Q_* \times E_*$ такая, что E_* инвариантна относительно H_* и является естественным $\mathbf{F}_2H_*$ -модулем, а $Q_*E_*/Z(Q_*)$ является (относительно естественного действия H_*) модулем квадратичных форм на $E_*Z(Q_*)/Z(Q_*)$ (отождествляемым естественным образом с E_*). Ясно, что в этом случае изоморфный тип группы $(Q_*E_*) \rtimes H_*$ однозначно определяется той $\text{Inn}(Q_*E_*/E_*)$ -орбитой на подгруппах группы $\text{Aut}(Q_*E_*/E_*)$, изоморфных $SL_4(2)$, которой принадлежит подгруппа, индуцируемая H_* . Отсюда легко заключить, что для доказательства единственности с точностью до изоморфизма стабилизатора вершины $G(x)$ из теоремы II достаточно показать, что для каждого такого стабилизатора вершины после отождествления естественным образом Q с Q_* , E с E_* и группы автоморфизмов, индуцируемой на QE прообразом группы H при естественном гомоморфизме $G(x) \rightarrow G(x)/G_3(x)$, с группой H_* подгруппа группы $\text{Aut}(Q_*E_*/E_*)$, индуцируемая H_* , попадает в одну и ту же выделенную $\text{Inn}(Q_*E_*/E_*)$ -орбиту на подгруппах группы $\text{Aut}(Q_*E_*/E_*)$, изоморфных $SL_4(2)$.

Группу $Q_*E_*/Z(Q_*)E_*$ можно естественным образом рассматривать как $E_* \rtimes E_*$. При этом коммутатор элемента, содержащегося в смежном классе $e_1 \wedge e_2$ группы Q_*E_* по подгруппе $Z(Q_*)E_*$, и элемента, содержащегося в смежном классе $e_3 \wedge e_4$ группы Q_*E_* по подгруппе $Z(Q_*)E_*$, является инволюцией c_* из $Z(Q_*)$ в случае $\langle e_1, \dots, e_4 \rangle = E_*$ и равен 1 в противном случае. Так как $Q_*E_*/E_* \cong Q_*$, то (см., например, [12]) коммутант $(\text{Aut}(Q_*E_*/E_*))'$ группы $\text{Aut}(Q_*E_*/E_*)$, имеющий индекс 2 в ней, есть расщепляемое расширение элементарной абелевой группы $\text{Inn}(Q_*E_*/E_*)$ порядка 2^6 посредством группы, изоморфной $SL_4(2)$, относительно действия которой $\text{Inn}(Q_*E_*/E_*)$ является внешним квадратом естественного $\mathbf{F}_2SL_4(2)$ -модуля. При этом (см. [9]) группа $\text{Inn}(Q_*E_*/E_*)$ имеет две орбиты на подгруппах группы $\text{Aut}(Q_*E_*/E_*)$, изоморфных $SL_4(2)$. Эти орбиты разли-

чимы следующим образом. Группу $\text{Inn}(Q_*E_*/E_*)$ можно естественным образом отождествить с $Q_*E_*/Z(Q_*)E_*$ и, следовательно, рассматривать как $E_* \wedge E_*$. Это естественным образом определяет действие группы $(\text{Aut}(Q_*E_*/E_*))'$ на E_* с ядром $\text{Inn}(Q_*E_*/E_*)$. Зафиксируем в E_* некоторый базис $e_1, \dots, e_4$. Пусть H_1, H_2 – изоморфные $\text{SL}_4(2)$ подгруппы группы $\text{Aut}(Q_*E_*/E_*)$ и a_1, a_2 – элементы из H_1, H_2 соответственно, каждый из которых действует на E_* как (нетривиальная) трансвекция с центром e_1 и осью $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$. Тогда если H_1 и H_2 не сопряжены элементом из $\text{Inn}(Q_*E_*/E_*)$, то $a_1 a_2^{-1}$ принадлежит смежному классу $c_{3,2}^1(2)(a_1) + \langle e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4 \rangle = e_2 \wedge e_3 + \langle e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4 \rangle$ группы $\text{Inn}(Q_*E_*/E_*)$ по подгруппе $\langle e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4 \rangle$ (здесь $c_{3,2}^1(2)$ – нетривиальный коцикл из [9, с. 258]). Следовательно, для произвольного элемента g из смежного класса $e_1 \wedge e_4$ группы Q_*E_*/E_* по подгруппе $Z(Q_*)E_*/E_*$ имеем $a_1(g) = a_2(g)c_*E_*$. Покажем, что в случае группы $G(x)$ из теоремы II после отождествления естественным образом Q с Q_* , E с E_* и группы автоморфизмов, индуцируемой на QE прообразом H^* группы H при естественном гомоморфизме $G(x) \rightarrow G(x)/G_3(x)$, с группой H_* элемент a из группы H_* , действующий на E_* как (нетривиальная) трансвекция с центром e_1 и осью $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$, отображает произвольный элемент g из смежного класса $e_1 \wedge e_4$ группы Q_*E_*/E_* по подгруппе $Z(Q_*)E_*/E_*$ в элемент gc_*E_* . Таким образом, будет показано, что в этом случае подгруппа группы $\text{Aut}(Q_*E_*/E_*)$, индуцируемая H_* , попадает в одну выделенную $\text{Inn}(Q_*E_*/E_*)$ -орбиту на подгруппах группы $\text{Aut}(Q_*E_*/E_*)$, изоморфных $\text{SL}_4(2)$, а следовательно (см. начало замечания), будет доказана единственность с точностью до изоморфизма стабилизатора вершины $G(x)$ из теоремы II.

