Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Кудрявцев, Приближение производных функций конечной гладкости из неизотропных классов, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 1, 79–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/im467>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:32:02

УДК 517.5

С. Н. Кудрявцев

Приближение производных функций конечной гладкости из неизотропных классов

Найдена слабая асимптотика аппроксимационных характеристик, относящихся к задаче восстановления производной по значениям функций в заданном числе точек, задаче С. Б. Стечкина для оператора дифференцирования, задаче описания асимптотики поперечников для неизотропных классов Никольского и Бесова.

Библиография: 11 наименований.

Введение

В настоящей работе при соответствующих условиях, налагаемых на $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$, установлена слабая асимптотика, т. е. найден порядок величины наилучшей точности восстановления в пространстве $L_q(I^d)$ производной $\mathcal{D}^\lambda f$ по значениям в n точках функций f из классов Никольского $\mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$ и Бесова $\mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(I^d)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, кроме того, получена слабая асимптотика поведения, в зависимости от ρ , наилучшей точности приближения в $L_q(I^d)$ оператора $\mathcal{D}^\lambda$ на классах $\mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$ и $\mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(I^d)$ операторами, действующими из $L_s(I^d)$ в $L_q(I^d)$, норма которых не превосходит ρ , и, наконец, описана слабая асимптотика колмогоровского, гельфандовского, линейного, александровского и энтропийного n -поперечников в метрике $L_q(I^d)$ классов, состоящих из производных $\mathcal{D}^\lambda f$ функций f из единичного шара пространств $H_p^\alpha(I^d)$ и $B_{p,\theta}^\alpha(I^d)$.

Продолжены исследования, проводившиеся автором в [1]–[4] для упомянутых задач в отношении изотропных классов функций конечной гладкости.

Проблематика, к которой относятся рассматриваемые ниже задачи, занимает значительное место в теории приближений, и обзор результатов по ней в рамках настоящей статьи невозможен. Некоторое представление об исследованиях в этой области можно составить по работам [1]–[5] и приведенной в них литературе.

Отметим, что средства, использовавшиеся в [1]–[5] при получении как верхних, так и нижних оценок указанных выше величин для изотропных классов функций, неприменимы в отношении неизотропных классов. Помимо этого, применявшиеся в [1]–[5] схемы вывода верхних оценок точности приближений производных функций из изотропных классов оказались непригодными в ситуации неизотропных классов. Предложенные в работе средства и схемы вывода оценок позволили найти порядки отмеченных выше величин для неизотропных классов Никольского и Бесова.

Настоящая работа состоит из введения и четырех параграфов; в § 1 рассматриваются средства приближения, в § 2 – задача восстановления, в § 3 – задача приближения оператора дифференцирования, в § 4 – поперечники.

В заключение в качестве иллюстрации приведем некоторые результаты, относящиеся к классам $\mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$, состоящим из функций $f \in L_p(I^d)$, у которых при $j = 1, \dots, d$ обобщенная производная $\frac{\mathcal{D}^{l_j} f}{\mathcal{D} x_j^{l_j}}$, где $l_j = \max\{l \in \mathbb{Z}_+ : l < \alpha_j\}$, принадлежит $L_p(I^d)$, а L_p -норма разности этой производной с шагом h по j -й переменной не превосходит $|h|^{\alpha_j - l_j}$.

В §2 при соответствующих условиях для величины наилучшей точности восстановления по значениям в n точках

$$\sigma_n(\mathcal{D}^\lambda, \mathcal{H}_p^\alpha(I^d), L_q(I^d)) = \inf_{A, \varphi} \sup_{f \in \mathcal{H}_p^\alpha(I^d)} \|\mathcal{D}^\lambda f - A \circ \varphi(f)\|_{L_q(I^d)},$$

где $\inf$ берется по всем отображениям $A: \mathbb{R}^n \rightarrow L_q(I^d)$ и отображениям $\varphi: C(I^d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ вида $\varphi(f) = (f(x^1), \dots, f(x^n))$, $x^j \in I^d$, $j = 1, \dots, n$, установлено соотношение

$$\sigma_n(\mathcal{D}^\lambda, \mathcal{H}_p^\alpha(I^d), L_q(I^d)) \asymp n^{-\beta + (p^{-1} - q^{-1})_+}$$

при $\beta = (1 - \sum_{j=1}^d \alpha_j^{-1} \lambda_j) / (\sum_{j=1}^d \alpha_j^{-1})$, которое эквивалентно тому, что соблюдаются неравенства

$$c_1 n^{-\beta + (p^{-1} - q^{-1})_+} \leq \sigma_n(\mathcal{D}^\lambda, \mathcal{H}_p^\alpha(I^d), L_q(I^d)) \leq c_2 n^{-\beta + (p^{-1} - q^{-1})_+}$$

с константами $c_1, c_2 > 0$, зависящими от d, α, λ, p, q . При этом отображения A и φ , обеспечивающие по порядку наилучшую точность восстановления по значениям в n точках производной $\mathcal{D}^\lambda$ функций из $\mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$, можно построить следующим образом. Для n в зависимости от α подходящим образом выбирается $\kappa \in \mathbb{N}^d$, рассматривается система точек $\{x_{\kappa, \nu}^\mu \mid \nu \in \mathbb{Z}_+^d: \nu_j \leq \kappa_j - 1, j = 1, \dots, d; \mu \in \mathbb{Z}_+^d: \mu_j \leq [\alpha_j], j = 1, \dots, d\}$ с координатами

$$(x_{\kappa, \nu}^\mu)_j = \kappa_j^{-1} \left(\nu_j + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} ([\alpha_j] + 1)^{-1} \mu_j \right), \quad j = 1, \dots, d,$$

и отображение φ задается равенством $\varphi(f) = \{f(x_{\kappa, \nu}^\mu) \mid \nu \in \mathbb{Z}_+^d: \nu_j \leq \kappa_j - 1, j = 1, \dots, d; \mu \in \mathbb{Z}_+^d: \mu_j \leq [\alpha_j], j = 1, \dots, d\}$.

Для вектора $t = \{t_{\nu'}^{\mu'} \in \mathbb{R} \mid \nu' \in \mathbb{Z}_+^d: \nu'_j \leq \kappa_j - 1, j = 1, \dots, d; \mu' \in \mathbb{Z}_+^d: \mu'_j \leq [\alpha_j], j = 1, \dots, d\}$ его образ At при отображении A определяется тем, что $(At)(\cdot)$ для каждого $\nu \in \mathbb{Z}_+^d: \nu_j \leq \kappa_j - 1, j = 1, \dots, d$, на клетке $Q_{\kappa, \nu} = \{x: \kappa_j^{-1} \nu_j < x_j < \kappa_j^{-1} (\nu_j + 1), j = 1, \dots, d\}$ совпадает с $\mathcal{D}^\lambda(R_{\kappa, \nu} t)(\cdot)$, где $(R_{\kappa, \nu} t)(\cdot)$ — полином, имеющий по j -й переменной степень не выше $[\alpha_j]$, $j = 1, \dots, d$, и принимающий в каждой точке $x_{\kappa, \nu}^\mu$ значение $t_{\nu'}^{\mu'}$, $\mu \in \mathbb{Z}_+^d: \mu_j \leq [\alpha_j], j = 1, \dots, d$.

В §3 при соответствующих условиях показано, что в задаче С. Б. Стечкина величина наилучшей точности приближения

$$E(\mathcal{D}^\lambda, L_s(I^d), L_q(I^d), \mathcal{H}_p^\alpha(I^d), \rho) = \inf_V \sup_{f \in \mathcal{H}_p^\alpha(I^d)} \|\mathcal{D}^\lambda f - Vf\|_{L_q(I^d)},$$

где $\inf$ берется по всем непрерывным линейным операторам $V: L_s(I^d) \rightarrow L_q(I^d)$, норма которых не превосходит ρ , удовлетворяет соотношению

$$E(\mathcal{D}^\lambda, L_s(I^d), L_q(I^d), \mathcal{H}_p^\alpha(I^d), \rho) \asymp \rho^{-\gamma/\tau}$$

при $\gamma = 1 - \sum_{j=1}^d \alpha_j^{-1}(\lambda_j + (p^{-1} - q^{-1})_+)$, $\tau = \sum_{j=1}^d \alpha_j^{-1}(\lambda_j + (s^{-1} - q^{-1})_+)$.
 Причем строится оператор V с нормой $\|V\| \leq \rho$, дающий по порядку наилучшую точность приближения оператора $\mathcal{D}^\lambda$ на классе $\mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$. А именно, для ρ в зависимости от α, λ, s, q подходящим образом подбирается $\kappa \in \mathbb{N}^d$ и оператор V определяется равенством

$$Vf = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_+^d: \nu_j \leq \kappa_j - 1, j=1, \dots, d} (\mathcal{D}^\lambda S_{\kappa, \nu}(f|_{Q_{\kappa, \nu}})) \chi_{\kappa, \nu},$$

где $\chi_{\kappa, \nu}$ – характеристическая функция множества $Q_{\kappa, \nu}$; $S_{\kappa, \nu}$ – специальный оператор проектирования, действующий из пространства $L_1(Q_{\kappa, \nu})$ в пространство полиномов, имеющих по j -й переменной степень не выше $[\alpha_j]$.

§ 1. Средства приближения производных функций конечной гладкости из неизотропных классов

1.1. Введем обозначения, относящиеся к функциональным пространствам и классам, рассматриваемым в настоящей работе.

