Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. П. Исаев, Р. С. Юлмухаметов, Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 1, 5–42

DOI: <https://doi.org/10.4213/im465>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 12:10:34

УДК 517.54

К. П. Исаев, Р. С. Юлмухаметов

Преобразования Лапласа функционалов на пространствах Бергмана

Приведено полное описание пространства, сопряженного к пространству Бергмана на плоской ограниченной выпуклой области.

Библиография: 17 наименований.

Введение

Пусть D – ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости. Через $B_2(D)$ обозначим пространство Бергмана, состоящее из функций, голоморфных в D и интегрируемых с квадратом по площади D . Пространство $B_2(D)$ является гильбертовым со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_D f(z) \overline{g(z)} dv(z),$$

где dv – элемент площади. Функция $e^{\lambda z}$ при любом $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит $B_2(D)$, и система $\{e^{\lambda z}, \lambda \in \mathbb{C}\}$ полна в $B_2(D)$ [1]. Если S – линейный непрерывный функционал на $B_2(D)$, то функция

$$\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z}), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

называется *преобразованием Лапласа функционала* S . Из легко проверяемой оценки

$$\max_{z \in D} \left| \frac{e^{\lambda z} - e^{\lambda_0 z}}{\lambda - \lambda_0} - ze^{\lambda_0 z} \right| \leq |\lambda - \lambda_0| \max_{z \in D} |z^2 e^{\lambda z}|$$

следует, что при $\lambda \rightarrow \lambda_0$

$$\left\| \frac{e^{\lambda z} - e^{\lambda_0 z}}{\lambda - \lambda_0} - ze^{\lambda_0 z} \right\|_{B_2(D)} \rightarrow 0.$$

Значит, функция $\widehat{S}(\lambda)$ является целой, причем $\widehat{S}'(\lambda) = S(ze^{\lambda z})$.

Определим отображение $L: B_2^*(D) \rightarrow H(\mathbb{C})$, сопоставляя каждому функционалу $S \in B_2^*(D)$ его преобразование Лапласа $\widehat{S}(\lambda)$. Полнота системы $\{e^{\lambda z}, \lambda \in \mathbb{C}\}$ означает, что отображение L действует инъективно.

Цель настоящей работы – определить образ отображения L .

Аналогичная задача была выполнена в работе [2], в которой рассматривалось пространство Смирнова $E_2(D)$, определяемое как пополнение пространства полиномов относительно нормы

$$\|f\|^2 = \int_{\partial D} |f(z)|^2 ds(z),$$

где ds – элемент длины границы.

Задачи описания образа в более слабых топологиях рассмотрены в работах [3]–[6], для пространств Бергмана – в [7]–[10]. Задача описания образов при преобразованиях Коши и Лапласа функционалов на пространствах с более слабыми топологиями изучалась в работах [11]–[15].

Общая идея решения поставленной задачи состоит в следующем.

Как известно, система $\left\{\frac{1}{z-\zeta}, \zeta \notin \overline{D}\right\}$ также полна в пространстве $B_2(D)$ [1]. Преобразованием Коши функционала $S \in B_2^*(D)$ назовем функцию

$$\tilde{S}(\zeta) = S\left(\frac{1}{z-\zeta}\right), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}.$$

Отображение $C: S \rightarrow \tilde{S}$ инъективно действует из $B_2^*(D)$ в пространство

$$H_0(\mathbb{C} \setminus \overline{D}) = \{\gamma(\zeta) \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{D}), \gamma(\infty) = 0\}.$$

Задача определения образа отображения C рассмотрена и полностью решена в работах [7]–[9]. Решение задачи описывается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА А. *Отображение C устанавливает линейный топологический изоморфизм пространства $B_2^*(D)$ и пространства*

$$B_2^1(\mathbb{C} \setminus \overline{D}) = \left\{ \gamma \in H_0(\mathbb{C} \setminus \overline{D}) : \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma'(\zeta)|^2 dv(\zeta) < \infty \right\}.$$

Для функции $\gamma \in H_0(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$ ее преобразованием Бореля называется целая функция

$$B(\gamma)(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \gamma(\zeta) e^{\lambda \zeta} d\zeta,$$

где Γ – произвольный контур, охватывающий D . Имеется обратная формула для преобразования Бореля.

Пусть $h(\varphi)$ – опорная функция области D , т. е.

$$h(\varphi) = \max_{z \in \overline{D}} \operatorname{Re} z e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Если функцию $B(\gamma)$ обозначим через f , то на полуплоскости $P_\varphi = \{\zeta : \operatorname{Re} \zeta e^{i\varphi} > h(\varphi)\}$ исходная функция γ восстанавливается по формуле

$$\gamma(\zeta) = \int_0^\infty f(re^{i\varphi}) e^{-\zeta r e^{i\varphi}} e^{i\varphi} dr. \quad (1)$$

Преобразования Лапласа, Бореля и Коши связаны простой формулой. Действительно, возьмем композицию преобразований Бореля и Коши:

$$\int_{\Gamma} S_z \left(\frac{1}{z - \zeta} \right) e^{\lambda \zeta} d\zeta = S \left(\int_{\Gamma} \frac{e^{\lambda \zeta}}{z - \zeta} d\zeta \right) = -S(e^{\lambda z}),$$

т.е. $L = -B \circ C$. Учитывая теорему А, мы приходим к следующей постановке вопроса: какими свойствами обладает преобразование Бореля функций из пространства $B_2^1(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$?

На основе анализа результатов работы [2] мы сформулировали следующую гипотезу.

Пусть

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi) &= h(\varphi) + \int_0^\varphi h(\theta) d\theta, \\ K(\lambda) &= \|e^{\lambda z}\|_{B_2(D)}^2 = \int_D |e^{\lambda z}|^2 dv(z). \end{aligned}$$

Определим следующую норму для целых функций:

$$\|F\| = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{|F(re^{i\varphi})|^2}{K(re^{i\varphi})} dr d\Delta(\varphi) \right)^{1/2}.$$

Если $\gamma \in B_2^1(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$ и F – ее преобразование Бореля, то

$$c \|\gamma\|_{B_2^1(\mathbb{C} \setminus \overline{D})} \leq \|F\| \leq C \|\gamma\|_{B_2^1(\mathbb{C} \setminus \overline{D})},$$

где постоянные c, C не зависят от функции γ . Эта гипотеза оказалась справедливой.

Для точной формулировки утверждения, на котором, по существу, построено доказательство справедливости нашей гипотезы, введем обозначения для некоторых характеристик выпуклых областей. Через $|D|$ обозначим площадь области D , а через $l(D)$ – длину ее границы. Рассмотрим всевозможные прямолинейные полосы, содержащие область D , и через $\sigma(D)$ обозначим наименьшую ширину таких полос. Наконец, положим

$$R(D) = \max_{z \in \overline{D}} |z|.$$

Для функций $\gamma \in H_0(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$ рассмотрим еще следующую норму:

$$\|\gamma\| = \left(\int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 \text{dist}^2(\zeta, D) dv(\zeta) \right)^{1/2},$$

где $\text{dist}(\zeta, D)$ – расстояние от точки ζ до границы D .

ПОДГОТОВИТЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть D – ограниченная выпуклая область, $\gamma \in B_2^1(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$ и F – преобразование Бореля функции γ . Тогда имеет место соотношение

$$c(D)\|\gamma\| \leq \|F\| \leq C(D)\|\gamma\|,$$

где

$$c(D) = \frac{2^{-14}\sigma^2(D)}{A \operatorname{diam}^2(D)} \left(\frac{16^4(l(D) + \pi\sigma(D)/2)^2 R^2(D)}{\pi^2\sigma^4(D)} + 1 \right)^{-1},$$

$$C(D) = \frac{2^{14} \operatorname{diam}^2(D) l(D) R(D)}{a\sigma^2(D)|D|} \left(\frac{5 \cdot 16^4(l(D) + \pi\sigma(D)/2)^2}{\pi^2\sigma^4(D)} + 1 \right) + \frac{2^{17} \operatorname{diam}^4(D)}{a|D|^2},$$

причем a, A – абсолютные постоянные, т. е. не зависящие от области D .

Далее докажем (теорема 6), что норма в пространстве $B_2^1(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$ эквивалентна норме $\|\gamma\|$. Тем самым из подготовительной теоремы и теоремы А получим следующий ответ на поставленный вопрос об образе преобразования Лапласа.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Преобразование Лапласа устанавливает линейный непрерывный изоморфизм пространства $B_2^*(D)$ и пространства целых функций F с нормой

$$\|F\| = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{|F(re^{i\varphi})|^2}{K(re^{i\varphi})} dr d\Delta(\varphi) \right)^{1/2}.$$

Доказательство подготовительной теоремы разобьем на две части. В §1 при фиксированном φ докажем равномерную по φ эквивалентность интеграла

$$I_\varphi(F) = \int_0^\infty \frac{|F(re^{i\varphi})|^2}{K(re^{i\varphi})} dr$$

некоторому интегралу от γ по полуплоскости P_φ . В §2 полученные оценки проинтегрируем по φ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Подготовительную теорему достаточно доказать для областей, не содержащих на своей границе прямолинейных отрезков и углов. Это следует из того, что постоянные $c(D), C(D)$ непрерывно зависят от D . Действительно, допустим, что теорема доказана с указанными дополнительными условиями на область.

Пусть имеются область D , функция $\gamma \in B_2^1(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$ и ее преобразование Бореля F . Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Для двух плоских множеств A, B через $A + B$ будем обозначать их обычную арифметическую сумму:

$$A + B = \{z + w : z \in A, w \in B\},$$

и пусть $B(z, r)$ – круг с центром в точке z радиуса r . Через D_ε обозначим сумму $D + B(0, \varepsilon)$. Впишем во множество D_ε выпуклый многоугольник, содержащий D .

Затем заменим каждую сторону этого многоугольника на дугу достаточно большой окружности так, чтобы полученная область D' оставалась выпуклой и содержалась в области $D_{2\varepsilon}$. На границе D' нет прямолинейных участков, но есть углы. Чтобы от них избавиться, перейдем к области $D' + B(0, \varepsilon)$. Таким образом, получим область без углов и отрезков на границе, содержащую D и содержащуюся в $D_{3\varepsilon}$.

Полагая $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, построим указанным образом области D_n без углов и отрезков на границе. Поскольку $D_n \supset D$, то $\gamma \in H_0(\mathbb{C} \setminus D_n)$ для любого n . Можно применить теорему, в результате получим

$$c(D_n) \|\gamma\|_n \leq \|F\|_n \leq C(D_n) \|\gamma\|_n, \quad (*)$$

где $\|\cdot\|_n$ – норма, построенная по области D_n . Нетрудно убедиться в том, что при $n \rightarrow \infty$ имеем $\|\cdot\|_n \rightarrow \|\cdot\|$ как для функции γ , так и для функции F . (Для функции γ это следует прямо из теоремы Лебега, для функции F – из, например, теоремы Фату.) Остается перейти к пределу в соотношении (*) и получить подготовительную теорему для области D .

Условия, налагаемые на границу области, потребуются лишь для более четкого изложения доказательства теоремы 2.

§ 1. Оценка интегралов по радиусу

Зафиксируем $\varphi \in [0, 2\pi]$. Пусть для целой функции $F(\lambda)$ конечен интеграл

$$I_\varphi = \int_0^\infty \frac{|F(re^{i\varphi})|^2}{K(re^{i\varphi})} dr.$$

Если $F = B(\gamma)$, то $B(\gamma'') = F(\lambda)\lambda^2$. По обратной формуле Бореля (1) в полуплоскости P_φ имеем представление

$$\gamma''(\zeta) = \int_0^\infty F(re^{i\varphi}) r^2 e^{3i\varphi} e^{-\zeta re^{i\varphi}} dr.$$

Точки полуплоскости P_φ представим в виде $\zeta = (h(\varphi) - \xi)e^{-i\varphi}$, где ξ изменяется в левой полуплоскости $\operatorname{Re} \xi < 0$. Тогда

$$\gamma''(e^{-i\varphi}(h(\varphi) - \xi)) = \int_0^\infty [F(re^{i\varphi}) r^2 e^{3i\varphi} e^{-h(\varphi)r}] e^{\xi r} dr. \quad (2)$$

Интеграл в правой части – это преобразование Фурье–Лапласа функции $F(re^{i\varphi}) \times r^2 e^{3i\varphi} e^{-h(\varphi)r}$. Для оценки γ'' мы намерены применить следующую теорему (см. [2]) о весовых преобразованиях Фурье–Лапласа.

ТЕОРЕМА В. Пусть $u(t)$ – выпуклая функция, заданная на интервале I , $\tilde{u}(x)$ – функция, сопряженная по Юнгу с $u(t)$:

$$\tilde{u}(x) = \sup_{t \in I} (xt - u(t)).$$

Положим

$$J = \{x \in \mathbb{R}: \tilde{u}(x) < \infty\},$$

$$K_0(x) = \int_I e^{2tx-2u(t)} dt, \quad x \in J.$$

Тогда для любой функции g на I , для которой конечен интеграл

$$\|g\|^2 = \int_I |g(t)|^2 e^{-2u(t)} dt,$$

функция $\hat{g}(z) = \int_I \overline{g(t)} e^{zt-2u(t)} dt$ удовлетворяет неравенствам

$$a\|g\|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_J \frac{|\hat{g}(x+iy)|^2}{K_0(x)} d\tilde{u}'(x) dy \leq A\|g\|^2,$$

где $a, A > 0$ – абсолютные постоянные, т. е. не зависящие от функции g и веса u .

