Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Кривошеев, Критерий аналитического продолжения функций из инвариантных подпространств в выпуклых областях комплексной плоскости, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 1, 43–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/im466>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 10:52:01

УДК 517.5

А. С. Кривошеев

Критерий аналитического продолжения функций из инвариантных подпространств в выпуклых областях комплексной плоскости

Изучаются инвариантные относительно операции дифференцирования подпространства пространств функций, аналитических в выпуклых областях комплексной плоскости. Получен критерий аналитического продолжения функций из произвольных нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, в произвольных выпуклых областях.

Библиография: 22 наименования.

1. Введение. Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$; $H(D)$ – пространство функций, аналитических в D с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах из D ; $H^*(D)$ – сильно сопряженное к $H(D)$ пространство (называемое *пространством аналитических функционалов в D*). Известно (см., например, [1, гл. 3, § 12, п. 7]), что преобразование Лапласа аналитических функционалов $\mu \in H^*(D)$, задаваемое по формуле $f(z) = (\mu, \exp z\lambda)$, устанавливает алгебраический и топологический изоморфизмы между пространством $H^*(D)$ и подпространством целых функций экспоненциального типа $\mathbf{P}_D$, которое представляет собой индуктивный предел банаховых пространств:

$$\mathbf{P}_D = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{ind } B_m,$$

$$B_m = \left\{ g \in H(\mathbb{C}) : \sup_{z \in \mathbb{C}} |g(z)| \exp(-H_{K_m}(z)) < \infty \right\}.$$

Здесь $\{K_m\}_{m=1}^\infty$ – последовательность выпуклых компактов из D такая, что $K_m \subset \text{int } K_{m+1}$, $m = 1, 2, \dots$, и $\bigcup_m K_m = D$; $\text{int } M$ обозначает внутренность множества M и

$$H_M(z) = \sup_{y \in M} \text{Re } zy$$

– опорная функция множества M (точнее, комплексно-сопряженного к M множества). Функция $H_M(z)$ выпукла, положительно однородна порядка один, полунепрерывна снизу, может принимать значение $+\infty$. Она непрерывна во внутренности того множества, где принимает конечные значения. Если M ограничено, то $H_M(z)$ ограничена и непрерывна (см. [2]).

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов Фонда содействия отечественной науке, Президента РФ (№ МД-278.2003.01) и РФФИ (№ 02-01-01100).

Для целой функции $f(z)$ экспоненциального типа (т. е. для некоторых $A, C > 0$ выполнено неравенство $|f(z)| \leq C \exp(A|z|) \quad \forall z \in \mathbb{C}$) через $h_f(z)$ и $\underline{h}_f(z)$ обозначим соответственно ее верхний и нижний индикаторы:

$$h_f(z) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(tz)|}{t},$$

$$\underline{h}_f(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi \delta^2} \int_{B(z, \delta)} \frac{\ln |f(ty)|}{t} d\sigma(y).$$

Из определений индикаторов легко следует, что они положительно однородны порядка один и выполнено неравенство $\underline{h}_f(z) \leq h_f(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Если же в некоторой точке $z \in \mathbb{C}$ выполнено равенство $\underline{h}_f(z) = h_f(z)$, то f имеет (вполне) регулярный рост на луче tz , $t > 0$. Индикатор $h_f(z)$ является ограниченной выпуклой, а следовательно, и непрерывной функцией (см. [1]). Отметим, что если $f \in \mathbf{P}_D$, то из определений $h_f(z)$ и $\mathbf{P}_D$ следует, что для некоторого $m \geq 1$ выполнены неравенства

$$h_f(z) \leq H_{K_m}(z) < H_D(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Обратно, если $h_f(z) < H_D(z)$ для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то для некоторого $m \geq 1$ верна оценка $h_f(z) \leq H_{K_m}(z)$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Тогда из теоремы Хартогса о верхнем пределе семейств субгармонических функций [1, гл. 1, § 6, теорема 6.1] нетрудно получить также оценку

$$|f(z)| \leq C \exp H_{K_{m+1}}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

где C – некоторая положительная постоянная. Из этой оценки следует, что $f \in \mathbf{P}_D$. Таким образом, необходимым и достаточным условием принадлежности целой функции f пространству $\mathbf{P}_D$ является неравенство

$$h_f(z) < H_D(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Пусть W – нетривиальное ($W \neq \{0\}, H(D)$) замкнутое подпространство в $H(D)$, инвариантное относительно оператора дифференцирования, т. е. вместе с каждой функцией $\varphi(z)$ оно содержит также и ее производную $d\varphi/dz$. Примером такого инвариантного подпространства может служить пространство решений из $H(D)$ системы однородных сверточных уравнений (см., например, [1, гл. 3, § 14, п. 2])

$$\mathbf{M}_{\mu_i}[\varphi](z) = (\mu_i, \varphi(z+y)) \equiv 0, \quad \mu_i \in H^*(D), \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Пусть $f_1, \dots, f_n$ – преобразования Лапласа функционалов $\mu_1, \dots, \mu_n$ соответственно. Функции $f_1, \dots, f_n$ называются *характеристическими функциями операторов* $\mathbf{M}_{\mu_1}, \dots, \mathbf{M}_{\mu_n}$. Пусть λ_j , $j = 1, 2, \dots$, – общие нули функций $f_1, \dots, f_n$ и m_j , $j = 1, 2, \dots$, – их кратности, т. е. для каждого $j = 1, 2, \dots$ имеют место равенства

$$\frac{d^k f_i(\lambda_j)}{dz^k} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 0, \dots, m_j - 1,$$

и существует номер i (зависящий от j) такой, что $\frac{d^{m_j} f_i(\lambda_j)}{dz^{m_j}} \neq 0$.

Рассмотрим систему функций

$$\{z^k \exp(\lambda_j z)\}_{j=1, k=0}^{\infty, m_j-1}. \quad (2)$$

В силу выбора показателей λ_j и определения преобразования Лапласа легко получить, дифференцируя равенства (1), что каждая функция из системы (2) является решением системы (1). Решения вида (2) называют *элементарными решениями системы* (1). Известно [3], что ядро оператора свертки, т. е. пространство W решений одного однородного сверточного уравнения, всегда допускает спектральный синтез. Другими словами, линейная оболочка функций из системы (2) (где последовательность $\{\lambda_j, m_j\}$ является последовательностью нулей и их кратностей характеристической функции оператора свертки) плотна в W . Пространства решений систем однородных уравнений свертки уже не всегда допускают спектральный синтез. Однако имеются простые достаточные условия, а также критерий допустимости спектрального синтеза, приведенные в работах [4], [5], и в этом случае. В данных работах получен критерий допустимости спектрального синтеза и в более общем случае для произвольных нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств W . Поясним это.

Пусть $\text{ort } W$ – подпространство в $H^*(D)$, состоящее из всех функционалов, обращающихся в нуль на каждом элементе из W . Если W не тривиально, то и $\text{ort } W$ также не тривиально. Через $I_W(D)$ обозначим подпространство в $\mathbf{P}_D$, состоящее из преобразований Лапласа всех функционалов из $\text{ort } W$. Пусть $\{\lambda_j, m_j\}$ – последовательность всех общих нулей и их кратностей функций из $I_W(D)$, т. е. для каждого $j = 1, 2, \dots$ имеют место равенства

$$\frac{d^k f(\lambda_j)}{dz^k} = 0, \quad f \in I_W(D), \quad k = 0, \dots, m_j - 1,$$

и существует функция $f \in I_W(D)$, зависящая от j , такая, что $\frac{d^{m_j} f_i(\lambda_j)}{dz^{m_j}} \neq 0$. По последовательности $\{\lambda_j, m_j\}$ построим систему (2). Как и в случае систем уравнений свертки, говорят, что подпространство W *допускает спектральный синтез*, если линейная оболочка системы (2) плотна в W . Отметим, что если W допускает спектральный синтез, то множество $I_W(D)$ состоит из тех и только тех функций $f \in \mathbf{P}_D$, которые обращаются в нуль в точках λ_j с кратностью, не меньшей чем m_j . Действительно, если $f \in I_W(D)$, то по определению $I_W(D)$ верно включение $f \in \mathbf{P}_D$, а по определению последовательности $\{\lambda_j, m_j\}$ функция f обращается в нуль в точках λ_j с кратностью, не меньшей чем m_j . Обратно, если функция f принадлежит $\mathbf{P}_D$, то она является преобразованием Лапласа некоторого функционала μ из $H^*(D)$. Если, кроме того, f обращается в нуль в точках λ_j с кратностью, не меньшей чем m_j , то из определения преобразования Лапласа легко следует, что функционал μ обращается в нуль на всех элементах системы (2). Пространство W допускает спектральный синтез, т. е. система (2) полна в W . Следовательно, μ будет обращаться в нуль на всем пространстве W , а потому μ принадлежит $\text{ort } W$, а его преобразование Лапласа f принадлежит множеству $I_W(D)$.

Давно было замечено, что функции, аналитические в выпуклой области и аппроксимируемые в ней экспоненциальными многочленами (т. е. линейными комбинациями функций вида (2)), могут аналитически продолжаться в более широкую

выпуклую область. В связи с этим естественно возникла следующая проблема. Пусть $W \subset H(D)$ – инвариантное подпространство, допускающее спектральный синтез. При каких условиях каждая функция из W продолжается в некоторую выпуклую область $G \supset D$?

Первым достижением в этом направлении был, по-видимому, следующий результат А. Ф. Леонтьева [6]. Пусть φ – функция, аналитическая в окрестности отрезка мнимой оси $[-i\sigma\pi, i\sigma\pi]$ и являющаяся решением однородного уравнения свертки $\mathbf{M}_\mu[\varphi] = 0$ с характеристической функцией

$$f(\lambda) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_k} \right)^2 \right),$$

где $k/\lambda_k \rightarrow \sigma \geq 0$. Тогда φ аналитически продолжается в некоторую вертикальную полосу, содержащую этот отрезок. Этот результат стимулировал целый ряд исследований по проблеме продолжения решений однородных сверточных уравнений [7]–[10], где рассмотрены различные частные случаи сверточных уравнений. В то же время во всех этих работах имеется нечто общее. Прежде всего, в них было замечено, что область, в которую продолжают решения, зависит от углового распределения нулей характеристической функции оператора свертки. Кроме того, было замечено, что продолжение можно осуществить, если потребовать выполнения подходящих оценок снизу на характеристическую функцию.

Общий случай инвариантных подпространств был впервые детально изучен в 1973 г. И. Ф. Красичковым-Терновским в работе [11]. Здесь были найдены различные достаточные условия продолжения функций из инвариантных подпространств. В частности, был получен следующий результат. Пусть $W \subset H(D)$ – нетривиальное инвариантное подпространство, допускающее спектральный синтез. Предположим, что во множестве $I_W(D)$ найдется функция f , которая имеет регулярный рост всюду в комплексной плоскости и такая, что для некоторой выпуклой области Ω верно равенство $D = \Omega + K$, где K – сопряженная диаграмма функции f , т. е. выпуклый компакт, опорная функция которого совпадает с индикатором $h_f(z)$. Тогда каждая функция из W аналитически продолжается в выпуклую область

$$D(W) = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z\xi < H_D(\xi), \xi \in \Delta_f\}, \quad (3)$$

где Δ_f – подмножество единичной окружности $\mathbf{S}$ (с центром в начале координат), состоящее из предельных точек последовательности $\{\lambda_k/|\lambda_k|\}$, и $\{\lambda_k\}$ – все нули функции f .

Этот результат, по-видимому, считался в то время неулучшаемым. Довольно долго не удавалось получить более сильный результат, и внимание исследователей сосредоточилось на исследовании многомерного случая. В ряде работ были предприняты попытки перенести результаты, полученные для функции одной переменной, на частный случай инвариантных подпространств функций многих переменных – пространства решений однородных сверточных уравнений. В этой связи отметим работы [12]–[16]. Наиболее общий результат для пространств решений однородных уравнений свертки был получен в работе [17]. Этот результат в отличие от результатов предыдущих работ оказался новым не только для многомерного, но и для одномерного случая. Общие инвариантные подпространства

функций многих переменных были впервые рассмотрены в работе [18]. Здесь получены достаточные условия продолжения, которые в настоящий момент являются наиболее общими из всех известных как в случае многих, так и в случае одной переменной. Здесь также впервые получены необходимые условия продолжения, которые вместе с достаточными условиями составляют критерий аналитического продолжения функций из инвариантных подпространств в гладких выпуклых областях комплексной плоскости. Отметим еще, что ранее во всех работах по нашей проблеме рассматривалась задача продолжения функций в максимально возможную выпуклую область $D(W)$, которая строится по исходной области D так же, как это сделано в (3). Однако, вообще говоря, возможна ситуация, когда функции из W не продолжают в максимальную область, но все же продолжают в некоторую большую, чем D , выпуклую область (лежащую, конечно, в $D(W)$). В связи с этим в работе [18] рассмотрена более общая задача продолжения в какую-либо фиксированную область G , содержащую D и содержащуюся в $D(W)$.

В настоящей работе мы ослабляем достаточные условия продолжения, полученные в [18] для случая одной переменной, и показываем, что они являются и необходимыми. Таким образом, мы получаем критерий аналитического продолжения функций из произвольных нетривиальных инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, в произвольных выпуклых областях комплексной плоскости. Кроме того, как и в [18], мы решаем более общую задачу продолжения в произвольную область G , содержащую D и содержащуюся в $D(W)$.

2. Достаточные условия продолжения функций. Прежде всего сформулируем два результата, которые доказаны в [18]. Эти результаты использовались почти во всех работах по продолжению функций из инвариантных подпространств. В первом из них описывается максимальная выпуклая область, в которую можно осуществить продолжение. Предварительно введем еще некоторые обозначения. Пусть $W \subset H(D)$ – инвариантное подпространство. Через $\Lambda(W) = \{\lambda_j, m_j\}$ обозначим последовательность всех общих нулей функций из W и их кратностей, а через $E(W)$ – семейство функций вида (2), построенное по последовательности $\Lambda(W)$. Для выпуклой области D положим

$$D(W) = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z\xi < H_D(\xi), \xi \in \Lambda(W)\},$$

где $\Delta(W)$ – подмножество единичной окружности $\mathbf{S}$, состоящее из пределов всевозможных сходящихся подпоследовательностей последовательности $\{\lambda_j/|\lambda_j|\}$. Очевидно, $\Delta(W)$ – замкнутое множество. Если $\Delta(W)$ совпадает с окружностью $\mathbf{S}$, то область $D(W)$ совпадает с D . В общем случае имеет место вложение $D \subseteq D(W)$, которое следует из представления (см. [2])

$$D = \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z\xi < H_D(\xi), \xi \in \mathbf{S}\}.$$

Поэтому всегда выполнено неравенство $H_D(\xi) \leq H_{D(W)}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}$.

С другой стороны, из определения $D(W)$ легко получаем

$$H_{D(W)}(\xi) \leq H_D(\xi) \quad \forall \xi \in \Delta(W).$$

Таким образом, имеет место равенство $H_{D(W)}(\xi) = H_D(\xi) \quad \forall \xi \in \Delta(W)$.

ЛЕММА 1. Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $W \subset H(D)$ – нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство, допускающее спектральный синтез. Предположим, что все функции из W аналитически продолжаются в некоторую выпуклую область $G \supset D$ и аппроксимируются в ней линейными комбинациями элементов из $E(W)$. Тогда верно включение $G \subseteq D(W)$.

Следующая лемма сводит решение проблемы продолжения к решению эквивалентной задаче из теории целых функций.

ЛЕММА 2. Пусть D, G – выпуклые области в $\mathbb{C}$ и $D \subset G$; $W \subset H(D)$ – нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство, допускающее спектральный синтез. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) каждая функция из W аналитически продолжается в область G и аппроксимируется в ней линейными комбинациями элементов из $E(W)$;
- 2) для любой функции $F \in \mathbf{P}_G$ существуют функции $f \in I_W(G)$ и $g \in \mathbf{P}_D$ такие, что верно равенство $F = f + g$.

Для решения задачи, сформулированной в утверждении 2) леммы 2, понадобятся некоторые вспомогательные результаты. Прежде всего, это следующие два результата о продолжении оценок снизу для модулей аналитических функций.

Пусть ξ – точка окружности $\mathbf{S}$ и $\delta > 0$. Через $\Pi(\xi, \delta)$ обозначим совокупность всех числовых последовательностей $\{z_k\}_{k=1}^\infty$, обладающих следующими свойствами:

- 1) для каждого $k \geq 1$ точка z_k лежит на луче $\{t\xi, t > 0\}$;
 - 2) последовательность $\{|z_k|\}$, монотонно возрастаая, стремится к $+\infty$;
 - 3) для каждого $k \geq 1$ выполнено неравенство $|z_{k+1}|/|z_k| \leq 1 + \delta$.
- Открытый круг с центром в точке z и радиуса $r > 0$ обозначим $B(z, r)$.