Для $d \in \mathbb{N}$ через $\mathbb{Z}_+^d$ обозначим множество

$$\mathbb{Z}_+^d = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{Z}^d: \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, d\}.$$

Обозначим также при $d \in \mathbb{N}$ для $l \in \mathbb{Z}_+^d$ через $\mathbb{Z}_+^d(l)$ множество

$$\mathbb{Z}_+^d(l) = \{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d: \lambda_j \leq l_j, j = 1, \dots, d\}.$$

Для $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$ через $\mathcal{P}^{d, l}$ обозначим пространство вещественных полиномов, состоящее из всех функций $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)} a_\lambda x^\lambda, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

где $a_\lambda \in \mathbb{R}$, $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} \dots x_d^{\lambda_d}$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$.

При $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$ для области $D \subset \mathbb{R}^d$ через $\mathcal{P}^{d, l}(D)$ обозначим пространство функций f , определенных в D , для каждой из которых существует полином $g \in \mathcal{P}^{d, l}$ такой, что $f = g|_D$.

Для топологического пространства T через $C(T)$ будем обозначать пространство непрерывных вещественных функций на T .

Для измеримого по Лебегу множества $D \subset \mathbb{R}^d$ при $1 \leq p \leq \infty$ через $L_p(D)$, как обычно, обозначим пространство всех вещественных измеримых на D функций f , для которых определена норма

$$\|f\|_{L_p(D)} = \begin{cases} \left(\int_D |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{x \in D} |f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

Для области $D \subset \mathbb{R}^d$ при $1 \leq p \leq \infty$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$ через $W_p^l(D)$ обозначим пространство всех функций $f \in L_p(D)$, у которых для каждого $j = 1, \dots, d$ обобщенная производная $\mathcal{D}_j^{l_j} f = \frac{\mathcal{D}_j^{l_j} f}{\mathcal{D} x_j^{l_j}}$ принадлежит пространству $L_p(D)$ с нормой

$$\|f\|_{W_p^l(D)} = \max\left(\|f\|_{L_p(D)}, \max_{j=1, \dots, d} \|\mathcal{D}_j^{l_j} f\|_{L_p(D)}\right).$$

Для области $D \subset \mathbb{R}^d$ и вектора $h \in \mathbb{R}^d$, как обычно, через D_h обозначим множество

$$D_h = \{x \in D: x + th \in D \forall t \in [0, 1]\}.$$

Для функции f , заданной в области $D \subset \mathbb{R}^d$, определим в D_h ее разность $\Delta_h f$ с шагом $h \in \mathbb{R}^d$ равенством

$$(\Delta_h f)(x) = f(x + h) - f(x), \quad x \in D_h,$$

а при $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, ее m -ю разность $\Delta_h^m f$ с шагом h определим в D_{mh} соотношением

$$(\Delta_h^m f)(x) = (\Delta_h(\Delta_h^{m-1} f))(x), \quad x \in D_{mh},$$

при этом $\Delta_h^0 f = f$.

Как известно (см. [6]), имеет место формула

$$(\Delta_h^m f)(\cdot) = \sum_{j=0}^m C_m^j (-1)^{m-j} f(\cdot + jh),$$

где $C_m^j = \frac{m!}{j!(m-j)!}$.

При $d \in \mathbb{N}$ для $j = 1, \dots, d$ через e_j будем обозначать вектор $e_j = (0, \dots, 0, 1_j, 0, \dots, 0)$, а под $\vec{1}$ будем понимать вектор $\vec{1} = \sum_{j=1}^d e_j$.

Пусть D – область в $\mathbb{R}^d$ и $1 \leq p \leq \infty$. Для $f \in L_p(D)$, $t > 0$ при $j = 1, \dots, d$, $m \in \mathbb{N}$ обозначим функцию

$$\Omega_j^m(f, t)_{L_p(D)} = \sup_{|h| \leq t} \text{vrai} \|\Delta_{he_j}^m f\|_{L_p(D_{mhe_j})}.$$

При $d \in \mathbb{N}$ через $\mathbb{R}_+^d$ обозначим множество $\mathbb{R}_+^d = \{x \in \mathbb{R}^d: x_j > 0, j = 1, \dots, d\}$.

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p \leq \infty$, D – область в $\mathbb{R}^d$ и компоненты $l = l(\alpha) \in \mathbb{Z}_+^d$ и $m = m(\alpha) \in \mathbb{N}^d$ при $j = 1, \dots, d$ определяются равенствами $l_j(\alpha) = [\alpha_j]$ (целая часть α_j), $m_j(\alpha) = 1$, если $\alpha_j \notin \mathbb{Z}$, и $l_j(\alpha) = \alpha_j - 1$, $m_j(\alpha) = 2$, если $\alpha_j \in \mathbb{Z}$. Тогда через $H_p^\alpha(D)$ обозначим пространство всех функций $f \in W_p^l(D)$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{H_p^\alpha(D)} = \max\left(\|f\|_{W_p^l(D)}, \max_{j=1, \dots, d} \sup_{t>0} t^{-(\alpha_j - l_j)} \Omega_j^{m_j}(\mathcal{D}_j^{l_j} f, t)_{L_p(D)}\right),$$

а через $\mathcal{H}_p^\alpha(D)$ – множество функций $f \in W_p^l(D)$, для которых выполнено неравенство

$$\max_{j=1, \dots, d} \sup_{t>0} t^{-(\alpha_j - l_j)} \Omega_j^{m_j}(\mathcal{D}_j^{l_j} f, t)_{L_p(D)} \leq 1.$$

Для области $D \subset \mathbb{R}^d$ при $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p \leq \infty$, $\theta \in \mathbb{R}^d$: $1 \leq \theta_j < \infty$, $j = 1, \dots, d$, полагая $l = l(\alpha) \in \mathbb{Z}_+^d$, $m = m(\alpha) \in \mathbb{N}^d$ (см. выше), через $B_{p,\theta}^\alpha(D)$ обозначим пространство всех функций $f \in W_p^l(D)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^\alpha(D)} = \max \left(\|f\|_{W_p^l(D)}, \max_{j=1,\dots,d} \left(\int_0^\infty t^{-1-\theta_j(\alpha_j-l_j)} \times (\Omega_j^{m_j}(\mathcal{D}_j^{l_j} f, t)_{L_p(D)})^{\theta_j} dt \right)^{1/\theta_j} \right),$$

а через $\mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(D)$ – множество всех функций $f \in W_p^l(D)$, для которых выполнено неравенство

$$\max_{j=1,\dots,d} \left(\int_0^\infty t^{-1-\theta_j(\alpha_j-l_j)} (\Omega_j^{m_j}(\mathcal{D}_j^{l_j} f, t)_{L_p(D)})^{\theta_j} dt \right)^{1/\theta_j} \leq 1.$$

В этих обозначениях, учитывая то обстоятельство, что для $f \in B_{p,\theta}^\alpha(D)$ при $j = 1, \dots, d$ и $t > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & t^{-(\alpha_j-l_j)} \Omega_j^{m_j}(\mathcal{D}_j^{l_j} f, t)_{L_p(D)} \\ & \leq 2^{1/\theta_j + \alpha_j - l_j} \left(\int_0^\infty \tau^{-1-\theta_j(\alpha_j-l_j)} (\Omega_j^{m_j}(\mathcal{D}_j^{l_j} f, \tau)_{L_p(D)})^{\theta_j} d\tau \right)^{1/\theta_j}, \end{aligned}$$

закключаем, что

$$\mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(D) \subset 4\mathcal{H}_p^\alpha(D). \quad (1.1.1)$$

В нормированном пространстве X через $B(X)$ обозначим единичный шар

$$B(X) = \{x \in X: \|x\|_X \leq 1\}.$$

Обозначим для $d \in \mathbb{N}$ куб $I^d = \{x \in \mathbb{R}^d: 0 < x_j < 1, j = 1, \dots, d\}$.

Предметом изучения в настоящей работе являются аппроксимационные свойства производных функций из классов $\mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$ и $\mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(I^d)$, а также $B(H_p^\alpha(I^d))$ и $B(B_{p,\theta}^\alpha(I^d))$.

1.2. Установим неравенство, с помощью которого получим оценку сверху наименьшего уклонения в $L_p(Q)$ полиномов из пространства $\mathcal{P}^{d,l+m-\vec{1}}$ от функций из пространства $W_p^l(Q)$ на клетке $Q = \{x \in \mathbb{R}^d: x_j^0 < x_j < x_j^0 + \delta_j, j = 1, \dots, d\}$, $x_j^0 \in \mathbb{R}$, $\delta_j > 0$, $j = 1, \dots, d$, через полунорму, задаваемую с помощью соответствующих разностей старших производных функций по каждой переменной. С этой целью получим верхнюю оценку наилучшей точности приближения функций из $L_p(I^d)$ полиномами из $\mathcal{P}^{d,l-\vec{1}}$ через полунорму, в определении которой участвует l_j -я разность функций по j -й переменной для каждого $j = 1, \dots, d$.

Отметим сначала некоторые полезные факты.

Нетрудно проверить, что при $d \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{N}^d$ для любой области $D \subset \mathbb{R}^d$, любой функции $f \in \mathcal{P}^{d,l-\vec{1}}(D)$ и для каждого $j = 1, \dots, d$ при любом $h \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$(\Delta_{he_j}^{l_j} f)(x) = 0, \quad x \in D_{l_j h e_j}. \quad (1.2.1)$$

При доказательстве предложения 1.2.2 (см. ниже) используется

ЛЕММА 1.2.1. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Тогда при $j = 1, \dots, d$ для любого непрерывного линейного оператора $T: L_p(I) \rightarrow L_p(I)$ существует единственный непрерывный линейный оператор $\mathcal{T}^j: L_p(I^d) \rightarrow L_p(I^d)$, обладающий тем свойством, что для любой функции $h \in L_p(I^d)$ почти для всех $(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_d) \in I^{d-1}$ в $L_p(I)$ выполнено равенство

$$(\mathcal{T}^j h(\cdot))(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d) = (Th(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d))(\cdot), \quad (1.2.2)$$

причем

$$\|\mathcal{T}^j\| = \|T\|. \quad (1.2.3)$$

При $j = 1, \dots, d$ через $\mathcal{U}_j$ обозначим отображение, которое каждому непрерывному линейному оператору $T: L_p(I) \rightarrow L_p(I)$ ставит в соответствие непрерывный линейный оператор $\mathcal{U}_j(T) = \mathcal{T}^j: L_p(I^d) \rightarrow L_p(I^d)$, удовлетворяющий (1.2.2).