Для того чтобы преобразовать формулу (2) к нужному виду, введем две вспомогательные функции

$$\eta(r) = \frac{e^{2h(\varphi)r}}{K(re^{i\varphi})}, \quad u(r) = \frac{1}{2} \ln \frac{\eta(r)}{r^4}.$$

С помощью этих функций получим представление

$$\gamma''(e^{-i\varphi}(h(\varphi) - \xi)) = \int_0^\infty \frac{F(re^{i\varphi})e^{3i\varphi}e^{h(\varphi)r}}{r^2 K(re^{i\varphi})} e^{\xi r - 2u(r)} dr. \quad (3)$$

Таким образом, мы сможем применить теорему В, если докажем выпуклость функции $u(t)$ на $\mathbb{R}_+$. С помощью отображения $ze^{i\varphi} - h(\varphi) = w$ преобразуем область D в область D_φ , которая располагается на левой полуплоскости и касается оси ординат. Пусть

$$D_\varphi = \{w = x + iy: f_1(x) < y < f_2(x), -R_\varphi < x < 0\}$$

и $f(x) = f_2(x) - f_1(x)$. Тогда f – неотрицательная вогнутая функция на отрезке $[-R_\varphi, 0]$. По определению имеем

$$\begin{aligned} K(re^{i\varphi}) &= \int_D e^{2r \operatorname{Re} ze^{i\varphi}} dv(z) = e^{2h(\varphi)r} \int_{D_\varphi} e^{2rx} dx dy \\ &= e^{2h(\varphi)r} \int_{-R_\varphi}^0 e^{2rx} f(x) dx. \end{aligned} \quad (4)$$

ЛЕММА 1. 1) Функция $u(r)$ выпукла на $(0, \infty)$ и, более того,

$$\frac{1}{2r^2} \leq u''(r) \leq \frac{2}{r^2}, \quad r > 0.$$

2) Если $\tilde{u}(x) = \sup_{r>0} (xr - u(r))$ – функция, сопряженная по Юнгу к функции u , то

$$\frac{1}{2x^2} \leq \tilde{u}''(x) \leq \frac{8}{x^2}, \quad x < 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проводя непосредственные вычисления, получим представление

$$u''(r) = \frac{4a_0^2 + a_1^2 - a_2a_0}{2a_0^2r^2},$$

где

$$a_k = \int_{-2rR_\varphi}^0 x^k e^x f\left(\frac{x}{2r}\right) dx, \quad k = 0, 1, 2.$$

Поскольку по неравенству Гёльдера $a_1^2 \leq a_0a_2$, то

$$u''(r) \leq \frac{2}{r^2}.$$

Нижняя оценка для $u''(x)$ будет следовать из соотношения

$$3a_0^2 + a_1^2 - a_0a_2 \geq 0.$$

Зафиксируем $r > 0$, функцию $f(\frac{x}{2r})$ обозначим через $g(x)$. Тогда $g(x)$ – неотрицательная вогнутая функция на некотором интервале $(T, 0)$. По теореме о среднем значении для интеграла Римана существует число $t \in (T, 0)$ такое, что

$$a_2 = \int_T^0 x^2 e^x g(x) dx = t \int_T^0 x e^x g(x) dx = ta_1.$$

Если $t \geq -2\sqrt{3}$, то $-a_2 = -a_1t \geq 2\sqrt{3}a_1$ и

$$3a_0^2 + a_1^2 - a_0a_2 \geq (\sqrt{3}a_0)^2 + a_1^2 + 2\sqrt{3}a_1a_0 = (\sqrt{3}a_0 + a_1)^2 \geq 0.$$

Докажем, что на самом деле $t > -3$. По определению числа t имеем

$$\int_T^t (x-t)x e^x g(x) dx = \int_t^0 (t-x)x e^x g(x) dx.$$

Положим $p = g(t)$; тогда в силу вогнутости $g(x)$ верны неравенства

$$\begin{aligned} g(x) &\geq \frac{p}{t}x, & t \leq x \leq 0, \\ g(x) &\leq \frac{p}{t}x, & T \leq x \leq t. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{p}{t} \int_T^t (x-t)x^2 e^x dx \geq \frac{p}{t} \int_t^0 (t-x)x^2 e^x dx$$

или

$$\int_T^t (t-x)x^2 e^x dx \geq \int_t^0 (x-t)x^2 e^x dx.$$

Вычислим интегралы и получим неравенство

$$(t-T)T^2e^T + (3T-2t)Te^T + (2t-6T)e^T + 6e^T \leq 2t+6.$$

Выражение, стоящее в левой части этого неравенства, положительное. Действительно, при фиксированном T оно является линейной функцией от t . Вычислим ее значения при $t = 0$ и $t = T$, получим соответственно $e^T(-T^3 + 3T^2 - 6T + 6) > 0$ и $e^T(T^2 - 4T + 6) > 0$. Таким образом, $2t + 6 > 0$ и $t > -3$. Первое утверждение леммы доказано.

Докажем второе утверждение. Сначала выясним поведение функции $u(r)$ при $r \rightarrow \infty$. По формуле (4) имеем

$$K(re^{i\varphi}) \leq e^{2h(\varphi)r} |D_\varphi| = e^{2h(\varphi)r} |D|,$$

где $|D|$ — площадь области D . Чтобы оценить $K(re^{i\varphi})$ снизу, впишем в область D_φ какой-либо треугольник $\triangle$ с вершиной P на оси ординат и с основанием, параллельным оси Oy . Пусть h — высота этого треугольника и a — длина основания. Для $r > \frac{1}{h}$ через $\triangle_r$ обозначим треугольник с высотой $\frac{1}{r}$, вершиной в P , подобный треугольнику $\triangle$. Тогда

$$K(re^{i\varphi}) \geq e^{2h(\varphi)r} \int_{\triangle_r} e^{2xr} dx dy \geq e^{2h(\varphi)r-2} |\triangle_r| = \frac{ae^{2h(\varphi)r}}{2e^2 r^2 h}.$$

Из этих двух оценок вытекает соотношение

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1}{|D|r^4} \leq u(r) \leq \frac{1}{2} \ln \frac{2e^2 h}{ar^2}, \quad r > \frac{1}{h}.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(r) = -\infty, \quad \left| \frac{u(r)}{\ln r} \right| = O(1), \quad r \rightarrow \infty,$$

и в силу выпуклости $u(r)$ получим, в частности, $\lim_{r \rightarrow \infty} u'(r) = 0$. Из утверждения 1) леммы теперь вытекает, что функция $u'(r)$ отрицательна, строго возрастает и удовлетворяет неравенствам

$$-\frac{2}{r} \leq u'(r) \leq -\frac{1}{2r}, \quad r > 0. \quad (5)$$

Кроме того, очевидно, $\lim_{r \rightarrow 0} u(r) = +\infty$. Таким образом, функция $\tilde{u}(x)$ определена для $x < 0$, и поскольку при $x < 0$

$$\lim_{r \rightarrow 0+} (xr - u(r)) = \lim_{r \rightarrow \infty} (xr - u(r)) = -\infty,$$

то супремум в определении $\tilde{u}(x)$ достигается в единственной стационарной точке $r = r(x)$, в которой $u'(r) = x$.

Из соотношения (5) получим

$$-\frac{2}{r(x)} \leq x \leq -\frac{1}{2r(x)}, \quad x < 0,$$

или

$$-\frac{1}{x} \leq r(x) \leq -\frac{2}{x}, \quad x < 0. \quad (6)$$

По определению функции $\tilde{u}(x)$ имеем тождество

$$\tilde{u}(x) \equiv xr(x) - u(r(x)), \quad x < 0,$$

или

$$\tilde{u}(u'(r)) \equiv u'(r)r - u(r), \quad r > 0.$$

Продифференцируем дважды последнее тождество:

$$\tilde{u}'(u'(r)) \equiv r, \quad \tilde{u}''(u'(r))u''(r) \equiv 1, \quad r > 0.$$

Отсюда с учетом (6) и утверждения 1) получим

$$\tilde{u}''(x) \equiv \frac{1}{u''(r(x))} \leq 2r^2(x) \leq \frac{8}{x^2}, \quad x < 0,$$

и

$$\tilde{u}''(x) \geq \frac{1}{2}r^2(x) \geq \frac{1}{2x^2}, \quad x < 0.$$

Лемма доказана.

Мы обосновали применимость теоремы В для оценки γ'' по формуле (3). Вычислим функцию $K_0(x)$, входящую в теорему В, для данного случая. Пользуясь формулой (4) и определением функций $\eta(r)$ и $u(r)$, для $t < 0$ получим

$$\begin{aligned} K_0(t, \varphi) &= \int_0^\infty \frac{e^{2tr}r^4}{\eta(r)} dr = \int_0^\infty e^{2tr}r^4 K(re^{i\varphi})e^{-2rh(\varphi)} dr \\ &= \int_0^\infty e^{2tr}r^4 \left(\int_{D_\varphi} e^{2xr} dx dy \right) dr = \int_{D_\varphi} \left(\int_0^\infty e^{2r(x+t)}r^4 dr \right) dx dy. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает представление

$$K_0(t, \varphi) = \frac{3}{4} \int_{D_\varphi} \frac{1}{|x+t|^5} dx dy. \quad (7)$$

Применим теорему В к функции

$$g(r) = \frac{F(re^{i\varphi})e^{3i\varphi}e^{h(\varphi)r}}{r^2 K(re^{i\varphi})}.$$

Тогда величина

$$\|g\|^2 = \int_0^\infty |g(r)|^2 e^{-2u(r)} dr = \int_0^\infty \frac{|F(re^{i\varphi})|^2}{K(re^{i\varphi})} dr = I_\varphi$$

эквивалентна интегралу

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{|\gamma''(e^{-i\varphi}(h(\varphi) - x - iy))|^2}{K_0(x, \varphi)} d\tilde{u}'(x) dy.$$

Из утверждения 2) леммы 1 получим

$$\frac{a}{2} I_\varphi \leq \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{|\gamma''(e^{-i\varphi}(h(\varphi) - x - iy))|^2}{K_0(x, \varphi)x^2} dx dy \leq 8AI_\varphi,$$

где $K_0(x, \varphi)$ определяется формулой (7).

Приведем более детальное описание функции $K_0(t, \varphi)$.

ЛЕММА 2. Для любых $\varphi \in [0, 2\pi]$ и $t < 0$ имеют место соотношения

$$\frac{s(t, \varphi)}{44|t|^5} \leq K_0(t, \varphi) \leq \frac{12}{11} \frac{s(t, \varphi)}{|t|^5},$$

где $s(t, \varphi)$ – площадь пересечения области D_φ с полосой $\{z = x + iy : t < x < 0\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$D_\varphi = \{w = x + iy : f_1(x) < y < f_2(x), -R_\varphi < x < 0\}$$

и $f(x) = f_2(x) - f_1(x)$. Тогда f – неотрицательная вогнутая функция на отрезке $[-R_\varphi, 0]$ и из равенства (7) имеем

$$K_0(t, \varphi) = \frac{3}{4} \int_{-R_\varphi}^0 \frac{f(x) dx}{|x + t|^5}.$$

Если $t \leq -R_\varphi$, то для x из интервала интегрирования имеем $|t| \leq |x + t| \leq 2|t|$, поэтому

$$\frac{3}{128|t|^5} |D_\varphi| \leq K_0(t, \varphi) \leq \frac{3}{4|t|^5} \int_{-R_\varphi}^0 f(x) dx = \frac{3|D_\varphi|}{4|t|^5}$$

и утверждение леммы верно, поскольку в этом случае $s(t, \varphi) = |D_\varphi|$. Пусть $t > -R_\varphi$ и $p = f(t)$. Из вогнутости функции f следуют неравенства

$$\begin{aligned} f(x) &\leq \frac{p}{t} x, & -R_\varphi \leq x \leq t, \\ f(x) &\geq \frac{p}{t} x, & t \leq x \leq 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-R_\varphi}^t \frac{f(x) dx}{|x + t|^5} &\leq \frac{p}{t} \int_{-R_\varphi}^t \frac{x dx}{|x + t|^5} \leq \frac{p}{|t|} \int_{-\infty}^t \frac{|x| dx}{(|x| + |t|)^5} = \frac{5p}{192|t|^4}, \\ \int_t^0 \frac{f(x) dx}{|x + t|^5} &\geq \frac{p}{t} \int_t^0 \frac{x dx}{|x + t|^5} = \frac{11}{192|t|^4}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_{-R_\varphi}^t \frac{f(x) dx}{|x + t|^5} \leq \frac{5}{11} \int_t^0 \frac{f(x) dx}{|x + t|^5}$$

и

$$K_0(t, \varphi) = \frac{3}{4} \int_{-R_\varphi}^0 \frac{f(x) dx}{|x + t|^5} \leq \frac{48}{44} \int_t^0 \frac{f(x) dx}{|x + t|^5} \leq \frac{12}{11|t|^5} s(t, \varphi).$$

Оценка снизу очевидна:

$$K_0(t, \varphi) = \frac{3}{4} \int_{-R_\varphi}^0 \frac{f(x) dx}{|x + t|^5} \geq \frac{3}{4} \int_t^0 \frac{f(x) dx}{|x + t|^5} \geq \frac{1}{44|t|^5} s(t, \varphi).$$

Лемма доказана.

В заключение параграфа сформулируем в виде теоремы доказанные факты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F = B(\gamma)$ – целая функция, удовлетворяющая условию

$$I_\varphi = \int_0^\infty \frac{|F(re^{i\varphi})|^2}{K(re^{i\varphi})} dr < \infty.$$

Тогда

$$\frac{aI_\varphi}{88} \leq \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{|\gamma''(e^{-i\varphi}(h(\varphi) - \xi))|^2 |x|^3}{s(x, \varphi)} dx dy \leq 9AI_\varphi,$$

где $a, A > 0$ – абсолютные постоянные из теоремы В и $s(x, \varphi)$ – площадь пересечения области D_φ с полосой $\{z: \operatorname{Re} z \in (x, 0)\}$.

§ 2. Эквивалентность норм для функции γ

По теореме 1 норма $\|F\|$ целой функции F , определенная в основной теореме, эквивалентна тройному интегралу

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{|\gamma''(e^{-i\varphi}(h(\varphi) - \xi))|^2 |x|^3}{s(x, \varphi)} dx dy d\Delta(\varphi).$$

В этом интеграле сделаем замену переменных

$$\zeta = e^{-i\varphi}(h(\varphi) - x - iy), \quad \theta = \varphi.$$

Опишем геометрический смысл новых и прежних переменных.