ЛЕММА 3. Пусть φ – целая функция экспоненциального типа, $\xi \in \mathbf{S}$ и $\delta, \varepsilon > 0$ ($19\delta < 1$). Предположим, что

$$h_\varphi(\zeta) \leq h_\varphi(\xi) + \varepsilon \quad \forall \zeta \in B(\xi, 19\delta) \quad (4)$$

и для некоторых чисел $a \in \mathbb{R}$ и последовательности $\{z_k\} \in \Pi(\xi, \delta)$ выполнено неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(z_k)|}{|z_k|} \geq a. \quad (5)$$

Тогда существуют число $T > 0$ и область $Q \subset \mathbb{C}$ такие, что:

- 1) $t\xi \in Q$ для всех $\xi \in B(\xi, \delta)$ и $t \geq T$;
- 2) $z/|z| \in B(\xi, 3\delta)$ для всех $z \in Q$;
- 3) для каждого $z \in \partial Q$ имеет место неравенство

$$\frac{\ln |\varphi(z)|}{|z|} \geq [a - \varepsilon - q(h_\varphi(\xi) - a + 3\varepsilon)](1 \pm 3\delta)^{-1},$$

где $q = 3 + \ln 72$ и знак в круглой скобке совпадает со знаком выражения, стоящего в квадратной скобке;

- 4) если множество $E \subset \mathbb{C}$ является объединением кругов $B(y_i, r_i)$, $i = 1, 2, \dots$, таких, что $\sum_{|y_i| > R} r_i \rightarrow 0$, когда $R \rightarrow \infty$, и $r_i \leq r$, $i = 1, 2, \dots$, то

существует последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty \in \Pi(\xi, \delta')$, $\delta' = (2\delta + 3\delta^2)/(1 + 2\delta)$, такая, что $x_k \notin E$, $k = 1, 2, \dots$, и выполнены неравенства

$$\frac{\ln |\varphi(x_k)|}{|x_k|} \geq [a - \varepsilon - q(h_\varphi(\xi) - a + 3\varepsilon)](1 \pm 3\delta)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где q и знак в круглой скобке те же, что и в п. 3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (4) и определения верхнего индикатора по известной теореме Хартогса о семействе субгармонических функций получаем, что для некоторого $t_1 > 0$ верно неравенство

$$\frac{\ln |\varphi(t\zeta)|}{t} \leq h_\varphi(\xi) + 2\varepsilon \quad \forall \zeta \in B(\xi, 18\delta), \quad t \geq t_1.$$

Отсюда с учетом свойства 1) последовательностей из множества $\Pi(\xi, \delta)$ и положительной однородности индикатора h_φ для каждого $k \geq 1$ такого, что $|z_k| \geq t_1$, имеем

$$\begin{aligned} \ln |\varphi(z_k + z)| &\leq \ln |\varphi(|z_k|(\xi + z/|z_k|))| \leq h_\varphi(\xi)|z_k| + 2\varepsilon|z_k| \\ &= h_\varphi(z_k) + 2\varepsilon|z_k| \quad \forall z \in B(0, 18\delta|z_k|). \end{aligned} \quad (6)$$

Согласно неравенству (5) найдем номер k_0 такой, что $|z_k| \geq t_1$ для всех $k \geq k_0$ и верна оценка

$$\ln |\varphi(z_k)| \geq (a - \varepsilon)|z_k| \quad \forall k \geq k_0. \quad (7)$$

Рассмотрим функции $\varphi_k(z) = \varphi(z_k + z)/\varphi(z_k)$. По теореме об оценке снизу модуля аналитической функции в круге (см., например, [19, гл. 1, § 4, п. 3, теорема 4.2]) с учетом соотношений (6) и (7) получаем неравенство

$$\ln |\varphi_k(z)| \geq -(3 + \ln 72)[h_\varphi(z_k) - a|z_k| + 3\varepsilon|z_k|], \quad k \geq k_0,$$

которое выполнено в круге $B(0, 3\delta|z_k|)$, но вне исключительных кружков с общей суммой радиусов, равной $\delta|z_k|/4$. В частности, как нетрудно заметить, это неравенство будет выполнено на некоторой окружности (с центром в нуле), лежащей в кольце $B(0, 3\delta|z_k|) \setminus B(0, 2\delta|z_k|)$. Таким образом, с учетом (7) и определения φ_k для каждого $k \geq k_0$ найдется число $d_k \in (2, 3)$ такое, что

$$\begin{aligned} \ln |\varphi(z)| &\geq (a - \varepsilon)|z_k| - (3 + \ln 72)[h_\varphi(z_k) - a|z_k| + 3\varepsilon|z_k|], \\ z &\in \partial B(z_k, d_k\delta|z_k|). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $z_k/|z_k| = \xi$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\ln |\varphi(z)|}{|z|} &= \frac{|z_k| \ln |\varphi(z)|}{|z_k||z|} \geq [a - \varepsilon + q(h_\varphi(\xi) - a + 3\varepsilon)] \frac{|z_k|}{|z|} \\ &\geq [a - \varepsilon + q(h_\varphi(\xi) - a + 3\varepsilon)](1 \pm 3\delta)^{-1}, \quad z \in \partial B(z_k, d_k\delta|z_k|), \end{aligned} \quad (8)$$

где знак в круглой скобке совпадает со знаком выражения, стоящего в квадратной скобке.

Предположим, что окружность $\partial B(z_k, d_k\delta|z_k|)$ не пересекает множество E . Действительно, пусть $B(y_{i_j}, r_{i_j})$ – те из кругов $B(y_i, r_i)$, которые пересекают $B(z_k, 3\delta|z_k|)$. Согласно условию выберем $R > 0$ такое, что $\sum_{|y_i| > R} r_i < 1$.

Увеличивая (если необходимо) k_0 , добьемся того, чтобы для всех $k \geq k_0$ выполнялись соотношения $2 < \delta|z_k|/4$ и $(1 - 3\delta)|z_k| > R + r$. Для каждого j имеем $|y_{i_j} - z_k| < 3\delta|z_k| + r$. Следовательно,

$$|y_{i_j}| > |z_k| - 3\delta|z_k| - r = (1 - 3\delta)|z_k| - r > R + r - r = R.$$

В силу выбора $R > 0$ это означает, что сумма радиусов всех кругов $B(y_{i_j}, r_{i_j})$ не превышает единицы. Тогда с учетом выбора k_0 сумма их диаметров не превышает $\delta|z_k|/4$. Сумма диаметров всех кругов $B(y_{i_j}, r_{i_j})$ и исключительных кружков, которые рассматривались ранее, не превышает $3\delta|z_k|/4$. Поэтому найдется $d_k \in (2, 3)$ такое, что выполнено (8) и окружность $\partial B(z_k, d_k\delta|z_k|)$ не пересекает множество E .

Пусть Q – объединение кругов $B(z_k, d_k\delta|z_k|)$, $k \geq k_0$. Множество Q является областью, поскольку круги $B(z_k, d_k\delta|z_k|)$ и $B(z_{k+1}, d_{k+1}\delta|z_{k+1}|)$ пересекаются (по свойству 3) последовательностей из $\Pi(\xi, \delta)$ точка z_{k+1} лежит в круге $B(z_k, \delta|z_k|)$. Граничные точки Q лежат на окружностях $\partial B(z_k, d_k\delta|z_k|)$, $k \geq k_0$. Следовательно, из неравенства (8) следует утверждение 3) леммы.

Утверждение 2), очевидно, имеет место в силу выбора чисел d_k и свойства 1) последовательностей из множества $\Pi(\xi, \delta)$.

Положим $T = |z_{k_0}|$, и пусть $t \geq T$. По свойству 2) последовательностей из $\Pi(\xi, \delta)$ найдется номер $k \geq k_0$ такой, что $|z_k| \leq t \leq |z_{k+1}|$. Тогда по свойствам 1) и 3) верны неравенства

$$|z_{k+1} - t\xi| = |z_{k+1}| - t \leq |z_{k+1}| - |z_k| \leq \delta|z_k| \leq \delta|z_{k+1}|.$$

Отсюда с учетом того, что $\delta t \leq \delta|z_{k+1}|$, имеем вложения

$$B(t\xi, \delta t) \subset B(z_{k+1}, 2\delta|z_{k+1}|) \subset B(z_{k+1}, d_{k+1}\delta|z_{k+1}|) \subset Q,$$

из которых следует утверждение 1) леммы.

Остается доказать 4). Через x_k , $k = 1, 2, \dots$, обозначим ту из двух точек пересечения луча $\{t\xi, t > 0\}$ с окружностью $\partial B(z_{k+k_0}, d_{k+k_0}\delta|z_{k+k_0}|)$, которая имеет больший модуль. Тогда в силу (8) неравенство из п. 4) имеет место. Поскольку $\partial B(z_k, d_k\delta|z_k|)$ не пересекает E , то $x_k \notin E$, $k = 1, 2, \dots$. Покажем, наконец, что верно включение $\{x_k\} \in \Pi(\xi, \delta')$. Согласно выбору точка x_k лежит на луче $\{t\xi, t > 0\}$. Очевидно, $|x_k| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$, поскольку этим свойством обладает последовательность $\{|z_k|\}$. Если $\{|x_k|\}$ не является монотонно возрастающей, то построим новую последовательность следующим образом: в качестве первого члена этой последовательности возьмем x_1 ; если уже выбраны $x_1, \dots, x_k$, то в качестве x_{k+1} возьмем x_{k+m} с минимальным номером $m = 1, 2, \dots$ таким, что $|x_{k+m}| \geq |x_k|$. Оценим теперь отношение $|x_{k+1}|/|x_k|$, учитывая способ построения x_k и то, что $|z_{k+1}|/|z_k| < 1 + \delta$:

$$\begin{aligned} \frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} &= \frac{(1 + d_{s+m}\delta)|z_{s+m}|}{(1 + d_s\delta)|z_s|} < \frac{(1 + 3\delta)|z_{s+m-1}|(1 + \delta)}{(1 + d_s\delta)|z_s|} \\ &= \frac{(1 + 3\delta)(1 + d_{s+m-1}\delta)|z_{s+m-1}|(1 + \delta)}{(1 + d_s\delta)|z_s|(1 + d_{s+m-1}\delta)} \leq \frac{(1 + 3\delta)(1 + d_s\delta)|z_s|(1 + \delta)}{(1 + d_s\delta)|z_s|(1 + d_{s+m-1}\delta)} \\ &< 1 + \frac{(1 + 3\delta)(1 + \delta)}{(1 + 2\delta)} - 1 = 1 + \frac{2\delta + 3\delta^2}{(1 + 2\delta)} = 1 + \delta'. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 4. Пусть φ – функция, аналитическая в замкнутом круге $\overline{B(z_0, 2)}$. Предположим, что для некоторых $A, a > 0$ выполнены неравенства

$$|\varphi(z)| \leq A \quad \forall z \in \overline{B(z_0, 2)}, \quad |\varphi(z_0)| \geq a.$$

Тогда имеет место оценка

$$|\varphi(z)| \geq a - A|z - z_0| \quad \forall z \in \overline{B(z_0, 1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно интегральной формуле Коши для каждого $z \in \overline{B(z_0, 1)}$, с учетом оценки функции φ из условия леммы, получаем оценку для производной:

$$|\varphi'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|y-z|=1} \frac{\varphi(y)}{(y-z)^2} dy \right| \leq A.$$

Используя эту оценку и формулу для первообразной, находим, что

$$|\varphi(z) - \varphi(z_0)| = \left| \int_{z_0}^z \varphi'(y) dy \right| \leq A|z - z_0| \quad \forall z \in \overline{B(z_0, 1)}.$$

В силу условия для $\varphi(z_0)$ отсюда легко получаем требуемое неравенство. Лемма доказана.

В следующей лемме мы строим специальную срезающую функцию. Через $\text{dist}(z, M)$ обозначим расстояние от точки z до множества M .

ЛЕММА 5. Пусть Ω – открытое множество в $\mathbb{C}$, V – открытое подмножество Ω и числа $A, a > 0$ такие, что

$$\text{dist}(z, \partial\Omega) \geq a \exp(-A|z|) \quad \forall z \in \partial V. \quad (9)$$

Тогда существуют число $c > 0$ и функция $e(z) \in C^\infty(\mathbb{C})$ такие, что:

- 1) $0 \leq e(z) \leq 1$ для любого $z \in \mathbb{C}$;
- 2) $e(z) = 1$ для любого $z \in V$;
- 3) $e(z) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$;
- 4) $|de(z)/d\bar{z}| \leq c \exp(A|z|)$ для любого $z \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$V_m = V \cap \{z: m-1 \leq |z| \leq m\}, \quad m = 1, 2, \dots, \\ \Omega_m = V_m + B(0, a \exp(-Am)).$$

Как обычно (см., например, [20, теорема 1.4.1 и формула (1.4.2)]), можно найти функции $e_m \in C^\infty(\mathbb{C})$, $m \geq 1$, такие, что:

$$\begin{aligned} 0 \leq e_m(z) \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}; \quad e_m(z) = 1, \quad z \in V_m; \\ e_m(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega_m; \\ |de_m(z)/d\bar{z}| \leq \tilde{c} a^{-1} \exp(Am) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\tilde{c}$ не зависит от a , A и m .

Пусть $z \in \Omega_m$. Тогда $|z| + 2 \geq m$ и в силу последнего неравенства из (10) имеем

$$|de_m(z)/d\bar{z}| \leq \tilde{c}a^{-1} \exp(A(2 + |z|)) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Выберем $y \in V_m \subset V$ такое, что $z \in B(y, a \exp(-Am))$. Тогда с учетом определения V_m получаем

$$|y - z| < a \exp(-Am) \leq a \exp(-A|y|).$$

Это неравенство вместе с (9) означает, что $z \in \Omega$. Таким образом, верно вложение $\Omega_m \subset \Omega$, $m = 1, 2, \dots$.

Определим функцию $e(z)$ по формуле

$$e(z) = 1 - \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e_m(z)).$$

Отметим, что в некоторой окрестности каждой точки $z \in \mathbb{C}$ отлично от единицы не более трех сомножителей этого произведения. Следовательно, $e(z)$ корректно определена. Кроме того, с учетом (10) легко получаем утверждение 4) леммы. Утверждения 1)–3) вытекают непосредственно из определения функции $e(z)$, равенства $V = \bigcup_m V_m$, вложений $\Omega_m \subset \Omega$, $m = 1, 2, \dots$, и соответствующих свойств $e_m(z)$. Лемма доказана.

В следующей лемме построим специальный выпуклый компакт, опорная функция которого понадобится нам позже в качестве весовой функции.

ЛЕММА 6. Пусть Θ – открытый угол с вершиной в начале координат раствора не меньше π и $S_0 \subset \mathbf{S}$ – компактное подмножество Θ . Для заданного числа $A > 0$ существует выпуклый компакт L , опорная функция которого обладает следующими свойствами:

- 1) $H_L(z) = 0$ для любого $z \notin \Theta$;
- 2) $H_L(z) \geq A|z|$ для любого z такого, что $z/|z| \in S_0$;
- 3) $H_L(z) \geq 0$ для любого z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку Θ – открытый угол раствора не меньше π , то найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$, такие, что имеет место равенство

$$\Theta = \{r \exp(i\alpha) : r > 0, \alpha \in (\alpha_1 - \pi/2, \alpha_2 + \pi/2)\}. \quad (11)$$

Для каждого $t > 0$ рассмотрим точки $y_1(t) = t \exp(-i\alpha_1)$ и $y_2(t) = t \exp(-i\alpha_2)$. В силу (11) выполнены неравенства

$$\operatorname{Re}(y_1(t)z) \leq 0, \quad \operatorname{Re}(y_2(t)z) \leq 0 \quad \forall z \notin \Theta, \quad (12)$$

а также неравенство

$$\max\{\operatorname{Re}(y_1(t)z), \operatorname{Re}(y_2(t)z)\} > 0 \quad \forall z \in \Theta. \quad (13)$$

Пусть z – произвольная точка замыкания $\overline{S_0}$. По условию $\overline{S_0} \subset \Theta$. Тогда согласно (13) имеем

$$\max\{\operatorname{Re}(y_1(t)z), \operatorname{Re}(y_2(t)z)\} \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, найдется $t = t(z) > 0$ такое, что

$$\max\{\operatorname{Re}(y_1(t)z), \operatorname{Re}(y_2(t)z)\} > A.$$

По непрерывности этих функций данное неравенство продолжается в некоторую окрестность $V(z)$ точки z . Далее, как обычно, из покрытия множества $\bar{S}_0$ окрестностями $V(z)$, $z \in \bar{S}_0$, выбираем конечное подпокрытие $V(z_k)$, $k = 1, \dots, p$, и полагаем $t_0 = \max_{1 \leq k \leq p} t(z_k)$. Тогда получаем неравенство

$$\max\{\operatorname{Re}(y_1(t_0)z), \operatorname{Re}(y_2(t_0)z)\} \geq A \quad \forall z \in S_0. \quad (14)$$

Пусть компакт L является выпуклой оболочкой объединения $\{y_1(t_0)\} \cup \{y_2(t_0)\} \cup \{0\}$, т.е. треугольником с вершинами $y_1(t_0)$, $y_2(t_0)$ и 0 . Поскольку опорная функция выпуклой оболочки объединения конечного числа множеств равна максимуму из опорных функций этих множеств (см. [2]), то с учетом (12) имеем

$$H_L(z) = \max\{0, \operatorname{Re}(y_1(t_0)z), \operatorname{Re}(y_2(t_0)z)\} = 0 \quad \forall z \notin \Theta.$$

Таким образом, условия 1) и 3) для H_L выполнены. С учетом (14) и однородности опорной функции получаем также условие 2). Лемма доказана.