Для открытого множества $D \subset \mathbb{R}^d$ через $C^\infty(D)$ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых в D функций, а через $C_0^\infty(D)$ – пространство функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, для каждой из которых $\text{supp } \varphi \subset D$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.2. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^d$ и $1 \leq p < \infty$. Тогда существует константа $c_1(d, l) > 0$ такая, что для любой функции $f \in L_p(I^d)$ существует полином $g \in \mathcal{P}^{d, l-1}$ такой, что

$$\|f - g\|_{L_p(I^d)} \leq c_1 \sum_{j=1}^d \left(\int_{B^1} \int_{I_{l_j \xi e_j}^d} |\Delta_{\xi e_j}^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}, \quad (1.2.4)$$

где $B^1 = [-1, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала установим справедливость предложения при $d = 1$. Для этого заметим, что из [7, формула (5)] вытекает, что при $l \in \mathbb{N}$ для любого $\varepsilon > 0$ существует набор функций $K \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}_j \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $j = 0, \dots, l-1$, $N \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{K} \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y): x = y\})$, обладающих следующими свойствами: $\text{supp } K \subset (0, \varepsilon)$ и $\text{supp } N \subset (0, \varepsilon)$, $\mathcal{K}(x, y) = 0$ при $x \in \mathbb{R}$, $y \in (\mathbb{R} \setminus \{z: \min(0, x) \leq z \leq \max(\varepsilon, x)\})$, причем $|\mathcal{K}(x, y)| \leq a(\mathcal{K}, \rho)|x - y|^{l-1}$ при $|x| < \rho$, $|y| < \rho$, $\rho \in \mathbb{R}_+$, и, кроме того, для любой локально суммируемой на $\mathbb{R}$ функции F для $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} F(x) &= (-1)^l \int_{\mathbb{R}} K(y) \Delta_y^l F(x) dy + \sum_{j=0}^{l-1} x^j \int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}_j(y) F(y) dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{K}(x, y) N(z) \Delta_z^l F(y) dy dz. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Далее, для $l \in \mathbb{N}$, фиксировав $\delta \in (0, 1/(2l+1))$ и $\varepsilon \in (0, \delta/l)$, рассмотрим соответствующую этому ε систему функций K , $\mathcal{L}_j$, $j = 0, \dots, l-1$, N , $\mathcal{K}$ с описанными выше свойствами и построим линейный непрерывный оператор $T^{l-1}: L_1(I) \rightarrow \mathcal{P}^{1, l-1}(I) \cap L_\infty(I)$, определенный для $f \in L_1(I)$ равенством

$$(T^{l-1}f)(x) = \sum_{j=0}^{l-1} x^j \int_I \mathcal{L}_j(y) f(y) dy.$$

Пусть теперь $1 \leq p < \infty$ и $f \in L_p(I)$. Определим на $\mathbb{R}$ локально суммируемую функцию F равенством

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in I, \\ 0 & \text{при } x \in \mathbb{R} \setminus I. \end{cases}$$

Тогда из (1.2.5), учитывая, что при $y \in (0, \varepsilon)$ интервал $(0, 1 - \delta)$ лежит во множестве I_{ly} и $\Delta_y^l F(x) = \Delta_y^l f(x)$ при $x \in I_{ly}$, а также то, что при $x \in (0, 1 - \delta)$ интервал $(\min(0, x), \max(\varepsilon, x))$ лежит в $(0, 1 - \delta)$, получаем, что для $x \in (0, 1 - \delta)$ выполнено равенство

$$\begin{aligned} f(x) - (T^{l-1}f)(x) &= (-1)^l \int_{\mathbb{R}} K(y) \Delta_y^l F(x) dy + \int_{\mathbb{R}} N(z) \int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}(x, y) \Delta_z^l F(y) dy dz \\ &= (-1)^l \int_0^\varepsilon K(y) \Delta_y^l f(x) dy + \int_0^\varepsilon N(z) \int_0^{1-\delta} \mathcal{K}(x, y) \Delta_z^l f(y) dy dz. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|f - T^{l-1}f\|_{L_p((0, 1-\delta))} &\leq \left\| \int_0^\varepsilon K(y) \Delta_y^l f(x) dy \right\|_{L_p((0, 1-\delta))} \\ &\quad + \left\| \int_0^\varepsilon N(z) \int_0^{1-\delta} \mathcal{K}(x, y) \Delta_z^l f(y) dy dz \right\|_{L_p((0, 1-\delta))}. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Для оценки первого слагаемого в правой части (1.2.6), пользуясь неравенством Гёльдера и теоремой Фубини, выводим

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^\varepsilon K(y) \Delta_y^l f(x) dy \right\|_{L_p((0, 1-\delta))}^p &= \int_0^{1-\delta} \left| \int_0^\varepsilon K(y) \Delta_y^l f(x) dy \right|^p dx \\ &\leq \left(\int_0^\varepsilon |K(y)|^{p'} dy \right)^{p/p'} \int_0^{1-\delta} \int_0^\varepsilon |\Delta_y^l f(x)|^p dy dx \\ &\leq \varepsilon^{p-1} \|K\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^p \int_0^\varepsilon \int_0^{1-\delta} |\Delta_y^l f(x)|^p dx dy \\ &\leq \|K\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^p \int_{B^1} \int_{I_{ly}} |\Delta_y^l f(x)|^p dx dy, \end{aligned}$$

где $p' = p/(p-1)$, или

$$\left\| \int_0^\varepsilon K(y) \Delta_y^l f(x) dy \right\|_{L_p((0, 1-\delta))} \leq c_2(l) \left(\int_{B^1} \int_{I_{ly}} |\Delta_y^l f(x)|^p dx dy \right)^{1/p}. \quad (1.2.7)$$

Оценивая подобным образом второе слагаемое в правой части (1.2.6), находим

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^\varepsilon N(z) \int_0^{1-\delta} \mathcal{K}(x, y) \Delta_z^l f(y) dy dz \right\|_{L_p((0, 1-\delta))}^p \\
&= \int_0^{1-\delta} \left| \int_{(0, 1-\delta) \times (0, \varepsilon)} \mathcal{K}(x, y) N(z) \Delta_z^l f(y) dy dz \right|^p dx \\
&\leq \left(\int_{(0, 1-\delta) \times (0, \varepsilon)} |\Delta_z^l f(y)|^p dy dz \right) \\
&\quad \times \int_0^{1-\delta} \left(\int_{(0, 1-\delta) \times (0, \varepsilon)} |\mathcal{K}(x, y)|^{p'} |N(z)|^{p'} dy dz \right)^{p/p'} dx \\
&\leq \|\mathcal{K}\|_{L_\infty(I^2)}^p \|N\|_{L_\infty(\mathbb{R})}^p \int_{B^1} \int_{I_{lz}} |\Delta_z^l f(y)|^p dy dz,
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^\varepsilon N(z) \int_0^{1-\delta} \mathcal{K}(x, y) \Delta_z^l f(y) dy dz \right\|_{L_p((0, 1-\delta))} \\
&\leq c_3(l) \left(\int_{B^1} \int_{I_{lz}} |\Delta_z^l f(y)|^p dy dz \right)^{1/p}. \quad (1.2.8)
\end{aligned}$$

Объединяя (1.2.6)–(1.2.8), приходим к неравенству

$$\|f - T^{l-1}f\|_{L_p((0, 1-\delta))} \leq c_4 \left(\int_{B^1} \int_{I_{l\xi}} |\Delta_\xi^l f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}. \quad (1.2.9)$$

Далее (ср. с соответствующим местом доказательства леммы 4 в [8]), учитывая равенство (1.2.1), а также то, что при $y \in (-2\delta, -\delta)$ интервал $(1 - \delta, 1)$ лежит во множестве I_{ly} , для $x \in (1 - \delta, 1)$ и $y \in (-2\delta, -\delta)$ имеем

$$\begin{aligned}
\Delta_y^l f(x) &= \Delta_y^l (f - T^{l-1}f)(x) \\
&= (-1)^l (f - T^{l-1}f)(x) + \sum_{j=1}^l (-1)^{l-j} C_l^j (f - T^{l-1}f)(x + jy)
\end{aligned}$$

или

$$(f - T^{l-1}f)(x) = (-1)^l \Delta_y^l f(x) - \sum_{j=1}^l (-1)^j C_l^j (f - T^{l-1}f)(x + jy),$$

откуда получаем

$$\begin{aligned}
(f - T^{l-1}f)(x) &= (-1)^l \delta^{-1} \int_{-2\delta}^{-\delta} \Delta_y^l f(x) dy \\
&\quad - \sum_{j=1}^l (-1)^j C_l^j \delta^{-1} \int_{-2\delta}^{-\delta} (f - T^{l-1}f)(x + jy) dy, \quad x \in (1 - \delta, 1).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|f - T^{l-1}f\|_{L_p((1-\delta,1))} &\leq \delta^{-1} \left\| \int_{-2\delta}^{-\delta} \Delta_y^l f(x) dy \right\|_{L_p((1-\delta,1))} \\ &\quad + \sum_{j=1}^l C_l^j \delta^{-1} \left\| \int_{-2\delta}^{-\delta} (f - T^{l-1}f)(x + jy) dy \right\|_{L_p((1-\delta,1))}. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Оценивая первое слагаемое в правой части (1.2.10), выводим