Соответствующие вычисления могут быть проведены в $G(x)$. Группа E (отождествляемая с E_*) естественным образом является векторным пространством, ассоциированным с проективным пространством $\Gamma(x)$, таким, что естественные действия H^* на E и на $\Gamma(x)$ согласованы. Пусть a^* – элемент группы H^* , действующий на $E (= E_*)$ как (нетривиальная) трансвекция с центром e_1 и осью $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$. Для $1 \leq i \leq 4$ обозначим через y_i вершину из $\Gamma(x)$, соответствующую e_i . Тогда $1 \neq (a^*)^{\Gamma(x)} \in T_x(y_1, \langle y_1, y_2, y_3 \rangle)$. Группу $QE/Z(Q)E (= Q_*E_*/Z(Q_*)E_*)$ будем рассматривать как $E \wedge E$ (см. выше). Тогда (см. доказательство леммы 2.12) элемент $e_1 \wedge e_4 \in QE/Z(Q)E = G_1(x)/G_2(x)$ есть $c_{y_1}c_{y'_1}G_2(x) = c_{y_1}c_{y'_1}Z(Q)E$, где y'_1 – произвольная вершина из $\varphi_{x,y_1}(\langle y_1, y_4 \rangle) \setminus \{x\}$. Далее, из доказательства леммы 2.19 следует, что группа $H^*(y_1)$ не стабилизирует плоскостей проективного пространства $\Gamma(y_1)$, и потому согласно лемме 2.14 существует коллинеация проективного пространства $\Gamma(x)$ на проективное пространство $\Gamma(y_1)$, коммутирующая с действием $H^*(y_1)$ на $\Gamma(x) \cup \Gamma(y_1)$. Поскольку $a^*(y_4) = y_1 + y_4$, это влечет $a^*(y'_1) = x + y'_1$, откуда с учетом леммы 2.5 вытекает $a^*c_{y_1}c_{y'_1}(a^*)^{-1} = c_{y_1}c_{y'_1}c_x$. Но тогда произвольный элемент g из смежного класса $e_1 \wedge e_4$ группы QE/E по подгруппе $Z(Q)E/E$, т.е. $g = c_{y_1}c_{y'_1}c_x^\varepsilon E$ для некоторого $\varepsilon \in \{0, 1\}$, при сопряжении элементом $(a^*)^{-1}$ отображается в $a^*c_{y_1}c_{y'_1}c_x^\varepsilon(a^*)^{-1}E = c_{y_1}c_{y'_1}c_xc_x^\varepsilon E = gc_xE$, что и утверждалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Во время подготовки настоящей статьи к публикации автором была получена рукопись работы А. А. Иванова и С. В. Шпекторова, в которой для рассматриваемых в теореме II графа Γ и группы G иными методами исследована амальгама стабилизаторов инцидентных вершины и ребра.

§ 3. Доказательство теоремы I

С учетом [7, ч. I, § 1 и предложение 4.1] теорему I достаточно доказать в случае, когда Γ – дерево и $n = 6$. В связи с этим, переходя к доказательству теоремы I от противного, предположим, что дерево Γ и группа его автоморфизмов G удовлетворяют условию теоремы, $n = 6$ и $G_2(x) \neq 1$.

Согласно § 1 если $z \in V(\Gamma)$, $z' \in \Gamma(z)$, то $G_1(z) = O_2(G(z))$ и $G_1(z)G_1(z') = O_2(G(z, z'))$. Далее, поскольку для Γ и G выполняется условие (*) из [7, ч. I, § 4] и $G_2(x) \neq 1$, то результаты работ [7, ч. I, предложение 4.1] и [3, теорема] влекут справедливость следующего утверждения.

ЛЕММА 3.1. *Если $z \in V(\Gamma)$ и Z – гиперплоскость проективного пространства $\Gamma(z)$, то для дерева Γ_Z и группы его автоморфизмов G^{Γ_Z} справедливо заключение теоремы из [3]. Кроме того, для определяемых таким образом Γ_Z и G^{Γ_Z} справедливы утверждения всех лемм из доказательства теоремы работы [3].*

ЛЕММА 3.2. *Если $z \in V(\Gamma)$ и Z – подпространство размерности 3 проективного пространства $\Gamma(z)$, то для дерева Γ_Z и группы его автоморфизмов G^{Γ_Z} имеет место случай 2) теоремы из [2] и, следовательно, справедливы заключение теоремы II и утверждения всех лемм из § 2 настоящей статьи.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Z' – содержащая Z гиперплоскость проективного пространства $\Gamma(z)$. Тогда согласно лемме 3.1 и [3, лемма 4.2] для дерева $(\Gamma_{Z'})_Z$ и группы его автоморфизмов $(G^{\Gamma_{Z'}})^{\Gamma_Z}$ имеет место случай 2) теоремы из [2] и, следовательно, справедливы заключение теоремы II и утверждения всех лемм из § 2 настоящей статьи. Поскольку, как показано в § 1, $(\Gamma_{Z'})_Z = \Gamma_Z$ и $(G^{\Gamma_{Z'}})^{\Gamma_Z} = G^{\Gamma_Z}$, то лемма доказана.

Дальнейшее доказательство теоремы I будет состоять в исследовании действия группы $G(x)$ на $G_i(x)/G_{i+1}(x)$ для $i = 1, 2, 3$, что в итоге позволит найти в группе $G^{\Gamma_X}(x)$, где X – некоторое подпространство размерности 3 проективного пространства $\Gamma(x)$, подгруппу, изоморфную $SL_4(2)$, и тем самым согласно лемме 3.2 и теореме II получить требуемое для доказательства теоремы I противоречие.

ЛЕММА 3.3. 1) *Если $z \in V(\Gamma)$, $z' \in \Gamma(z)$ и $Z \subseteq \Gamma(z)$, то группа*

$$G_1(z) \cap \left(\bigcap_{z'' \in Z} G_1(z'') \right)$$

действует на $\Gamma(z')$ тривиально при $z' \in \langle Z \rangle$ и как $T_{z'}(z, \varphi_{z, z'}(\langle Z, z' \rangle))$ при $z' \notin \langle Z \rangle$.

2) $G_1(x)/G_2(x)$ *является внешним квадратом дуального к естественному $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуля.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы аналогично доказательству леммы 2.2 из [3]. Пусть $z \in V(\Gamma)$. Из [6, предложение 2.3, 1)] и замечания 2 из [7, ч. I, § 4] следует справедливость утверждения 1) леммы при $|Z| \leq 1$. Кроме того, заметим, что группа $G_1(z)^{\Gamma_2(z)}$, будучи элементарной абелевой 2-группой, является $\mathbf{F}_2 G(z)/G_1(z)$ -модулем.