Введем еще некоторые дополнительные обозначения. Для выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ положим

$$\Theta_D = \{z \in \mathbb{C} : H_D(z) = +\infty\}.$$

Если D ограничена, то, очевидно, $\Theta_D = \emptyset$. Если D не ограничена, то (за исключением одного особого случая, когда D – полоса, т.е. $D = \{z : |\operatorname{Re}((z - z_0) \times \exp(i\alpha))| < a\}$ для некоторых z_0 , α , a , и тогда Θ_D – объединение двух открытых непересекающихся полуплоскостей) Θ_D является углом (вырождающимся во всю плоскость, когда $D = \mathbb{C}$, или плоскость без луча, когда D – полуплоскость) с вершиной в начале координат. Этот угол имеет раствор не меньше π , так как множество $\mathbb{C} \setminus \Theta_D$ в силу выпуклости и однородности H_D является выпуклым конусом, т.е. (если $D \neq \mathbb{C}$) совпадает со всей плоскостью (когда D ограничена) или с прямой (когда D – полоса), или является углом (вырождающимся в луч, когда D – полуплоскость) раствора не больше π .

Пусть $G \subset \mathbb{C}$ – выпуклая область, содержащая D . Тогда выполнено неравенство $H_D(\xi) \leq H_G(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{C}$. Рассмотрим множество

$$J(D, G) = \{\xi \in \mathbf{S} : H_D(\xi) < H_G(\xi)\}.$$

Это множество не пересекается с Θ_D и, вообще говоря, не является ни открытым, ни замкнутым (в топологии единичной окружности $\mathbf{S}$). Если D ограничено, то $J(D, G)$ открыто. В общем случае каждая точка из $J(D, G)$, лежащая во внутренней части множества $\mathbb{C} \setminus \Theta_D$, входит в $J(D, G)$ вместе с некоторой своей окрестностью (в топологии $\mathbf{S}$). Это сразу следует из определения $J(D, G)$, полунепрерывности снизу H_G и непрерывности H_D на множестве $\operatorname{int}(\mathbb{C} \setminus \Theta_D)$. Указанным свойством не обладают самое большее две точки (если они есть) из $J(D, G)$, которые лежат на границе $\partial\Theta_D$, но не принадлежат Θ_D . Если такие точки изъять из $J(D, G)$, то оставшееся множество будет открытым на $\mathbf{S}$ и его можно представить в следующей форме: $J(D, G) \setminus \partial\Theta_D$ (оно будет пустым, если D – полоса или полуплоскость).

Для доказательства достаточных условий продолжения функций нам понадобится еще одно простое утверждение.

ЛЕММА 7. Множество $J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D \cap \mathbf{S}$ открыто на $\mathbf{S}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждая точка из $\text{int } \Theta_D$ лежит в $\text{int } \Theta_D$ вместе с некоторой своей окрестностью по определению внутренности множества. Подобным свойством, как мы уже заметили, обладают и точки множества $J(D, G) \setminus \partial \Theta_D$. Остается доказать, что аналогичное свойство имеет место для точек множества $J(D, G) \cap \partial \Theta_D$ (конечно, если оно не пусто).

Итак, пусть $\zeta_0 \in J(D, G) \cap \partial \Theta_D$. Предположим, что никакая окрестность точки ζ_0 (на окружности $\mathbf{S}$) не лежит в $J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D \cap \mathbf{S}$. Тогда найдется последовательность $\{\zeta_k\} \subset \mathbf{S}$, сходящаяся к ζ_0 и такая, что ζ_k не лежит в $J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Отсюда с учетом определений $J(D, G)$ и Θ_D получаем

$$H_G(\zeta_k) = H_D(\zeta_k) < +\infty, \quad k \geq 1.$$

Если это равенство сохраняется и в пределе, т.е. $H_G(\zeta_0) = H_D(\zeta_0)$, то оно противоречит включению $\zeta_0 \in J(D, G)$. Отсюда, таким образом, будет следовать доказательство леммы. Покажем это.

Поскольку $D \subset G$, то верно неравенство $H_D(\zeta_0) \leq H_G(\zeta_0)$. Если $H_D(\zeta_k) \rightarrow H_D(\zeta_0)$ при $k \rightarrow \infty$, то с учетом полунепрерывности снизу H_G будем иметь

$$H_G(\zeta_0) \geq H_D(\zeta_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} H_D(\zeta_k) \geq \varliminf_{k \rightarrow \infty} H_G(\zeta_k) \geq H_G(\zeta_0).$$

Это влечет требуемое равенство. Следовательно, достаточно доказать, что

$$\lim_{\substack{\zeta \rightarrow \zeta_0 \\ \zeta \in \mathbf{S} \setminus \Theta_D}} H_D(\zeta) = H_D(\zeta_0).$$

Пусть $\zeta_1 \in \mathbf{S} \setminus \Theta_D$ и ζ — произвольная точка дуги окружности $\mathbf{S}$, заключенной между ζ_1 и ζ_0 , на которой функция H_D конечна. Считаем, что точка ζ_1 находится настолько близко к ζ_0 , что для некоторого $t(\zeta) \in [0, 1]$ точка $t(\zeta)\zeta$ принадлежит отрезку $[\zeta_1, \zeta_0]$. Пусть $\tau(\zeta) \in [0, 1]$ такое, что

$$t(\zeta)\zeta = \tau(\zeta)\zeta_1 + (1 - \tau(\zeta))\zeta_0.$$

В силу выпуклости H_D выполнено неравенство

$$H_D(t(\zeta)\zeta) \leq \tau(\zeta)H_D(\zeta_1) + (1 - \tau(\zeta))H_D(\zeta_0).$$

Пусть $\zeta \rightarrow \zeta_0$. Тогда $\tau(\zeta) \rightarrow 0$ и $\tau(\zeta) \rightarrow 1$. Поэтому с учетом полунепрерывности снизу и однородности H_D получаем

$$\varliminf_{\zeta \rightarrow \zeta_0} H_D(\zeta) \geq H_D(\zeta_0) \geq \varlimsup_{\zeta \rightarrow \zeta_0} H_D(t(\zeta)\zeta) = \varlimsup_{\zeta \rightarrow \zeta_0} t(\zeta)H_D(\zeta) = \varlimsup_{\zeta \rightarrow \zeta_0} H_D(\zeta).$$

Отсюда следует требуемое равенство, и тем самым лемма доказана.

Пусть Y^σ обозначает σ -вздутие Y .

Если $\mathbf{S} \setminus (J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D) = \emptyset$ (т.е. Θ_D является открытым и $J(D, G)$ совпадает с $\mathbf{S} \setminus \Theta_D$), то множество $J(D, G) \setminus \partial \Theta_D$ является связным. Пусть

$\mathbf{S} \setminus (J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D)$ не пусто. Для каждого $\sigma > 0$ из всех связных компонент множества $J(D, G) \setminus \partial\Theta_D$ выберем лишь те, которые не лежат целиком в $[\mathbf{S} \setminus (J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D)]^\sigma$. Объединение всех таких компонент обозначим J_σ . Множество J_σ , если не пусто, состоит из конечного числа компонент. Это следует из того, что для каждой связной компоненты $U \subset J_\sigma$ расстояние между ее граничными точками превышает σ , поскольку в противном случае U целиком принадлежала бы $B(\zeta, \sigma)$, где ζ – граничная точка U , которая лежит на множестве $\mathbf{S} \setminus (J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D)$. Такая граничная точка существует у любой компоненты $U \subset J_\sigma$. Лишь в одном случае, когда $\mathbf{S} \setminus (J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D) = \emptyset$ (который мы исключили), множество $J(D, G) \setminus \partial\Theta_D$, если оно не пусто, состоит из одной компоненты, обе граничные точки которой не принадлежат, естественно, пустому множеству $\mathbf{S} \setminus (J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D)$.

Пронумеруем все компоненты J_σ в том порядке, в котором они встречаются при движении по окружности $\mathbf{S}$ против часовой стрелки. Соответственно этой нумерации обозначим их через $U_m(\sigma)$, $m = 1, \dots, m(\sigma)$. При этом если область D ограничена, то в качестве $U_1(\sigma)$ возьмем любую компоненту. Если же D не является ограниченной, то в качестве $U_1(\sigma)$ возьмем ту компоненту, которая встречается первой при движении по $\mathbf{S}$ против часовой стрелки, начиная с какой-либо точки, лежащей в угле Θ_D . Аналогично, в случае, когда $\mathbf{S} \setminus (J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D) = \emptyset$, через $U_1(\sigma)$ для любого $\sigma > 0$ обозначим множество $J(D, G) \setminus \partial\Theta_D$ (если оно не пусто), состоящее из одной компоненты.

Теперь сформулируем и докажем основной результат настоящего пункта – достаточные условия продолжения функций.

ТЕОРЕМА 1. Пусть D, G – выпуклые области в $\mathbb{C}$, $D \subset G$. Пусть, далее, W – нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез, и имеет место вложение $G \subseteq D(W)$. Предположим, что для любых $\sigma, \varepsilon, \delta > 0$ найдется функция $\varphi \in I_W(D)$ такая, что для каждого $m = 1, \dots, m(4\sigma)$ и каждой точки $\zeta \in \partial U_m(4\sigma) \setminus J(D, G)$ найдутся $\xi \in [B(\zeta, 3\sigma) \setminus B(\zeta, 2\sigma)] \cap U_m(4\sigma)$ и последовательность $\{z_k\}_{k=1}^\infty \in \Pi(\xi, \sigma)$ такие, что выполнено неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(z_k)|}{|z_k|} \geq H_D(\xi) - \varepsilon. \quad (15)$$

Тогда каждая функция из W аналитически продолжается в область G и аппроксимируется в ней линейными комбинациями элементов из $E(W)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\mathbf{S} \setminus (J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D) = \emptyset$ или $J(D, G) \setminus \partial\Theta_D = \emptyset$, то формулировка теоремы не содержит никаких условий, поскольку в этом случае точек $\zeta \in \partial U_1(4\sigma) \setminus J(D, G)$ не существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Фиксируем произвольную функцию $F \in \mathbf{P}_G$. Согласно лемме 2 утверждение теоремы будет доказано, если мы найдем функцию $g \in \mathbf{P}_D$ такую, что разность $F - g$ принадлежит множеству $I_W(G)$. Функцию g будем искать в следующем виде:

$$g(z) = \tilde{e}(z)F(z) - \varphi(z)\nu(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Здесь $\varphi \in I_W(D)$ – функция, существование которой требуется в условии теоремы, $\tilde{e}(z)$ – срезающая функция, которую мы построим при помощи леммы 5 для множеств Ω и V , $\nu(z)$ – решение $\bar{\partial}$ -уравнения

$$\frac{d\nu}{d\bar{z}} = \frac{d\tilde{e}}{d\bar{z}} F\varphi^{-1}. \quad (16)$$

Прежде всего, построим множества Ω и V таким образом, чтобы функция g совпадала с F там, где необходимо, и правая часть в (16) удовлетворяла специальному неравенству. С этой целью выберем сначала подходящие числа $\sigma, \varepsilon, \delta > 0$, фигурирующие в формулировке теоремы.

Согласно определению пространства $\mathbf{P}_G$ в области G найдется выпуклый компакт K такой, что верно неравенство

$$|F(z)| \leq C_0 \exp H_K(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (17)$$

Выберем $\tau > 0$ так, чтобы замыкание множества $K^{7\tau}$ все еще лежало в G . Это равносильно такому выбору $\tau > 0$, при котором выполнена оценка

$$H_K(z) + 7\tau|z| < H_G(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (18)$$

Рассмотрим множество

$$\widetilde{M} = \{z: H_K(z) + 7\tau|z| < H_D(z)\}.$$

По определению $J(D, G)$ на множестве $\mathbf{S} \setminus J(D, G)$ функции H_D и H_G совпадают. Следовательно, в силу (18) верно вложение $\mathbf{S} \setminus (J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D) \subset \widetilde{M}$. Покажем, что для некоторого выпуклого компакта $K_1 \subset D$ множество $\mathbf{S} \setminus (J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D)$ вложено также и в

$$M = \{z: H_K(z) + 7\tau|z| < H_{K_1}(z)\}.$$

Пусть $z \in \mathbf{S} \setminus (J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D)$. Поскольку $z \in \widetilde{M}$, то в силу определения опорной функции H_D в области D найдется точка $y(z)$ такая, что

$$H_K(z) + 7\tau|z| < \text{Re}(y(z)z).$$

По непрерывности это неравенство продолжается в некоторую окрестность $Y(z)$ точки $y(z)$. По лемме 7 множество $\mathbf{S} \setminus (J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D)$ замкнуто, а потому компактно. Следовательно, из покрытия этого множества окрестностями $Y(z)$ можно выделить конечное подпокрытие $Y(z_1), \dots, Y(z_s)$. Тогда в качестве компакта $K_1 \subset D$ можно взять выпуклую оболочку объединения $\bigcup_{k=1}^s \{z_k\}$, опорная функция которого представляет собой максимум функций $\text{Re}(y(z_k)z)$. Таким образом, необходимое нам вложение имеет место. Более того, $\mathbf{S} \setminus (J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D)$ входит в M вместе со своей окрестностью $\bigcup_{k=1}^s Y(z_k)$. Поэтому для некоторого $\sigma > 0$ имеем

$$[\mathbf{S} \setminus (J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D)]^{4\sigma} \subset M. \quad (19)$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ такое, что

$$3\varepsilon + 7(3 + \ln 36)\varepsilon < \tau. \quad (20)$$

Остается подобрать положительное число δ . На него мы наложим несколько условий. Прежде всего, заметим, что компоненты $U_m(4\sigma)$, $m = 1, \dots, m(4\sigma)$, лежат в $\mathbf{S} \setminus \Theta_D$, а замыкание множества $[B(\zeta, 4\sigma) \setminus B(\zeta, \sigma)] \cap U_m(4\sigma)$, где $\zeta \in \partial U_m(4\sigma)$, принадлежит $U_m(4\sigma)$, поскольку, как было указано выше, расстояние между граничными точками $U_m(4\sigma)$ превышает 4σ . Следовательно, множество Y , являющееся объединением по всем $m = 1, \dots, m(4\sigma)$ и $\zeta \in \partial U_m(4\sigma)$ множеств $[B(\zeta, 4\sigma) \setminus B(\zeta, \sigma)] \cap U_m(4\sigma)$, компактно принадлежит внутренности $\mathbb{C} \setminus \Theta_D$, а вместе с ним этим свойством обладает и некоторое его δ -вздутие. Функция H_D непрерывна во внутренней $\mathbb{C} \setminus \Theta_D$, а потому равномерно непрерывна на $Y^{\tilde{\delta}}$, и мы можем найти $\delta > 0$ такое, что $19\delta < 1$ и для всех $m = 1, \dots, m(4\sigma)$ выполнено неравенство

$$|H_D(\eta) - H_D(\lambda)| \leq \varepsilon \quad \forall \eta \in B(\lambda, 19\delta), \quad \forall \lambda \in Y. \quad (21)$$