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-2\delta}^{-\delta} \Delta_y^l f(x) dy \right\|_{L_p((1-\delta,1))}^p &= \int_{1-\delta}^1 \left| \int_{-2\delta}^{-\delta} \Delta_y^l f(x) dy \right|^p dx \\ &\leq \delta^{p/p'} \int_{1-\delta}^1 \int_{-2\delta}^{-\delta} |\Delta_y^l f(x)|^p dy dx \\ &\leq \int_{-2\delta}^{-\delta} \int_{I_{ly}} |\Delta_y^l f(x)|^p dx dy \leq \int_{B^1} \int_{I_{ly}} |\Delta_y^l f(x)|^p dx dy \end{aligned}$$

или

$$\left\| \int_{-2\delta}^{-\delta} \Delta_y^l f(x) dy \right\|_{L_p((1-\delta,1))} \leq \left(\int_{B^1} \int_{I_{ly}} |\Delta_y^l f(x)|^p dx dy \right)^{1/p}. \quad (1.2.11)$$

Оценивая остальные слагаемые в правой части (1.2.10), заметим, что при $j = 1, \dots, l$ для $y \in (-2\delta, -\delta)$ множество $(jy + (1 - \delta, 1)) \subset (0, 1 - \delta)$. Поэтому для $j = 1, \dots, l$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} \left\| \int_{-2\delta}^{-\delta} (f - T^{l-1}f)(x + jy) dy \right\|_{L_p((1-\delta,1))} &\leq \int_{-2\delta}^{-\delta} \|(f - T^{l-1}f)(x + jy)\|_{L_p((1-\delta,1))} dy \\ &\leq \int_{-2\delta}^{-\delta} \|f - T^{l-1}f\|_{L_p((0,1-\delta))} dy = \delta \|f - T^{l-1}f\|_{L_p((0,1-\delta))}. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Подставляя (1.2.11) и (1.2.12) в неравенство (1.2.10) и применяя (1.2.9), приходим к оценке

$$\|f - T^{l-1}f\|_{L_p((1-\delta,1))} \leq c_5 \left(\int_{B^1} \int_{I_{l\xi}} |\Delta_\xi^l f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}. \quad (1.2.13)$$

Из неравенств (1.2.9) и (1.2.13) следует, что для $f \in L_p(I)$ справедливо неравенство

$$\|f - T^{l-1}f\|_{L_p(I)} \leq c_6(l) \left(\int_{B^1} \int_{I_{l\xi}} |\Delta_\xi^l f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}. \quad (1.2.14)$$

Отметим еще одно простое неравенство, которое понадобится далее:

$$\|T^{l-1}f\|_{L_p(I)} \leq \|T^{l-1}f\|_{L_\infty(I)} \leq c_7(l) \|f\|_{L_1(I)} \leq c_7 \|f\|_{L_p(I)}. \quad (1.2.15)$$

Теперь покажем, что предложение справедливо для $d \in \mathbb{N}$ при $d \geq 2$.

Для этого в условиях предложения для каждого $j = 1, \dots, d$ построим, как это сделано выше, непрерывный линейный оператор $T^{l_j-1}: L_p(I) \rightarrow \mathcal{D}^{1, l_j-1}(I) \cap L_p(I)$ и определим систему непрерывных линейных операторов $U_j: L_p(I^d) \rightarrow L_p(I^d)$, $j = 1, \dots, d$, и $V_j: L_p(I^d) \rightarrow L_p(I^d)$, $j = 0, \dots, d$, полагая $U_j = \mathcal{U}_j(T^{l_j-1})$ (см. обозначения, введенные после леммы 1.2.1), V_0 – тождественный оператор, а $V_j = V_{j-1}U_j$, $j = 1, \dots, d$.

Пусть $f \in L_p(I^d)$. Тогда, как видно из построений, $V_d f \in \mathcal{D}^{d, l-1}(I^d)$. При этом (ср. (20) в [9]) имеем

$$\begin{aligned} \|f - V_d f\|_{L_p(I^d)} &= \left\| \sum_{j=1}^d (V_{j-1}f - V_j f) \right\|_{L_p(I^d)} \leq \sum_{j=1}^d \|V_{j-1}f - V_j f\|_{L_p(I^d)} \\ &= \sum_{j=1}^d \|V_{j-1}f - V_{j-1}U_j f\|_{L_p(I^d)} \leq \sum_{j=1}^d \|V_{j-1}\| \|f - U_j f\|_{L_p(I^d)}. \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Из определения рассматриваемых операторов и соотношений (1.2.3) и (1.2.15) видим, что

$$\|V_{j-1}\| \leq c_8(d, l), \quad j = 1, \dots, d. \quad (1.2.17)$$

Используя теорему Фубини и соотношения (1.2.2) и (1.2.14), а также учитывая, что $I_{l_j \xi e_j}^d = I^{j-1} \times I_{l_j \xi} \times I^{d-j}$, получаем

$$\begin{aligned} \|f - U_j f\|_{L_p(I^d)}^p &= \int_{I^d} |f(x) - (U_j f)(x)|^p dx \\ &= \int_{I^{d-1}} \int_I |f(x) - (U_j f)(x)|^p dx_j dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_d \\ &= \int_{I^{d-1}} \left\| f(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d) \right. \\ &\quad \left. - (U_j f)(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d) \right\|_{L_p(I)}^p dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_d \\ &= \int_{I^{d-1}} \left\| f(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d) \right. \\ &\quad \left. - (T^{l_j-1} f(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d))(\cdot) \right\|_{L_p(I)}^p \\ &\quad \times dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_d \\ &\leq \int_{I^{d-1}} c_6^p \int_{B^1} \int_{I_{l_j \xi}} |(\Delta_\xi^{l_j} f(x_1, \dots, x_{j-1}, \cdot, x_{j+1}, \dots, x_d))(x_j)|^p dx_j \\ &\quad \times d\xi dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_d \\ &= c_6^p \int_{B^1} \int_{I^{d-1}} \int_{I_{l_j \xi}} |(\Delta_{\xi e_j}^{l_j} f)(x)|^p dx_j dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_d d\xi \\ &= c_6^p \int_{B^1} \int_{I_{l_j \xi e_j}^d} |(\Delta_{\xi e_j}^{l_j} f)(x)|^p dx d\xi, \quad j = 1, \dots, d, \end{aligned}$$

или

$$\|f - U_j f\|_{L_p(I^d)} \leq c_6 \left(\int_{B^1} \int_{I_{l_j \xi e_j}^d} |\Delta_{\xi e_j}^{l_j} f(x)|^p dx d\xi \right)^{1/p}, \quad j = 1, \dots, d. \quad (1.2.18)$$

Подставляя неравенства (1.2.17) и (1.2.18) в (1.2.16), заключаем, что имеет место (1.2.4) при $g = V_d f$.

Прежде чем формулировать следующее утверждение, введем обозначения.

Для $x, y \in \mathbb{R}^d$ положим $x \cdot y = xy = (x_1 y_1, \dots, x_d y_d)$, а для $x \in \mathbb{R}^d$ и $A \subset \mathbb{R}^d$ положим $xA = x \cdot A = \{xy: y \in A\}$. Для $x \in \mathbb{R}^d$: $x_j \neq 0$, $j = 1, \dots, d$, обозначим $x^{-1} = (x_1^{-1}, \dots, x_d^{-1})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2.3. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}^d$ и $1 \leq p < \infty$. Тогда для любых $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $\delta \in \mathbb{R}_+^d$, для $Q = x^0 + \delta I^d$ и любой функции $f \in L_p(Q)$ существует полином $g \in \mathcal{P}^{d, l-1}$, для которого выполнено неравенство

$$\|f - g\|_{L_p(Q)} \leq c_1 \sum_{j=1}^d \delta_j^{-1/p} \left(\int_{\delta_j B^1} \int_{Q_{l_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}. \quad (1.2.19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (1.2.19) выводится из (1.2.4) с помощью замены переменных.

Для доказательства теоремы 1.2.5 (см. ниже) понадобится взятая из [6]

ЛЕММА 1.2.4. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l, m \in \mathbb{Z}_+^d$, $1 \leq p < \infty$ и D — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$. Тогда для $f \in W_p^l(D)$ при $j = 1, \dots, d$ и $\xi \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\|\Delta_{\xi e_j}^{l_j+m_j} f\|_{L_p(D_{(l_j+m_j)\xi e_j})} \leq |\xi|^{l_j} \|\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f\|_{L_p(D_{m_j \xi e_j})}. \quad (1.2.20)$$

ТЕОРЕМА 1.2.5. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l, m \in \mathbb{Z}_+^d$, $l + m \in \mathbb{N}^d$, $1 \leq p < \infty$. Тогда существует константа $c_9(d, l, m) > 0$ такая, что для любых $x^0 \in \mathbb{R}^d$ и $\delta \in \mathbb{R}_+^d$, для $Q = x^0 + \delta I^d$ и любой функции $f \in W_p^l(Q)$ существует полином $g \in \mathcal{P}^{d, l+m-1}$, для которого

$$\|f - g\|_{L_p(Q)} \leq c_9 \sum_{j=1}^d \delta_j^{l_j-1/p} \left(\int_{\delta_j B^1} \int_{Q_{m_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}. \quad (1.2.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для получения (1.2.21) достаточно применить неравенство (1.2.19) с $l + m$ вместо l и воспользоваться оценкой (1.2.20).