Покажем, что для произвольного подмножества $Z \subseteq \Gamma(z)$ имеет место равенство

$$\bigcap_{z'' \in Z} G_1(z, z'') = \bigcap_{z'' \in \langle Z \rangle} G_1(z, z''). \quad (3.1)$$

Для этого достаточно установить справедливость включения

$$G_1(z, z_1, z_2) \leq G_1(z_1 + z_2)$$

для произвольных вершин $z_1 \in \Gamma(z)$, $z_2 \in \Gamma(z) \setminus \{z_1\}$. Но для произвольной содержащей $\varphi_{z, z_1+z_2}(\langle z_1, z_2 \rangle)$ гиперплоскости Z' проективного пространства $\Gamma(z_1 + z_2)$ согласно лемме 3.1 и [3, лемма 2.2] имеем

$$G_1(z, z_1, z_2)^{\Gamma_{Z'}} \leq G_1^{\Gamma_{Z'}}(z, z_1, z_2) \leq G_1^{\Gamma_{Z'}}(z_1 + z_2),$$

т. е. группа $G_1(z, z_1, z_2)$ стабилизирует гиперплоскость Z' поточечно. Ввиду произвольности выбора Z' отсюда следует требуемое.

Пусть N – произвольная нормальная подгруппа группы $G(z)$, содержащая собственным образом $G_2(z)$ и содержащаяся в $G_1(z)$. Тогда для произвольной вершины $z_1 \in \Gamma(z)$ имеем $N^{\Gamma(z_1)} = T_{z_1}(z)$ (см. [6, предложение 2.3, 1]), откуда следует, что $|N^{\Gamma(z_1)}| = 2^5$ и $N^{\Gamma(z)}$ – нетривиальный $\mathbf{F}_2 G(z)/G_1(z)$ -модуль. Но любой нетривиальный $\mathbf{F}_2 G(z)/G_1(z)$ -модуль имеет порядок не менее 2^6 . Следовательно, $N_1(z_1)^{\Gamma(z_2)} \neq 1$ для произвольной вершины $z_2 \in \Gamma(z) \setminus \{z_1\}$, что с учетом $N_1(z_1)^{\Gamma(z_2)} \leq T_{z_2}(z, \varphi_{z, z_2}(\langle z_1, z_2 \rangle))$ (см. начало доказательства леммы) и $G(z, z_1, z_2)^{\Gamma(z_2)}$ -допустимости группы $N_1(z_1)^{\Gamma(z_2)}$ влечет $N_1(z_1)^{\Gamma(z_2)} = T_{z_2}(z, \varphi_{z, z_2}(\langle z_1, z_2 \rangle))$ и, в частности, $|N_1(z_1)^{\Gamma(z_2)}| = 2^4$. Таким образом,

$$|N^{\Gamma(z)}| \geq |N^{\Gamma(z_1)}| |N_1(z_1)^{\Gamma(z_2)}| = 2^9. \quad (3.2)$$

Пусть $z_3 \in \Gamma(z) \setminus \langle z_1, z_2 \rangle$. Тогда (см. начало доказательства леммы)

$$N_1(z_1, z_2)^{\Gamma(z_3)} \leq T_{z_3}(z, \varphi_{z, z_3}(\langle z_1, z_2, z_3 \rangle)).$$

Аналогично, для произвольных вершин $z_4 \in \Gamma(z) \setminus \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$, $z_5 \in \Gamma(z) \setminus \langle z_1, \dots, z_4 \rangle$ и $z_6 \in \Gamma(z) \setminus \langle z_1, \dots, z_5 \rangle$ имеем

$$\begin{aligned} N_1(z_1, z_2, z_3)^{\Gamma(z_4)} &\leq T_{z_4}(z, \varphi_{z, z_4}(\langle z_1, \dots, z_4 \rangle)), \\ N_1(z_1, \dots, z_4)^{\Gamma(z_5)} &\leq T_{z_5}(z, \varphi_{z, z_5}(\langle z_1, \dots, z_5 \rangle)), \\ N_1(z_1, \dots, z_5)^{\Gamma(z_6)} &\leq T_{z_6}(z, \varphi_{z, z_6}(\langle z_1, \dots, z_6 \rangle)) = 1. \end{aligned}$$

Поскольку в силу (3.1) справедливо равенство $N_1(z_1, \dots, z_6) = N_2(z)$, то отсюда следует

$$|N^{\Gamma(z)}| = |N^{\Gamma(z_1)}| \prod_{i=1}^4 |N_1(z_1, \dots, z_i)^{\Gamma(z_{i+1})}| \leq 2^{15}, \quad (3.3)$$

причем, принимая во внимание (3.1), $|N^{\Gamma(z)}| = 2^{15}$ тогда и только тогда, когда для произвольных $z' \in \Gamma(z)$, $Z \subseteq \Gamma(z)$ группа $N_1(z) \cap (\bigcap_{z'' \in Z} N_1(z''))$ действует на $\Gamma(z')$ тривиально при $z' \in \langle Z \rangle$ и как $T_{z'}(z, \varphi_{z, z'}(\langle Z, z' \rangle))$ при $z' \notin \langle Z \rangle$. В частности, для доказательства утверждения 1) леммы достаточно показать, что $|G_1(z)^{\Gamma(z)}| = 2^{15}$.