Через $l(\varphi)$ далее будем обозначать направленную прямую $\{te^{i\varphi}: -\infty < t < \infty\}$. На границе области D выберем направление движения против часовой стрелки. Тем самым все касательные прямые к границе получают направление. Через $L(\varphi)$ обозначим касательную прямую, параллельную и сонаправленную с прямой $l(\frac{\pi}{2} - \varphi)$. Если $te^{-i\varphi}$ – точка пересечения прямых $L(\varphi)$ и $l(-\varphi)$, то, как нетрудно проверить, $h(\varphi) = t$. Если заданы переменные $\varphi \in [0, 2\pi)$, $x < 0$, y , то ζ – точка плоскости, которая в системе координат, образованной прямыми $l(-\varphi)$ (ось абсцисс) и $l(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ (ось ординат), имеет координаты $(h(\varphi) - x; -y)$. При этом условие $x < 0$ означает, что опорная прямая $L(\varphi)$ отделяет точку ζ от области D .

Определим область изменения переменных θ и ζ . Точка ζ , очевидно, лежит вне области D . При фиксированном $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}$ угол θ должен быть таким, чтобы опорная прямая $L(\theta)$ отделяла точку ζ от области D . Проведем две касательные прямые из точки ζ к границе области D . Пусть они сонаправлены с прямыми $l(\varphi_1)$ и $l(\varphi_2)$, причем $0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2$. Тогда угол θ меняется от $\varphi_-(\zeta) = \frac{\pi}{2} - \varphi_2$ до $\varphi_+(\zeta) = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$. Якобиан перехода от переменных φ, x, y к переменным ζ, θ равен тождественно 1, и $x = h(\theta) - \operatorname{Re} \zeta e^{i\theta}$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^0 \frac{|\gamma''(e^{-i\varphi}(h(\varphi) - \xi))|^2 |x|^3}{s(x, \varphi)} dx dy d\Delta(\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 \left(\int_{\varphi_-(\zeta)}^{\varphi_+(\zeta)} \frac{(\operatorname{Re} \zeta e^{i\theta} - h(\theta))^3}{s(h(\theta) - \operatorname{Re} \zeta e^{i\theta}, \theta)} d\Delta(\theta) \right) dv(\zeta). \end{aligned} \quad (8)$$

Внутренний интеграл, стоящий в правой части равенства, обозначим через $p(\zeta)$.

ТЕОРЕМА 1'. Пусть $F = B(\gamma)$ – целая функция, удовлетворяющая условию

$$\|F\|^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{|F(re^{i\varphi})|^2}{K(re^{i\varphi})} dr d\Delta(\varphi) < \infty,$$

и

$$p(\zeta) = \int_{\varphi_-(\zeta)}^{\varphi_+(\zeta)} \frac{(\operatorname{Re} \zeta e^{i\theta} - h(\theta))^3}{s(h(\theta) - \operatorname{Re} \zeta e^{i\theta}, \theta)} d\Delta(\theta).$$

Тогда

$$\frac{a}{88} \|F\|^2 \leq \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 p(\zeta) dv(\zeta) \leq 9A \|F\|^2.$$

Наша дальнейшая цель – показать, что данный интеграл от $|\gamma''|^2$ эквивалентен норме

$$\|\gamma\|^2 = \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta),$$

где $d(\zeta) = \inf_{z \in D} |\zeta - z|$ – расстояние от ζ до области D .

Докажем две геометрические леммы, введя предварительно необходимые обозначения. Через $s(x, \varphi)$ обозначим площадь части области

$$D_\varphi = \{w = x + iy: f_1(x) < y < f_2(x), -R_\varphi < x < 0\},$$

отсекаемой прямой $\operatorname{Re} w = x$. Область D_φ получается из области D после преобразования $w = ze^{i\varphi} - h(\varphi)$. Тем самым R_φ – расстояние между опорными прямыми $L(\varphi)$ и $L(\varphi + \pi)$. Через $l(x, \varphi)$ обозначим длину части границы D_φ , отсекаемой той же прямой, а через $u(x, \varphi)$ – длину хорды, отсекаемой областью D_φ на этой прямой. Положим

$$\sigma(D) = \inf_{\varphi \in [0, 2\pi]} R_\varphi.$$

Ясно, что $\sigma(D)$ – некоторая характеристика области, причем ее можно оценить снизу следующим образом. Поскольку $R_\varphi R_{\varphi+\pi/2}$ равно площади прямоугольника, содержащего область D_φ , то для любого $\varphi \in [0, 2\pi]$ имеем

$$R_\varphi R_{\varphi+\pi/2} \geq |D|,$$

где $|D|$ – площадь области D . С другой стороны, очевидно, что $R_\varphi \leq \operatorname{diam}(D)$. Поэтому

$$\sigma(D) \geq \frac{|D|}{\operatorname{diam}(D)}. \quad (9)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Через A_1 обозначим какую-нибудь точку касания опорной прямой $L(\varphi)$ к области D , а через A_2 – точку касания опорной прямой $L(\varphi + \pi)$. Параллельно этим двум опорным прямым, ближе к прямой $L(\varphi)$, проведем прямую L и через B, C обозначим точки пересечения прямой L с границей области D . Угол BA_1C обозначим через $\alpha(\varphi, L)$. Тогда для величины

$$\alpha(D) = \inf_{\varphi \in [0, 2\pi], L} \alpha(\varphi, L)$$

выполнена оценка

$$\sin \frac{\alpha(D)}{2} \geq \frac{|D|}{6 \operatorname{diam}^2(D)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При фиксированном φ проведем прямую L' , параллельную прямой L , точно посередине между прямыми $L(\varphi)$ и $L(\varphi + \pi)$. Если B', C' – точки пересечения прямой L' с границей области D , то в силу выпуклости области D имеем $\angle B'A_1C' \leq \alpha(\varphi, L)$. Поскольку все углы α изменяются от 0 до π , то

$$\sin \frac{\alpha(\varphi, L)}{2} \geq \sin \frac{\alpha(\varphi, L')}{2}.$$

Следовательно, в дальнейшем можно рассматривать только прямые L , проходящие точно посередине между прямыми $L(\varphi)$ и $L(\varphi + \pi)$.

Через B_1, C_1 обозначим точки пересечения прямых A_2B, A_2C с прямой $L(\varphi)$. Соответственно, пусть B_2, C_2 – точки пересечения прямых A_1B, A_1C с прямой $L(\varphi + \pi)$. Далее, пусть $S_i, i = 1, 2$, – площадь части D , лежащей в полосе между прямыми $L(\varphi), L$ и $L(\varphi + \pi), L$ соответственно. Тогда S_1 не превосходит площади трапеции CC_2B_2B . Из подобия треугольников $A_2B_2C_2$ и A_2BC и из условия расположения прямой L площадь этой трапеции равна утроенной площади треугольника A_1BC :

$$S_1 \leq 3S_{\triangle A_1BC}.$$

Точно так же получим

$$S_2 \leq 3S_{\triangle A_2BC} = 3S_{\triangle A_1BC}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} |D| &= S_1 + S_2 \leq 6S_{\triangle A_1BC} \\ &= 3|A_1B||A_1C|\sin(\angle BA_1C) \leq 3\text{diam}^2(D)\sin(\angle BA_1C). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\sin \frac{\angle BA_1C}{2} \geq \frac{|D|}{6\text{diam}^2(D)\cos(\angle BA_1C/2)} \geq \frac{|D|}{6\text{diam}^2(D)}.$$

Утверждение доказано.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для всех $x \in (-\frac{\sigma}{2}, 0)$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$ выполнены следующие соотношения:

- 1) $\frac{1}{2}|x|u(x, \varphi) \leq s(x, \varphi) \leq \frac{3}{2}|x|u(x, \varphi);$
- 2) $u(x, \varphi) \leq l(x, \varphi) \leq \frac{24\text{diam}^4(D)}{|D|^2}u(x, \varphi).$

Если $x \leq -\frac{\sigma}{2}$, то

$$s(x, \varphi) \geq \frac{\sigma^2(D)}{4\text{diam}^2(D)}|D|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in (-\frac{\sigma}{2}, 0)$. Через A_2 обозначим точку касания (какую-нибудь) опорной прямой $L(\varphi + \pi)$. Пусть B, C – точки пересечения прямой L , проведенной параллельно опорной прямой $L(\varphi)$ на расстоянии $|x|$ от нее, с границей области D . Через B', C' обозначим точки пересечения с $L(\varphi)$ прямых A_2B, A_2C соответственно. Площадь $s(x, \varphi)$ не превосходит площади трапеции $BB'C'C$, поэтому

$$s(x, \varphi) \leq |x| \frac{|BC| + |B'C'|}{2} \leq \frac{3}{2} |x| |BC| = \frac{3}{2} |x| u(x, \varphi).$$

Левая часть двойного неравенства 1) получается еще проще: если A_1 – точка касания прямой $L(\varphi)$ с D , то

$$s(x, \varphi) \geq S_{\triangle A_1BC} = \frac{1}{2} |x| |BC| = \frac{1}{2} |x| u(x, \varphi).$$

Левая часть двойного неравенства 2) очевидна. Докажем правое неравенство. Используем при этом следующее тривиальное следствие теоремы косинусов: если a, b, c – стороны треугольника и θ – угол между сторонами длины b и c , то

$$a \geq \sin \frac{\theta}{2} (b + c). \quad (**)$$

По неравенству $(**)$ имеем

$$u(x, \varphi) = |BC| \geq \sin \frac{\angle BA_1C}{2} (|A_1B| + |A_1C|).$$

Воспользуемся утверждением 1:

$$u(x, \varphi) \geq \frac{|D|}{6 \operatorname{diam}^2(D)} (|A_1B| + |A_1C|). \quad (10)$$

Для оценки снизу отрезков $|A_1B|$ и $|A_1C|$ мы намерены снова использовать неравенство $(**)$, для чего необходимо оценить синусы $\angle A_2B'C'$ и $\angle A_2C'B'$. Из подобия треугольников A_2BC и $A_2B'C'$ и из условия $|x| \leq \sigma(D)/2 \leq R_\varphi/2$ следует, что $|A_2B'| \leq 2|A_2B|$ и $|A_2C'| \leq 2|A_2C|$, значит, $|A_2B'|, |A_2C'| \leq 2 \operatorname{diam}(D)$. Высота треугольника $A_2B'C'$, опущенная из вершины A_2 , равна R_φ и не меньше, чем $\sigma(D)$. Таким образом, учитывая оценку (9), получим

$$\sin(\angle A_2B'C'), \sin(\angle A_2C'B') \geq \frac{\sigma(D)}{2 \operatorname{diam}(D)} \geq \frac{|D|}{2 \operatorname{diam}^2(D)}.$$

Теперь на основе соотношения $(**)$ имеем

$$\begin{aligned} |A_1B| &\geq \sin \frac{\angle A_2B'C'}{2} (|BB'| + |A_1B'|) \geq \frac{|D|}{4 \operatorname{diam}^2(D)} (|BB'| + |A_1B'|), \\ |A_1C| &\geq \sin \frac{\angle A_2C'B'}{2} (|CC'| + |A_1C'|) \geq \frac{|D|}{4 \operatorname{diam}^2(D)} (|CC'| + |A_1C'|). \end{aligned}$$

В силу выпуклости области имеем $|BB'| + |B'C'| + |CC'| \geq l(x, \varphi)$, следовательно,

$$|A_1B| + |A_1C| \geq \frac{|D|}{4 \operatorname{diam}^2(D)} l(x, \varphi).$$

Теперь можем завершить оценку (10):

$$u(x, \varphi) \geq \frac{|D|^2}{24 \operatorname{diam}^4(D)} l(x, \varphi).$$

Нам осталось доказать последнее неравенство леммы. Если $x \leq -R_\varphi$, то $s(x, \varphi) = |D|$ и неравенство доказано. Предположим, что $x > -R_\varphi$. Через A обозначим точку (какую-нибудь) касания опорной прямой $L(\varphi)$ с областью D . Пусть B, C – точки пересечения прямой L , проведенной параллельно опорной прямой $L(\varphi)$ на расстоянии $|x|$ от нее, с границей области D . Через B', C' обозначим точки пересечения с $L(\varphi + \pi)$ прямых AB, AC соответственно. Площадь $s(x, \varphi)$ не меньше площади треугольника ABC :

$$s(x, \varphi) \geq S_{\triangle ABC}.$$

Обозначим площадь части области D между прямыми $L(\varphi + \pi)$ и L через S . Тогда S не превосходит площади трапеции $BB'C'C$. Пусть $k = |AB|/|AB'|$ – коэффициент подобия треугольников ABC и $AB'C'$. Условие $|x| \geq \sigma/2$ влечет оценку

$$k \geq \frac{\sigma}{2 \operatorname{diam}(D)},$$

из которой следует оценка площади трапеции:

$$S_{BB'C'C} \leq \left(\frac{4 \operatorname{diam}^2(D)}{\sigma^2} - 1 \right) S_{\triangle ABC}.$$

Таким образом,

$$S \leq \left(\frac{4 \operatorname{diam}^2(D)}{\sigma^2} - 1 \right) S_{\triangle ABC} \leq \left(\frac{4 \operatorname{diam}^2(D)}{\sigma^2} - 1 \right) s(x, \varphi)$$

и

$$|D| = S + s(x, \varphi) \leq \frac{4 \operatorname{diam}^2(D)}{\sigma^2} s(x, \varphi).$$

Утверждение доказано.

Напомним, что мы намеревались сравнить функцию

$$p(\zeta) = \int_{\varphi_-(\zeta)}^{\varphi_+(\zeta)} \frac{(\operatorname{Re} \zeta e^{i\theta} - h(\theta))^3}{s(h(\theta) - \operatorname{Re} \zeta e^{i\theta}, \theta)} d\Delta(\theta)$$

с функцией расстояния $d(\zeta)$.