1.3. Введем в рассмотрение специальные операторы проектирования на пространства полиномов $\mathcal{P}^{d, l}$ и на их основе построим средства приближения производных функций конечной гладкости из некоторых неизотропных классов.

Отметим, что при $d \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$ через $\mathcal{D}^\lambda$ обозначим оператор частного дифференцирования $\mathcal{D}^\lambda = \frac{\mathcal{D}^{|\lambda|}}{\mathcal{D}^{x^\lambda}} = \frac{\mathcal{D}^{|\lambda|}}{x_1^{\lambda_1} \dots x_d^{\lambda_d}}$, где $|\lambda| = \sum_{j=1}^d \lambda_j$, а для $a \in \mathbb{R}_+^d$ и $x \in \mathbb{R}^d$ обозначим $a^x = \prod_{j=1}^d a_j^{x_j}$.

Сначала приведем следующую лемму, которую будем использовать далее для доказательства леммы 1.3.2.

ЛЕММА 1.3.1. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\rho, \sigma \in \mathbb{R}_+^d$. Тогда существует константа $c_1(d, l, \lambda, \rho, \sigma) > 0$ такая, что для любых измеримых по Лебегу множеств $D, Q \subset \mathbb{R}^d$, для которых можно найти $x^0 \in \mathbb{R}^d$ и $\delta \in \mathbb{R}_+^d$ такие, что

$$\sup_{x \in D} |x_j - x_j^0| \leq \rho_j \delta_j, \quad j = 1, \dots, d,$$

и $(x^0 + \sigma \delta I^d) \subset Q$, для любого полинома $f \in \mathcal{P}^{d,l}$ выполнено неравенство

$$\|\mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(D)} \leq c_1 \delta^{-\lambda - p^{-1}\bar{1} + q^{-1}\bar{1}} \|f\|_{L_p(Q)}. \quad (1.3.1)$$

Вывод (1.3.1) осуществляется с использованием замены переменных и того факта, что любое линейное отображение одного конечномерного нормированного пространства в другое непрерывно.

ЛЕММА 1.3.2. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $\rho \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p, q \leq \infty$. Тогда существует семейство констант $\{c_2(d, l, \rho) > 0 \mid d \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}_+^d, \rho \in \mathbb{R}_+^d\}$ такое, что для любых $\delta \in \mathbb{R}_+^d$, $x^0 \in \mathbb{R}^d$ и для $Q = x^0 + \delta I^d$ можно построить систему линейных операторов $P_{\delta, x^0}^{d, l, \lambda}: L_1(Q) \rightarrow \mathcal{P}^{d, l}$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$, обладающих следующими свойствами:

1) для множества $D = \{x \in \mathbb{R}^d: |x_j - x_j^0| \leq \rho_j \delta_j, j = 1, \dots, d\}$ (а следовательно, и для любого измеримого его подмножества), для $f \in L_p(Q)$ при $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{D}^\kappa P_{\delta, x^0}^{d, l, \lambda} f\|_{L_q(D)} \leq c_2 \delta^{-\kappa - p^{-1}\bar{1} + q^{-1}\bar{1}} \|f\|_{L_p(Q)}; \quad (1.3.2)$$

2) для $f \in \mathcal{P}^{d, l}$ при $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$ имеет место равенство

$$P_{\delta, x^0}^{d, l, \lambda}(f|_Q) = f; \quad (1.3.3)$$

3) если при $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$ для функции $f \in L_1(Q)$ ее обобщенная производная $\mathcal{D}^\lambda f$ принадлежит $L_1(Q)$, то соблюдается равенство

$$\mathcal{D}^\lambda P_{\delta, x^0}^{d, l, \lambda} f = P_{\delta, x^0}^{d, l - \lambda, 0} \mathcal{D}^\lambda f. \quad (1.3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем систему функций $\{\varphi_\kappa^{d, l, 0} \in C_0^\infty(I^d) \mid \kappa \in \mathbb{Z}_+^d(l)\}$ такую, что при $\kappa, \mu \in \mathbb{Z}_+^d(l)$ выполнены равенства

$$\int_{I^d} \frac{1}{\mu!} x^\mu \varphi_\kappa^{d, l, 0}(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{при } \kappa = \mu, \\ 0 & \text{при } \kappa \neq \mu, \end{cases}$$

и построим при $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$ систему функций $\{\varphi_\kappa^{d, l, \lambda} \in C_0^\infty(I^d) \mid \kappa \in \mathbb{Z}_+^d(l)\}$, полагая

$$\varphi_\kappa^{d, l, \lambda} = \begin{cases} \varphi_\kappa^{d, l, 0}, & \text{если для } \kappa \text{ существует } j = 1, \dots, d: \kappa_j < \lambda_j, \\ (-1)^{|\lambda|} \mathcal{D}^\lambda \varphi_{\kappa - \lambda}^{d, l - \lambda, 0}, & \text{если для } \kappa \text{ при } j = 1, \dots, d \text{ верно, что } \kappa_j \geq \lambda_j. \end{cases}$$

Рассмотрим при $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$ и $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$ для $\delta \in \mathbb{R}_+^d$, $x^0 \in \mathbb{R}^d$ и $Q = x^0 + \delta I^d$ линейный оператор $P_{\delta, x^0}^{d, l, \lambda}: L_1(Q) \rightarrow \mathcal{D}^{d, l}$, определенный для $f \in L_1(Q)$ равенством

$$(P_{\delta, x^0}^{d, l, \lambda} f)(x) = \delta^{-\vec{1}} \sum_{\kappa \in \mathbb{Z}_+^d(l)} \left(\int_Q \varphi_{\kappa}^{d, l, \lambda}(\delta^{-1}(y - x^0)) f(y) dy \right) \frac{1}{\kappa!} (\delta^{-1}(x - x^0))^{\kappa},$$

где $x \in \mathbb{R}^d$.

Проверка соотношений (1.3.2)–(1.3.4) проводится путем вычислений, при этом для проверки (1.3.2) используется неравенство (1.3.1).

ТЕОРЕМА 1.3.3. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l, m \in \mathbb{Z}_+^d$: $l + m \in \mathbb{N}^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l + m - \vec{1})$, $1 \leq p < \infty$. Тогда существует константа $c_3(d, l, m, p) > 0$ такая, что при любых $x^0 \in \mathbb{R}^d$, $\delta \in \mathbb{R}_+^d$ и $Q = x^0 + \delta I^d$ для любой функции $f \in W_p^l(Q)$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \|f - P_{\delta, x^0}^{d, l+m-\vec{1}, \lambda} f\|_{L_p(Q)} \\ \leq c_3 \sum_{j=1}^d \delta_j^{l_j-1/p} \left(\int_{\delta_j B^1} \int_{Q_{m_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выбирая для функции $f \in W_p^l(Q)$ полином $g \in \mathcal{D}^{d, l+m-\vec{1}}$, для которого соблюдается (1.2.21), и применяя соотношения (1.3.3) и (1.3.2), имеем

$$\begin{aligned} \|f - P_{\delta, x^0}^{d, l+m-\vec{1}, \lambda} f\|_{L_p(Q)} &\leq \|f - g\|_{L_p(Q)} + \|P_{\delta, x^0}^{d, l+m-\vec{1}, \lambda}(g - f)\|_{L_p(Q)} \\ &\leq (1 + c_4) \|f - g\|_{L_p(Q)}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда (1.2.21), получаем неравенство (1.3.5).

Для дальнейшего изложения введем следующие обозначения.

При $d \in \mathbb{N}$ для $m, n \in \mathbb{Z}^d$, $n - m \in \mathbb{Z}_+^d$, обозначим множество

$$\mathcal{N}_{m, n}^d = \{\nu \in \mathbb{Z}^d: m_j \leq \nu_j \leq n_j, j = 1, \dots, d\}.$$

При $d \in \mathbb{N}$ для $\kappa \in \mathbb{N}^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$ положим $Q_{\kappa, \nu}^d = \kappa^{-1}\nu + \kappa^{-1}I^d$ и обозначим через $\chi_{\kappa, \nu}^d$ характеристическую функцию множества $Q_{\kappa, \nu}^d$.

При $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$ для $\kappa \in \mathbb{N}^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$ определим линейный оператор $S_{\kappa, \nu}^{d, l}: L_1(Q_{\kappa, \nu}^d) \rightarrow \mathcal{D}^{d, l}$, полагая $S_{\kappa, \nu}^{d, l} = P_{\delta, x^0}^{d, l, 0}$ при $x^0 = \kappa^{-1}\nu$, $\delta = \kappa^{-1}$.