Можно взять в качестве N минимальную среди нормальных подгрупп группы $G(z)$, содержащих собственным образом $G_2(z)$ и содержащихся в $G_1(z)$. В этом случае $N^{\Gamma_2(z)}$ – неприводимый $\mathbf{F}_2 G(z)/G_1(z)$ -модуль, откуда с учетом (3.2), (3.3) и предложения 1.1 следует, что $N^{\Gamma_2(z)}$ является внешним квадратом либо естественного $\mathbf{F}_2 G(z)/G_1(z)$ -модуля, либо дуального к естественному $\mathbf{F}_2 G(z)/G_1(z)$ -модулю. Поскольку (взяв теперь в качестве N группу $G_1(z)$) согласно (3.3) имеем $|G_1(z)^{\Gamma_2(z)}| \leq 2^{15}$, то отсюда следует, что $G_1(z)^{\Gamma_2(z)}$ является внешним квадратом либо естественного $\mathbf{F}_2 G(z)/G_1(z)$ -модуля, либо дуального к естественному $\mathbf{F}_2 G(z)/G_1(z)$ -модулю. В частности, $|G_1(z)^{\Gamma_2(z)}| = 2^{15}$, что, как было замечено в предыдущем абзаце, доказывает утверждение 1) леммы. Далее, так как для $z' \in \Gamma(z)$ группа $G_1(z)^{\Gamma_2(z)}$ содержит $G(z, z')^{\Gamma_2(z)}$ -допустимую подгруппу порядка 2^{10} , каковой с учетом $|G_1(z)^{\Gamma(z)}| = |T_{z'}(z)| = 2^5$ является $G_1(z, z')^{\Gamma_2(z)}$, то реализуется вторая из указанных для $G_1(z)^{\Gamma_2(z)}$ возможностей, т. е. $G_1(z)^{\Gamma_2(z)}$ – внешний квадрат дуального к естественному $\mathbf{F}_2 G(z)/G_1(z)$ -модулю. Это доказывает утверждение 2) леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Из леммы 3.3 следует, что для $z \in V(\Gamma)$, $z' \in \Gamma(z)$ элементарная абелева 2-группа $G_1(z, z')^{\Gamma_2(z)}$ централизуется группой $O_2(G(z, z'))^{\Gamma_2(z)}$ и является внешним квадратом дуального к естественному $\mathbf{F}_2 G(z, z')/O_2(G(z, z'))$ -модулю, где $G(z, z')/O_2(G(z, z')) \cong \mathrm{SL}_5(2)$, а под естественным $\mathbf{F}_2 G(z, z')/O_2(G(z, z'))$ -модулем понимается нетривиальный $\mathbf{F}_2 G(z, z')/O_2(G(z, z'))$ -модуль порядка 2^5 , для которого при $z'' \in \Gamma(z) \setminus \{z'\}$ группа $G(z, z', \langle z', z'' \rangle)/O_2(G(z, z'))$ оставляет на месте ненулевой вектор. Отсюда, в свою очередь, следует, что для $z \in V(\Gamma)$ справедливо включение $[G_1(z), G_2(z)] \leq G_3(z)$, поскольку для произвольной вершины $z_1 \in \Gamma(z)$ имеем $[G_1(z), G_2(z)] \leq [O_2(G(z, z_1)), G_1(z, z_1)] \leq G_2(z_1)$. В частности, группа $G_2(z)/G_3(z)$ является $\mathbf{F}_2 G(z)/G_1(z)$ -модулем.

ЛЕММА 3.4. 1) Если (z, z', z'') – 2-дуга графа Γ и $Z \subseteq \Gamma(z)$, то группа $G_2(z) \cap (\bigcap_{z''' \in Z} G_2(z'''))$ действует тривиально на $G_2(z')$ при $z' \in \langle Z \rangle$, действует на $\Gamma(z'')$ тривиально при $z' \notin \langle Z \rangle$, $z'' \in \varphi_{z, z'}(\langle Z, z' \rangle)$ и, наконец, действует на $\Gamma(z'')$ как $T_{z''}(z', \varphi_{z, z''}(\langle \varphi_{z, z'}(\langle Z, z' \rangle), z'' \rangle))$ при $z' \notin \langle Z \rangle$, $z'' \notin \varphi_{z, z'}(\langle Z, z' \rangle)$.

2) $G_2(x)/G_3(x)$ – внешний куб естественного $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения 1) леммы в случае $z' \in \langle Z \rangle$, очевидно, достаточно установить справедливость включения $G_2(z, z_1, z_2) \leq G_2(z_1 + z_2)$ для произвольных вершин $z_1 \in \Gamma(z)$, $z_2 \in \Gamma(z) \setminus \{z_1\}$. Но для произвольной содержащей $\varphi_{z, z_1+z_2}(\langle z_1, z_2 \rangle)$ гиперплоскости Z' проективного пространства $\Gamma(z_1 + z_2)$ согласно лемме 3.1 и [3, лемма 2.3] имеем $G_2(z, z_1, z_2)^{\Gamma_{Z'}} \leq G_2^{\Gamma_{Z'}}(z, z_1, z_2) \leq G_2^{\Gamma_{Z'}}(z_1 + z_2)$. Поскольку каждая вершина из $G_2(z_1 + z_2)$ принадлежит шару радиуса 2 с центром $z_1 + z_2$ графа $\Gamma_{Z'}$ для некоторой содержащей $\varphi_{z, z_1+z_2}(\langle z_1, z_2 \rangle)$ гиперплоскости Z' проективного пространства $\Gamma(z_1 + z_2)$, то отсюда следует требуемое.

Следствием доказанного утверждения является справедливость (для произвольного подмножества Z множества $\Gamma(z)$) равенства

$$\bigcap_{z''' \in Z} G_2(z, z''') = \bigcap_{z''' \in \langle Z \rangle} G_2(z, z'''). \quad (3.4)$$

Для доказательства утверждения 1) леммы в случае $z' \notin \langle Z \rangle$, $z'' \in \varphi_{z, z'}(\langle Z, z' \rangle)$ в силу (3.4) достаточно установить справедливость для произвольной вершины

$z''' \in \varphi_{z',z}(\langle z, z'' \rangle)$ включения $G_2(z, z''') \leq G_1(z'')$. Но каждая вершина из $\Gamma(z'')$ принадлежит $\Gamma_{Z'}(z'')$ для некоторой содержащей z и z'' гиперплоскости Z' проективного пространства $\Gamma(z')$. Поскольку для каждой такой гиперплоскости Z' с учетом леммы 3.1 и [3, лемма 2.3] имеем $G_2(z, z''')^{\Gamma_{Z'}} \leq G_2^{\Gamma_{Z'}}(z, z''') \leq G_1^{\Gamma_{Z'}}(z'')$, то отсюда следует требуемое.

Перейдем к доказательству остальных утверждений леммы.