ТЕОРЕМА 2. Для точек ζ таких, что $d(\zeta) \leq \sigma(D)/2$, определим функцию

$$p_0(\zeta) = \int_{\varphi_-(\zeta)}^{\varphi_+(\zeta)} \frac{(\operatorname{Re} \zeta e^{i\theta} - h(\theta))^2}{u(h(\theta) - \operatorname{Re} \zeta e^{i\theta}, \theta)} d\Delta(\theta).$$

Тогда

$$\frac{2}{3} p_0(\zeta) \leq p(\zeta) \leq 2p_0(\zeta).$$

Таким образом, для точек ζ , близких к области D , достаточно оценить функцию $p_0(\zeta)$.

Если же $d(\zeta) > \sigma(D)/2$, то через I_0 обозначим часть интервала $(\varphi_-(\zeta), \varphi_+(\zeta))$, где выполнено условие

$$\operatorname{Re} \zeta e^{i\varphi} - h(\varphi) > \frac{\sigma(D)}{2},$$

и пусть I – оставшаяся часть указанного интервала. Тогда

$$p(\zeta) \leq \frac{4 \operatorname{diam}^2(D) l(D)}{\sigma^2(D) |D|} d^3(\zeta) + \int_I \frac{(\operatorname{Re} \zeta e^{i\theta} - h(\theta))^2}{u(h(\theta) - \operatorname{Re} \zeta e^{i\theta}, \theta)} d\Delta(\theta),$$

где $l(D)$ – длина границы D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что по определению функции $h(\varphi)$ имеем

$$\operatorname{Re} \zeta e^{i\varphi} - h(\varphi) = \min_{z \in \overline{D}} (\operatorname{Re} \zeta e^{i\varphi} - \operatorname{Re} z e^{i\varphi}) \leq \min_{z \in \overline{D}} |\zeta - z| = d(\zeta), \quad (11)$$

поэтому для точек ζ таких, что выполнено условие $d(\zeta) \leq \sigma(D)/2$, при любых $\varphi \in (\varphi_-(\zeta), \varphi_+(\zeta))$ для оценки величины $s(h(\varphi) - \operatorname{Re} \zeta e^{i\varphi}, \varphi)$ можно применить утверждение 2 и немедленно получить оценки из первой части теоремы.

Если же интервал I_0 оказался непустым, то для $\theta \in I_0$ применим последнюю оценку в утверждении 2:

$$s(h(\theta) - \operatorname{Re} \zeta e^{i\theta}, \theta) \geq \frac{\sigma^2(D) |D|}{4 \operatorname{diam}^2(D)}.$$

Отсюда, учитывая соотношение (11) и геометрический смысл функции $\Delta(\theta)$, получим последнюю нижнюю оценку в теореме. Теорема доказана.

Опишем интеграл, фигурирующий в определении функции $p_0(\zeta)$, в геометрических терминах. Интервал интегрирования $(\varphi_-(\zeta), \varphi_+(\zeta))$ состоит из углов φ таких, что $\operatorname{Re} \zeta e^{i\varphi} - h(\varphi) \geq 0$. Другими словами, это те направления φ , для которых опорная прямая $L(\varphi)$ отделяет точку ζ от области D . При этом величина $\operatorname{Re} \zeta e^{i\varphi} - h(\varphi)$ – это расстояние от точки ζ до опорной прямой $L(\varphi)$. Если эту опорную прямую перенесем параллельно на расстояние $\operatorname{Re} \zeta e^{i\varphi} - h(\varphi)$, то на полученной прямой область D отсечет хорду, длину которой мы обозначили через $u(h(\varphi) - \operatorname{Re} \zeta e^{i\varphi}, \varphi)$. Наконец, геометрический смысл функции $\Delta(\varphi)$ заключается в том, что разность $\Delta(\varphi_1) - \Delta(\varphi_2)$ при $\varphi_1 \geq \varphi_2$ равна длине дуги границы D от точки касания опорной прямой $L(\varphi_1)$ до точки касания опорной прямой $L(\varphi_2)$ (см. [3]).

Данное описание не связано с системой координат. Далее мы выберем систему координат, связанную с фиксированной точкой ζ , область D частично опишем как надграфик некоторой выпуклой функции f и попробуем интеграл из определения функции $p_0(\zeta)$ записать с помощью функции f .

За начало координат возьмем точку ζ . На границе D существует единственная точка z_0 такая, что

$$d(\zeta) = \text{dist}(\zeta) = \inf_{z \in \partial D} |z - \zeta| = |z_0 - \zeta|.$$

Ось ординат направим от точки ζ к точке z_0 . В этой системе координат область D является частью надграфика некоторой выпуклой функции $f(x)$, определенной на интервале (X_1, X_2) , где

$$X_1 = h(\pi), \quad X_2 = h(0).$$

Углы рассматриваются, естественно, в новой системе координат. Углы наклона к оси абсцисс двух касательных к области D , проходящих через начало координат, обозначим через φ_1 и φ_2 , причем $\varphi_1 \leq \varphi_2$. Тогда интеграл из определения p_0 вычисляется в пределах от $\varphi_- = \frac{\pi}{2} - \varphi_2$ до $\varphi_+ = \frac{\pi}{2} - \varphi_1$. Расстояние от точки ζ до области D в этой системе координат выражается как $f(0)$ или $-h(\pi/2)$.

Далее предположим, что граница области D не содержит углов и прямолинейных отрезков (см. замечание в конце введения). Для функции f это значит, что производная f' является строго возрастающей непрерывной функцией.

Если переменная θ меняется от φ_- до φ_+ , то величина $\frac{\pi}{2} - \theta$ монотонно меняется от φ_2 до φ_1 , т. е. от угла наклона касательной к графику функции f в точке X_1 до угла наклона касательной в точке X_2 . Следовательно, если определим точку $x(\theta)$ из равенства

$$f'(x(\theta)) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{ctg}(\theta), \quad (12)$$

то точка $x(\theta)$ будет монотонно меняться от X_1 до X_2 , причем точка $(x(\theta); f(x(\theta)))$ является точкой опоры опорной прямой $L(\theta)$. Из указанного выше геометрического смысла функции $\Delta(\theta)$ получим

$$d\Delta(\theta) = d\left(\int^{x(\theta)} \sqrt{1 + (f'(s))^2} ds\right) = \sqrt{1 + (f'(x(\theta)))^2} dx(\theta) = \frac{1}{|\sin \theta|} dx(\theta). \quad (13)$$

Для функции p_0 имеем следующее представление:

$$p_0(\zeta) = \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} \frac{h^2(\theta)}{u(h(\theta), \theta)} \frac{1}{|\sin \theta|} dx(\theta),$$

где величины в интеграле правой части выражены в системе координат, связанной с точкой ζ .

Далее нам необходимо представить выражение $u(h(\theta), \theta)$, используя функцию f . Для этого введем следующие функции. Рассмотрим любую точку $x_0 \in [X_1, X_2]$ и положительное число δ . Положим

$$\begin{aligned} \rho_+(f, x_0, \delta) &= \sup \left\{ \rho: \rho \leq X_2 - x_0, \int_0^\rho (f'(x_0 + y) - f'(x_0)) dy \leq \delta \right\}, \\ \rho_-(f, x_0, \delta) &= \sup \left\{ \rho: \rho \leq x_0 - X_1, \int_0^\rho (f'(x_0) - f'(x_0 - y)) dy \leq \delta \right\}. \end{aligned}$$

Заметим, что если, например, $x_0 + \rho_+ < X_2$, то

$$\int_0^{\rho_+} (f'(x_0 + y) - f'(x_0)) dy = \delta.$$

Вычислив непосредственно интеграл, убеждаемся в том, что $x_0 + \rho_+$ — это точка, в которой значение функции f ровно на δ превосходит значения касательной функции, определенной в точке x_0 . Положим

$$\tilde{\rho}(f, x_0, \delta) = \rho_-(f, x_0, \delta) + \rho_+(f, x_0, \delta).$$

Опорная прямая $L(\theta)$ — это касательная к графику функции $f(x)$ в точке $x(\theta)$, определяемой уравнением (12). Сдвиг опорной прямой $L(\theta)$ на расстояние $-h(\theta)$ в выбранной системе координат означает параллельный перенос соответствующей касательной по вертикали вверх на $-h(\theta)/|\sin \theta|$. Если

$$\begin{aligned} x(\theta) - \rho_- \left(f, x(\theta), -\frac{h(\theta)}{|\sin \theta|} \right) &> X_1, \\ x(\theta) + \rho_+ \left(f, x(\theta), -\frac{h(\theta)}{|\sin \theta|} \right) &< X_2, \end{aligned}$$

то $\tilde{\rho}(f, x(\theta), -h(\theta)/|\sin \theta|)$ есть не что иное, как длина проекции хорды сдвинутой опорной прямой (длину которой мы обозначали через $u(h(\theta), \theta)$) на ось абсцисс. Угол наклона опорной прямой $L(\theta)$ к оси абсцисс равен $\pi/2 - \theta$, поэтому

$$u(h(\theta), \theta) = \frac{\tilde{\rho}(f, x(\theta), -h(\theta)/|\sin \theta|)}{|\sin \theta|}.$$

Допустим теперь, что

$$\begin{aligned} x(\theta) - \rho_- \left(f, x(\theta), -\frac{h(\theta)}{|\sin \theta|} \right) &> X_1, \\ x(\theta) + \rho_+ \left(f, x(\theta), -\frac{h(\theta)}{|\sin \theta|} \right) &= X_2. \end{aligned}$$

Это может случиться, если

$$f(X_2) - (f(x(\theta)) + f'(x(\theta))(X_2 - x(\theta))) \leq -\frac{h(\theta)}{|\sin \theta|}.$$

Пусть точки пересечения сдвинутой опорной прямой $L(\theta)$ с границей области D имеют абсциссы x_1, x_2 , $X_1 < x_1 < x_2 < X_2$. По утверждению 2 имеем

$$u(h(\theta), \theta) \geq \frac{|D|^2}{24 \operatorname{diam}^4(D)} l(h(\theta), \theta),$$

где $l(h(\theta), \theta)$ — длина дуги границы, отсекаемой сдвинутой опорной прямой $L(\theta)$. Эта длина, в свою очередь, больше длины отрезка, соединяющего точки $(x_1; f(x_1))$ и $(X_2; f(X_2))$, и, тем более, больше длины проекции этого отрезка на ось абсцисс.

В данном случае длина проекции по определению и есть $\tilde{\rho}(f, x(\theta), -h(\theta)/|\sin \theta|)$. Таким образом, имеем оценку

$$u(h(\theta), \theta) \geq \frac{|D|^2}{24 \operatorname{diam}^4(D) |\sin \theta|} \tilde{\rho}\left(f, x(\theta), -\frac{h(\theta)}{|\sin \theta|}\right).$$

Здесь мы воспользовались тем, что угол наклона к оси абсцисс отрезка, соединяющего точки $(x_1; f(x_1))$ и $(X_2; f(X_2))$, меньше, чем соответствующий угол для опорной прямой $L(\theta)$. Оценка сверху для величины $u(h(\theta), \theta)$ в этом случае очевидна:

$$u(h(\theta), \theta) \leq \frac{\tilde{\rho}(f, x(\theta), -h(\theta)/|\sin \theta|)}{|\sin \theta|}.$$

Остальные два случая рассматриваются аналогично.

Сформулируем доказанные оценки в виде леммы.

ЛЕММА 3. Если $\theta \in (\varphi_-, \varphi_+)$, то имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \frac{|D|^2}{24 \operatorname{diam}^4(D) |\sin \theta|} \tilde{\rho}\left(f, x(\theta), -\frac{h(\theta)}{|\sin \theta|}\right) \\ \leq u(h(\theta), \theta) \leq \frac{1}{|\sin \theta|} \tilde{\rho}\left(f, x(\theta), -\frac{h(\theta)}{|\sin \theta|}\right). \end{aligned}$$

Условие $\theta \in (\varphi_-, \varphi_+)$ связано с тем, что при доказательстве мы применили утверждение 2.

Для дальнейших оценок потребуются некоторые факты из теории выпуклых функций.

Пусть f – ограниченная выпуклая функция на отрезке $[X_1, X_2]$, и пусть при этом производная $f'(x)$ строго возрастающая и непрерывная. Функция

$$g(t) = \sup_{X_1 \leq x \leq X_2} (xt - f(x)), \quad -\infty < t < \infty,$$

называется сопряженной по Юнгу к функции f . Пусть $T_1 = f'(X_1)$, $T_2 = f'(X_2)$. Если $t \in (T_1, T_2)$, то супремум в определении g достигается в единственной стационарной точке $x = x(t)$, определяемой условием $f'(x) = t$, т. е.

$$g(t) \equiv x(t)t - f(x(t)), \quad t \in (T_1, T_2). \quad (14)$$

Продифференцируем это тождество по t :

$$g'(t) \equiv x(t).$$

Тем самым, имеем

$$\begin{aligned} f'(g'(t)) &\equiv t, & t &\in (T_1, T_2), \\ g'(f'(x)) &\equiv x, & x &\in (X_1, X_2). \end{aligned}$$

Если $t \geq T_2$ или $t \leq T_1$, то стационарная точка в интервале (X_1, X_2) не существует и супремум достигается в граничной точке $x = X_2$ или $x = X_1$. Поэтому

$$\begin{aligned} g(t) &= X_2 t - f(X_2), & t \geq T_2, \\ g(t) &= X_1 t - f(X_1), & t \leq T_1, \end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned} g'(t) &\equiv X_2, & t \geq T_2, \\ g'(t) &\equiv X_1, & t \leq T_1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} f'(g'(t)) &\equiv f'(X_2) = T_2 \leq t, & t \geq T_2, \\ f'(g'(t)) &\equiv f'(X_1) = T_1 \geq t, & t \leq T_1. \end{aligned}$$

В частности, композиция $f'(g'(t))$ определена для всех t .

Для выпуклой функции g на $\mathbb{R}$ и любого положительного числа δ определим величину $\rho = \rho(g, t_0, \delta)$ из условия

$$\rho = \sup \left\{ s > 0: \int_{-s}^s |g'(t_0 + t) - g'(t_0)| dt \leq \delta \right\}.$$

Вычислив интеграл, можно выписать эквивалентное определение:

$$g(t_0 + \rho) + g(t_0 - \rho) - 2g(t_0) = \delta. \quad (15)$$

Следующая лемма связывает величины $\tilde{\rho}(f, x, \delta)$ и $\rho(g, f'(x), \delta)$ для сопряженных по Юнгу функций f, g .