Пусть

$$d = \sup_{\eta \in Y^{3\delta}} |H_D(\eta)|.$$

Уменьшая при необходимости $\delta > 0$, можно считать, что $4\delta < \sigma$ и, кроме того, имеет место неравенство

$$(d + \tau) \frac{3\delta}{(1 - 3\delta)} < \tau. \quad (22)$$

Итак, мы выбрали числа $\sigma, \varepsilon, \delta > 0$. Согласно условию теоремы найдем функцию φ из множества $I_W(D)$ и для каждого номера $m = 1, \dots, m(4\sigma)$ найдем точки $\xi_{1,m}, \xi_{2,m} = \xi \in [B(\zeta, 3\sigma) \setminus B(\zeta, 2\sigma)] \cap U_m(4\sigma)$, соответствующие двум граничным точкам ζ компоненты $U_m(4\sigma)$, и последовательности $\{z_k^{1,m}\}_{k=1}^\infty \in \Pi(\xi_{1,m}, \delta)$, $\{z_k^{2,m}\}_{k=1}^\infty \in \Pi(\xi_{2,m}, \delta)$ такие, что выполнено (15). При этом нумерация точек $\xi_{1,m}, \xi_{2,m}$ по первому индексу произведена таким образом, что переход от $\xi_{1,m}$ к $\xi_{2,m}$ соответствует движению против часовой стрелки по окружности $\mathbf{S}$. Впрочем, обе точки $\xi_{1,m}$ и $\xi_{2,m}$ всегда будут в наличии лишь для компонент $U_m(4\sigma)$, не имеющих общей граничной точки с Θ_D (т.е. в силу выбранного способа нумерации для компонент с номерами $m = 2, \dots, m(4\sigma) - 1$), поскольку в этом случае замыкание $\overline{U_m(4\sigma)}$ лежит во внутренней области множества $\mathbb{C} \setminus \Theta_D$, где функция H_D непрерывна, а потому $\partial U_m(4\sigma) \cap J(D, G) = \emptyset$, и согласно условию теоремы для обеих граничных точек ζ компоненты $U_m(4\sigma)$ должны существовать точки ξ , удовлетворяющие (15). В том случае, когда компонента $U_1(4\sigma)$ имеет общую граничную точку с углом Θ_D , принадлежащую множеству $J(D, G)$, будем иметь лишь одну точку со вторым индексом, равным единице, а именно $\xi_{2,1}$. В противном случае имеем обе точки. Если же компонента $U_{m(4\sigma)}(4\sigma)$ имеет общую граничную точку с углом Θ_D , принадлежащую множеству $J(D, G)$, то будем иметь лишь одну точку со вторым индексом, равным $m(4\sigma)$, а именно $\xi_{1,m(4\sigma)}$. В противном случае также имеем обе точки. Таким образом, возможны случаи, когда отсутствуют обе точки $\xi_{1,1}$ и $\xi_{2,m(4\sigma)}$, либо имеется лишь одна из них, либо присутствуют обе. Последний случай самый простой. Рассмотрим ситуацию, когда в наличие имеется точка $\xi_{2,m(4\sigma)}$, а $\xi_{1,1}$ отсутствует. Остальные случаи рассматриваются аналогично, и мы не будем их разбирать, поскольку доказательство в этих случаях только упрощается.

Поскольку последовательность $\{z_k^{i,m}\}_{k=1}^\infty$ лежит на луче $\{t\xi_{i,m}, t > 0\}$, то для всех возможных значений индексов i и m в силу неравенства (15) и определения индикатора $h_\varphi(z)$ имеем

$$h_\varphi(\xi_{i,m}) \geq H_D(\xi_{i,m}) - \varepsilon.$$

Отсюда для тех же i и m с учетом (21) и включений $\varphi \in I_W(D) \subset \mathbf{P}_D$, $\xi_{i,m} \in Y$ получаем

$$h_\varphi(\eta) < H_D(\eta) \leq h_\varphi(\xi_{i,m}) + 2\varepsilon \quad \forall \eta \in B(\xi_{i,m}, 19\delta). \quad (23)$$

В силу (15) и (23) по лемме 3 для каждой точки $\xi_{i,m}$ найдем число $T_{i,m} > 0$ и область $Q_{i,m} = Q$, обладающую свойствами 1)–3) леммы 3. В силу свойства 3) для всех $z \in \partial Q_{i,m}$ верна оценка

$$\frac{\ln |\varphi(z)|}{|z|} \geq [H_D(\xi_{i,m}) - 3\varepsilon - q(h_\varphi(\xi_{i,m}) - H_D(\xi_{i,m}) + 7\varepsilon)](1 \pm 3\delta)^{-1}.$$

Отсюда, учитывая неравенства $h_\varphi(\xi) \leq H_D(\xi)$, $\xi \in \mathbb{C}$, и (20), (22), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\ln |\varphi(z)|}{|z|} &\geq [H_D(\xi_{i,m}) - 3\varepsilon - 7q\varepsilon](1 \pm 3\delta)^{-1} \\ &\geq [H_D(\xi_{i,m}) - \tau](1 \pm 3\delta)^{-1} \geq H_D(\xi_{i,m}) - \tau \\ &\quad - [|H_D(\xi_{i,m})| + \tau] \frac{3\delta}{1 - 3\delta} \geq H_D(\xi_{i,m}) - 2\tau, \quad z \in \partial Q_{i,m}. \end{aligned} \quad (24)$$

Из неравенства (23), как и при доказательстве леммы 3, получаем оценку

$$\frac{\ln |\varphi(t\xi)|}{t} \leq h_\varphi(\xi_{i,m}) + 4\varepsilon \quad \forall \xi \in B(\xi_{i,m}, 18\delta), \quad t \geq t_1,$$

т. е.

$$|\varphi(z)| \leq \exp(th_\varphi(\xi_{i,m}) + 4\varepsilon t) \quad \forall z \in B(t\xi_{i,m}, 18\delta t), \quad t \geq t_1. \quad (25)$$

Пусть $w \in \partial Q_{i,m}$. Если модуль w достаточно большой, то в силу свойства 2) множеств $Q_{i,m}$ из леммы 3 верно включение $\overline{B(w, 2)} \subset B(|w|\xi_{i,m}, 4\delta|w|)$. Поэтому из (25) и (24) с учетом неравенств $h_\varphi \leq H_D$ и $4\varepsilon < \tau$ для некоторого $t_2 \geq t_1$ по лемме 4 получаем

$$\begin{aligned} |\varphi(z)| &\geq \exp(H_D(\xi_{i,m})|w| - 2\tau|w|) - |z - w| \exp(h_\varphi(\xi_{i,m})|w| + 4\varepsilon|w|) \\ &\geq \exp(H_D(\xi_{i,m})|w| - 2\tau|w|)(1 - |z - w| \exp(3\tau|w|)) \\ &\geq \exp((H_D(\xi_{i,m}) - 2\tau)|w|)(1 - \exp(-\tau|w|)) \\ &\geq 2^{-1} \exp((H_D(\xi_{i,m}) - 2\tau)|w|), \\ &\quad z \in B(w, \exp(-4\tau|w|)), \quad w \in \partial Q_{i,m}, \quad |w| \geq t_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Пусть $z \in B(w, \exp(-4\tau|w|))$ и $w \in \partial Q_{i,m}$. Тогда в силу свойства 2) множеств $Q_{i,m}$ из леммы 3 при достаточно большом значении $|w|$ будет иметь место включение $z/|z| \in B(\xi_{i,m}, 4\delta)$. Поскольку $4\delta < \sigma$, то с учетом определения

множества Y и расположения точек $\xi_{i,m}$ получаем, что $z/|z| \in Y$. Используя теперь (21), (26) и однородность опорной функции, можем найти $t_3 \geq t_2$ такое, что

$$\begin{aligned} |\varphi(z)| &\geq 2^{-1} \exp(H_D(z) - 3\tau|z|), \\ z &\in B(w, \exp(-4\tau|w|)), \quad w \in \partial Q_{i,m}, \quad |w| \geq t_3. \end{aligned} \quad (27)$$

Для каждого $m = 1, \dots, m(4\sigma) - 1$ (если $m(4\sigma) = 1$, то этот этап доказательства пропускаем) через Γ_m обозначим тот из двух открытых углов, ограничиваемых лучами $\{t\xi_{2,m}, t \geq 0\}$ и $\{t\xi_{1,m+1}, t \geq 0\}$, в котором переход от первого луча ко второму осуществляется против часовой стрелки. Пусть T_0 – максимальное из всех чисел $T_{i,m}$. Положим

$$V_m = B(0, T_0) \cup [\Gamma_m \setminus (\overline{Q_{2,m}} \cup \overline{Q_{1,m+1}})].$$

В силу свойства 1) множеств $Q_{i,m}$ из леммы 3 граничные лучи угла Γ_m , за исключением их некоторых ограниченных частей, лежащих в круге $B(0, T_0)$, принадлежат внутренности объединения, стоящего в скобках. Поэтому каждая точка $z \in \partial V_m$ принадлежит $\partial Q_{2,m}$, $\partial Q_{1,m+1}$ или $\partial B(0, T_0)$.

Пусть $\xi_{1,m(4\sigma)+1}$ – произвольная фиксированная точка окружности $\mathbf{S}$, принадлежащая внутренности угла Θ_D , и $\Gamma_{m(4\sigma)}$ – открытый угол, построенный при помощи точек $\xi_{2,m(4\sigma)}$ и $\xi_{1,m(4\sigma)+1}$ подобно тому, как были построены углы Γ_m , $m = 1, \dots, m(4\sigma) - 1$. Положим

$$V_{m(4\sigma)} = B(0, T_0) \cup [\Gamma_{m(4\sigma)} \setminus \overline{Q_{2,m(4\sigma)}}].$$

Как и выше, луч $\{t\xi_{2,m(4\sigma)}, t \geq 0\}$, за исключением своей ограниченной части, лежащей в круге $B(0, T_0)$, принадлежит $Q_{2,m(4\sigma)}$. Поэтому каждая граничная точка $V_{m(4\sigma)}$ принадлежит либо $\partial B(0, T_0)$, либо $\partial Q_{2,m(4\sigma)}$, либо лучу $\{t\xi_{1,m(4\sigma)+1}, t \geq T_0\}$, причем последний целиком лежит на границе $V_{m(4\sigma)}$, поскольку с учетом расположения точек $\xi_{i,m}$ круг $B(\xi_{2,m(4\sigma)}, \sigma)$ не пересекается с углом Θ_D , и для каждого $z \in Q_{2,m(4\sigma)}$ точка $z/|z|$ принадлежит кругу $B(\xi_{2,m(4\sigma)}, 3\delta)$, который лежит в $B(\xi_{2,m(4\sigma)}, \sigma)$.

Рассмотрим множества

$$V' = \bigcup_{m=1}^{m(4\sigma)} V_m, \quad \Omega' = V' \cup \bigcup_{z \in \partial V'} B(z, \exp(-4\tau|z|)).$$

Взяв в качестве множеств Ω и V соответственно Ω' и V' , а в качестве чисел $A, a > 0$ – соответственно 4τ и 1 , по лемме 5 найдем функцию $e(z) = e'(z)$, удовлетворяющую условиям 1)–4) этой леммы.

Пусть $\zeta_0 \in J(D, G)$ – общая граничная точка компоненты $U_1(4\sigma)$ и угла Θ_D . Если $\zeta_0 \in \Delta(W)$, то, как было указано выше, будет выполнено равенство $H_D(\zeta_0) = H_{D(W)}(\zeta_0)$. Тогда в силу вложений $D \subset G \subset D(W)$ будет выполнено также равенство $H_D(\zeta_0) = H_G(\zeta_0)$, которое противоречит определению множества $J(D, G)$. Таким образом, $\zeta \notin \Delta(W)$. Поскольку $\Delta(W)$ – замкнутое множество, то найдется окрестность ω точки ζ , не пересекающаяся с $\Delta(W)$ и не содержащая $\xi_{1,m(4\sigma)+1}$. Фиксируем какую-нибудь точку $\xi_{2,m(4\sigma)+1} \in \mathbf{S}$, лежащую в пересечении этой окрестности и внутренности угла Θ_D , такую, что переход от $\xi_{1,m(4\sigma)+1}$

к $\xi_{2,m(4\sigma)+1}$ по окружности $\mathbf{S}$ внутри угла Θ_D осуществляется против часовой стрелки. Выберем $\tilde{\delta} > 0$ такое, что круг $B(\xi_{2,m(4\sigma)+1}, 4\tilde{\delta})$ компактно принадлежит $\text{int } \Theta_D \cap \omega$. По теореме об оценке снизу на окружностях целой функции конечного порядка и типа (см., например, [19, гл. 1, § 4, теорема 4.3]) найдутся последовательность $\{z_k\}_{k=1}^\infty \in \Pi(\xi_{2,m(4\sigma)+1}, \tilde{\delta})$ и вещественное число a такие, что выполнено неравенство

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(z_k)|}{|z_k|} \geq a.$$

Кроме того, в силу непрерывности, а потому ограниченности на компактах индикатора h_φ для некоторого $\tilde{\varepsilon} > 0$ имеет место также неравенство

$$h_\varphi(\eta) \leq h_\varphi(\xi_{2,m(4\sigma)+1}) + \tilde{\varepsilon} \quad \forall \eta \in B(\xi_{2,m(4\sigma)+1}, 19\tilde{\delta}).$$

Из двух последних соотношений по лемме 3 найдем число $T > T_0$ и область Q , удовлетворяющую условиям 1)–3) этой леммы. Согласно последнему из них будет верна оценка

$$\frac{\ln |\varphi(z)|}{|z|} \geq [a - \tilde{\varepsilon} - q(h_\varphi(\xi_{2,m(4\sigma)+1}) - a + 3\tilde{\varepsilon})](1 \pm 3\tilde{\delta})^{-1} = a', \quad z \in \partial Q. \quad (28)$$

Поскольку $\varphi(z)$ является функцией экспоненциального типа, то для некоторого $A' > 0$ и всех $z \notin B(0, T)$ имеет место неравенство

$$|\varphi(z)| \leq \exp(A'|w|) \quad \forall z \in \overline{B(w, 2)}.$$

Отсюда с учетом (28) для некоторого $t_4 \geq t_3$ по лемме 4 получаем

$$\begin{aligned} |\varphi(z)| &\geq \exp(a'|w|) - \exp(A'|w|)|w - z| \geq 2^{-1} \exp(a'|w|) \\ &\geq 2^{-1} \exp((a' - 1)|z|) \\ \forall z &\in B(w, \exp((a' - A' - 1)|w|)), \quad w \in \partial Q, \quad |w| \geq t_4. \end{aligned} \quad (29)$$

Пусть $\Gamma_{m(4\sigma)+1} \subset \Theta_D$ – открытый угол, построенный при помощи точек $\xi_{1,m(4\sigma)+1}$ и $\xi_{2,m(4\sigma)+1}$ так же, как были построены углы Γ_m , $m = 1, \dots, m(4\sigma)$. Рассмотрим множество

$$V'' = (\Gamma_{m(4\sigma)+1} \setminus \overline{Q}) \cup B(0, R),$$

где $R \geq \max\{t_3 + 1, T + 1\}$ выбрано так, что на окружности $\partial B(0, R)$ нет нулей функции $\varphi(z)$. Тогда в силу непрерывности $\varphi(z)$ найдутся постоянные $\tilde{c} > 0$ и $\tilde{a} \in (0, 1)$ такие, что выполнено неравенство

$$|\varphi(w)| \geq \tilde{c} \quad \forall w \in B(z, \tilde{a} \exp((a' - A' - 1)|z|)), \quad z \in \partial B(0, R). \quad (30)$$

Увеличивая при необходимости число R так, что оценка (30) сохранится (возможно, с другими постоянными $\tilde{c}, \tilde{a} > 0$), с учетом определения множества $\Delta(W)$ можно полагать, что для каждого общего нуля λ_j функций из $I_W(D)$, лежащего

вне круга $B(0, R)$, точка $\lambda_j/|\lambda_j|$ принадлежит вздутию $[\Delta(W)]^{\tilde{\sigma}}$, где $\tilde{\sigma}$ – минимум чисел σ и σ_1 , а σ_1 равно расстоянию от круга $B(\xi_{2,m(4\sigma)+1}, 4\tilde{\delta})$ до множества $\Delta(W)$, которое отлично от нуля в силу выбора $\tilde{\delta}$.

Как и выше, каждая граничная точка V'' , лежащая вне круга $B(0, R)$, принадлежит либо ∂Q , либо лучу $\{t\xi_{1,m(4\sigma)+1}, t \geq R\}$, причем последний в силу выбора окрестности ω и числа $\tilde{\delta} > 0$ целиком лежит на границе V'' . Положим

$$\Omega'' = V'' \cup \bigcup_{z \in \partial V''} B(z, \tilde{a} \exp((a' - A' - 1)|z|)).$$

Взяв в качестве множеств Ω и V соответственно Ω'' и V'' , а в качестве чисел $A, a > 0$ – соответственно $A' + 1 - a'$ и $\tilde{a}$, по лемме 5 найдем функцию $e(z) = e''(z)$, удовлетворяющую условиям 1)–4) этой леммы.