Далее, пусть функция $g \in L_{\infty}(\mathbb{R}^d)$ обладает следующими свойствами:

1) носитель функции g ограничен, а следовательно, существуют $a \in \mathbb{R}^d$ и $b \in \mathbb{R}_+^d$ такие, что

$$\text{supp } g \subset (a + bI^d); \quad (1.3.6)$$

2) выполнено условие

$$\text{supp } g = \overline{\text{int}(\text{supp } g)}, \quad (1.3.7)$$

где $\bar{A}$ – замыкание множества $A \subset \mathbb{R}^d$, а $\text{int } A$ – внутренность множества A ;

3) почти для всех $x \in \mathbb{R}^d$ имеет место равенство

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} g(x - \nu) = 1. \quad (1.3.8)$$

Рассмотрим систему функций $\{g_{\kappa, \nu} \mid \kappa \in \mathbb{N}^d, \nu \in \mathbb{Z}^d\}$, определяемых для $\kappa \in \mathbb{N}^d, \nu \in \mathbb{Z}^d$ равенством $g_{\kappa, \nu}(x) = g(\kappa x - \nu)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Отметим некоторые свойства функций этой системы. Из (1.3.6)–(1.3.8) вытекает, что:

1) для $\kappa \in \mathbb{N}^d, \nu \in \mathbb{Z}^d$

$$\text{supp } g_{\kappa, \nu} \subset (\kappa^{-1}\nu + \kappa^{-1}a + \kappa^{-1}bI^d); \quad (1.3.9)$$

2) при $\kappa \in \mathbb{N}^d, \nu \in \mathbb{Z}^d$ справедливо равенство

$$\text{supp } g_{\kappa, \nu} = \overline{\text{int}(\text{supp } g_{\kappa, \nu})}; \quad (1.3.10)$$

3) при $\kappa \in \mathbb{N}^d$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^d$ выполнено равенство

$$\sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} g_{\kappa, \nu}(x) = 1$$

и, значит, для почти всех $x \in I^d$ – равенство

$$\sum_{\{\nu \in \mathbb{Z}^d : \text{supp } g_{\kappa, \nu} \cap I^d \neq \emptyset\}} g_{\kappa, \nu}(x) = 1. \quad (1.3.11)$$

Учитывая (1.3.10) и тот факт, что $I^d \subset \bigcup_{\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d} \overline{Q_{\kappa, \nu}^d}$, при $\kappa \in \mathbb{N}^d$ каждому $\nu' \in \mathbb{Z}^d$ такому, что $\text{supp } g_{\kappa, \nu'} \cap I^d \neq \emptyset$, сопоставим некоторый элемент $\nu(\nu') \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$, для которого $Q_{\kappa, \nu(\nu')}^d \cap \text{supp } g_{\kappa, \nu'} \neq \emptyset$.

Теперь для $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $\kappa \in \mathbb{N}^d$ и функции $g \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$, удовлетворяющей условиям (1.3.6)–(1.3.8), рассмотрим непрерывный линейный оператор $E_\kappa^{d, l, g} : L_1(I^d) \rightarrow L_\infty(I^d)$, определенный для $f \in L_1(I^d)$ равенством

$$E_\kappa^{d, l, g} f = \sum_{\{\nu' \in \mathbb{Z}^d : \text{supp } g_{\kappa, \nu'} \cap I^d \neq \emptyset\}} S_{\kappa, \nu(\nu')}^{d, l} (f|_{Q_{\kappa, \nu(\nu')}^d}) g_{\kappa, \nu'}.$$

Имеет место

ЛЕММА 1.3.4. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l, m \in \mathbb{Z}_+^d$, $l + m \in \mathbb{N}^d$, $1 \leq p < \infty$ и функция $g \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ удовлетворяет условиям (1.3.6)–(1.3.8). Тогда существуют константы $c_5(d, l, m, p, g) > 0$ и $c_6(d, g) > 0$ такие, что для любой функции $f \in W_p^l(I^d)$ при $\kappa \in \mathbb{N}^d$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \|f - E_\kappa^{d, l+m-\vec{1}, g} f\|_{L_p(I^d)} \\ & \leq c_5 \sum_{j=1}^d \kappa_j^{-l_j+1/p} \left(\int_{c_6 \kappa_j^{-1} B^1} \int_{I_{m_j \xi e_j}^d} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для проведения доказательства введем в рассмотрение некоторые объекты.

При $\kappa \in \mathbb{N}^d$ и $\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d$ положим $D_{\kappa,\nu} = x_{\kappa,\nu} + \delta_{\kappa,\nu} I^d$, где $x_{\kappa,\nu} \in \mathbb{R}^d$ и $\delta_{\kappa,\nu} \in \mathbb{R}_+^d$, компоненты которых при $j = 1, \dots, d$ задаются равенствами

$$\begin{aligned} (x_{\kappa,\nu})_j &= \max(0, \kappa_j^{-1} \nu_j - \kappa_j^{-1} (b_j + 1)), \\ (\delta_{\kappa,\nu})_j &= \min(1, \kappa_j^{-1} \nu_j + \kappa_j^{-1} (b_j + 2)) - (x_{\kappa,\nu})_j. \end{aligned}$$

Отметим некоторые свойства этих множеств и других объектов.

При $\kappa \in \mathbb{N}^d$ для $\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d$ и $j = 1, \dots, d$ выполнены неравенства

$$\kappa_j^{-1} \leq (\delta_{\kappa,\nu})_j \leq \kappa_j^{-1} (2b_j + 3) \leq c_6 \kappa_j^{-1}. \quad (1.3.13)$$

Ясно, что при $\kappa \in \mathbb{N}^d$ для $\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d$ имеют место включения

$$Q_{\kappa,\nu}^d \subset D_{\kappa,\nu} \subset I^d. \quad (1.3.14)$$

Кроме того, исходя из (1.3.9) несложно показать, что при $\kappa \in \mathbb{N}^d$ для $\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d$ и $\nu' \in \mathbb{Z}^d$ таких, что $Q_{\kappa,\nu}^d \cap \text{supp } g_{\kappa,\nu'} \neq \emptyset$, справедливо включение

$$Q_{\kappa,\nu(\nu')}^d \subset D_{\kappa,\nu}. \quad (1.3.15)$$

Нетрудно видеть, что существует константа $c_7(d, b) > 0$ такая, что при $\kappa \in \mathbb{N}^d$ для $x \in I^d$ верно неравенство

$$\text{card}\{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d : x \in D_{\kappa,\nu}\} \leq c_7. \quad (1.3.16)$$

Отметим еще, что из (1.3.9) следует существование константы $c_8(d, b) > 0$ такой, что при $\kappa \in \mathbb{N}^d$ для $\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d$ справедливо неравенство

$$\text{card}\{\nu' \in \mathbb{Z}^d : Q_{\kappa,\nu}^d \cap \text{supp } g_{\kappa,\nu'} \neq \emptyset\} \leq c_8. \quad (1.3.17)$$

Завершая предварительные рассуждения, при $\kappa \in \mathbb{N}^d$ для $\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d$ определим линейный оператор $\mathfrak{S}_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} : L_1(D_{\kappa,\nu}) \rightarrow \mathcal{P}^{d,l+m-\vec{1}}$ равенством $\mathfrak{S}_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} = P_{\delta,x^0}^{d,l+m-\vec{1},0}$ при $\delta = \delta_{\kappa,\nu}$, $x^0 = x_{\kappa,\nu}$.

Пусть теперь $f \in W_p^l(I^d)$ и $\kappa \in \mathbb{N}^d$. Тогда, учитывая равенство (1.3.11), имеем

$$\begin{aligned} & \|f - E_{\kappa}^{d,l+m-\vec{1},g} f\|_{L_p(I^d)}^p \\ &= \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} \left\| \sum_{\{\nu' \in \mathbb{Z}^d : \text{supp } g_{\kappa,\nu'} \cap I^d \neq \emptyset\}} (f - S_{\kappa,\nu(\nu')}^{d,l+m-\vec{1}} f) g_{\kappa,\nu'} \right\|_{L_p(Q_{\kappa,\nu}^d)}^p \\ &= \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} \left\| \sum_{\{\nu' \in \mathbb{Z}^d : Q_{\kappa,\nu}^d \cap \text{supp } g_{\kappa,\nu'} \neq \emptyset\}} (f - S_{\kappa,\nu(\nu')}^{d,l+m-\vec{1}} f) g_{\kappa,\nu'} \right\|_{L_p(Q_{\kappa,\nu}^d)}^p \\ &\leq \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} \left(\sum_{\{\nu' \in \mathbb{Z}^d : Q_{\kappa,\nu}^d \cap \text{supp } g_{\kappa,\nu'} \neq \emptyset\}} \left\| (f - S_{\kappa,\nu(\nu')}^{d,l+m-\vec{1}} f) g_{\kappa,\nu'} \right\|_{L_p(Q_{\kappa,\nu}^d)} \right)^p. \end{aligned} \quad (1.3.18)$$

Однако для $\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$ и $\nu' \in \mathbb{Z}^d$ таких, что $Q_{\kappa, \nu}^d \cap \text{supp } g_{\kappa, \nu'} \neq \emptyset$, имеем

$$\begin{aligned} & \| (f - S_{\kappa, \nu(\nu')}^{d, l+m-\vec{1}} f) g_{\kappa, \nu'} \|_{L_p(Q_{\kappa, \nu}^d)} \leq \| g_{\kappa, \nu'} \|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \| f - S_{\kappa, \nu(\nu')}^{d, l+m-\vec{1}} f \|_{L_p(Q_{\kappa, \nu}^d)} \\ & \leq \| g \|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} (\| f - \mathfrak{S}_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f \|_{L_p(Q_{\kappa, \nu}^d)} + \| \mathfrak{S}_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f - S_{\kappa, \nu(\nu')}^{d, l+m-\vec{1}} f \|_{L_p(Q_{\kappa, \nu}^d)}). \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

Далее, используя (1.3.14), на основании (1.3.5) с учетом неравенств (1.3.13) при $\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$ получаем

$$\begin{aligned} & \| f - \mathfrak{S}_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f \|_{L_p(Q_{\kappa, \nu}^d)} \leq \| f - \mathfrak{S}_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f \|_{L_p(D_{\kappa, \nu})} \\ & \leq c_9 \sum_{j=1}^d \kappa_j^{-l_j+1/p} \left(\int_{c_6 \kappa_j^{-1} B^1} \int_{(D_{\kappa, \nu})_{m_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (1.3.20)$$