ЛЕММА 4. Пусть f – ограниченная выпуклая функция на отрезке $[X_1, X_2]$ со строго возрастающей непрерывной производной f' . Функция g – сопряженная по Юнгу с функцией f . Тогда для любого $x \in [X_1, X_2]$ выполнены соотношения

$$\delta \leq \tilde{\rho}(f, x, \delta) \rho(g, f'(x), \delta) \leq 3\delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для упрощения записи зафиксируем x, δ и введем обозначения

$$t = f'(x), \quad \tilde{\rho} = \tilde{\rho}(f, x, \delta), \quad \rho_{\pm} = \rho_{\pm}(f, x, \delta), \quad \rho = \rho(g, f'(x), \delta).$$

Докажем левое неравенство.

1. Пусть сначала $x + \rho_+ < X_2$, $x - \rho_- > X_1$.

а) Если при этом $x + \rho_+ \leq g'(t + \rho)$, то $f'(x + \rho_+) \leq f'(g'(t + \rho)) \leq t + \rho$. Поэтому

$$\delta = \int_0^{\rho_+} (f'(x + y) - f'(x)) dy \leq \int_0^{\rho_+} (f'(x + \rho_+) - t) dy \leq \rho \rho_+ \leq \rho \tilde{\rho}.$$

б) Если $x - \rho_- \geq g'(t - \rho)$, то $f'(x - \rho_-) \geq f'(g'(t - \rho)) \geq t - \rho$ и

$$\delta = \int_0^{\rho_-} (f'(x) - f'(x - y)) dy \leq \int_0^{\rho_-} (t - f'(x - \rho_-)) dy \leq \rho \rho_- \leq \rho \tilde{\rho}.$$

с) Если $x + \rho_+ \geq g'(t + \rho)$ и $x - \rho_- \leq g'(t - \rho)$, то

$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^{\rho} (g'(t + \tau) - g'(t)) d\tau + \int_0^{\rho} (g'(t) - g'(t - \tau)) d\tau \\ &\leq \int_0^{\rho} (g'(t + \rho) - g'(t)) d\tau + \int_0^{\rho} (g'(t) - g'(t - \rho)) d\tau \leq \rho_+ \rho + \rho_- \rho = \tilde{\rho} \rho. \end{aligned}$$

2. Допустим, что $x + \rho_+ = X_2$, $x - \rho_- > X_1$. Тогда $x + \rho_+ \geq g'(t + \rho)$. Если при этом $x - \rho_- \geq g'(t - \rho)$, требуемую оценку получим так же, как в п. б). Если $x - \rho_- \leq g'(t - \rho)$, то приходим к п. с).

Случай, когда $x - \rho_- = X_1$, $x + \rho_+ < X_2$, рассматривается аналогично п. 2.

Последний возможный случай, когда $x - \rho_- = X_1$ и $x + \rho_+ = X_2$, включается в п. с).

Нижняя оценка леммы доказана.

Перейдем к верхним оценкам. Предварительно докажем вспомогательное неравенство

$$\int_0^{\rho_+} (f'(x + y) - f'(x)) dy + \int_0^{\rho} (g'(t + \tau) - g'(t)) d\tau \geq \rho \rho_+. \quad (16)$$

Пусть $x + \rho_+ = X_2$ или $x + \rho_+ < X_2$, но при этом $f'(x + \rho_+) \geq t + \rho$. В обоих случаях имеем $x + \rho_+ \geq g'(t + \rho)$, поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho_+} (f'(x + y) - f'(x)) dy &\geq \int_0^{g'(t + \rho) - x} (f'(x + y) - f'(x)) dy \\ &\quad + \int_{g'(t + \rho) - x}^{\rho_+} (f'(g'(t + \rho)) - f'(x)) dy. \end{aligned}$$

В интеграле, стоящем в левой части этого неравенства, произведем замену переменных $\tau = f'(x + y) - t$, $y = g'(\tau + t) - x$:

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho_+} (f'(x + y) - f'(x)) dy &\geq \int_0^{\rho} \tau d(g'(\tau + t) - g'(t)) \\ &\quad + \int_{g'(t + \rho) - x}^{\rho_+} (f'(g'(t + \rho)) - f'(x)) dy. \end{aligned}$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} &\int_0^{\rho_+} (f'(x + y) - f'(x)) dy \\ &\geq \rho(g'(t + \rho) - x) - \int_0^{\rho} (g'(\tau + t) - g'(t)) d\tau + \rho \rho_+ + \rho(x - g'(t + \rho)) \\ &= \rho \rho_+ - \int_0^{\rho} (g'(\tau + t) - g'(t)) d\tau, \end{aligned}$$

и, тем самым, соотношение (16) для этого случая доказано.

Пусть теперь $x + \rho_+ < X_2$ и $f'(x + \rho_+) < t + \rho$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^\rho (g'(\tau + t) - g'(t)) d\tau &\geq \int_0^{f'(x+\rho_+)-t} (g'(\tau + t) - g'(t)) d\tau \\ &\quad + \int_{f'(x+\rho_+)-t}^\rho (g'(f'(x + \rho_+)) - g'(t)) d\tau. \end{aligned}$$

В первом интеграле сделаем замену переменных $y = g'(\tau + t) - g'(t)$, $\tau = f'(y + x) - t$ и применим формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^\rho (g'(\tau + t) - g'(t)) d\tau &\geq \int_0^{\rho_+} y d(f'(x + y) - f'(x)) + \rho_+(\rho - f'(x + \rho_+) + t) \\ &= \rho_+(f'(x + \rho_+) - f'(x)) \\ &\quad - \int_0^{\rho_+} (f'(x + y) - f'(x)) dy + \rho_+\rho - \rho_+(f'(x + \rho_+) - f'(x)) \\ &= \rho_+\rho - \int_0^{\rho_+} (f'(x + y) - f'(x)) dy, \end{aligned}$$

и в этом случае снова доказано соотношение (16).

Аналогичным образом доказывается соотношение

$$\int_0^{\rho_-} (f'(x) - f'(x - y)) dy + \int_0^\rho (g'(t) - g'(t - \tau)) d\tau \geq \rho\rho_-.$$

Суммируя это неравенство с (16) и учитывая определения величин ρ , $\rho_\pm$, $\tilde{\rho}$, получим

$$3\delta \geq \rho\tilde{\rho}.$$

Лемма доказана.

Теорема 2, леммы 3 и 4 с учетом определения (12) точки $x(\theta)$ приводят к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 3. *Для точек ζ таких, что $d(\zeta) \leq \sigma(D)/2$, выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} &\frac{2}{9} \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} |h(\theta) \sin \theta| \rho \left(g, \operatorname{ctg} \theta, \frac{|h(\theta)|}{|\sin \theta|} \right) dg'(\operatorname{ctg} \theta) \\ &\leq p(\zeta) \leq \frac{48 \operatorname{diam}^4(D)}{|D|^2} \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} |h(\theta) \sin \theta| \rho \left(g, \operatorname{ctg} \theta, \frac{|h(\theta)|}{|\sin \theta|} \right) dg'(\operatorname{ctg} \theta). \end{aligned}$$

Если $d(\zeta) > \sigma(D)/2$, то через I_0 обозначим часть интервала (φ_-, φ_+) , где выполнено условие

$$-h(\theta) > \frac{\sigma(D)}{2},$$

и пусть I – оставшаяся часть указанного интервала. Тогда

$$p(\zeta) \leq \frac{4 \operatorname{diam}^2(D) l(D)}{\sigma^2(D) |D|} d^3(\zeta) + \frac{48 \operatorname{diam}^4(D)}{|D|^2} \int_I |h(\theta) \sin \theta| \rho \left(g, \operatorname{ctg} \theta, \frac{|h(\theta)|}{|\sin \theta|} \right) dg'(\operatorname{ctg} \theta),$$

где $l(D)$ – длина границы D .

В интегралах использована система координат, связанная с точкой ζ , причем начало этой системы координат помещено в саму точку ζ , а ось ординат направлена от точки ζ к точке z_0 , определяемой из условия $d(\zeta) = |z_0 - \zeta|$. В этой системе координат область D оказывается частью надграфика некоторой ограниченной выпуклой функции $f(x)$, $x \in [X_1, X_2]$. Если через $\theta_-, \theta_+, -\pi/2 < \theta_- < \theta_+ < \pi/2$, обозначим углы наклона к оси абсцисс касательных к графику функции $f(x)$, проходящих через начало координат, то $\varphi_- = \pi/2 - \theta_+, \varphi_+ = \pi/2 - \theta_-$. Положим $\varphi = \pi/2 - \theta$. Тогда $\varphi \in (\theta_-, \theta_+)$ и нам предстоит оценить функцию

$$p_1(\zeta) = \int_{\theta_-}^{\theta_+} \left| h \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \cos \varphi \right| \rho \left(g, \operatorname{tg} \varphi, \frac{|h(\frac{\pi}{2} - \varphi)|}{\cos \varphi} \right) dg'(\operatorname{tg} \varphi). \quad (17)$$

В этой системе координат расстояние $d(\zeta)$ равно $-h(\frac{\pi}{2})$. Обозначим это расстояние через d . Определим точку $x = x(\varphi) \in [X_1, X_2]$ из условия

$$f'(x(\varphi)) = \operatorname{tg} \varphi. \quad (18)$$

Тогда опорная прямая $L(\varphi)$ к области D есть касательная к функции $f(x)$ в точке $x(\varphi)$, а $-h(\frac{\pi}{2} - \varphi)$ – это расстояние от этой касательной до начала координат. Легко видеть, что при этом число $-h(\frac{\pi}{2} - \varphi) / \cos \varphi$ равно ординате точки пересечения опорной прямой с осью ординат. Уравнение касательной, проведенной в точке $x(\varphi)$, имеет вид

$$y = \operatorname{tg} \varphi (x - x(\varphi)) + f(x(\varphi)),$$

поэтому

$$-\frac{h(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\cos \varphi} = f(x(\varphi)) - \operatorname{tg} \varphi x(\varphi).$$

Учитывая соотношения (14) и (18), получим

$$-\frac{h(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\cos \varphi} = -g(\operatorname{tg} \varphi).$$

Таким образом, когда φ монотонно возрастает от 0 до θ_+ или убывает от 0 до θ_- , значение $-g(\operatorname{tg} \varphi)$ монотонно убывает от d до 0. Положим $\varphi_0 = 0$ и определим углы φ_n из условий

$$-\frac{h(\frac{\pi}{2} - \varphi_n)}{\cos \varphi_n} = \frac{d}{2^{|n|}},$$

или, что то же самое, из равенств $-g(\operatorname{tg} \varphi_n) = 2^{-|n|}d$.

Интервал интегрирования разбивается на интервалы $(\varphi_n, \varphi_{n+1}]$, $n \in \mathbb{Z}$, и сам интеграл в (17) может быть представлен в виде суммы интегралов по этим интервалам. Заметим, что $\rho(g, t, \delta)$ – неубывающая величина по переменной δ , поэтому при $\varphi \in (\varphi_n, \varphi_{n+1}]$ имеем

$$\begin{aligned} \rho(g, \operatorname{tg} \varphi, 2^{-n-1}d) &\leq \rho\left(g, \operatorname{tg} \varphi, -\frac{h(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\cos \varphi}\right) \leq \rho(g, \operatorname{tg} \varphi, 2^{-n}d), \quad n \geq 0, \\ \rho(g, \operatorname{tg} \varphi, 2^{-|n|}d) &\leq \rho\left(g, \operatorname{tg} \varphi, -\frac{h(\frac{\pi}{2} - \varphi)}{\cos \varphi}\right) \leq \rho(g, \operatorname{tg} \varphi, 2^{-|n|+1}d), \quad n < 0. \end{aligned}$$

Таким образом, после замены переменных $t = \operatorname{tg} \varphi$ получаем

$$\begin{aligned} p_1(\zeta) &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{2^n} \int_{\operatorname{tg} \varphi_n}^{\operatorname{tg} \varphi_{n+1}} \rho\left(g, t, \frac{d}{2^n}\right) dg'(t) \\ &\quad + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{d}{2^{|n|-1}} \int_{\operatorname{tg} \varphi_n}^{\operatorname{tg} \varphi_{n+1}} \rho\left(g, t, \frac{d}{2^{|n|-1}}\right) dg'(t), \end{aligned} \quad (19')$$

$$p_1(\zeta) \geq \frac{d}{2} \int_{\operatorname{tg} \varphi_{-1}}^{\operatorname{tg} \varphi_1} \frac{1}{1+t^2} \rho\left(g, t, \frac{d}{2}\right) dg'(t). \quad (19'')$$

Получим верхние оценки для $p_1(\zeta)$. Положим

$$t_n = \frac{\operatorname{tg} \varphi_n + \operatorname{tg} \varphi_{n+1}}{2}.$$

Тогда при $n \geq 0$, очевидно, $g(t_n) \geq g(\operatorname{tg} \varphi_n) = -d/2^n$, а при $n < 0$ имеем $g(t_n) \geq g(\operatorname{tg} \varphi_{n+1}) = -d/2^{|n|-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} g(\operatorname{tg} \varphi_n) + g(\operatorname{tg} \varphi_{n+1}) - 2g(t_n) &\leq -\frac{d}{2^{n+1}} - \frac{d}{2^n} + \frac{2d}{2^n} = \frac{d}{2^{n+1}} < \frac{d}{2^n}, \quad n \geq 0, \\ g(\operatorname{tg} \varphi_n) + g(\operatorname{tg} \varphi_{n+1}) - 2g(t_n) &\leq \frac{d}{2^{|n|}} < \frac{d}{2^{|n|-1}}, \quad n \leq 0. \end{aligned}$$

Сравнив эти оценки с определением (15) величины $\rho(g, t, \delta)$, получим

$$\operatorname{tg} \varphi_{n+1} - t_n = t_n - \operatorname{tg} \varphi_n < \begin{cases} \rho\left(g, t_n, \frac{d}{2^n}\right), & n \geq 0, \\ \rho\left(g, t_n, \frac{d}{2^{|n|-1}}\right), & n < 0. \end{cases}$$

Введем обозначения

$$\rho_n = \begin{cases} \rho\left(g, t_n, \frac{d}{2^n}\right), & n \geq 0, \\ \rho\left(g, t_n, \frac{d}{2^{|n|-1}}\right), & n < 0. \end{cases}$$

Теперь из соотношения (19') получаем оценку

$$\begin{aligned} p_1(\zeta) &\leq \sum_0^{\infty} \frac{d}{2^n} \int_{t_n - \rho_n}^{t_n + \rho_n} \rho\left(g, t, \frac{d}{2^n}\right) dg'(t) \\ &\quad + \sum_{-1}^{-\infty} \frac{d}{2^{|n|-1}} \int_{t_n - \rho_n}^{t_n + \rho_n} \rho\left(g, t, \frac{d}{2^{|n|-1}}\right) dg'(t). \end{aligned}$$

Для продолжения доказательства теоремы сформулируем и докажем одну общую лемму.