Пусть N – произвольная нормальная подгруппа группы $G(z)$, $z \in V(\Gamma)$, содержащая собственным образом $G_3(z)$ и содержащаяся в $G_2(z)$ (напомним, что $G_2(x) \neq 1$; см. начало доказательства теоремы). Тогда в силу замечания 3.1 элементарная абелева 2-группа $N^{\Gamma_3(z)}$ является $\mathbf{F}_2 G(z)/G_1(z)$ -модулем. Кроме того, в силу того же замечания для произвольной вершины $z_1 \in \Gamma(z)$ группа $N^{\Gamma_2(z_1)}$, будучи нетривиальной $G(z, z_1)^{\Gamma_2(z_1)}$ -допустимой подгруппой группы $G_1(z, z_1)^{\Gamma_2(z_1)}$, совпадает с $G_1(z, z_1)^{\Gamma_2(z_1)}$ и является внешним квадратом дуального к естественному $\mathbf{F}_2 G(z, z_1)/O_2(G(z, z_1))$ -модуля. В частности, отсюда следует, что $|N^{\Gamma_2(z_1)}| = 2^{10}$ и действие группы $N^{\Gamma_3(z)}$ на $\Gamma_2(z_1)$ не является точным. Пусть $z_2 \in \Gamma(z) \setminus \{z_1\}$ и $z_{1,2} \in \varphi_{z,z_2}(\langle z_1, z_2 \rangle) \setminus \{z\}$. Тогда $N_2(z_1)^{\Gamma_2(z_2)} \neq 1$, причем $N^{\Gamma_2(z_2)} = G_1(z, z_2)^{\Gamma_2(z_2)}$ является внешним квадратом дуального к естественному $\mathbf{F}_2 G(z, z_2)/O_2(G(z, z_2))$ -модуля. Поскольку $G(z, z_1, z_2)O_2(G(z, z_2)) = G(z, z_2, \langle z, z_{1,2} \rangle)$ и, согласно рассмотренному ранее случаю утверждения 1), $N_2(z_1) \leq G_1(z_{1,2})$, то отсюда с учетом леммы 3.3, 1) следует, что $G(z, z_1, z_2)^{\Gamma_2(z_2)}$ -допустимая группа $N_2(z_1)^{\Gamma_2(z_2)}$ совпадает с $G_1(z, z_2, z_{1,2})^{\Gamma_2(z_2)}$ и имеет порядок 2^6 . Таким образом,

$$|N^{\Gamma_3(z)}| \geq |N^{\Gamma_2(z_1)}| |N_2(z_1)^{\Gamma_2(z_2)}| = 2^{16}. \quad (3.5)$$

Пусть $z_3 \in \Gamma(z) \setminus \langle z_1, z_2 \rangle$ и $z_{i,3} \in \varphi_{z,z_3}(\langle z_i, z_3 \rangle) \setminus \{z\}$ для $i = 1, 2$. Тогда согласно рассмотренному ранее случаю утверждения 1) имеем

$$N_2(z_1, z_2)^{\Gamma_2(z_3)} \leq G_1(z, z_3, z_{1,3}, z_{2,3})^{\Gamma_2(z_3)}.$$

Аналогично, для произвольных вершин $z_4 \in \Gamma(z) \setminus \langle z_1, z_2, z_3 \rangle$, $z_5 \in \Gamma(z) \setminus \langle z_1, \dots, z_4 \rangle$ и $z_{i,j} \in \varphi_{z,z_j}(\langle z_i, z_j \rangle) \setminus \{z\}$, где $4 \leq j \leq 5$, $1 \leq i < j$, имеем

$$\begin{aligned} N_2(z_1, z_2, z_3)^{\Gamma_2(z_4)} &\leq G_1(z, z_4, z_{1,4}, z_{2,4}, z_{3,4})^{\Gamma_2(z_4)}, \\ N_2(z_1, \dots, z_4)^{\Gamma_2(z_5)} &\leq G_1(z, z_5, z_{1,5}, \dots, z_{4,5})^{\Gamma_2(z_5)}. \end{aligned}$$

Так как в силу леммы 3.3, 1) справедливы равенства

$$\begin{aligned} |G_1(z, z_3, z_{1,3}, z_{2,3})^{\Gamma_2(z_3)}| &= 2^3, \\ |G_1(z, z_4, z_{1,4}, z_{2,4}, z_{3,4})^{\Gamma_2(z_4)}| &= 2, \\ |G_1(z, z_5, z_{1,5}, \dots, z_{4,5})^{\Gamma_2(z_5)}| &= 1, \end{aligned}$$

то с учетом (3.4) и рассмотренного ранее случая утверждения 1) отсюда следует, что $N_2(z_1, \dots, z_4)^{\Gamma_3(z)} = 1$ и

$$|N^{\Gamma_3(z)}| = |N^{\Gamma_2(z_1)}| |N_2(z_1)^{\Gamma_2(z_2)}| |N_2(z_1, z_2)^{\Gamma_2(z_3)}| |N_2(z_1, z_2, z_3)^{\Gamma_2(z_4)}| \leq 2^{20}. \quad (3.6)$$

Более того, как легко видеть из предыдущего и леммы 3.3, 1), $|N^{\Gamma_3(z)}| = 2^{20}$ тогда и только тогда, когда для произвольных $Z \subseteq \Gamma(z)$, $z' \in \Gamma(z) \setminus \langle Z \rangle$, $z'' \in \Gamma(z') \setminus \varphi_{z,z'}(\langle Z, z' \rangle)$ группа $N_2(z) \cap (\bigcap_{z''' \in Z} N_2(z'''))$ действует на $\Gamma(z'')$ как

$T_{z''}(z', \varphi_{z', z''}(\langle \varphi_{z, z'}(\langle Z, z' \rangle), z'' \rangle))$. В частности, для доказательства утверждения 1) леммы в случае $z' \notin \langle Z \rangle$, $z'' \notin \varphi_{z, z'}(\langle Z, z' \rangle)$ достаточно показать, что $|G_2(z)^{\Gamma_3(z)}| = 2^{20}$.

Можно взять в качестве N минимальную среди нормальных подгрупп группы $G(z)$, содержащих собственным образом $G_3(z)$ и содержащихся в $G_2(z)$. В этом случае $N^{\Gamma_3(z)}$ – неприводимый $\mathbf{F}_2 G(z)/G_1(z)$ -модуль, откуда с учетом (3.5), (3.6) и предложения 1.1 следует, что $N^{\Gamma_3(z)}$ является внешним кубом естественного $\mathbf{F}_2 G(z)/G_1(z)$ -модуля. Поскольку (взяв теперь в качестве N группу $G_2(z)$) согласно (3.6) имеем $|G_2(z)^{\Gamma_3(z)}| \leq 2^{20}$, то отсюда следует, что $G_2(z)^{\Gamma_3(z)}$ – внешний куб естественного $\mathbf{F}_2 G(z)/G_1(z)$ -модуля. Таким образом, утверждение 2) леммы доказано. Поскольку $|G_2(z)^{\Gamma_3(z)}| = 2^{20}$, то, как было замечено в конце предыдущего абзаца, справедливо, кроме того, утверждение 1) леммы в оставшемся случае $z' \notin \langle Z \rangle$, $z'' \in \varphi_{z, z'}(\langle Z, z' \rangle)$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Из леммы 3.4 следует, что для $z \in V(\Gamma)$, $z' \in \Gamma(z)$ элементарная абелева 2-группа $G_2(z, z')^{\Gamma_3(z)}$ централизуется группой $O_2(G(z, z'))^{\Gamma_3(z)}$ и является внешним квадратом естественного $\mathbf{F}_2 G(z, z')/O_2(G(z, z'))$ -модуля (где, напомним, $G(z, z')/O_2(G(z, z')) \cong \text{SL}_5(2)$, а под естественным $\mathbf{F}_2 G(z, z')/O_2(G(z, z'))$ -модулем понимается нетривиальный $\mathbf{F}_2 G(z, z')/O_2(G(z, z'))$ -модуль порядка 2^5 , для которого при $z'' \in \Gamma(z) \setminus \{z'\}$ группа $G(z, z', \langle z', z'' \rangle)/O_2(G(z, z'))$ оставляет на месте ненулевой вектор). Отсюда, в свою очередь, следует, что для $z \in V(\Gamma)$ справедливо включение $[G_1(z), G_3(z)] \leq G_4(z)$, поскольку для произвольной вершины $z_1 \in \Gamma(z)$ имеем $[G_1(z), G_3(z)] \leq [O_2(G(z, z_1)), G_2(z, z_1)] \leq G_3(z_1)$. В частности, группа $G_3(z)/G_4(z)$ является $\mathbf{F}_2 G(z)/G_1(z)$ -модулем.