Учитывая формулы (1.3.14), (1.3.3), (1.3.15), (1.3.13), (1.3.2), (1.3.5), для $\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$ и $\nu' \in \mathbb{Z}^d$ таких, что $Q_{\kappa, \nu}^d \cap \text{supp } g_{\kappa, \nu'} \neq \emptyset$, выводим

$$\begin{aligned} & \| \mathfrak{S}_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f - S_{\kappa, \nu(\nu')}^{d, l+m-\vec{1}} f \|_{L_p(Q_{\kappa, \nu}^d)} \leq \| \mathfrak{S}_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f - S_{\kappa, \nu(\nu')}^{d, l+m-\vec{1}} f \|_{L_p(D_{\kappa, \nu})} \\ & = \| S_{\kappa, \nu(\nu')}^{d, l+m-\vec{1}} (\mathfrak{S}_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f - f) \|_{L_p(D_{\kappa, \nu})} \leq c_{10} \| f - \mathfrak{S}_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f \|_{L_p(Q_{\kappa, \nu(\nu')}^d)} \\ & \leq c_{10} \| f - \mathfrak{S}_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f \|_{L_p(D_{\kappa, \nu})} \\ & \leq c_{11} \sum_{j=1}^d \kappa_j^{-l_j+1/p} \left(\int_{c_6 \kappa_j^{-1} B^1} \int_{(D_{\kappa, \nu})_{m_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (1.3.21)$$

Объединяя (1.3.19)–(1.3.21), подставим полученную оценку в (1.3.18) и, далее, применяя (1.3.17) и неравенство Гёльдера, а затем используя (1.3.16) и неравенство Гёльдера, получаем

$$\begin{aligned} & \| f - E_{\kappa}^{d, l+m-\vec{1}, g} f \|_{L_p(I^d)}^p \\ & \leq \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d} \left(c_8 c_{12} \sum_{j=1}^d \kappa_j^{-l_j+1/p} \left(\int_{c_6 \kappa_j^{-1} B^1} \int_{(D_{\kappa, \nu})_{m_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} \right)^p \\ & \leq c_{13} \sum_{j=1}^d (\kappa_j^{-l_j+1/p})^p \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d} \int_{c_6 \kappa_j^{-1} B^1} \int_{(D_{\kappa, \nu})_{m_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \\ & \leq c_{13} \sum_{j=1}^d (\kappa_j^{-l_j+1/p})^p \int_{c_6 \kappa_j^{-1} B^1} \int_{I_{m_j \xi e_j}^d} \left(\sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d} \chi_{D_{\kappa, \nu}}(\eta) \right) |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \\ & \leq \left(c_5 \sum_{j=1}^d \kappa_j^{-l_j+1/p} \left(\int_{c_6 \kappa_j^{-1} B^1} \int_{I_{m_j \xi e_j}^d} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} \right)^p, \end{aligned}$$

где $\chi_{D_{\kappa, \nu}}$ – характеристическая функция множества $D_{\kappa, \nu}$. Из последнего неравенства непосредственно вытекает (1.3.12).

При доказательстве леммы 1.3.6 (см. ниже) используется

ЛЕММА 1.3.5. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$, D – область в $\mathbb{R}^d$ и $f \in C^\infty(D)$, $g \in L_1(D)$, причем для каждого $\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)$ обобщенная производная $\mathcal{D}^\mu g$ принадлежит $L_1(D)$. Тогда в пространстве обобщенных функций в области D имеет место равенство

$$\mathcal{D}^\lambda(fg) = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)} C_\lambda^\mu \mathcal{D}^{\lambda-\mu} f \mathcal{D}^\mu g, \quad (1.3.22)$$

где $C_\lambda^\mu = \frac{\lambda!}{\mu! (\lambda-\mu)!}$, $\lambda! = \lambda_1! \dots \lambda_d!$.

Для формулировки следующей леммы введем обозначение. При $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$ для $\kappa \in \mathbb{N}^d$ и $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$ рассмотрим непрерывный линейный оператор $U_{\kappa, \lambda}^{d, l} : L_1(I^d) \rightarrow L_\infty(I^d)$, определенный для $f \in L_1(I^d)$ равенством

$$U_{\kappa, \lambda}^{d, l} f = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa-\vec{1}}^d} \mathcal{D}^\lambda S_{\kappa, \nu}^{d, l}(f) \chi_{\kappa, \nu}^d.$$

ЛЕММА 1.3.6. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l, m \in \mathbb{Z}_+^d$, $l + m \in \mathbb{N}^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l + m - \vec{1})$ и функция $g \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ удовлетворяет условиям (1.3.6)–(1.3.8), а также

$$\mathcal{D}^\mu g \in L_\infty(\mathbb{R}^d) \quad \text{при} \quad \mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda). \quad (1.3.23)$$

Пусть $1 \leq p < \infty$ и $p \leq q \leq \infty$. Тогда существует константа $c_{14}(d, l, m, \lambda, p, q, g) > 0$ такая, что для любой функции $f \in W_p^l(I^d)$ при $\kappa \in \mathbb{N}^d$ выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \|U_{\kappa, \lambda}^{d, l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\lambda E_\kappa^{d, l+m-\vec{1}, g} f\|_{L_q(I^d)} \\ & \leq c_{14} \kappa^{\lambda+p-1\vec{1}-q-1\vec{1}} \sum_{j=1}^d \kappa_j^{-l_j+1/p} \left(\int_{c_6 \kappa_j^{-1} B^1} \int_{I_{m_j \xi e_j}^d} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся теми же вспомогательными средствами, которые применялись при доказательстве леммы 1.3.4. В дополнение к приведенным там фактам отметим следующее. Как видно из равенства (1.3.11), при $\kappa \in \mathbb{N}^d$, $\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)$ и почти всех $x \in I^d$ имеем

$$\sum_{\{\nu \in \mathbb{Z}^d : \text{supp } g_{\kappa, \nu} \cap I^d \neq \emptyset\}} \mathcal{D}^\mu g_{\kappa, \nu}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu = 0, \\ 0 & \text{при } \mu \neq 0. \end{cases} \quad (1.3.25)$$

Кроме того, при $\kappa \in \mathbb{N}^d$, $\nu \in \mathbb{Z}^d$ и $\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)$ справедливы равенства

$$\|\mathcal{D}^\mu g_{\kappa, \nu}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = \|\kappa^\mu \mathcal{D}^\mu g(\kappa x - \nu)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} = c_{15}(d, \mu, g) \kappa^\mu. \quad (1.3.26)$$

Теперь пусть $f \in W_p^l(I^d)$ и $\kappa \in \mathbb{N}^d$. Тогда, учитывая равенства (1.3.22) и (1.3.25), имеем

$$\begin{aligned}
& \|U_{\kappa,\lambda}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\lambda E_\kappa^{d,l+m-\vec{1},g} f\|_{L_q(I^d)} \\
&= \left\| U_{\kappa,\lambda}^{d,l+m-\vec{1}} f - \sum_{\substack{\{\nu' \in \mathbb{Z}^d : \\ \text{supp } g_{\kappa,\nu'} \cap I^d \neq \emptyset\}}} \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)} C_\lambda^\mu \mathcal{D}^\mu S_{\kappa,\nu(\nu')}^{d,l+m-\vec{1}}(f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu'} \right\|_{L_q(I^d)} \\
&= \left\| \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)} C_\lambda^\mu \sum_{\substack{\{\nu' \in \mathbb{Z}^d : \\ \text{supp } g_{\kappa,\nu'} \cap I^d \neq \emptyset\}}} (U_{\kappa,\mu}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\mu S_{\kappa,\nu(\nu')}^{d,l+m-\vec{1}} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu'} \right\|_{L_q(I^d)} \\
&\leq \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)} C_\lambda^\mu \left\| \sum_{\substack{\{\nu' \in \mathbb{Z}^d : \\ \text{supp } g_{\kappa,\nu'} \cap I^d \neq \emptyset\}}} (U_{\kappa,\mu}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\mu S_{\kappa,\nu(\nu')}^{d,l+m-\vec{1}} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu'} \right\|_{L_q(I^d)}. \tag{1.3.27}
\end{aligned}$$

Оценивая правую часть (1.3.27), при $\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)$ получаем

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{\substack{\{\nu' \in \mathbb{Z}^d : \\ \text{supp } g_{\kappa,\nu'} \cap I^d \neq \emptyset\}}} (U_{\kappa,\mu}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\mu S_{\kappa,\nu(\nu')}^{d,l+m-\vec{1}} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu'} \right\|_{L_q(I^d)}^q \\
&= \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} \left\| \sum_{\substack{\{\nu' \in \mathbb{Z}^d : \\ \text{supp } g_{\kappa,\nu'} \cap Q_{\kappa,\nu}^d \neq \emptyset\}}} (\mathcal{D}^\mu S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\mu S_{\kappa,\nu(\nu')}^{d,l+m-\vec{1}} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu'} \right\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu}^d)}^q \\
&\leq \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} \left(\sum_{\substack{\{\nu' \in \mathbb{Z}^d : \\ \text{supp } g_{\kappa,\nu'} \cap Q_{\kappa,\nu}^d \neq \emptyset\}}} \|(\mathcal{D}^\mu S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{D}^\mu S_{\kappa,\nu(\nu')}^{d,l+m-\vec{1}} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu'}\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu}^d)} \right)^q. \tag{1.3.28}
\end{aligned}$$