ЛЕММА 5. Пусть g – выпуклая функция на $\mathbb{R}$ и $\delta > 0$. Для сокращения обозначений положим $\rho(t) = \rho(g, t, \delta)$. Имеют место утверждения:

1) для всех $t, \tau \in \mathbb{R}$

$$|\rho(t) - \rho(\tau)| \leq |t - \tau|;$$

2) для любого τ выполнено

$$\rho(t) \leq \begin{cases} \tau + \rho(\tau) + \rho(\tau + \rho(\tau)) - t, & \text{если } \tau \leq t \leq \tau + \rho(\tau), \\ t - \tau + \rho(\tau) + \rho(\tau - \rho(\tau)), & \text{если } \tau - \rho(\tau) \leq t \leq \tau; \end{cases}$$

3) для любого t выполнено

$$\delta \leq \int_{\tau - \rho(\tau)}^{\tau + \rho(\tau)} \rho(t) dg'(t) \leq 4\delta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $t \in [\tau, \tau + \rho(\tau)]$. Тогда для любого y имеем $t + y \geq \tau + (y - t + \tau)$ и в силу монотонности функции g' получим

$$\begin{aligned} & \int_0^{t + \rho(\tau) - \tau} (g'(t + y) - g'(t - y)) dy \\ & \geq \int_{t - \tau}^{t + \rho(\tau) - \tau} (g'(\tau + (y - t + \tau)) - g'(\tau - (y - t + \tau))) dy. \end{aligned}$$

После замены переменных $x = y - t + \tau$ в последнем интеграле получим

$$\int_0^{t + \rho(\tau) - \tau} (g'(t + y) - g'(t - y)) dy \geq \int_0^{\rho(\tau)} (g'(\tau + x) - g'(\tau - x)) dx = \delta.$$

Следовательно, $t + \rho(\tau) - \tau \geq \rho(t)$ или

$$\rho(t) - \rho(\tau) \leq |t - \tau|. \quad (20)$$

Аналогично, при $t \geq \tau$ для любого y имеем $t - y \geq \tau - (t + y - \tau)$, т.е. $-g'(t - y) \leq -g'(\tau - (t + y - \tau))$. Поэтому из неравенства

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau + \rho(\tau) - t} (g'(t + y) - g'(t - y)) dy \\ & \leq \int_0^{\tau + \rho(\tau) - t} (g'(\tau + (y + t - \tau)) - g'(\tau - (y + t - \tau))) dy \end{aligned}$$

заменой переменных $x = t + y - \tau$ получим оценку

$$\int_0^{\tau + \rho(\tau) - t} (g'(t + y) - g'(t - y)) dy \leq \int_{t - \tau}^{\rho(\tau)} (g'(t + x) - g'(t - x)) dx \leq \delta$$

и, следовательно, $\tau + \rho(\tau) - t \leq \rho(t)$, т.е.

$$\rho(\tau) - \rho(t) \leq |t - \tau|.$$

Вместе с неравенством (20) это значит, что выполнено соотношение

$$|\rho(\tau) - \rho(t)| \leq |t - \tau|, \quad \text{если } \tau \leq t \leq \tau + \rho(\tau).$$

В силу симметричности величины ρ это соотношение точно так же может быть доказано для случая, когда $\tau \geq t \geq \tau - \rho(\tau)$. Наконец, в силу локальности свойства липшицевости оно выполняется для всех $\tau, t \in \mathbb{R}$.

2) Для краткости используем обозначения $a = \tau - \rho(\tau)$, $b = \tau + \rho(\tau)$. Пусть $\tau \leq t \leq b$. Тогда $t - x \leq b - (t + x - b)$ и

$$\int_0^{b+\rho(b)-t} (g'(t+x) - g'(t-x)) dx \geq \int_{b-t}^{b-t+\rho(b)} (g'(b+(t+x-b)) - g'(b-(t+x-b))) dx.$$

Замена переменных $y = t + x - b$ приводит к оценке

$$\int_0^{b+\rho(b)-t} (g'(t+x) - g'(t-x)) dx \geq \int_0^{\rho(b)} (g'(b+y) - g'(b-y)) dy = \delta,$$

из которой следует требуемое неравенство $b + \rho(b) - t \geq \rho(t)$. Случай, когда $t \in [a, \tau]$, рассматривается аналогично.

3) Докажем сначала нижнюю оценку. Из утверждения п. 1) следуют неравенства

$$\rho(t) \geq \begin{cases} b - t, & \text{если } \tau \leq t, \\ t - a, & \text{если } t \leq \tau. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_a^b \rho(t) dg'(t) \geq \int_a^\tau (t - a) d(g'(t) - g'(\tau)) + \int_\tau^b (b - t) d(g'(t) - g'(\tau)).$$

Применим к последним интегралам формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(t) dg'(t) &\geq \int_a^\tau (g'(\tau) - g'(t)) dt + \int_\tau^b (g'(t) - g'(\tau)) dt \\ &= \int_{\tau-\rho(\tau)}^{\tau+\rho(\tau)} |g'(\tau) - g'(t)| dt = \delta. \end{aligned}$$

Нижняя оценка доказана.

Докажем верхнюю оценку. Из утверждения п. 2) следует

$$\int_a^b \rho(t) dg'(t) \leq \int_a^\tau (t - a + \rho(a)) d(g'(t) - g'(\tau)) + \int_\tau^b (b + \rho(b) - t) d(g'(t) - g'(\tau)).$$

Применяя формулу интегрирования по частям к последним интегралам, получим

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho(t) dg'(t) &\leq \rho(a)(g'(\tau) - g'(a)) + \rho(b)(g'(b) - g'(\tau)) + \int_a^b |g'(t) - g'(\tau)| dt \\ &= \rho(a)(g'(\tau) - g'(a)) + \rho(b)(g'(b) - g'(\tau)) + \delta. \end{aligned} \quad (21)$$

Оценим первое слагаемое в правой части. Если $\tau \geq a + \rho(a)$, то

$$\begin{aligned} \rho(a)(g'(\tau) - g'(a)) &= \int_a^{a+\rho(a)} (g'(\tau) - g'(x)) dx + \int_a^{a+\rho(a)} (g'(x) - g'(a)) dx \\ &\leq \int_a^\tau (g'(\tau) - g'(x)) dx + \delta. \end{aligned}$$

Если же $\tau \leq a + \rho(a)$, то

$$\begin{aligned} \rho(a)(g'(\tau) - g'(a)) &= \int_a^{a+\rho(a)} (g'(\tau) - g'(a)) dx \\ &= \int_a^\tau (g'(\tau) - g'(x)) dx + \int_a^\tau (g'(x) - g'(a)) dx + \int_\tau^{a+\rho(a)} (g'(\tau) - g'(a)) dx \\ &\leq \int_a^{a+\rho(a)} (g'(x) - g'(a)) dx + \int_a^\tau (g'(\tau) - g'(x)) dx \\ &\leq \delta + \int_a^\tau (g'(\tau) - g'(x)) dx. \end{aligned}$$

Таким образом, в любом случае имеем оценку

$$\rho(a)(g'(\tau) - g'(a)) \leq \delta + \int_a^\tau (g'(\tau) - g'(x)) dx.$$

Аналогично получается оценка

$$\rho(b)(g'(b) - g'(\tau)) \leq \delta + \int_\tau^b (g'(x) - g'(\tau)) dx.$$

Подставив последние два неравенства в оценку (21), получим требуемое соотношение. Лемма доказана.

Продолжим оценку (19') величины $p_1(\zeta)$. В силу п. 3) леммы 5 получим

$$p_1(\zeta) \leq \sum_0^\infty \frac{d}{2^n} \frac{4d}{2^n} + \sum_{-1}^{-\infty} \frac{d}{2^{|n|-1}} \frac{4d}{2^{|n|-1}} = \frac{32}{3} d^2 < 11d^2.$$

Пусть $I' = \{\frac{\pi}{2} - \theta, \theta \in I\}$, где интервал $I \subset (\varphi_-, \varphi_+)$ определен в теореме 3. Тогда $I' \subset (\theta_-, \theta_+)$ и

$$\begin{aligned} &\int_I |h(\theta) \sin \theta| \rho\left(g, \operatorname{ctg} \theta, \frac{|h(\theta)|}{|\sin \theta|}\right) dg'(\operatorname{ctg} \theta) \\ &= \int_{I'} \left| h\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos \varphi \right| \rho\left(g, \operatorname{tg} \varphi, \frac{|h(\frac{\pi}{2} - \varphi)|}{|\cos \varphi|}\right) dg'(\operatorname{tg} \varphi) \\ &\leq \int_{\theta_-}^{\theta_+} \left| h\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \cos \varphi \right| \rho\left(g, \operatorname{tg} \varphi, \frac{|h(\frac{\pi}{2} - \varphi)|}{|\cos \varphi|}\right) dg'(\operatorname{tg} \varphi) \leq 11d^2. \end{aligned}$$

Подставив последние две оценки в соотношения теоремы 3, получим верхние оценки для функции $p(\zeta)$:

$$p(\zeta) \leq \begin{cases} \frac{528 \operatorname{diam}^4(D)}{|D|^2} d^2(\zeta), & \text{если } \operatorname{dist}(\zeta) \leq \frac{\sigma(D)}{2}, \\ \frac{4 \operatorname{diam}^2(D) l(D)}{\sigma^2(D) |D|} d^3(\zeta) + \frac{528 \operatorname{diam}^4(D)}{|D|^2} d^2(\zeta), & \text{если } \operatorname{dist}(\zeta) > \frac{\sigma(D)}{2}. \end{cases} \quad (22)$$

Далее на основе соотношения (19'') получим нижние оценки функции $p_1(\zeta)$ и, соответственно, функции $p(\zeta)$. Сначала докажем еще одно геометрическое утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Если $d(\zeta) \leq \sigma(D)/2$, то имеет место неравенство

$$\min(-\operatorname{tg} \varphi_{-1}, \operatorname{tg} \varphi_1) \leq \frac{5 \operatorname{diam}(D)}{2\sigma(D)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вернемся к системе координат, связанной с точкой ζ . Проведем опорные прямые $L(\frac{\pi}{2} - \varphi_1)$ и $L(\frac{\pi}{2} - \varphi_{-1})$. По определению эти опорные прямые образуют с осью абсцисс углы, равные соответственно φ_1 и φ_{-1} , причем $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi_{-1} < 0 < \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}$. Кроме того, $g(\operatorname{tg} \varphi_{\pm 1}) = \frac{d}{2}$. В частности, прямые $L(\frac{\pi}{2} - \varphi_1)$ и $L(\frac{\pi}{2} - \varphi_{-1})$ пересекают ось ординат в одной и той же точке $(0; \frac{d}{2})$. Обозначим эту точку через A . Проведем опорную прямую $L(-\frac{\pi}{2})$. Это – горизонтальная касательная к области D , направленная влево. Пересечение опорных прямых $L(\frac{\pi}{2} - \varphi_{-1})$ и $L(-\frac{\pi}{2})$ обозначим через B , пересечение прямых $L(\frac{\pi}{2} - \varphi_1)$ и $L(-\frac{\pi}{2})$ – через C , пересечение прямой BC с осью ординат обозначим через D и, наконец, точку опоры прямой $L(\frac{\pi}{2})$ (она лежит на оси ординат) обозначим через O . Тогда имеем очевидные неравенства

$$\begin{aligned} |BC| &= |BD| + |DC| \geq \sigma(D), \\ |AD| &= |AO| + |OD| = \frac{d}{2} + R_{-\frac{\pi}{2}} \leq \frac{\sigma(D)}{4} + \operatorname{diam}(D) \leq \frac{5}{4} \operatorname{diam}(D). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) = \frac{|DC|}{|AD|} \geq \frac{4|DC|}{5 \operatorname{diam}(D)}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_{-1}\right) = \frac{|DB|}{|AD|} \geq \frac{4|DB|}{5 \operatorname{diam}(D)}.$$

Суммируя эти оценки, получим

$$\begin{aligned} &2 \max\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right), \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_{-1}\right)\right) \\ &\geq \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_{-1}\right) \geq \frac{4|BC|}{5 \operatorname{diam}(D)} \geq \frac{4\sigma(D)}{5 \operatorname{diam}(D)}. \end{aligned}$$

Отсюда следует требуемое неравенство. Утверждение доказано.