ЛЕММА 3.5. 1) Если (z, z', z'') – 2-дуга графа Γ и $z_1 \in \varphi_{z', z}(\langle z, z'' \rangle)$, то $G_3(z, z_1) \leq G_2(z'')$.

2) Если $z \in V(\Gamma)$, $z_1 \in \Gamma(z)$, $z_2 \in \Gamma(z) \setminus \{z_1\}$, то $G_3(z, z_1, z_2) \leq G_3(z_1 + z_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1) леммы. Пусть Z – произвольная содержащая $\varphi_{z', z''}(\langle z, z'' \rangle)$ гиперплоскость проективного пространства $\Gamma(z'')$. Тогда согласно лемме 3.1 и [3, лемма 2.7] имеем $G_3(z, z_1)^{\Gamma_Z} \leq G_2^{\Gamma_Z}(z'')$. Поскольку каждая вершина из $\Gamma_2(z'')$ принадлежит шару радиуса 2 с центром z'' графа Γ_Z для некоторой содержащей $\varphi_{z', z''}(\langle z, z'' \rangle)$ гиперплоскости Z проективного пространства $\Gamma(z'')$, то отсюда следует утверждение 1) леммы.

Докажем утверждение 2) леммы. Пусть Z – произвольная содержащая $\langle z_1, z_2 \rangle$ гиперплоскость проективного пространства $\Gamma(z)$. Тогда согласно лемме 3.1 и [3, лемма 2.7] имеем $G_3(z, z_1, z_2)^{\Gamma_Z} \leq G_4^{\Gamma_Z}(z)$. Поскольку каждая вершина из $\Gamma_3(z_1 + z_2)$ принадлежит шару радиуса 3 с центром $z_1 + z_2$ графа Γ_Z для некоторой содержащей $\langle z_1, z_2 \rangle$ гиперплоскости Z проективного пространства $\Gamma(z_1 + z_2)$, то отсюда следует утверждение 2) леммы.

ЛЕММА 3.6. 1) Если $z \in V(\Gamma)$, $z_1 \in \Gamma(z)$ и $h \in G_3(z, z_1) \setminus G_4(z)$, то найдется (единственная) прямая $Z \in [z : z_1]$ такая, что, во-первых, $h \in G_3(z')$ для произвольной вершины $z' \in Z$ и, во-вторых, $h \in \bigcap_{z'' \in \varphi_{z, z'}(\langle Z, z' \rangle)} G_2(z', z'') \setminus G_3(z')$ для произвольной вершины $z' \in \Gamma(z) \setminus Z$ (чем однозначно определяется действие h на $G_3(z')$ в соответствии с леммой 3.4, 1)).

2) Если $G_3(x) \neq 1$, то $G_3(x)^{\Gamma_4(x)}$ – внешний квадрат естественного $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения 1) леммы зафиксируем некоторую не содержащую z_1 гиперплоскость Z' проективного пространства $\Gamma(z)$. Покажем, что для произвольной вершины $z' \in Z'$ и произвольного элемента $h' \in G_3(z, z_1)$, ограничение которого $h'^{\Gamma_{Z'}}$ на $V(\Gamma_{Z'})$ принадлежит $G_3^{\Gamma_{Z'}}(z')$, имеем $h' \in G_3(z')$. Согласно лемме 3.4, 1) для этого достаточно доказать, что $h' \in G_2(z'')$, где z'' – произвольная вершина из $\Gamma_{Z'}(z') \setminus \{z'\}$, т. е. (согласно лемме 3.3, 1)) что $h' \in G_1(z''')$ для произвольной вершины $z''' \in \Gamma_{Z'}(z'') \setminus \{z''\}$. Однако $h'^{\Gamma(z''')} \in T_{z'''}(z'', \Gamma_{Z'}(z'''))$ в силу $h' \in G_1(z'')$, $h'^{\Gamma_{Z'}} \in G_3^{\Gamma_{Z'}}(z')$ и леммы 3.3, 1). В то же время $\Phi_{z'''}(z_1)$ содержится в некотором подпространстве Z'' размерности 3 проективного пространства $\Gamma(z''')$, причем включение $h' \in G_3(z, z_1)$ согласно лемме 3.2 влечет равенство $h'^{\Gamma_{Z''}} = 1$. Таким образом, $h'^{\Gamma(z''')} \in T_{z'''}(z'', (\Gamma_{Z'}(z''), \Phi_{z'''}(z_1))) = 1$ для произвольной вершины $z''' \in \Gamma_{Z'}(z'') \setminus \{z''\}$, что завершает доказательство включения $h' \in G_3(z')$.