Заметим, что луч $\{t\xi_{1,m(4\sigma)+1}, t > 0\}$ лежит во внутренности множества $\overline{V''} \cup \overline{V_{m(4\sigma)}}$. Поэтому часть границы объединения $\overline{V''} \cup \overline{V'}$, лежащая вне круга $B(0, R)$, состоит лишь из точек, принадлежащих $\partial Q_{i,m}$ или ∂Q .

Множество $\Delta(W)$ не пересекается с окрестностью ω и, кроме того, не пересекается с компонентами $U_m(4\sigma)$, так как для каждого $\xi \in \Delta(W)$ выполнено равенство $H_D(\xi) = H_G(\xi) = H_{D(W)}(\xi)$, а $U_m(4\sigma)$ являются подмножествами $J(D, G)$. Следовательно, по построению для любого $t > 0$ и любого $\xi \in [\Delta(W)]^{\tilde{\sigma}}$ точка $t\xi$ принадлежит $\text{int } \overline{V''} \cup \overline{V'}$. Значит, в силу выбора числа $R > 0$ следует, что каждый общий нуль λ_j функций из $I_W(D)$ принадлежит множеству $\text{int } \overline{V''} \cup \overline{V'}$.

Положим $\Omega = \Omega' \cup \Omega''$, $V = \text{int } \overline{V''} \cup \overline{V'}$ и рассмотрим функцию

$$\tilde{e}(z) = 1 - (1 - e'(z))(1 - e''(z)), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Из определения $\tilde{e}(z)$ и свойств 1)–3) функций $e'(z)$ и $e''(z)$ из леммы 5, очевидно, следует, что этими же свойствами обладает и $\tilde{e}(z)$ на множествах Ω и V . Найдем оценку сверху для функции $|d\tilde{e}/d\bar{z}|$. В силу свойства 4) функций $e'(z)$ и $e''(z)$ найдутся числа $c_1, A_1 > 0$ такие, что

$$|d\tilde{e}(z)/d\bar{z}| \leq c_1 \exp(A_1|z|) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (31)$$

По построению все точки множества Ω'' (содержащего носитель функции $e''(z)$), лежащие вне некоторого круга с центром в начале координат, принадлежат углу Θ_D . Поэтому в каждой точке $z \notin \Theta_D$ с достаточно большим значением $|z|$ функция $\tilde{e}(z)$ совпадает с $e'(z)$ и согласно свойству 4) для $e'(z)$ найдется $c_2 > 0$ такое, что

$$|d\tilde{e}(z)/d\bar{z}| \leq c_2 \exp(4\tau|z|) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Theta_D. \quad (32)$$

Отметим еще, что в силу свойств 2) и 3) леммы 5 функция $d\tilde{e}/d\bar{z}$ отлична от нуля лишь на множестве $\Omega \setminus V$. По построению с учетом выбора числа R и сделанного нами замечания о границе объединения $\overline{V''} \cup \overline{V'}$ в каждой точке $z \in \Omega \setminus V$ выполнено хотя бы одно из неравенств (27), (29) или (30), причем в точках $z \in \Omega \setminus V$, лежащих вне угла Θ_D и вне некоторого круга с центром в начале координат, выполнено (27). Следовательно, в силу (27), (30) и (32) для некоторого $c_3 > 0$ имеем оценку

$$\left| \frac{d\tilde{e}}{d\bar{z}}(z) \varphi^{-1}(z) \right| \leq c_3 \exp(-H_D(z) + 7\tau|z|) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Theta_D. \quad (33)$$

Точно так же из (29)–(31) для некоторых $A_2, c_4 > 0$ получаем

$$\left| \frac{d\tilde{e}}{dz}(z)\varphi^{-1}(z) \right| \leq c_4 \exp(A_2|z|) \quad \forall z \in \Theta_D.$$

Поскольку $F(z)$ является целой функцией экспоненциального типа, то из последнего неравенства получаем

$$\left| \frac{d\tilde{e}}{dz}(z)\varphi^{-1}(z)F(z) \right| \leq c_5 \exp(A_3|z|) \quad \forall z \in \Theta_D, \quad (34)$$

где A_3, c_5 – некоторые положительные постоянные.

Нетрудно заметить, что согласно построению для каждого $z \in \Omega$, лежащего вне угла Θ_D и достаточно далеко от начала координат, точка $z/|z|$ принадлежит множеству $[\mathbf{S} \setminus (J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D)]^{4\sigma}$. Поэтому в силу (19) и однородности функций H_K и H_{K_1} всё множество $\Omega \setminus \Theta_D$, за исключением некоторой своей ограниченной части, принадлежит множеству M . Следовательно, с учетом (33), определения M и неравенства $H_{K_1} \leq H_D$ получаем

$$\left| \frac{d\tilde{e}}{dz}(z)\varphi^{-1}(z)F(z) \right| \leq \tilde{C}_0 c_3 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Theta_D, \quad (35)$$

где $\tilde{C}_0$ – некоторая положительная постоянная.

Напомним, что мы рассматриваем случай, когда одна из двух точек множества $\partial\Theta_D \cap \mathbf{S}$ (выше она была обозначена ζ_0) принадлежит $J(D, G)$, а другая, скажем ζ_1 , этим свойством не обладает. Поэтому круг $B(\zeta_1, 4\sigma)$ является частью множества $[\mathbf{S} \setminus (J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D)]^{4\sigma}$. Пусть $\tilde{\zeta}_1$ – та из точек пересечения $B(\zeta_1, 4\sigma) \cap \mathbf{S}$, которая лежит в угле Θ_D , а $\tilde{\zeta}_0$ – та из точек пересечения $B(\xi_{2, m(4\sigma)+1}, 4\delta) \cap \mathbf{S}$, которая находится ближе к ζ_0 . Через S_0 обозначим дугу окружности $\mathbf{S}$, соединяющую $\tilde{\zeta}_0, \tilde{\zeta}_1$ и лежащую в Θ_D .

Поскольку функция $\varphi(z)$ принадлежит пространству $\mathbf{P}_D$, то существуют выпуклый компакт $K_2 \subset D$ и числа $\beta, \gamma > 0$ такие, что

$$|\varphi(z)| \leq \beta \exp H_{K_2}(z) \leq \beta \exp(H_D(z) - 4\gamma|z|) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (36)$$

Можно полагать, что $K_1 \subset K_2$. В противном случае в качестве компакта K_2 можно взять выпуклую оболочку объединения $K_1 \cup K_2$ (при этом $\gamma > 0$, вероятно, несколько уменьшится).

По лемме 6, где в качестве $A > 0$ рассмотрен максимум из чисел A_3 и

$$A_4 = \max_{z \in S_0} |H_K(z)| + \max_{z \in S_0} |H_{K_2}(z)|,$$

найдем выпуклый компакт L , обладающий свойствами 1), 2) этой леммы. В силу первого из этих свойств и неравенства (35) имеем

$$\left| \frac{d\tilde{e}}{dz}(z)\varphi^{-1}(z)F(z) \right| \leq \tilde{C}_0 c_3 \exp H_L(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Theta_D.$$

Поскольку правая часть в (34) отлична от нуля лишь на множестве $\Omega \setminus V$ и для всех достаточно больших по модулю $z \in \Omega \setminus V$ точка $z/|z|$ принадлежит кругу $B(\xi_{2,m(4\sigma)+1}, 4\tilde{\delta})$, а, следовательно, и множеству S_0 , то из (34) и свойства 2) функции H_L получаем

$$\left| \frac{d\tilde{e}}{d\bar{z}}(z) \varphi^{-1}(z) F(z) \right| \leq c_6 \exp H_L(z) \quad \forall z \in \Theta_D,$$

где c_6 – некоторая положительная постоянная. Из двух последних неравенств следует, что

$$\int_{\mathbb{C}} \left| \frac{d\tilde{e}}{d\bar{z}}(z) \varphi^{-1}(z) F(z) \right|^2 \exp(-2H_L(z) - 2\gamma|z|) d\mu(z) < +\infty$$

(здесь μ – мера Лебега в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$). Тогда в силу [21, теорема 3.6.2] в пространстве локально интегрируемых с квадратом модуля функций в $\mathbb{C}$ найдется элемент ν , который (в обобщенном смысле) удовлетворяет уравнению (16), такой, что

$$\int_{\mathbb{C}} |\nu(z)|^2 \exp(-2H_L(z) - 4\gamma|z|) d\mu(z) < +\infty. \quad (37)$$

Из (16) следует, что для функции $g(z)$, определенной в начале доказательства, всюду в плоскости в обобщенном смысле имеет место равенство $dg/d\bar{z} \equiv 0$. Следовательно (см., например, [21, гл. 3, §6, п. 2, рассуждение, приведенное вслед за формулой (3.6.38)]), функция $g(z)$ является целой. Остается доказать, что $g \in \mathbf{P}_D$ и $F - g \in I_W(G)$. Первое включение означает, что модуль целой функции g удовлетворяет некоторым специальным оценкам на скорость роста сверху. Установим эти оценки.

Пусть $z \in \Omega$ такая, что $z/|z| \in S_0$. Тогда из (17), свойства 1) функции $\tilde{e}(z)$, свойства 2) функции H_L и определения числа A_4 следует, что

$$|F(z)\tilde{e}(z)| \leq C_0 \exp H_K(z) \leq C_0 \exp(H_{K_2}(z) + H_L(z)).$$

Пусть теперь $z \in \Omega$ такая, что $z/|z| \in [\mathbf{S} \setminus (J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D)]^{4\sigma}$. Тогда, применяя последовательно свойство 1) функции $\tilde{e}(z)$, неравенства (17), (19), определение множества M , вложение $K_1 \subset K_2$ и свойство 3) функции H_L , получаем

$$|F(z)\tilde{e}(z)| \leq C_0 \exp H_K(z) \leq C_0 \exp H_{K_1}(z) \leq C_0 \exp(H_{K_2}(z) + H_L(z)).$$

Поскольку для каждого $z \in \Omega$, находящегося достаточно далеко от начала координат, точка $z/|z|$ принадлежит либо S_0 , либо множеству $[\mathbf{S} \setminus (J(D, G) \cup \text{int } \Theta_D)]^{4\sigma}$, то из предыдущего с учетом свойства 3) функции $\tilde{e}(z)$ для некоторого $\hat{C}_0 > 0$ имеем

$$|F(z)\tilde{e}(z)| \leq \hat{C}_0 \exp(H_{K_2}(z) + H_L(z)) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, верно, что

$$\int_{\mathbb{C}} |F(z)\tilde{e}(z)|^2 \exp(-2H_{K_2}(z) - 2H_L(z) - 4\gamma|z|) d\mu(z) < +\infty.$$

Кроме того, в силу (36) и (37) получаем

$$\int_{\mathbb{C}} |\varphi(z)\nu(z)|^2 \exp[-2H_{K_2}(z) - 2H_L(z) - 4\gamma|z|] d\mu(z) < +\infty.$$

Таким образом,

$$\int_{\mathbb{C}} |g(z)|^2 \exp[-2H_{K_2+L}(z) - 4\gamma|z|] d\mu(z) < +\infty. \quad (38)$$

Используя последовательно неравенство о среднем для субгармонических функций, неравенство Коши–Буняковского и (38), имеем

$$\begin{aligned} |g(w)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{B(w,1)} |g(z)| d\mu(z) \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{B(w,1)} |g(z)| \exp[-H_{K_2+L}(z) - 2\gamma|z|] \exp[H_{K_2+L}(z) + 2\gamma|z|] d\mu(z) \\ &\leq c_7 \left(\int_{B(w,1)} \exp[2H_{K_2+L}(z) + 4\gamma|z|] d\mu(z) \right)^{1/2} \\ &\leq c_8 \exp \left(\sup_{z \in B(w,1)} [H_{K_2+L}(z) + 2\gamma|z|] \right). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом однородности функции, стоящей в квадратной скобке, и ее равномерной непрерывности на $\mathbf{S}$ получаем

$$|g(w)| \leq c_9 \exp[H_{K_2+L}(w) + 3\gamma|w|] \quad \forall w \in \mathbb{C}. \quad (39)$$

Здесь c_7, c_8, c_9 – некоторые положительные постоянные.

Пусть K_3 – выпуклый компакт, являющийся замыканием алгебраической суммы $K_2 + L + B(0, 3\gamma)$. Тогда

$$H_{K_3}(z) \equiv H_{K_2+L}(z) + 3\gamma|z|.$$

В силу второго неравенства в (36) и свойства 1) функции H_L имеем

$$H_{K_3}(z) + \gamma|z| \leq H_D(z)$$

для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \Theta_D$. Согласно определению Θ_D это неравенство тривиально выполнено и в угле Θ_D . Оно означает, что компакт K_3 принадлежит области D . Но тогда из неравенства (39) следует, что $g \in \mathbf{P}_D$.

Остается показать включение $F - g \in I_W(G)$. Поскольку подпространство W допускает спектральный синтез, то это включение будет иметь место, если разность $F - g$ принадлежит $\mathbf{P}_G$ и обращается в нуль во всех общих нулях λ_j с кратностью, не меньшей чем m_j . То, что $F - g \in \mathbf{P}_G$, легко следует из включений $F \in \mathbf{P}_G, g \in \mathbf{P}_D$ и $D \subset G$. Как было отмечено ранее, каждый общий нуль λ_j функций из $I_W(D)$ принадлежит множеству $V = \text{int } \overline{V''} \cup \overline{V'}$. Поэтому с учетом свойства 2) функции $\tilde{e}(z)$ и определения функции $g(z)$ последняя в некоторой окрестности каждого λ_j совпадает с $F(z) - \nu(z)\varphi(z)$. По условию теоремы $\varphi \in I_W(D)$ и, следовательно, $\varphi(z)$ обращается в нуль во всех точках λ_j с кратностью, не меньшей чем m_j . Тогда, очевидно, этим же свойством обладает и функция $F - g$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Сравним результат теоремы 1 и соответствующий результат теоремы 4 из [18]. Главным их отличием друг от друга является оценка снизу на функцию $\varphi \in I_W(D)$. В теореме 1 в качестве такой оценки выступает неравенство (15), а в теореме 4 из [18] – следующее неравенство:

$$\underline{h}_\varphi(\xi) \geq H_D(\xi) - H_{G_0}(\xi) - \varepsilon, \quad (40)$$

где G_0 – максимальная выпуклая область такая, что

$$h_\varphi(z) + H_{G_0}(z) \leq H_D(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Заменив, если это необходимо, функцию $\varphi \in I_W(D)$ на функцию $\varphi\psi \in I_W(D)$, где $\psi \in \mathbf{P}_{G_0}$ имеет регулярный рост во всей плоскости и индикатор h_ψ , мало отличающийся от опорной функции H_{G_0} (такая функция ψ всегда существует), можно добиться того, чтобы неравенство (40) влекло за собой следующую оценку:

$$\underline{h}_\varphi(\xi) \geq H_D(\xi) - 2\varepsilon.$$

Отсюда следует (см. ниже лемму 10), что для некоторой последовательности $\{z_k\}$, лежащей на луче $\{t\xi, t > 0\}$ и такой, что $|z_k| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$, имеет место неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(z_k)|}{|z_k|} \geq H_D(\xi) - c\varepsilon,$$

где $c > 0$ не зависит от $\varepsilon > 0$. Причем точки z_k , $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяют условию $\lim_{k \rightarrow \infty} (|z_{k+1}|/|z_k|) = 1$. Последняя оценка означает, что выполнено неравенство (15). Однако в (15) на последовательность $\{z_k\}$ наложено более слабое ограничение: $|z_{k+1}|/|z_k| \leq 1 + \delta$. Таким образом, условие (40) влечет за собой условие (15). Обратное утверждение, вообще говоря, не верно. Даже, если (15) выполнено, может оказаться, что $\underline{h}_\varphi(\xi) = -\infty$.