Далее, не уменьшая общности, будем считать, что

$$\min(-\operatorname{tg} \varphi_{-1}, \operatorname{tg} \varphi_1) = \operatorname{tg} \varphi_1.$$

Для сокращения записи введем обозначение $\rho = \rho(g, 0, \frac{d}{2})$. По определению величины $\rho(g, 0, \frac{d}{2})$ имеем

$$g(\rho) + g(-\rho) - 2g(0) = \frac{d}{2}.$$

С другой стороны,

$$g(0) = \max_{X_1 \leq x \leq X_2} (-f(x)) = - \min_{X_1 \leq x \leq X_2} f(x) = -f(0) = -d.$$

Поэтому должно выполняться равенство

$$g(\rho) + g(-\rho) = -\frac{3}{2}d.$$

По определению углов $\varphi_{\pm 1}$ имеем

$$g(\operatorname{tg} \varphi_1) + g(-\operatorname{tg} \varphi_1) = -\frac{d}{2} + g(-\operatorname{tg} \varphi_1) \geq -\frac{d}{2} + g(0) = -\frac{3}{2}d.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \geq \rho = \rho\left(g, 0, \frac{d}{2}\right).$$

Отсюда и из неравенства (19'') получим

$$p_1(\zeta) \geq \frac{d}{2} \int_{-\operatorname{tg} \varphi_1}^{\operatorname{tg} \varphi_1} \frac{1}{1+t^2} \rho\left(g, t, \frac{d}{2}\right) dg'(t) \geq \frac{d}{2(1+\operatorname{tg}^2 \varphi_1)} \int_{-\rho}^{\rho} \rho\left(g, t, \frac{d}{2}\right) dg'(t).$$

Теперь можно воспользоваться утверждением 2 для оценки сверху $\operatorname{tg} \varphi_1$ и леммой 5 для оценки снизу интеграла:

$$p_1(\zeta) \geq \frac{d}{2} \frac{4\sigma^2(D)}{25 \operatorname{diam}^2(D)} \frac{d}{2} = \frac{\sigma^2(D)}{25 \operatorname{diam}^2(D)} d^2.$$

Эта оценка вместе с соотношением (23) позволяет вывести из теоремы 3 следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4. *Для точек ζ таких, что $d(\zeta) \leq \sigma(D)/2$, выполнены неравенства*

$$\frac{\sigma^2(D)}{113 \operatorname{diam}^2(D)} d^2(\zeta) \leq p(\zeta) \leq \frac{528 \operatorname{diam}^4(D)}{|D|^2} d^2(\zeta).$$

Для точек ζ таких, что $d(\zeta) \geq \sigma(D)/2$, имеет место оценка сверху

$$p(\zeta) \leq \frac{4 \operatorname{diam}^2(D) l(D)}{\sigma^2(D) |D|} d^3(\zeta) + \frac{528 \operatorname{diam}^4(D)}{|D|^2} d^2(\zeta).$$

Здесь $\sigma(D)$ – наименьшая ширина области D по направлениям, $d(\zeta)$ – расстояние от точки ζ до области D , $|D|$ – площадь D , $l(D)$ – длина границы D и, наконец, $\operatorname{diam}(D)$ – диаметр D .

В теореме 1' мы доказали эквивалентность нормы целой функции F и интегральной нормы для ассоциированной по Борелю функции γ с весовой функцией $p(\zeta)$. Все дальнейшее исследование привело к теореме 4. Оценки снизу

функции $p(\zeta)$ через $\text{dist}^2(\zeta)$ получены только в окрестности области D , а оценки сверху – со слагаемым $\text{dist}^3(\zeta)$. Следующая теорема позволяет локализовать интегралы по $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ на интегралы по множеству $\Omega \setminus \overline{D}$, где Ω – произвольная окрестность области $\overline{D}$.

Через $B(z, r)$ обозначим круг с центром в точке z радиуса r ; если $z = 0$, то эту точку не будем указывать.

Пусть

$$R(D) = \inf\{R > 0: D \subset \overline{B(R)}\}.$$

ТЕОРЕМА 5. Для любого $\varepsilon > 0$ через D_ε обозначим область

$$D_\varepsilon = \{\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}: \text{dist}(\zeta, D) < \varepsilon\} \cup D.$$

Тогда если $\gamma \in H_0(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$, $\varepsilon \in (0, 3R(D))$ и

$$\int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) < \infty,$$

то

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) \\ & \leq 13 \left(\frac{16^3(l(D) + \pi\varepsilon)^2 R^2(D)}{\pi^2 \varepsilon^4} + 1 \right) \int_{D_\varepsilon \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^3(\zeta) dv(\zeta) \\ & \leq 96R(D) \left(\frac{5 \cdot 16^3(l(D) + \pi\varepsilon)^2 R^3(D)}{\pi^2 \varepsilon^4} + 1 \right) \int_{D_\varepsilon \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство проведем в два этапа: на первом этапе (лемма 6) интеграл от $|\gamma''(\zeta)|$ по внешности круга $\overline{B(4R(D))}$ оценим сверху интегралом по множеству $B(4R(D)) \setminus \overline{D}$. Затем (лемма 7) интеграл по $B(4R(D)) \setminus \overline{D}$ оценим сверху интегралом по $D_\varepsilon \setminus \overline{D}$.

Далее число $R(D)$ будем обозначать через R .

ЛЕММА 6. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} & \int_{|\zeta| \geq 4R} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) \leq 12 \int_{B(4R) \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta), \\ & \int_{|\zeta| \geq 4R} |\gamma''(\zeta)|^2 d^3(\zeta) dv(\zeta) \leq 96R \int_{B(4R) \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим функцию $\gamma(\zeta)$ в виде ряда Лорана:

$$\gamma(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\zeta^{k+1}}, \quad |\zeta| > R.$$

По условиям леммы этот ряд, как и ряд

$$\gamma''(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+2)(k+1)\gamma_k}{\zeta^{k+3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\gamma_k''}{\zeta^{k+3}}, \quad |\zeta| > R,$$

сходится равномерно на множестве $\mathbb{C} \setminus B(2R)$. Для ζ , $|\zeta| \geq 4R$, имеем $d(\zeta) \leq |\zeta| + R \leq \frac{5}{4}|\zeta|$, поэтому

$$\int_{|\zeta| \geq 4R} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) \leq 2 \int_{|\zeta| \geq 4R} |\gamma''(\zeta)|^2 |\zeta|^2 dv(\zeta).$$

Переходя в последнем интеграле к полярным координатам и учитывая ортогональность системы $e^{ik\varphi}$ относительно меры $d\varphi$ по $[0, 2\pi]$, получим

$$\int_{|\zeta| \geq 4R} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) \leq 4\pi \int_{4R}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\gamma_k''|^2 r^3 dr}{r^{2(k+3)}} = 4\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\gamma_k''|^2}{2(k+1)(4R)^{2k+2}}. \quad (23)$$

Аналогично получается оценка

$$\int_{|\zeta| \geq 4R} |\gamma''(\zeta)|^2 d^3(\zeta) dv(\zeta) \leq 4\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\gamma_k''|^2}{(2k+1)(4R)^{2k+1}}.$$

Поскольку при $k \geq 0$, очевидно, $\frac{2k+2}{2k+1} \leq 2$, то

$$\int_{|\zeta| \geq 4R} |\gamma''(\zeta)|^2 d^3(\zeta) dv(\zeta) \leq 32\pi R \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\gamma_k''|^2}{2(k+1)(4R)^{2k+2}}. \quad (24)$$

Снова с помощью ряда Лорана оценим снизу интеграл по кольцу $B(4R) \setminus B(2R)$. При этом учтем, что для ζ , $|\zeta| \in [2R, 4R]$, выполнена оценка $d(\zeta) \geq R \geq |\zeta|/4$:

$$\begin{aligned} \int_{2R \leq |\zeta| < 4R} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) &\geq \frac{1}{16} \int_{2R \leq |\zeta| < 4R} |\gamma''(\zeta)|^2 |\zeta|^2 dv(\zeta) \\ &= \frac{\pi}{8} \sum_{k=0}^{\infty} |\gamma_k''|^2 \int_{2R}^{4R} \frac{dr}{r^{2k+3}} = \frac{\pi}{8} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\gamma_k''|^2}{2(k+1)(4R)^{2k+2}} (2^{2k+2} - 1) \\ &\geq \frac{\pi}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\gamma_k''|^2}{2(k+1)(4R)^{2k+2}}. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (23) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \int_{|\zeta| \geq 4R} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) &\leq 12 \int_{2R \leq |\zeta| < 4R} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) \\ &\leq 12 \int_{B(4R) \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta), \end{aligned}$$

а из неравенства (24) получим

$$\begin{aligned} \int_{|\zeta| \geq 4R} |\gamma''(\zeta)|^2 d^3(\zeta) dv(\zeta) &\leq 96R \int_{2R \leq |\zeta| < 4R} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) \\ &\leq 96R \int_{B(4R) \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 7. В условиях теоремы 5 имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \int_{B(4R) \setminus \overline{D}_\varepsilon} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) &\leq \frac{16^3(l(D) + \pi\varepsilon)^2 R^2}{\pi^2 \varepsilon^4} \int_{D_\varepsilon \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta), \\ \int_{B(4R) \setminus \overline{D}_\varepsilon} |\gamma''(\zeta)|^2 d^3(\zeta) dv(\zeta) &\leq \frac{5 \cdot 16^3(l(D) + \pi\varepsilon)^2 R^3}{\pi^2 \varepsilon^4} \int_{D_\varepsilon \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко заметить, что если $A + B = \{z + w : z \in A, w \in B\}$ для двух множеств A, B , то $D_\varepsilon = D + B(\varepsilon)$ и $D_{\varepsilon_1} + D_{\varepsilon_2} = D_{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$.

Кроме того,

$$l(D_\varepsilon) = l(D) + 2\pi\varepsilon. \quad (25)$$

Если $\zeta \notin \overline{D}_\varepsilon$, при этом $\text{dist}(\zeta, D_\varepsilon) = |\zeta - z|$, где $z \in \partial D_\varepsilon$, и $\text{dist}(z, D) = |z - z_0|$, где $z_0 \in \partial D$, то

$$\text{dist}(\zeta, D) \leq |\zeta - z_0| \leq |\zeta - z| + |z - z_0| \leq \text{dist}(\zeta, D_\varepsilon) + \varepsilon.$$

Пусть $\zeta \notin \overline{D}_\varepsilon$. По формуле Коши имеем оценку сверху:

$$\begin{aligned} |\gamma''(\zeta)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\partial D_{\varepsilon/2}} \frac{\gamma''(z) dz}{z - \zeta} \right| \leq \frac{l(D_{\varepsilon/2})}{2\pi \text{dist}(\zeta, D_{\varepsilon/2})} \max_{z \in \partial D_{\varepsilon/2}} |\gamma''(z)| \\ &\leq \frac{l(D) + \pi\varepsilon}{2\pi(\text{dist}(\zeta, D) - \varepsilon/2)} \max_{z \in \partial D_{\varepsilon/2}} |\gamma''(z)|. \end{aligned}$$

Очевидно, что для $\zeta \notin \overline{D}_\varepsilon$ имеем $\text{dist}(\zeta, D) \geq \varepsilon$ и при $x \geq \varepsilon$

$$\frac{x}{x - \varepsilon/2} \leq 2.$$

Поэтому

$$|\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) \leq \frac{(l(D) + \pi\varepsilon)^2}{\pi^2} \max_{z \in \partial D_{\varepsilon/2}} |\gamma''(z)|^2, \quad \zeta \notin \overline{D}_\varepsilon. \quad (26)$$

Если $z \in \partial D_{\varepsilon/2}$, то круг $z + B(\varepsilon/4)$ лежит в области $D_{3\varepsilon/4} \setminus \overline{D}$. Пользуясь субгармоничностью функции $|\gamma''(z)|^2$, получим оценку сверху:

$$\begin{aligned} |\gamma''(z)|^2 &\leq \frac{16}{\pi\varepsilon^2} \int_{z+B(\varepsilon/4)} |\gamma''(w)|^2 dv(w) \\ &\leq \frac{16}{\pi\varepsilon^2} \left(\sup_{w \in z+B(\varepsilon/4)} d^{-2}(w) \right) \int_{z+B(\varepsilon/4)} |\gamma''(w)|^2 d^2(w) dv(w) \\ &\leq \frac{256}{\pi\varepsilon^4} \int_{D_\varepsilon \setminus \overline{D}} |\gamma''(w)|^2 d^2(w) dv(w). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\max_{z \in \partial D_{\varepsilon/2}} |\gamma''(z)|^2 \leq \frac{256}{\pi\varepsilon^4} \int_{D_\varepsilon \setminus \overline{D}} |\gamma''(w)|^2 d^2(w) dv(w).$$

Подставив эту оценку в (26) и интегрируя по $B(4R) \setminus \overline{D}_\varepsilon$, получим первое неравенство леммы. Второе неравенство леммы следует из первого, если заметить, что для $\zeta \in B(4R) \setminus \overline{D}$ имеем $d(\zeta) \leq 5R$, поэтому

$$\int_{B(4R) \setminus \overline{D}_\varepsilon} |\gamma''(\zeta)|^2 d^3(\zeta) dv(\zeta) \leq 5R \int_{B(4R) \setminus \overline{D}_\varepsilon} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta).$$

Лемма доказана.

Теперь на основе лемм 6 и 7 закончим доказательство теоремы 5.

Введем множества $G_1 = \mathbb{C} \setminus B(4R)$, $G_2 = B(4R) \setminus D_\varepsilon$, $G_3 = D_\varepsilon \setminus \overline{D}$. Заметим, что в силу условия $\varepsilon < 3R$ область D_ε лежит в круге $B(4R)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) &= \int_{G_1} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) + \int_{G_2} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) \\ &\quad + \int_{G_3} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta). \end{aligned}$$

По лемме 6 оценим первый интеграл справа. Получим

$$\int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) \leq 13 \int_{G_2} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) + 13 \int_{G_3} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta).$$

Далее, на основе первого неравенства леммы 7 оценим интеграл по G_2 :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) &\leq 13 \left(\frac{16^3(l(D) + \pi\varepsilon)^2 R^2}{\pi^2 \varepsilon^4} + 1 \right) \int_{D_\varepsilon} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta). \end{aligned}$$

Точно так же получим второе неравенство теоремы 5.

Теперь на основе теорем 1', 4, 5 мы можем доказать подготовительную теорему.