Теперь несложно доказать утверждение 1) леммы. Итак, пусть h – элемент из $G_3(z, z_1) \setminus G_4(z)$. Если $h^{\Gamma_{Z'}} \in G_4^{\Gamma_{Z'}}(z)$ (где Z' – не содержащая z_1 гиперплоскость проективного пространства $\Gamma(z)$), то согласно изложенному в предыдущем абзаце $h \in G_3(z')$ для всех $z' \in Z'$. Однако тогда лемма 3.5, 2) влечет $h \in G_4(z)$, что противоречит выбору h . Следовательно, $h^{\Gamma_{Z'}} \in G_3^{\Gamma_{Z'}}(z) \setminus G_4^{\Gamma_{Z'}}(z)$. Отсюда на основании леммы 3.1 и [3, лемма 2.7] заключаем, что существует единственная вершина $\tilde{z} \in Z'$ со свойством $h^{\Gamma_{Z'}} \in G_3^{\Gamma_{Z'}}(\tilde{z})$. Согласно изложенному в предыдущем абзаце и лемме 3.5, 2) это означает, что $h \in G_3(z')$ для произвольной вершины z' из $Z = \langle z_1, \tilde{z} \rangle$ и $h \notin G_3(z')$ для произвольной вершины z' из $\Gamma(z) \setminus Z$. Пусть z' – произвольная вершина из $\Gamma(z) \setminus Z$. Тогда из леммы 3.5, 1) следует, что $h \in G_2(z'')$ для произвольной вершины $z'' \in \varphi_{z, z'}(\langle Z, z' \rangle)$. С учетом $h \notin G_3(z')$ и леммы 3.4, 1) отсюда вытекает утверждение 1) леммы.

Из доказанного утверждения 1) следует, что для $z \in V(\Gamma)$, $z_1 \in \Gamma(z)$ элементарная абелева 2-группа $G_3(z, z_1)^{\Gamma_4(z)}$ централизуется группой $O_2(G(z, z_1))^{\Gamma_4(z)}$ и либо единична, либо является естественным $\mathbf{F}_2 G(z, z_1)/O_2(G(z, z_1))$ -модулем (где $G(z, z_1)/O_2(G(z, z_1)) \cong \text{SL}_5(2)$, а под естественным $\mathbf{F}_2 G(z, z_1)/O_2(G(z, z_1))$ -модулем понимается нетривиальный $\mathbf{F}_2 G(z, z_1)/O_2(G(z, z_1))$ -модуль порядка 2^5 , для которого при $z_2 \in \Gamma(z) \setminus \{z_1\}$ группа $G(z, z_1, \langle z_1, z_2 \rangle)/O_2(G(z, z_1))$ оставляет на месте ненулевой вектор).

Докажем утверждение 2) леммы. Предположим, что $G_3(x) \neq 1$, и пусть N – произвольная нормальная подгруппа группы $G(x)$, содержащая собственным образом $G_4(x)$ и содержащаяся в $G_3(x)$. Тогда в силу замечания 3.2 для произвольной вершины $x_1 \in \Gamma(x)$ группа $N^{\Gamma_3(x_1)}$, будучи нетривиальной $G(x, x_1)^{\Gamma_3(x_1)}$ -допустимой подгруппой группы $G_2(x, x_1)^{\Gamma_3(x_1)}$, совпадает с $G_2(x, x_1)^{\Gamma_3(x_1)}$ и является внешним квадратом естественного $\mathbf{F}_2 G(x, x_1)/O_2(G(x, x_1))$ -модуля. В частности, отсюда следует, что $|N^{\Gamma_3(x_1)}| = 2^{10}$ и действие группы $N^{\Gamma_4(x)}$ на $\Gamma_3(x_1)$ не является точным. Пусть $x_2 \in \Gamma(x) \setminus \{x_1\}$. Поскольку $N_3(x_1)^{\Gamma_4(x)} \neq 1$, то согласно замечанию из предыдущего абзаца имеем $|N_3(x_1)^{\Gamma_4(x)}| = 2^5$. Таким образом, $N^{\Gamma_4(x)}$ – элементарная абелева группа порядка 2^{15} , содержащая $G(x, x_1)$ -допустимую подгруппу $N_3(x_1)^{\Gamma_4(x)}$ порядка 2^5 . Поскольку в качестве N может быть взята как группа $G_3(x)$, так и минимальная среди $G(x)$ -допустимых подгрупп группы $G_3(x)$, содержащих собственным образом $G_4(x)$, то отсюда следует, что $G_3(x)^{\Gamma_4(x)}$ – элементарная абелева группа порядка 2^{15} , содержащая $G(x, x_1)$ -

допустимую подгруппу $G_3(x, x_1)^{\Gamma_4(x)}$ порядка 2^5 и не содержащая собственных неединичных $G(x)$ -допустимых подгрупп. При этом, согласно замечанию 3.2, $G_3(x)^{\Gamma_4(x)}$ является $\mathbf{F}_2 G(x)/G_1(x)$ -модулем. В силу предложения 1.1 это доказывает утверждение 2) леммы.

Завершим доказательство теоремы I. Поскольку $H^2(\mathrm{SL}_6(2), V_1^* \wedge V_1^*) = 0$, $H^2(\mathrm{SL}_6(2), V_1 \wedge V_1 \wedge V_1) = 0$ и $H^2(\mathrm{SL}_6(2), V_1 \wedge V_1) = 0$ для естественного $\mathbf{F}_2 \mathrm{SL}_6(2)$ -модуля V_1 и дуального к нему $\mathbf{F}_2 \mathrm{SL}_6(2)$ -модуля V_1^* (см. [9]), то согласно леммам 3.3, 2), 3.4, 2), 3.6, 2) группа $G(x)/G_4(x)$ содержит подгруппу, изоморфную $\mathrm{SL}_6(2)$. Пусть L – прообраз этой подгруппы при естественном гомоморфизме $G(x) \rightarrow G(x)/G_4(x)$. Тогда (с учетом $G_1(x) = O_2(G(x))$ и $G(x)^{\Gamma(x)} \cong \mathrm{SL}_6(2)$) имеем $L^{\Gamma(x)} = G(x)^{\Gamma(x)}$ и $L_1(x) = G_4(x)$. Пусть X – некоторое подпространство размерности 3 проективного пространства $\Gamma(x)$, $x' \in \Gamma(x) \setminus X$ и $x'' \in \Gamma(x) \setminus \langle X, x' \rangle$. Тогда группа $L(x', x'', X)^{\Gamma(x)} = G(x, x', x'', X)^{\Gamma(x)}$ действует точно на X , индуцируя на X группу, изоморфную $\mathrm{SL}_4(2)$, а ядро действия группы $L(x', x'', X)$ на $\Gamma(x)$ совпадает с $G_4(x)$. Так как согласно лемме 3.2 группа $G_4(x)$ действует тривиально на $V(\Gamma_X)$, то отсюда следует, что $L(x', x'', X)$ индуцирует на $V(\Gamma_X)$ группу, изоморфную $\mathrm{SL}_4(2)$. Однако это противоречит лемме 3.2 (см. теорему II). Теорема I доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Как было указано в конце введения, приводимое выше доказательство теоремы I отлично от первоначального, которое проводилось разработанным в предыдущих частях настоящей работы методом треков. В приведенном доказательстве используются кохомологические свойства некоторых групп $\mathrm{SL}_n(2)$. На связь исключительных ситуаций (т. е. ситуаций, когда $G_2(x) \neq 1$) в случае коллинеации при $q = 2$, $n = 4, 5$ с особенностями поведения групп кохомологий соответствующих групп $\mathrm{SL}_n(q)$ указывает, помимо теоремы II, детальное исследование строения стабилизаторов вершин из заключения теоремы статьи [3], проведенное совместно с А. А. Ивановым во время визита автора в лондонский Империял Колледж в мае 2001 г.