3. Необходимые условия продолжения функций. Прежде чем перейти к основному результату этого пункта, докажем несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 8. Пусть φ_1, φ_2 – целые функции экспоненциального типа, постоянные $d_1, d_2 > 0$ и выпуклые компакты $K_1, K_2 \subset \mathbb{C}$ таковы, что верны следующие оценки:

$$\ln |\varphi_1(z)| \leq d_1 + H_{K_1}(z), \quad \ln |\varphi_2(z)| \leq d_2 + H_{K_2}(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Пусть, далее, φ_1, φ_2 обращаются в нуль в точках λ_j с кратностью, не меньшей чем m_j , $j = 1, 2, \dots$. Тогда для каждого $\tau \in [0, 1]$ существуют целая функция экспоненциального типа φ , обращающаяся в нуль в точках λ_j с кратностью, не меньшей чем m_j , $j = 1, 2, \dots$, множество $E \subset \mathbb{C}$, постоянные $c, d > 0$ и функция $\varepsilon(z)$ такие, что выполнено следующее:

- 1) $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$;
- 2) множество E может быть покрыто кругами $B(z_i, r_i)$, $i = 1, 2, \dots$, так, что $\sum_{|z_i| > R} r_i \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ и $r_i \leq r$, $i = 1, 2, \dots$;
- 3) $|\ln |\varphi(z)| - \tau \ln |\varphi_1(z)| - (1 - \tau) \ln |\varphi_2(z)|| \leq c \ln |z|$, $z \in \mathbb{C} \setminus E$;
- 4) $\ln |\varphi(z)| \leq d + \tau H_{K_1}(z) + (1 - \tau) H_{K_2}(z) + \varepsilon(z)|z|$, $z \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем функцию

$$f(z) = \prod_{j \geq 1} \left(1 - \frac{z}{\lambda_j}\right)^{m_j} \exp\left(\frac{m_j z}{\lambda_j}\right).$$

Поскольку точки λ_j с кратностью m_j , $j = 1, 2, \dots$, являются частью нулей целой функции экспоненциального типа (например, φ_1), то (см. [19, гл. 1, §3, теоремы 3.1 и 3.3]) $f(z)$ – целая функция первого порядка (но, возможно, бесконечно-го типа), обращающаяся в нуль лишь в точках λ_j с кратностью m_j , $j = 1, 2, \dots$. Тогда с учетом условий леммы функции $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1/f$ и $\tilde{\varphi}_2 = \varphi_2/f$ целые, а в силу [19, теорема 3.6] они имеют порядок не выше первого. В частности, для некоторых $a, b > 0$ и каждого $\tau \in [0, 1]$ будет выполнена оценка

$$\tau \ln |\tilde{\varphi}_1(z)| + (1 - \tau) \ln |\tilde{\varphi}_2(z)| \leq a + b|z|^2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Этого неравенства достаточно для применения теоремы 5 из [22] к субгармонической функции, стоящей в левой его части. Согласно этой теореме найдутся целая функция $\tilde{\varphi}(z)$, постоянная $c > 0$ и исключительное множество $E \subset \mathbb{C}$ такие, что

$$|\ln |\tilde{\varphi}(z)| - \tau \ln |\tilde{\varphi}_1(z)| - (1 - \tau) \ln |\tilde{\varphi}_2(z)|| \leq c \ln |z|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E,$$

причем множество E может быть покрыто кругами $B_i = \{z: |z - z_i| < r_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, такими, что $\sum_{|z_i| > R} r_i \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$.

Положим $\varphi = f\tilde{\varphi}$. Тогда функция φ обращается в нуль в точках λ_j с кратностью, не меньшей чем m_j , $j = 1, 2, \dots$, а с учетом последней оценки и определения φ_1, φ_2 легко получаем п. 3) из утверждения леммы. Далее, в силу этого пункта и неравенств для функций φ_1, φ_2 из условия леммы получаем

$$\begin{aligned} \ln |\varphi(z)| &\leq \tau \ln |\varphi_1(z)| + (1 - \tau) \ln |\varphi_2(z)| + c \ln |z| \\ &\leq \tilde{d} + \tau H_{K_1}(z) + (1 - \tau) H_{K_2}(z) + \tilde{\varepsilon}(z)|z|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E, \end{aligned} \quad (41)$$

где $\tilde{d} = \tau d_1 + (1 - \tau) d_2$ и $\tilde{\varepsilon}(z) = c \ln |z|$.

Поскольку

$$\sum_{|z_i| > R} r_i \rightarrow 0, \quad (42)$$

то найдется число $R > 0$ такое, что $\sum_{|z_i| > R} r_i < 1$. Кроме того, как отмечено при доказательстве использованной нами теоремы 5 из [22], каждая точка плоскости попадает не более чем в шесть кругов B_i . Вместе с (42) это означает, что радиусы r_i , $i = 1, 2, \dots$, равномерно ограничены некоторым числом $r > 0$. Таким образом, п. 2) леммы также выполнен.

Рассмотрим произвольную точку $z \in E \setminus B(0, R + r + 3)$. Пусть круги B_{i_k} – та часть кругов B_i , которые пересекают круг $B(z, 3)$. Тогда, как и в лемме 3, для каждого k верно неравенство $|z_{i_k}| > R$. Поэтому с учетом выбора числа R получаем $\sum_k h_{i_k} < 2$, где h_{i_k} – диаметр круга B_{i_k} . Из последней оценки следует,

что для некоторого $t \in (0, 3)$ окружность $\partial B(z, t)$ не пересекает множество E , а потому на ней выполнено неравенство (41), т. е.

$$\begin{aligned} \ln |\varphi(x)| &\leq \tilde{d} + \tau H_{K_1}(y) + (1 - \tau) H_{K_2}(y) + \tilde{\varepsilon}(y)|y| \\ &\leq \tilde{d} + \sup_{y \in \partial B(z, t)} (\tau H_{K_1}(y) + (1 - \tau) H_{K_2}(y) + \tilde{\varepsilon}(y)|y|) \quad \forall x \in \partial B(z, t). \end{aligned}$$

Оценим отдельно супремум каждого слагаемого, стоящего в круглой скобке:

$$\begin{aligned} \sup_{y \in \partial B(z, t)} \tau H_{K_1}(y) &= \tau |z| \sup_{y \in \partial B(z, t)} H_{K_1}(y/|z|) \leq \tau |z| (H_{K_1}(z/|z|) + \varepsilon_1(z)) \\ &= \tau H_{K_1}(z) + \tau \varepsilon_1(z) |z|. \end{aligned}$$

Здесь в равенствах мы пользовались однородностью функции H_{K_1} , а в неравенстве – ее равномерной непрерывностью. При этом $\varepsilon_1(z) \rightarrow 0$, когда $z \rightarrow \infty$, поскольку точки $y/|z|$ становятся сколь угодно близкими к $z/|z|$ для достаточно больших по модулю z . Аналогично получаем

$$\sup_{y \in \partial B(z, t)} (1 - \tau) H_{K_2}(y) \leq (1 - \tau) H_{K_2}(z) + (1 - \tau) \varepsilon_2(z) |z|,$$

где $\varepsilon_2(z) \rightarrow 0$, когда $z \rightarrow \infty$. Учитывая определение $\tilde{\varepsilon}(z)$, легко получить также следующее неравенство:

$$\sup_{y \in \partial B(z, t)} \tilde{\varepsilon}(y)|y| \leq \varepsilon_3(z) |z|,$$

где $\varepsilon_3(z) \rightarrow 0$, когда $z \rightarrow \infty$. Таким образом, объединяя последние оценки, имеем

$$\begin{aligned} \ln |\varphi(x)| &\leq \tilde{d} + \tau H_{K_1}(z) + (1 - \tau) H_{K_2}(z) + \varepsilon(z) |z| \quad \forall x \in \partial B(z, t), \\ \varepsilon(z) &= \tau \varepsilon_1(z) + (1 - \tau) \varepsilon_2(z) + \varepsilon_3(z). \end{aligned}$$

Это неравенство, по принципу максимума для субгармонических функций, будет выполнено и во всем круге $B(z, t)$, и, в частности, в точке z , откуда следует справедливость п. 4) из утверждения леммы для всех $z \notin B(0, R + r + 3)$, если в качестве d взять любое число, большее $\tilde{d}$. Выбирая $d > 0$ достаточно большим и доопределяя подходящим образом $\varepsilon(z)$, добьемся того, чтобы необходимое нам неравенство было выполнено во всей плоскости. Пункт 1) из утверждения леммы выполнен по построению. Лемма доказана.

ЛЕММА 9. Пусть D, G – выпуклые области в $\mathbb{C}$, $D \subset G$. Для любого $\gamma > 0$ и любого конечного набора точек $\xi_1, \dots, \xi_m$ из множества $J(D, G)$ найдется целая функция экспоненциального типа ψ , обладающая следующими свойствами:

- 1) $\psi \in \mathbf{P}_G$;
- 2) $h_\psi(\xi) \leq H_D(\xi) + \gamma |\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{C}$;
- 3) $\lim_{t \rightarrow +\infty} ((\ln |\psi(t\xi_j)|)/t) \geq H_D(\xi_j), \quad j = 1, \dots, m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $\gamma > 0$. Можно считать, что набор $\xi_1, \dots, \xi_m$ не содержит совпадающих точек. В противном случае исключим из него часть точек, оставив лишь по одной из каждой группы совпадающих точек. Искомую функцию будем находить в следующем виде:

$$\psi(\xi) = \exp(z_1\xi) + \dots + \exp(z_m\xi),$$

где $z_1, \dots, z_m$ — специальным образом подобранные точки из области G . Подбором этих точек мы сейчас и займемся.

Пусть L_j , $j = 1, \dots, m$, — опорная прямая к области D в направлении ξ_j , т.е. $L_j = \{z: \operatorname{Re}(z\xi_j) = H_D(\xi_j)\}$ (на самом деле, в направлении, комплексно-сопряженном с ξ_j). Такая прямая существует, поскольку $\xi_j \in J(D, G)$, и поэтому $H_D(\xi_j) < +\infty$. Среди L_j , $j = 1, \dots, m$, не существует совпадающих прямых, так как $\xi_1, \dots, \xi_m$ различны и D — область. Для каждого $j = 1, \dots, m$ рассмотрим множество $L_j \cap G$. Покажем, что оно не пусто. Возьмем произвольную точку y из области D . По определению опорной функции имеем

$$\operatorname{Re}(y\xi_j) < H_D(\xi_j). \quad (43)$$

Поскольку $H_D(\xi_j) < H_G(\xi_j)$, то также по определению опорной функции найдем точку $y'_j \in G$ такую, что

$$H_D(\xi_j) < \operatorname{Re}(y'_j\xi_j) < H_G(\xi_j). \quad (44)$$

В силу вложения $D \subset G$ обе точки y и y'_j , а в силу выпуклости G и весь отрезок $[y, y'_j]$ принадлежат области G . Из (43) и (44) следует, что на отрезке $[y, y'_j]$ найдется точка $y_{j,0}$ такая, что $\operatorname{Re}(y_{j,0}\xi_j) = H_D(\xi_j)$. Таким образом, $y_{j,0}$ принадлежит L_j , а значит, и пересечению $L_j \cap G$.

Покажем теперь, что во множестве $L_j \cap G$ существуют точки, находящиеся на сколь угодно малом расстоянии от области D . Согласно определению опорной функции найдем последовательность $x_{j,n} \in D$, $n = 1, 2, \dots$, такую, что $\operatorname{Re}(x_{j,n}\xi_j) \rightarrow H_D(\xi_j)$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть вначале $\{x_{j,n}\}$ ограничена. Тогда, переходя при необходимости к подпоследовательности, можно считать, что $\{x_{j,n}\}$ сходится к точке $x_{j,0} \in \overline{D}$. Поскольку $x_{j,n} \in D$, $y_{j,0} \in G$ и $D \subset G$, то для каждого $\xi \in \mathbf{S}$ верны неравенства

$$\operatorname{Re}(x_{j,n}\xi) < H_D(\xi), \quad \operatorname{Re}(y_{j,0}\xi) < H_G(\xi), \quad H_D(\xi) \leq H_G(\xi).$$

Следовательно, для любого $\tau \in (0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}((\tau y_{j,0} + (1-\tau)x_{j,0})\xi) &= \tau \operatorname{Re}(y_{j,0}\xi) + (1-\tau) \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(x_{j,n}\xi) \\ &< \tau H_G(\xi) + (1-\tau)H_D(\xi) \leq \tau H_G(\xi) + (1-\tau)H_G(\xi) = H_G(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbf{S}. \end{aligned}$$

Таким образом, полуинтервал $[y_{j,0}, x_{j,0})$ принадлежит области G . Кроме того, в силу выбора последовательности $\{x_{j,n}\}$ имеем

$$\operatorname{Re}(x_{j,0}\xi_j) = H_D(\xi_j).$$

Последнее равенство означает, что точка $x_{j,0}$, а потому и весь отрезок $[y_{j,0}, x_{j,0}]$ принадлежат прямой L_j . Следовательно, полуинтервал $[y_{j,0}, x_{j,0})$ принадлежит $L_j \cap G$. Он содержит точки, сколь угодно близкие к $x_{j,0}$, а значит, и к D .

Пусть теперь последовательность $\{x_{j,n}\}$ не ограничена. В силу ее выбора расстояние от $x_{j,n}$ до прямой L_j стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Через $y_{j,n}$, $n = 1, 2, \dots$, обозначим точку прямой L_j такую, что $|x_{j,n} - y_{j,n}|$ равно расстоянию от $x_{j,n}$ до L_j . Тогда $|x_{j,n} - y_{j,n}| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, и нам достаточно показать, что некоторая подпоследовательность последовательности $\{y_{j,n}\}$ принадлежит области G . Поэтому, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $|y_{j,n}| \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, все точки $y_{j,n}$ лежат на прямой L_j по одну сторону от $y_{j,0}$ и пронумерованы в порядке неубывания расстояний от них до точки $y_{j,0}$. Тогда для каждого $n = 1, 2, \dots$ точка $y_{j,n}$ лежит на отрезке $[y_{j,0}, y_{j,k}]$, $k \geq n$. Фиксируем $n = 1, 2, \dots$ и через τ_k , $k \geq n$, обозначим число из отрезка $[0, 1]$ такое, что $y_{j,n} = \tau_k y_{j,0} + (1 - \tau_k) y_{j,k}$. Последовательность $\{\tau_k\}$ сходится к единице, так как $|y_{j,k}| \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Поскольку $y_{j,0} \in G$, то найдется $\beta > 0$, для которого будет выполнено неравенство

$$\operatorname{Re}(y_{j,0}\xi) + \beta < H_G(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbf{S}.$$

Выберем номер k со следующими свойствами: $|x_{j,k} - y_{j,k}| < \beta$ и $\tau_k > 1/2$. Тогда с учетом предыдущей оценки и вложения $D \subset G$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(y_{j,n}\xi) &= \tau_k \operatorname{Re}(y_{j,0}\xi) + (1 - \tau_k) \operatorname{Re}(y_{j,k}\xi) \\ &< \tau_k H_G(\xi) - \tau_k \beta + (1 - \tau_k) \operatorname{Re}(x_{j,k}\xi) + (1 - \tau_k) \operatorname{Re}((y_{j,k} - x_{j,k})\xi) \\ &\leq \tau_k H_G(\xi) - \frac{\beta}{2} + (1 - \tau_k) H_D(\xi) + \frac{|y_{j,k} - x_{j,k}|}{2} < H_G(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbf{S}. \end{aligned}$$

Это означает, что точки $y_{j,n}$, $n = 1, 2, \dots$, принадлежат области G .

Таким образом, во множестве $L_j \cap G$, $j = 1, \dots, m$, и области D найдутся точки, сколь угодно близкие друг к другу. Поэтому можно выбрать $z_1 \in L_1 \cap G$ и $z'_1 \in D$ так, что $|z_1 - z'_1| < \gamma$. Поскольку z_1 принадлежит G вместе с некоторой своей окрестностью, а среди L_j , $j = 1, \dots, m$, не существует одинаковых прямых, то можно считать, что $z_1 \notin L_j$, $j = 2, \dots, m$. Тогда будут выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z_1 \xi_1) &= H_D(\xi_1), \quad \operatorname{Re}(z_1 \xi_j) \neq H_D(\xi_j), \quad j = 2, \dots, m, \\ \operatorname{Re}(z_1 \xi) &= \operatorname{Re}(z'_1 \xi) + \operatorname{Re}((z_1 - z'_1)\xi) \leq H_D(\xi) + \gamma|\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Предположим, что мы уже выбрали точки $z_1, \dots, z_{s-1}$ из области G , удовлетворяющие следующим условиям для любых $k, p = 1, \dots, s-1$:

$$\operatorname{Re}(z_k \xi_k) = H_D(\xi_k), \quad (45)$$

$$\operatorname{Re}(z_k \xi_j) \neq H_D(\xi_j), \quad j \neq k, \quad (46)$$

$$\operatorname{Re}(z_k \xi_j) \neq \operatorname{Re}(z_p \xi_j), \quad p \neq k, \quad j = 1, \dots, m, \quad (47)$$

$$\operatorname{Re}(z_k \xi) \leq H_D(\xi) + \gamma|\xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{C}. \quad (48)$$

Выберем теперь z_s так, чтобы соотношения (45)–(48) не нарушились и для $k, p = s$. Отметим, что ни одна из прямых $\{z: \operatorname{Re}(z \xi_j) = \operatorname{Re}(z_k \xi_j)\}$, $k = 1, \dots, s-1$,

$j = 1, \dots, m$, не совпадает с прямой L_s . Это легко следует из (46) и того, что $\xi_1, \dots, \xi_m$ различны. Согласно доказанному ранее найдем точки $z_s \in L_s \cap G$ и $z'_s \in D$ такие, что $|z_s - z'_s| < \gamma$. Тогда, как и выше, будут выполнены (45) и (48). Кроме того, можно считать, что z_s не лежит ни на одной из прямых L_j , $j \neq s$, и $\{z: \operatorname{Re}(z\xi_j) = \operatorname{Re}(z_k\xi_j)\}$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, s-1$. Но тогда будут выполнены также (46) и (47).