Итак, пусть F – целая функция, удовлетворяющая условию

$$\|F\|^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{|F(re^{i\varphi})|^2}{K(re^{i\varphi})} dr d\Delta(\varphi) < \infty,$$

а γ – функция, ассоциированная по Борелю с F . По теореме 1' имеем

$$\|F\|^2 \geq \frac{1}{9A} \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 p(\zeta) dv(\zeta), \quad (27')$$

$$\|F\|^2 \leq \frac{88}{a} \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 p(\zeta) dv(\zeta). \quad (27'')$$

Для сокращения записи введем обозначение $\varepsilon = \sigma(D)/2$. По теореме 4 на множестве $D_\varepsilon \setminus \overline{D}$ имеем оценку снизу для функции $p(\zeta)$:

$$p(\zeta) \geq \frac{\sigma^2(D)}{113 \operatorname{diam}^2(D)} d^2(\zeta),$$

которая вместе с неравенством (27') влечет оценку снизу для $\|F\|$:

$$\|F\|^2 \geq \frac{\sigma^2(D)}{1017A \operatorname{diam}^2(D)} \int_{D_\varepsilon \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta).$$

Наконец, отсюда и из первого неравенства теоремы 5 получим

$$\|F\|^2 \geq \frac{2^{-14} \sigma^2(D)}{A \operatorname{diam}^2(D)} \left(\frac{2^{12} (l(D) + \pi \varepsilon)^2 R^2(D)}{\pi^2 \varepsilon^4} + 1 \right)^{-1} \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta).$$

Учитывая, что $\varepsilon = \sigma(D)/2$, получим нижнюю оценку в подготовительной теореме.

Из (27'') и оценки сверху функции $p(\zeta)$ в теореме 4 следует оценка сверху для $\|F\|$:

$$\begin{aligned} \|F\|^2 &\leq \frac{352 \operatorname{diam}^2(D) l(D)}{a \sigma^2(D) |D|} \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^3(\zeta) dv(\zeta) \\ &\quad + \frac{2^{17} \operatorname{diam}^4(D)}{a |D|^2} \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta). \end{aligned}$$

В силу второго неравенства теоремы 5 с $\varepsilon = \sigma(D)/2$ получим требуемую верхнюю оценку в подготовительной теореме. Доказательство подготовительной теоремы завершено.

Как уже говорилось во введении, для вывода основной теоремы из подготовительной кроме теоремы А необходимо еще доказать эквивалентность нормы

$$\|\gamma\| = \left(\int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) \right)^{1/2}$$

и нормы пространства $B_2^1(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$.

ТЕОРЕМА 6. *Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что для любой функции $\gamma \in B_2^1(\mathbb{C} \setminus \overline{D})$ выполнено соотношение*

$$c \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta) \leq \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma'(\zeta)|^2 dv(\zeta) \leq 2 \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(\zeta)|^2 d^2(\zeta) dv(\zeta).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теоремой продолжения типа Уитни (см. [16, с. 203]).

ТЕОРЕМА С. Пусть F – произвольное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда на $\mathbb{R}^n \setminus F$ существует бесконечно дифференцируемая функция $\delta(x) = \delta(x, F)$, обладающая свойствами

$$c_1 \delta(x) \leq \text{dist}(x, F) \leq c_2 \delta(x),$$

и для любого α имеем

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \delta(x) \right| \leq B_\alpha (\text{dist}(x, F))^{1-|\alpha|},$$

где B_α , c_1 , c_2 не зависят от F .

Возьмем выпуклый многоугольник D' , содержащий $\overline{D}$ и содержащийся в $B(2R(D))$. Пусть $\delta(z)$ – гладкая функция, эквивалентная $\text{dist}(z, \overline{D}')$, существование которой обеспечивается теоремой С. Заметим, что имеет место равенство

$$|\gamma''|^2 = \frac{1}{4} \Delta |\gamma'|^2,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. Возьмем число $R > 2R(D)$. Граница области $G = (\mathbb{C} \setminus \overline{D}') \cap B(R)$ кусочно гладкая, поэтому в этой области к функциям $|\gamma'(z)|^2$ и $\delta^2(z)$ можно применить формулу Грина:

$$\begin{aligned} \int_G (\delta^2(z) \Delta |\gamma'(z)|^2 - |\gamma'(z)|^2 \Delta \delta^2(z)) dv(z) \\ = \int_{\partial G} \left(\delta^2(z) \frac{\partial |\gamma'(z)|^2}{\partial n} - |\gamma'(z)|^2 \frac{\partial \delta^2(z)}{\partial n} \right) ds(z), \end{aligned}$$

где $ds(z)$ – элемент длины границы. Интегралы по границе $B(R)$ на основании соотношений

$$\begin{aligned} |\gamma'(z)|^2 &= O\left(\frac{1}{R^4}\right), \quad \left| \frac{\partial |\gamma'(z)|^2}{\partial n} \right| = O\left(\frac{1}{R^5}\right), \\ \delta^2(z) &= O(\text{dist}^2(z, D')) = O(R^2), \quad \left| \frac{\partial \delta^2(z)}{\partial n} \right| = O(R) \end{aligned}$$

стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$. На границе D' по свойствам функции $\delta(z)$ имеем

$$\delta(z) \equiv 0, \quad \frac{\partial \delta^2(z)}{\partial n} \equiv 0.$$

Поэтому формула Грина выписывается в виде

$$4 \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}'} |\gamma''(z)|^2 \delta^2(z) dv(z) = \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}'} |\gamma'(z)|^2 \Delta \delta^2(z) dv(z). \quad (28)$$

Теперь снова воспользуемся свойствами функции $\delta^2(z)$:

$$\delta^2(z) \geq c_1^2 \operatorname{dist}^2(z, D'), \quad |\Delta \delta^2(z)| = |2 \operatorname{grad} \delta(z)|^2 + \delta(z) \Delta \delta(z)| \leq 8B_1^2 + 2c_2B_2,$$

где c_1, c_2, B_1, B_2 – абсолютные постоянные (не зависящие от области D') из теоремы С. В результате получим

$$\int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}'} |\gamma''(z)|^2 \operatorname{dist}^2(z, D') dv(z) \leq \frac{4B_1^2 + c_2B_2}{2c_1^2} \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}'} |\gamma'(z)|^2 dv(z). \quad (29)$$

Чтобы получить такую оценку для области D , возьмем последовательность выпуклых многоугольников D_n со свойствами

$$B(2R(D)) \subset D_n \supset \overline{D}, \quad D_n \supset \overline{D}_{n+1}, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n = \overline{D}.$$

Для каждого из этих многоугольников выполнена оценка (29). Поскольку постоянная в правой части не зависит от области, то можно перейти к пределу и получить правое неравенство в теореме 6 с постоянной

$$c = \frac{2c_1^2}{4B_1^2 + c_2B_2}.$$

Для доказательства левого неравенства теоремы 6 снова начнем с выпуклого многоугольника D' , который содержит $\overline{D}$ и содержится в $B(2R(D))$. Легко проверить, что функция $\operatorname{dist}(z, D')$ непрерывно дифференцируема в области $\mathbb{C} \setminus \overline{D}'$. Для применения формулы Грина этого недостаточно. Поэтому воспользуемся обычным методом сглаживания. Возьмем неотрицательную гладкую функцию α типа “шапочки”:

$$\alpha(z) \equiv 0 \quad \text{при} \quad |z| \geq 1, \quad \int_{\mathbb{C}} \alpha(z) dv(z) = 1.$$

Продолжим функцию $\operatorname{dist}(z, D')$ нулем на D' и для $\varepsilon > 0$ рассмотрим функцию

$$d_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\mathbb{C}} \alpha\left(\frac{z - \zeta}{\varepsilon}\right) \operatorname{dist}(\zeta, D') dv(\zeta).$$

Как известно, функция d_ε оказывается гладкой. Функция $\operatorname{dist}(z, D')$ – выпуклая, в частности субгармоническая, поэтому функции d_ε тоже оказываются субгармоническими и при $\varepsilon \rightarrow 0$, убывая, сходятся к $\operatorname{dist}(z, D')$ (см. [17]). Субгармоничность гладкой функции d_ε , в частности, означает, что $\Delta d_\varepsilon(z) \geq 0$. Функция $d_\varepsilon(z)$ тождественно равна нулю при $z \in D'$ и $\operatorname{dist}(z, D') \geq \varepsilon$. Положим

$$D^\varepsilon = \{z \in D' : \operatorname{dist}(z, D') > \varepsilon\}.$$

Очевидно, что область D^ε при малых $\varepsilon > 0$ представляет собой выпуклый многоугольник в D' со сторонами, параллельными сторонам D' и отстоящими от соответствующих сторон на ε . Будем считать, что $\varepsilon < \operatorname{dist}(\overline{D}, \partial D')$; тогда $D^\varepsilon \supset \overline{D}$. Так же, как соотношение (28), получим равенство

$$4 \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}^\varepsilon} |\gamma''(z)|^2 d_\varepsilon^2(z) dv(z) = \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}^\varepsilon} |\gamma'(z)|^2 \Delta d_\varepsilon^2(z) dv(z).$$

В силу субгармоничности функции $d_\varepsilon(z)$ имеем

$$\Delta d_\varepsilon^2(z) = 2|\operatorname{grad} d_\varepsilon(z)|^2 + d_\varepsilon(z)\Delta d_\varepsilon(z) \geq 2|\operatorname{grad} d_\varepsilon(z)|^2.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ получим оценку

$$2 \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(z)|^2 d_\varepsilon^2(z) dv(z) \geq \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma'(z)|^2 |\operatorname{grad} d_\varepsilon(z)|^2 dv(z).$$

Теперь устремим ε к нулю. В силу непрерывной дифференцируемости $\operatorname{dist}(z, D')$ имеем

$$\frac{\partial d_\varepsilon(z)}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial \operatorname{dist}(z, D')}{\partial x}, \quad \frac{\partial d_\varepsilon(z)}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial \operatorname{dist}(z, D')}{\partial y}.$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\operatorname{grad} d_\varepsilon(z)|^2 = |\operatorname{grad} \operatorname{dist}(z, D')|^2.$$

Таким образом, в пределе получим оценку

$$2 \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(z)|^2 \operatorname{dist}^2(z, D') dv(z) \geq \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma'(z)|^2 |\operatorname{grad} \operatorname{dist}(z, D')|^2 dv(z). \quad (30)$$

ЛЕММА 8. Пусть D – некоторая выпуклая область и $\zeta \notin D$. Если функция $\operatorname{dist}(z, D)$ дифференцируема в точке ζ , то

$$|\operatorname{grad} \operatorname{dist}(\zeta, D)| = 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как нетрудно убедиться, функция $\operatorname{dist}(z, D)$ липшицева, т. е.

$$|\operatorname{dist}(z, D) - \operatorname{dist}(w, D)| \leq |z - w|,$$

поэтому любая производная по любому направлению, если она существует, не превосходит 1. С другой стороны, если $z_0 \in \partial D$ – точка достижения расстояния для ζ , т. е.

$$\operatorname{dist}(\zeta, D) = |\zeta - z_0|,$$

то производная по направлению $(\zeta - z_0)/|\zeta - z_0|$ в точке ζ равна 1. Поскольку градиент – это наибольшая по модулю производная по направлениям, то

$$|\operatorname{grad} \operatorname{dist}(\zeta, D)| = 1.$$

Из этой леммы и соотношения (30) вытекает оценка

$$2 \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma''(z)|^2 \operatorname{dist}^2(z, D') dv(z) \geq \int_{\mathbb{C} \setminus \overline{D}} |\gamma'(z)|^2 dv(z).$$

Остается выбрать последовательность выпуклых многоугольников, стягивающихся к области D . Теорема 6 доказана.

Список литературы

1. Гайер Д. Лекции по теории аппроксимации в комплексной плоскости. М.: Мир, 1986.
2. Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С. Теорема Пэли–Винера в пространствах Смирнова // Тр. МИАН. 1991. Т. 200. С. 245–254.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
4. Лизт М. К. Замечание к теореме Палей и Винера о целых функциях конечной степени // УМН. 1964. Т. 19. № 1. С. 169–171.
5. Кацнельсон В. Э. Обобщение теоремы Винера–Палей о представлении целых функций конечной степени // Теория функций, функц. анализ и их прилож. 1965. № 1. С. 99–110.
6. Любарский Ю. И. Теорема Винера–Пэли для выпуклых множеств // Изв. АН АрмССР. 1988. Т. 23. № 2. С. 163–172.
7. Напалков В. В., Юлмухаметов Р. С. О преобразованиях Гильберта в пространствах Бергмана // Матем. заметки. 2001. Т. 70. № 1. С. 23–30.
8. Меренков С. А. О преобразованиях Коши в пространстве Бергмана // Матем. физика, анализ и геометрия. Харьков. 1999. № 4. С. 23–31.
9. Напалков В. В. (мл.), Юлмухаметов Р. С. О преобразовании Коши функционалов на пространстве Бергмана // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 7. С. 77–86.
10. Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С. Обобщение теоремы Пэли–Винера на весовые пространства // Матем. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 139–144.
11. Державец Б. А. Пространства функций, аналитических в выпуклых областях $\mathbb{C}^n$ и имеющих заданное поведение вблизи границы // ДАН СССР. 1984. Т. 276. № 6. С. 1297–1301.
12. Напалков В. В. Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1987. Т. 51. № 2. С. 287–305.
13. Абузярова Н. Ф., Юлмухаметов Р. С. Сопряженные пространства к весовым пространствам аналитических функций // Сиб. матем. журн. 2001. Т. 42. № 1. С. 3–17.
14. Епифанов О. В. Двойственность одной пары пространств аналитических функций ограниченного роста // ДАН СССР. 1991. Т. 319. № 6. С. 1297–1300.
15. Юлмухаметов Р. С. Пространства аналитических функций, имеющих заданный рост вблизи границы // Матем. заметки. 1982. Т. 32. № 1. С. 41–57.
16. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
17. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.

E-mail: Yulmukhametov@bsu.bashedu.ru

Поступило в редакцию
01.04.2002