§ 4. Заключительные замечания

Доказанная теорема I завершает описание групп $G(x)$, для которых имеет место основное условие (см. введение). Напомним, что в [6] завершено рассмотрение случая $p > 3$; в [7, ч. I] и [2, приложение] – случая, когда $p \leq 3$ и группа G действует интранзитивно на 3-дугах Γ , кроме случая коллинеации при $q = 2$ и $n > 3$; в [7, ч. II] и [1, приложение] – случая, когда $p = 3$ и группа G действует транзитивно на 3-дугах Γ ; в [1] – случая, когда $p = 2$ и группа G действует транзитивно на 3-дугах Γ ; наконец, в [2], [3] и настоящей статье – случая коллинеации при $q = 2$ (при $n = 4, n = 5, n \geq 6$ соответственно). Итоговый список имеющихся возможностей для $G(x)$ при $n > 2$ с указанием соответствующих примеров графов Γ и групп G приводится в [5] (см. также [1, введение]). В [5] содержится, кроме того, ряд замечаний общего характера, касающихся мотивировок и разработанного метода исследования стабилизаторов вершин графов с заданным действием на окрестности.

Отметим, что описание групп $G(x)$ при выполнении основного условия получено без использования классификации конечных простых групп (и не ясно, каким

образом последняя могла бы быть использована для получения описания). Следствием классификации конечных простых групп является то, что настоящим описанием завершается описание стабилизаторов вершин в транзитивных на 2-дугах группах автоморфизмов конечных связных графов, а также стабилизаторов вершин в транзитивных на 1-дугах группах автоморфизмов конечных связных графов простой валентности.

В заключение укажем на неточности, замеченные автором в предыдущих частях настоящей работы. В [1, с. 160, строка 17 снизу] вместо “произвольная нормальная” должно быть “нормальная”. В [1, с. 160, строка 15 снизу] вместо $G_1(x)$ должно быть $G(x)^{\Gamma(x)}$. В [1, с. 161, строка 18 сверху] вместо $\text{Aut } O_{2n}^+(q)$ должно быть $O_{2n}^+(q)\langle h \rangle$, где $\langle h \rangle$ действует точно на $O_{2n}^+(q)$ и h индуцирует графовый автоморфизм порядка 2”. В [1, с. 200, строка 1 снизу] дважды вместо $T_{x_0}(x_0^4)$ должно быть $T \cap T_{x_0}(x_0^4)$. В [2, с. 176, строки 11, 12 сверху] вместо “биекция $\varphi_{z,z'}: [z : z'] \rightarrow [z' : z]$ ” должно быть “биекция $\varphi_{z,z'}$ множества подпространств $[z : z']$ на множество подпространств $[z' : z]$ ”. Кроме того, в [7, с. 142, строка 12 снизу] вместо $G_r^{\Gamma_{z,z'}}$ должно быть $G_{r+1}^{\Gamma_{z,z'}}$. Наконец, в [1, с. 161, строка 22 сверху] ссылку [2] лучше заменить ссылкой на работу [13] из списка литературы в настоящей статье.

Список литературы

1. Трофимов В. И. Графы с проективными подорбитами. Исключительные случаи характеристики 2. I // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. №6. С. 159–222.
2. Трофимов В. И. Графы с проективными подорбитами. Исключительные случаи характеристики 2. II // Изв. РАН. Сер. матем. 2000. Т. 64. №1. С. 175–196.
3. Трофимов В. И. Графы с проективными подорбитами. Исключительные случаи характеристики 2. III // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. №4. С. 151–190.
4. Трофимов В. И. Стабилизаторы вершин графов с проективными подорбитами // ДАН СССР. 1990. Т. 315. №3. С. 544–546.
5. Trofimov V. I. Vertex stabilizers of locally projective groups of automorphisms of graphs. A summary // Groups, Combinatorics and Geometry. Durham, 2001 / Eds. A. Ivanov, M. Liebeck, J. Saxl. New Jersey e.a.: World Scientific, 2003. P. 313–326.
6. Трофимов В. И. Графы с проективными подорбитами // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1991. Т. 55. №4. С. 890–916.
7. Трофимов В. И. Графы с проективными подорбитами. Случаи малых характеристик. I–II // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. №5. С. 124–171; №6. С. 137–156.
8. Gardiner A. Arc transitivity in graphs // Quart. J. Math. (2). 1973. V. 24. P. 399–407.
9. Bell G. W. On the cohomology of the finite special groups. I–II // J. Algebra. 1978. V. 54. P. 216–238; P. 239–259.
10. Liebeck M. The affine permutation groups of rank three // Proc. London Math. Soc. (3). 1987. V. 54. P. 477–516.
11. Timmesfeld F. G. Amalgams with rank 2 groups of Lie-type in characteristic 2. Preprint / Math. Inst., Justus-Liebig-Univ. Giessen, 1984.
12. Griess R. L. On a subgroup of order $2^{10} | \text{GL}(5, 2) |$ in $E_8(\mathbb{C})$, the Dempwolff group and $\text{Aut}(D_8 \circ D_8 \circ D_8)$ // J. Algebra. 1976. V. 40. P. 271–279.
13. Weiss R. Symmetric graphs with projective subconstituents // Proc. Amer. Math. Soc. 1978. V. 72. P. 213–217.

E-mail: trofimov@imm.uran.ru

Поступило в редакцию
18.XI.2002