Итак, мы выбрали точки $z_1, \dots, z_m$, обладающие свойствами (45)–(48). Рассмотрим функцию $\psi(\xi)$, определенную в начале доказательства, и покажем, что она обладает свойствами 1)–3) из утверждения леммы. Прежде всего, заметим, что индикатор функции $\exp(z_j\xi)$ равен $\operatorname{Re}(z_j\xi)$ и, так как $z_j \in G$, удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re}(z_j\xi) < H_G(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbf{S}$. Поэтому функции $\exp(z_j\xi)$, $j = 1, \dots, m$, а вместе с ними и их сумма принадлежат пространству $\mathbf{P}_G$. Это влечет справедливость свойства 1).

Фиксируем $\xi \in \mathbf{S}$ и выберем номер $j = 1, \dots, m$ такой, что

$$\operatorname{Re}(z_j\xi) = \max_{1 \leq k \leq m} \operatorname{Re}(z_k\xi).$$

Тогда

$$\begin{aligned} h_\psi(\xi) &= \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\psi(t\xi)|}{t} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\exp(z_1\xi) + \dots + \exp(z_m\xi)|}{t} \\ &\leq \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\exp(z_j\xi)|}{t} + \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |1 + \sum_{k \neq j} \exp((z_k - z_j)\xi)|}{t} \\ &\leq \operatorname{Re}(z_j\xi) + \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln m}{t} = \operatorname{Re}(z_j\xi). \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (48) получаем свойство 2). Если ξ совпадает с одним из ξ_k , $k = 1, \dots, m$, то выбранный выше номер j является единственным в силу (47). Поэтому с учетом (45) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\psi(t\xi_k)|}{t} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\exp(z_j\xi_k)|}{t} + \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |1 + \sum_{k \neq j} \exp((z_k - z_j)\xi_k)|}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\exp(z_j\xi_k)|}{t} = \operatorname{Re}(z_j\xi_k) \geq \operatorname{Re}(z_k\xi_k) = H_D(\xi_k). \end{aligned}$$

Таким образом, свойство 3) также выполнено, и лемма полностью доказана.

ЛЕММА 10. Пусть φ – целая функция экспоненциального типа, $\xi \in \mathbf{S}$ и множество $E \subset \mathbb{C}$ является объединением кругов $B(y_i, r_i)$, $i = 1, 2, \dots$, таких, что $\sum_{|y_i| > R} r_i \rightarrow 0$, когда $R \rightarrow \infty$, и $r_i \leq r$, $i = 1, 2, \dots$. Предположим, что для некоторого $c_0 \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\underline{h}_\varphi(\xi) \geq c_0$. Тогда существует последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что выполнено следующее:

- 1) $x_k \in \{t\xi, t > 0\} \setminus E$, $k = 1, 2, \dots$;
- 2) последовательность $\{|x_k|\}$, монотонно возрастающая, стремится к $+\infty$;
- 3) $\lim_{k \rightarrow \infty} (|x_{k+1}|/|x_k|) = 1$;
- 4) $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} ((\ln |\varphi(x_k)|)/|x_k|) \geq c_0 - q_0(h_\varphi(\xi) - c_0)$, $q_0 = 3 + \ln 48$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно условию леммы 2.7 из работы [17] найдем последовательность $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ со следующими свойствами:

- а) $|z_j| \rightarrow +\infty$;
- б) $|z_j/|z_j| - \xi| \rightarrow 0$;
- в) $|z_{j+1}|/|z_j| \rightarrow 1$;
- г) $\lim_{j \rightarrow \infty} ((\ln |\varphi(z_j)|)/|z_j|) \geq c_0$.

Для каждого $m = 1, 2, \dots$ выберем $\delta_m > 0$ такое, что $14\delta_m < 1$ и

$$h_{\varphi}(\zeta) \leq h_{\varphi}(\xi) + 2^{-m-1} \quad \forall \zeta \in B(\xi, 14\delta_m).$$

Можно считать, что $\delta_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Отсюда, как и в лемме 3, следует, что можно выбрать $t_{0,m} > 0$ так, что будет верно неравенство

$$\frac{\ln |\varphi(t\zeta)|}{t} \leq h_{\varphi}(\xi) + 2^{-m} \quad \forall \zeta \in B(\xi, 13\delta_m), \quad t \geq t_{0,m}.$$

Согласно свойству б) последовательности $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ найдем номер $j_{0,m}$ такой, что $\xi \in B(z_j/|z_j|, \delta_m)$ (а значит, $B(z_j/|z_j|, 12\delta_m) \subset B(\xi, 13\delta_m)$), и $B(z_j, 12\delta_m|z_j|)$ лежит во множестве $\{t\zeta, \zeta \in B(\xi, 13\delta_m), t \geq t_{0,m}\}$ для всех $j \geq j_{0,m}$. Тогда, как и в лемме 3, с учетом последней оценки и свойства г) последовательности $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ в круге $B(z_j, 2\delta_m|z_j|)$, $j \geq j_{0,m}$, но вне исключительных кружков с общей суммой радиусов, равной $\delta_m|z_j|/4$, будет выполнено неравенство

$$\frac{\ln |\varphi(z)|}{|z|} \geq [c_0 - 2^{-m} + q_0(h_{\varphi}(\xi) - c_0 + 2^{-m+1})](1 \pm 2\delta_m)^{-1},$$

где $q_0 = 3 + \ln 48$, а знак в круглой скобке совпадает со знаком выражения, стоящего в квадратной скобке. Кроме того, увеличивая, если это необходимо, номер $j_{0,m}$, так же, как и в лемме 3, можно найти числа $d_{j,m} \in (1, 2)$, $m = 1, 2, \dots$, $j \geq j_{0,m}$, такие, что окружность $\partial B(z_j, d_{j,m}\delta_m|z_j|)$ не имеет общих точек с исключительными кружками и множеством E . Поскольку $\xi \in B(z_j/|z_j|, \delta_m)$, то окружность $\partial B(z_j, d_{j,m}\delta_m|z_j|)$ в двух точках пересекает луч $\{t\xi, t > 0\}$. Одну из этих точек (любую) обозначим через $z_{j,m}$. Таким образом, для каждого $m = 1, 2, \dots$ мы построили неограниченную (в силу свойства а) для $\{z_j\}_{j=1}^{\infty}$ и того, что $\delta_m < 1$) последовательность $\{z_{j,m}\}_{j=j_{0,m}}^{\infty}$, лежащую на луче $\{t\xi, t > 0\}$ и такую, что

$$\frac{\ln |\varphi(z_{j,m})|}{|z_{j,m}|} \geq [c_0 - 2^{-m} + q_0(h_{\varphi}(\xi) - c_0 + 2^{-m+1})](1 \pm 2\delta_m)^{-1}, \quad j \geq j_{0,m}.$$

Построим теперь требуемую последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. В качестве x_1 возьмем какую-нибудь точку $z_{j,1}$, где $j > j_{0,1}$. Если $j > j_{0,2}$, то в качестве x_2 возьмем точку $z_{s,2}$ с минимальным номером $s > j$ таким, что $|z_{s,2}| > |x_1|$. В противном случае в качестве x_2 возьмем точку $z_{s,1}$ с минимальным номером $s > j$ таким, что $|z_{s,1}| > |x_1|$. Предположим, что мы уже выбрали точки $x_1, \dots, x_{k-1}$, и пусть $x_{k-1} = z_{j,m}$. Если $j > j_{0,m+1}$, то в качестве x_k возьмем точку $z_{s,m+1}$ с минимальным номером $s > j$ таким, что $|z_{s,m+1}| > |x_{k-1}|$. В противном случае в качестве x_k возьмем точку $z_{s,m}$ с минимальным номером $s > j$ таким, что $|z_{s,m}| > |x_{k-1}|$. Покажем, что последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ обладает свойствами 1)–4) из утверждения леммы.

Пусть j_k, m_k таковы, что $x_k = z_{j_k, m_k}$. Свойство 1) выполнено, поскольку точки z_{j_k, m_k} принадлежат множеству $\{t\xi, t > 0\} \setminus E$. По построению $|x_{k+1}| > |x_k|$, $j_{k+1} > j_k$ и $m_{k+1} \geq m_k$, $k = 1, 2, \dots$. Следовательно, $j_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$. Кроме того, m_k также стремится к бесконечности. В противном случае для некоторого $\tilde{k}$ номер m_k остается постоянным при $k \geq \tilde{k}$. Последнее означает, что $j_k < j_{0, m_k+1}$, $k \geq \tilde{k}$. Однако это невозможно, поскольку $j_k \rightarrow \infty$. Далее, так как $z_{j_k, m_k} \in B(z_{j_k}, 2\delta_{m_k}|z_{j_k}|)$, то свойство 2) выполнено в силу свойства а) последовательности $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ и того, что $\delta_{m_k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Полагая $j = j_k$ и $m = m_k$ в полученной выше оценке снизу для $|\varphi(z_{j, m})|$ и учитывая, что $m_k \rightarrow \infty$ и $\delta_{m_k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, легко получаем свойство 4).

Поскольку $|x_{k+1}|/|x_k| > 1$, то для доказательства свойства 3) достаточно получить подходящую оценку сверху отношения $|x_{k+1}|/|x_k|$. В силу минимальности номера $s = j_{k+1} > j_k$, который выбирался выше, возможны два случая: либо верно неравенство $|z_{j_{k+1}-1, m_{k+1}}| \leq |z_{j_k, m_k}|$, $k = 1, 2, \dots$, либо имеет место равенство $j_{k+1} - 1 = j_k$. В первом случае с учетом включения $z_{j_k, m_k} \in B(z_{j_k}, 2\delta_{m_k}|z_{j_k}|)$ имеем

$$\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} = \frac{|z_{j_{k+1}, m_{k+1}}|}{|z_{j_k, m_k}|} \leq \frac{|z_{j_{k+1}, m_{k+1}}|}{|z_{j_{k+1}-1, m_{k+1}}|} \leq \frac{(1 + 2\delta_{m_{k+1}})|z_{j_{k+1}}|}{(1 - 2\delta_{m_{k+1}})|z_{j_{k+1}-1}|}.$$

Во втором случае

$$\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} = \frac{|z_{j_{k+1}, m_{k+1}}|}{|z_{j_k, m_k}|} \leq \frac{|z_{j_{k+1}, m_{k+1}}|}{|z_{j_{k+1}-1, m_k}|} \leq \frac{(1 + 2\delta_{m_{k+1}})|z_{j_{k+1}}|}{(1 - 2\delta_{m_k})|z_{j_{k+1}-1}|}.$$

В обоих случаях с учетом свойства в) последовательности $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ и того, что $\delta_{m_k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, получаем свойство 3) из утверждения леммы и, таким образом, завершаем доказательство.

ЛЕММА 11. Пусть φ — целая функция экспоненциального типа и $\xi \in \mathbf{S}$. Предположим, что для некоторого $a \in \mathbb{R}$ и последовательности $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ выполнено следующее:

- 1) последовательность $\{|x_k|\}$, монотонно возрастающая, стремится к $+\infty$;
- 2) $x_k \in \{t\xi, t > 0\}$, $k = 1, 2, \dots$;
- 3) $\lim_{k \rightarrow \infty} (|x_{k+1}|/|x_k|) = 1$;
- 4) $\lim_{k \rightarrow \infty} ((\ln |\varphi(x_k)|)/|x_k|) \geq a$.

Тогда верно неравенство $\underline{h}_\varphi(\xi) \geq a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. $\underline{h}_\varphi(\xi) < a - 2\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда согласно предложению 9.3 из [15] существуют $\delta_0 > 0$ и последовательность $\{t_j\}_{j=1}^\infty$ такие, что $t_j \rightarrow +\infty$ и

$$\frac{\ln |\varphi(t_j \eta)|}{t_j} \leq a - 2\varepsilon, \quad \eta \in B(\xi, \delta_0), \quad j = 1, 2, \dots$$

Отсюда, уменьшая, если это необходимо, $\delta_0 > 0$, легко получить следующее:

$$\frac{\ln |\varphi(z)|}{|z|} \leq a - \varepsilon, \quad z \in B(t_j \xi, \delta_0 t_j), \quad j = 1, 2, \dots$$

В силу условий 3) и 4) найдем номер k_0 такой, что для всех $k > k_0$

$$\frac{\ln |\varphi(x_k)|}{|x_k|} > a - \varepsilon \quad \text{и} \quad |x_{k+1}| < (1 + \delta_0)|x_k|.$$

Тогда точки x_k , $k > k_0$, не принадлежат ни одному из кругов $B(t_j \xi, \delta_0 t_j)$, $j = 1, 2, \dots$. С учетом условий 1) и 2) найдутся номера $k > k_0$ и j такие, что $|x_k| < t_j < |x_{k+1}|$. Следовательно, выполнено неравенство

$$|x_{k+1}| - |x_k| \geq 2\delta_0 t_j > 2\delta_0 |x_k|.$$

Противоречие. Лемма доказана.

Перейдем теперь к формулировке и доказательству основного результата этого пункта. При этом будем использовать те же обозначения, что и в теореме 1.

ТЕОРЕМА 2. Пусть D, G – выпуклые области в $\mathbb{C}$, $D \subset G$. Пусть, далее, W – нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез. Предположим, что каждая функция из W аналитически продолжается в область G и аппроксимируется в ней линейными комбинациями элементов из $E(W)$. Тогда имеет место вложение $G \subseteq D(W)$ и для любых $\sigma, \varepsilon, \delta > 0$ найдется функция $\varphi \in I_W(D)$ такая, что для каждого $m = 1, \dots, m(4\sigma)$ и каждой точки $\zeta \in \partial U_m(4\sigma) \setminus J(D, G)$ найдутся $\xi \in [B(\zeta, 3\sigma) \setminus B(\zeta, 2\sigma)] \cap U_m(4\sigma)$ и последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty \in \Pi(\xi, \delta)$ такие, что выполнено неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(x_k)|}{|x_k|} \geq H_D(\xi) - \varepsilon. \quad (49)$$

Предположим дополнительно, что во множестве $I_W(D)$ существует функция φ_1 такая, что $\underline{h}_{\varphi_1}(\eta) \neq -\infty \quad \forall \eta \in J(D, G)$. Тогда вместо (49) имеет место более сильное неравенство

$$\underline{h}_\varphi(\xi) \geq H_D(\xi) - \varepsilon.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $G \subseteq D(W)$ устанавливается в лемме 1.

Фиксируем произвольные числа $\sigma, \varepsilon, \delta > 0$. Подпространство W нетривиально, поэтому нетривиальным будет также подпространство $I_W(D)$. Пусть φ_1 – некоторый ненулевой элемент $I_W(D)$. С учетом равномерной непрерывности индикатора h_{φ_1} на компактах выберем положительное $\tilde{\delta}$ такое, что

$$19\tilde{\delta} < 1, \quad h_{\varphi_1}(\zeta) \leq h_{\varphi_1}(\xi) + \varepsilon \quad \forall \zeta \in B(\xi, 19\tilde{\delta}), \quad \xi \in \mathbf{S}, \quad (50)$$

$$\frac{2\tilde{\delta} + 3\tilde{\delta}^2}{(1 + 2\tilde{\delta})} \leq \delta. \quad (51)$$

По теореме об оценке снизу на окружностях целой функции конечного типа (см., например, [19, гл. 1, § 4, теорема 4.3]) найдутся $a > 0$ и возрастающая к $+\infty$ последовательность положительных чисел $\{r_k\}_{k=1}^\infty$ такие, что выполнены неравенства

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} < 1 + \tilde{\delta}, \quad \ln |\varphi_1(z)| > -a|z|, \quad |z| = r_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (52)$$

Выберем $\tau > 0$ из условия

$$\tau[a + \varepsilon + q(h + a + 3\varepsilon)](1 - 3\tilde{\delta})^{-1} < \varepsilon/2, \quad (53)$$

где $h = \max_{\xi \in S} |h_{\varphi_1}(\xi)|$ и $q = 3 + \ln 72$.

Поскольку $\varphi_1 \in I_W(D) \subset \mathbf{P}_D$, то найдутся выпуклый компакт $K_1 \subset D$ и числа $d_1, \beta > 0$ такие, что

$$\ln |\varphi_1(\xi)| \leq d_1 + H_{K_1}(\xi) \leq d_1 + H_D(\xi) - \beta|\xi|, \quad \xi \in \mathbb{C}. \quad (54)$$

Для каждого $m = 1, \dots, m(4\sigma)$ фиксируем произвольную точку $\xi_{i,m}$ из множества $[B(\zeta, 3\sigma) \setminus B(\zeta, 2\sigma)] \cap U_m(4\sigma)$, где $\zeta \in \partial U_m(4\sigma) \setminus J(D, G)$. Как и в теореме 1, индекс i принимает значения 1, 2 или только значение 1, в зависимости от того, сколько точек содержится в $\partial U_m(4\sigma) \setminus J(D, G)$. Поскольку $H_D(\xi_{i,m}) < +\infty \forall i, m$, то, уменьшая, если необходимо, $\tau > 0$ (при этом (53), конечно, не нарушится), можно считать, что выполнено следующее неравенство:

$$(1 - \tau)H_D(\xi_{i,m}) \geq H_D(\xi_{i,m}) - \varepsilon/2 \quad \forall i, m. \quad (55)$$

Выберем $\gamma > 0$ такое, что верно неравенство

$$-\tau\beta + (1 - \tau)2\gamma < 0. \quad (56)$$

По лемме 9 для числа $\gamma > 0$ и набора точек $\xi_{i,m}$, $i = 1, 2$, $m = 1, \dots, m(4\sigma)$, найдем целую функцию экспоненциального типа ψ , обладающую свойствами 1)–3) этой леммы. Согласно свойству 1) функции ψ , условию теоремы и лемме 2 существуют функции $\varphi_2 \in I_W(G)$ и $g \in \mathbf{P}_D$ такие, что $\psi = \varphi_2 + g$. Как и в лемме 9, нетрудно доказать истинность следующего равенства:

$$h_{\varphi_2}(\xi) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\varphi_2(t\xi)|}{t} = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\psi(t\xi) - g(t\xi)|}{t} \leq \max\{h_\psi(\xi), h_g(\xi)\}.$$

Поскольку $g \in \mathbf{P}_D$, то с учетом вложения $D \subset G$ и свойства 2) функции ψ получаем

$$h_{\varphi_2}(\xi) \leq \max\{H_D(\xi) + \gamma|\xi|, H_D(\xi)\} = H_D(\xi) + \gamma|\xi|, \quad \xi \in \mathbb{C}. \quad (57)$$

Кроме того, из свойства 3) функции ψ и неравенства $h_g(\xi) < H_D(\xi)$, $\xi \in \mathbb{C}$, следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\varphi_2(t\xi_{i,m})|}{t} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\psi(t\xi_{i,m})| + \ln |1 + g(t\xi_{i,m})\psi^{-1}(t\xi_{i,m})|}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\psi(t\xi_{i,m})|}{t} \geq H_D(\xi_{i,m}). \end{aligned} \quad (58)$$

Пусть $\tilde{K}_2$ – сопряженная диаграмма функции φ_2 , т. е. выпуклый компакт, опорная функция которого совпадает с h_{φ_2} , и $K_2 = \tilde{K}_2 + \overline{B(0, \gamma)}$. Из определения индикатора, теоремы Хартогса о семействах субгармонических функций [1, гл. 1, § 6,

теорема 6.1] и неравенства (57) следует, что для некоторого $d_2 > 0$ и каждого $\xi \in \mathbb{C}$ имеем

$$\ln |\varphi_2(\xi)| \leq d_2 + H_{K_2}(\xi) = d_2 + h_{\varphi_2}(\xi) + \gamma|\xi| \leq d_2 + H_D(\xi) + 2\gamma|\xi|. \quad (59)$$

Пусть $\{\lambda_j, m_j\}$ – общие нули и их кратности функций из пространства $I_W(G)$ (или, что то же самое, из пространства $I_W(D)$). Поскольку $\varphi_1 \in I_W(D)$, а $\varphi_2 \in I_W(G)$, то с учетом (54) и (59) по лемме 8 найдем целую функцию экспоненциального типа φ , обращающуюся в нуль в точках λ_j с кратностью, не меньшей чем m_j , функцию $\varepsilon(z)$ и множество $E \subset \mathbb{C}$, которые удовлетворяют условиям 1)–4) этой леммы. Покажем, что функция φ – искомая. Прежде всего докажем, что верно включение $\varphi \in I_W(D)$. Поскольку подпространство W допускает спектральный синтез, то для этого достаточно показать, что функция φ принадлежит $\mathbf{P}_D$ и обращается в нуль в точках λ_j с кратностью, не меньшей чем m_j . Последнее уже имеет место, поэтому докажем, что $\varphi \in \mathbf{P}_D$.

Из свойств 1) и 4) леммы 8 получаем

$$h_\varphi(\xi) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |\varphi(t\xi)|}{t} \leq \tau H_{K_1}(\xi) + (1 - \tau)H_{K_2}(\xi), \quad \xi \in \mathbf{S}.$$

Отсюда с учетом (54), (59) и (56) имеем

$$\begin{aligned} h_\varphi(\xi) &\leq \tau H_D(\xi) - \tau\beta + (1 - \tau)H_D(\xi) + 2(1 - \tau)\gamma \\ &= H_D(\xi) - \tau\beta + 2(1 - \tau)\gamma < H_D(\xi), \quad \xi \in \mathbf{S}, \end{aligned}$$

т. е. $h_\varphi(\xi) < H_D(\xi)$, $\xi \in \mathbf{S}$. Это означает, что $\varphi \in \mathbf{P}_D$.

Фиксируем точку $\xi_{i,m}$ и покажем теперь, что для некоторой последовательности $\{x_k\}_{k=1}^\infty \in \Pi(\xi_{i,m}, \delta)$ выполнено (49). Для каждого $k = 1, 2, \dots$ положим $z_k = r_k \xi_{i,m}$. Тогда в силу первого неравенства в (52) верно включение $\{z_k\}_{k=1}^\infty \in \Pi(\xi_{i,m}, \tilde{\delta})$. С учетом неравенств (50) и второго неравенства в (52) находим отсюда, что все условия леммы 3 выполнены для чисел $\tilde{\delta}, \varepsilon > 0$ и функции φ_1 . Согласно п. 4) этой леммы и неравенства (51) найдется последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty \in \Pi(\xi_{i,m}, \delta)$ такая, что $x_k \notin E$, $k = 1, 2, \dots$, и выполнены неравенства

$$\frac{\ln |\varphi_1(x_k)|}{|x_k|} \geq [a - \varepsilon - q(h_\varphi(\xi) - a + 3\varepsilon)](1 \pm 3\delta)^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда, используя (53), получаем

$$\frac{\tau \ln |\varphi_1(x_k)|}{|x_k|} \geq -\frac{\varepsilon}{2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда с учетом соотношений (58) и (55) находим, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau \ln |\varphi_1(x_k)| + (1 - \tau) \ln |\varphi_2(x_k)|}{|x_k|} \geq -\frac{\varepsilon}{2} + (1 - \tau)H_D(\xi_{i,m}) \geq H_D(\xi_{i,m}) - \varepsilon.$$

Учитывая еще свойство 3) функции φ из леммы 8, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(x_k)|}{|x_k|} &\geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau \ln |\varphi_1(x_k)| + (1 - \tau) \ln |\varphi_2(x_k)| - c \ln |x_k|}{|x_k|} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau \ln |\varphi_1(x_k)| + (1 - \tau) \ln |\varphi_2(x_k)|}{|x_k|} \geq H_D(\xi_{i,m}) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, первая часть теоремы полностью доказана.

Докажем теперь вторую ее часть. Предположим, что функция φ_1 , принадлежащая $I_W(D)$, удовлетворяет условию $\underline{h}_{\varphi_1}(\eta) \neq -\infty \forall \eta \in J(D, G)$. Выберем $c_0 \in \mathbb{R}$ такое, что выполнено неравенство $\underline{h}_{\varphi_1}(\xi_{i,m}) \geq c_0$ для всех i, m . Фиксируем i, m . По лемме 10 (где полагаем $\varphi = \varphi_1$ и $\xi = \xi_{i,m}$) найдем последовательность $\{x_k\}$, обладающую свойствами 1)–4) этой леммы. Выбирая $\tau > 0$ не из условия (53), а из условия

$$\tau(c_0 - q_0(h - c_0)) < \varepsilon/2,$$

где $h = \max_{\xi \in S} |h_{\varphi_1}(\xi)|$ и $q_0 = 3 + \ln 48$, мы, как и выше, найдем целую функцию $\varphi \in I_W(D)$ такую, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(x_k)|}{|x_k|} \geq H_D(\xi_{i,m}) - \varepsilon.$$

Отсюда по лемме 11 находим, что $\underline{h}_{\varphi}(\xi_{i,m}) \geq H_D(\xi_{i,m}) - \varepsilon$. Таким образом, теорема полностью доказана.

Из теорем 1 и 2 получаем следующий критерий аналитического продолжения функций из инвариантных подпространств в выпуклых областях из $\mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть D, G – выпуклые области в $\mathbb{C}$, $D \subset G$. Пусть, далее, W – нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) каждая функция из W аналитически продолжается в область G и аппроксимируется в ней линейными комбинациями элементов из $E(W)$;
- 2) имеет место вложение $G \subseteq D(W)$ и для любых $\sigma, \varepsilon, \delta > 0$ найдется функция $\varphi \in I_W(D)$ такая, что для каждого $m = 1, \dots, m(4\sigma)$ и каждой точки $\zeta \in \partial U_m(4\sigma) \setminus J(D, G)$ найдутся $\xi \in [B(\zeta, 3\sigma) \setminus B(\zeta, 2\sigma)] \cap U_m(4\sigma)$ и последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty \in \Pi(\xi, \delta)$ такие, что выполнено неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(x_k)|}{|x_k|} \geq H_D(\xi) - \varepsilon.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Последнее неравенство можно заменить на более сильное неравенство: $\underline{h}_{\varphi}(\xi) \geq H_D(\xi) - \varepsilon$, если в дополнение к условиям теоремы предположить, что $\underline{h}_{\varphi_1}(\eta) \neq -\infty$ для $\eta \in J(D, G)$ и некоторой функции $\varphi_1 \in I_W(D)$.

В заключение приведем еще один результат о принудительном аналитическом продолжении, в котором утверждается, что при условии продолжения функций из $W \subset H(D)$ в выпуклую область G эти функции автоматически продолжаются в некоторую максимальную выпуклую область, построенную по D и G .

Пусть D, G – выпуклые области и $D \subset G$. Положим

$$G(D) = \{z: \operatorname{Re}(z\xi) < H_D(\xi), \xi \in \mathbf{S} \setminus J(D, G)\}.$$

Очевидно, $G(D)$ является выпуклой областью.

ЛЕММА 12. Пусть D, G – выпуклые области и $D \subset G$. Тогда $G \subset G(D)$ и имеет место равенство $J(D, G) = J(D, G(D))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in G$. Тогда $\operatorname{Re}(z\xi) < H_G(\xi)$, $\xi \in \mathbf{S}$. Поскольку $H_D(\xi) \leq H_G(\xi)$, то в силу определения $J(D, G)$ получаем $H_D(\xi) = H_G(\xi)$, $\xi \in \mathbf{S} \setminus J(D, G)$. Следовательно, верно неравенство

$$\operatorname{Re}(z\xi) < H_G(\xi) = H_D(\xi), \quad \xi \in \mathbf{S} \setminus J(D, G),$$

которое означает, что $z \in G(D)$. Таким образом, $G \subset G(D)$.

Из последнего вложения следует, что

$$H_D(\xi) < H_G(\xi) \leq H_{G(D)}(\xi), \quad \xi \in J(D, G).$$

Поэтому $J(D, G) \subset J(D, G(D))$. Пусть теперь $\xi \in J(D, G(D))$. Выберем точку $z \in G(D)$ такую, что $H_D(\xi) < \operatorname{Re}(z\xi) < H_{G(D)}(\xi)$. По определению $G(D)$ имеем

$$\operatorname{Re}(z\eta) < H_D(\eta), \quad \eta \in \mathbf{S} \setminus J(D, G).$$

Следовательно, $\xi \notin \mathbf{S} \setminus J(D, G)$, т.е. $\xi \in J(D, G)$. Таким образом,

$$J(D, G(D)) \subset J(D, G),$$

и лемма полностью доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть D, G – выпуклые области в $\mathbb{C}$, $D \subset G$. Пусть, далее, W – нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез. Предположим, что каждая функция из W аналитически продолжается в область G и аппроксимируется в ней линейными комбинациями элементов из $E(W)$. Тогда каждая функция из W аналитически продолжается в область $G(D)$ и аппроксимируется в ней линейными комбинациями элементов из $E(W)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если условия теоремы выполнены, то будет иметь место утверждение теоремы 2. По лемме 12 $J(D, G(D)) = J(D, G)$. Поэтому будут выполнены условия теоремы 1, где в качестве области G необходимо взять $G(D)$. Тогда будет иметь место и утверждение теоремы 1, что завершает наше доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Область $G(D)$, вообще говоря, не совпадает с областью G . Например, рассмотрим какой-нибудь треугольник. В качестве D возьмем круг, вписанный в треугольник, а в качестве G – произвольную выпуклую область, содержащую D и содержащуюся в треугольнике, и граница которой пересекается с границей круга лишь в точках касания последнего с границей треугольника. Областью $G(D)$ в этом случае будет сам треугольник, который, безусловно, не обязан совпадать с G .

Список литературы

1. *Напалков В. В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
2. *Лейтвейс К.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
3. *Красичков-Терновский И. Ф.* Однородное уравнение типа свертки на выпуклых областях // ДАН СССР. 1971. Т. 197. № 1. С. 29–31.
4. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный анализ на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 87(129). № 4. С. 459–489.
5. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 88(130). № 1. С. 3–30.
6. *Леонтьев А. Ф.* Ряды полиномов Дирихле и их обобщения // Тр. МИАН. 1951. Т. 39. С. 1–215.
7. *Kahane J. P.* Sur quelques problemes d'unicite et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles // Ann. Inst. Fourier. 1953–1954. V. 5. P. 39–130.
8. *Леонтьев А. Ф.* О сходимости последовательности полиномов Дирихле // ДАН СССР. 1956. Т. 108. № 1. С. 23–26.
9. *Bailliet A.* Approximation de fonctions par des sommes d'exponentielles // C. R. Acad. Sci. Paris. 1959. V. 249. P. 2470–2471.
10. *Красичков-Терновский И. Ф.* Сходимость полиномов Дирихле // Сиб. матем. журн. 1966. Т. 7. С. 1039–1058.
11. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. Аналитическое продолжение // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. № 4. С. 933–947.
12. *Kiselman C. O.* Prolongement des solutions d'une equation aux derivees partielles a coefficients constants // Bull. Soc. Math. France. 1969. V. 97. P. 329–354.
13. *Sebbar A.* Prolongements des solutions holomorphes de certains operateurs differentiel d'ordre infini a coefficients constants // Lecture Notes in Math. 1980. V. 822. P. 199–220.
14. *Meril A., Struppa D. C.* Convolutors of holomorphic functions // Lecture Notes in Math. 1987. V. 1276. P. 253–275.
15. *Кривошеев А. С., Напалков В. В.* Комплексный анализ и операторы свертки // УМН. 1992. Т. 47. № 6. С. 3–58.
16. *Ishimura R., Okada Y.* The existence and the continuation of holomorphic solutions for convolution equations in tube domains // Bull. Soc. Math. France. 1994. V. 122. P. 413–433.
17. *Кривошеев А. С.* Об индикаторах целых функций и продолжении решений однородного уравнения свертки // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 8. С. 81–108.
18. *Кривошеев А. С.* Аналитическое продолжение функций из инвариантных подпространств в выпуклых областях комплексного пространства // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 2. С. 75–102.
19. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983.
20. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. I. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
21. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.
22. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций // Anal. Math. 1985. Т. 11. С. 257–282.

E-mail: sasha@imat.rb.ru

Поступило в редакцию
03.09.2001