Для оценки правой части (1.3.28), используя сначала равенства (1.3.26), а потом (1.3.3), применяя неравенства (1.3.2) и (1.3.1) и, наконец, учитывая (1.3.20) и (1.3.21), для $\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d$ и $\nu' \in \mathbb{Z}^d$ таких, что $\text{supp } g_{\kappa,\nu'} \cap Q_{\kappa,\nu}^d \neq \emptyset$, выводим

$$\begin{aligned}
& \|(\mathcal{D}^\mu S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\mu S_{\kappa,\nu(\nu')}^{d,l+m-\vec{1}} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu'}\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu}^d)} \\
&\leq \|\mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu'}\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \|\mathcal{D}^\mu S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\mu S_{\kappa,\nu(\nu')}^{d,l+m-\vec{1}} f\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu}^d)} \\
&\leq c_{15} \kappa^{\lambda-\mu} (\|\mathcal{D}^\mu S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\mu \mathfrak{S}_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu}^d)} \\
&\quad + \|\mathcal{D}^\mu \mathfrak{S}_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\mu S_{\kappa,\nu(\nu')}^{d,l+m-\vec{1}} f\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu}^d)}) \\
&= c_{15} \kappa^{\lambda-\mu} (\|\mathcal{D}^\mu S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}}(f - \mathfrak{S}_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f)\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu}^d)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \|\mathcal{D}^\mu (\mathfrak{S}_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f - S_{\kappa,\nu(\nu')}^{d,l+m-\vec{1}} f)\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu}^d)} \\
 & \leq c_{15} \kappa^{\lambda-\mu} (c_{16} \kappa^{\mu+p^{-1}\vec{1}-q^{-1}\vec{1}} \|f - \mathfrak{S}_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f\|_{L_p(Q_{\kappa,\nu}^d)} \\
 & \quad + c_{17} \kappa^{\mu+p^{-1}\vec{1}-q^{-1}\vec{1}} \|\mathfrak{S}_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f - S_{\kappa,\nu(\nu')}^{d,l+m-\vec{1}} f\|_{L_p(Q_{\kappa,\nu}^d)}) \\
 & \leq c_{18} \kappa^{\lambda+p^{-1}\vec{1}-q^{-1}\vec{1}} \\
 & \quad \times \sum_{j=1}^d \kappa_j^{-l_j+1/p} \left(\int_{c_6 \kappa_j^{-1} B^1} \int_{(D_{\kappa,\nu})_{m_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}.
 \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (1.3.28) и учитывая (1.3.17), а затем применяя неравенство Гёльдера с показателем q и неравенство Гёльдера с показателем $p/q \leq 1$ и, наконец, принимая во внимание (1.3.16) и используя неравенство Гёльдера с показателем $1/q$, при $\mu \in \mathbb{Z}_+^d(\lambda)$ находим

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sum_{\{\nu' \in \mathbb{Z}^d: \text{supp } g_{\kappa,\nu'} \cap I^d \neq \emptyset\}} (U_{\kappa,\mu}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\mu S_{\kappa,\nu(\nu')}^{d,l+m-\vec{1}} f) \mathcal{D}^{\lambda-\mu} g_{\kappa,\nu'} \right\|_{L_q(I^d)}^q \\
 & \leq \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} \left(c_8 c_{18} \kappa^{\lambda+p^{-1}\vec{1}-q^{-1}\vec{1}} \right. \\
 & \quad \times \sum_{j=1}^d \kappa_j^{-l_j+1/p} \left(\int_{c_6 \kappa_j^{-1} B^1} \int_{(D_{\kappa,\nu})_{m_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} \Big)^q \\
 & \leq (c_{19} \kappa^{\lambda+p^{-1}\vec{1}-q^{-1}\vec{1}})^q \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} \sum_{j=1}^d (\kappa_j^{-l_j+1/p})^q \\
 & \quad \times \left(\int_{c_6 \kappa_j^{-1} B^1} \int_{(D_{\kappa,\nu})_{m_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} \\
 & \leq (c_{19} \kappa^{\lambda+p^{-1}\vec{1}-q^{-1}\vec{1}})^q \sum_{j=1}^d (\kappa_j^{-l_j+1/p})^q \\
 & \quad \times \left(\sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} \int_{c_6 \kappa_j^{-1} B^1} \int_{(D_{\kappa,\nu})_{m_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} \\
 & \leq (c_{19} \kappa^{\lambda+p^{-1}\vec{1}-q^{-1}\vec{1}})^q \sum_{j=1}^d (\kappa_j^{-l_j+1/p})^q \\
 & \quad \times \left(\int_{c_6 \kappa_j^{-1} B^1} \int_{I_{m_j \xi e_j}^d} \left(\sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} \chi_{D_{\kappa,\nu}}(\eta) \right) |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p}
 \end{aligned}$$

$$\leq \left(c_{20} \kappa^{\lambda+p^{-1}\vec{1}-q^{-1}\vec{1}} \times \sum_{j=1}^d \kappa_j^{-l_j+1/p} \left(\int_{c_6 \kappa_j^{-1} B^1} \int_{I_{m_j \xi e_j}^d} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} \right)^q. \quad (1.3.29)$$

Объединяя (1.3.27) с (1.3.29), приходим к неравенству (1.3.24).

ЛЕММА 1.3.7. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l, m \in \mathbb{Z}_+^d$, $l + m \in \mathbb{N}^d$, и $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l + m - \vec{1})$. Пусть $1 \leq p < \infty$, $p \leq q \leq \infty$ и $\rho \in \mathbb{R}_+^d$. Тогда существуют константы $c_{21}(d, l, m, p, q, \lambda, \rho) > 0$ и $c_{22}(d, \rho) > 0$ такие, что для любой функции $f \in W_p^l(I^d)$ и для любых $\kappa, \kappa' \in \mathbb{N}^d$ таких, что

$$\kappa'_j \leq \kappa_j \leq \rho_j \kappa'_j \quad \text{при } j = 1, \dots, d, \quad (1.3.30)$$

справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|U_{\kappa, \lambda}^{d, l+m-\vec{1}} f - U_{\kappa', \lambda}^{d, l+m-\vec{1}} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_{21} \kappa^{\lambda+p^{-1}\vec{1}-q^{-1}\vec{1}} \\ & \times \sum_{j=1}^d \kappa_j^{-l_j+1/p} \left(\int_{c_{22} \kappa_j^{-1} B^1} \int_{I_{m_j \xi e_j}^d} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}. \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства нам понадобятся некоторые вспомогательные объекты.

При $\kappa \in \mathbb{N}^d$ для $\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$ положим $G_{\kappa, \nu} = y_{\kappa, \nu} + \varepsilon_{\kappa, \nu} I^d$, где $y_{\kappa, \nu} \in \mathbb{R}^d$ и $\varepsilon_{\kappa, \nu} \in \mathbb{R}_+^d$ при $j = 1, \dots, d$ имеют компоненты

$$(y_{\kappa, \nu})_j = \max(0, \kappa_j^{-1} \nu_j - \kappa_j^{-1} \rho_j), \quad (\varepsilon_{\kappa, \nu})_j = \min(1, \kappa_j^{-1} \nu_j + \kappa_j^{-1} (1 + \rho_j)) - (y_{\kappa, \nu})_j.$$

Отметим свойства введенных в рассмотрение множеств, которые нам потребуются далее.

Для $\kappa, \kappa' \in \mathbb{N}^d$, удовлетворяющих (1.3.30), и $\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$ при $j = 1, \dots, d$ выполняются неравенства

$$\kappa_j^{-1} \leq (\varepsilon_{\kappa, \nu})_j \leq c_{22} \kappa_j^{-1} \leq c_{22} (\kappa'_j)^{-1}. \quad (1.3.32)$$

Как видно из определений, при $\kappa \in \mathbb{N}^d$ для $\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$ имеют место включения

$$Q_{\kappa, \nu}^d \subset G_{\kappa, \nu} \subset I^d. \quad (1.3.33)$$

Несложно проверить, что для $\kappa, \kappa' \in \mathbb{N}^d$, удовлетворяющих (1.3.30), для $\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$ и $\nu' \in \mathcal{N}_{0, \kappa' - \vec{1}}^d$ таких, что $Q_{\kappa, \nu}^d \cap Q_{\kappa', \nu'}^d \neq \emptyset$, верно включение

$$Q_{\kappa', \nu'}^d \subset G_{\kappa, \nu}. \quad (1.3.34)$$

Ясно, что существует константа $c_{23}(d, \rho) > 0$ такая, что при $\kappa \in \mathbb{N}^d$ для $x \in I^d$ справедливо неравенство

$$\text{card}\{\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d : x \in G_{\kappa, \nu}\} \leq c_{23}. \quad (1.3.35)$$

Наконец, заметим, что для $\kappa, \kappa' \in \mathbb{N}^d$, удовлетворяющих (1.3.30), для $\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$ справедлива оценка

$$\text{card}\{\nu' \in \mathcal{N}_{0, \kappa' - \vec{1}}^d: Q_{\kappa, \nu}^d \cap Q_{\kappa', \nu'}^d \neq \emptyset\} \leq 2^d. \quad (1.3.36)$$

Пусть теперь $f \in W_p^l(I^d)$ и $\kappa, \kappa' \in \mathbb{N}^d$ удовлетворяют (1.3.30). Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \|U_{\kappa, \lambda}^{d, l+m-\vec{1}} f - U_{\kappa', \lambda}^{d, l+m-\vec{1}} f\|_{L_q(I^d)}^q \\ &= \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d} \left\| \mathcal{D}^\lambda S_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f - \sum_{\nu' \in \mathcal{N}_{0, \kappa' - \vec{1}}^d} \mathcal{D}^\lambda S_{\kappa', \nu'}^{d, l+m-\vec{1}}(f) \chi_{\kappa', \nu'}^d \right\|_{L_q(Q_{\kappa, \nu}^d)}^q \\ &= \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d} \left\| \sum_{\substack{\{\nu' \in \mathcal{N}_{0, \kappa' - \vec{1}}^d: \\ Q_{\kappa, \nu}^d \cap Q_{\kappa', \nu'}^d \neq \emptyset\}}} (\mathcal{D}^\lambda S_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\lambda S_{\kappa', \nu'}^{d, l+m-\vec{1}} f) \chi_{\kappa', \nu'}^d \right\|_{L_q(Q_{\kappa, \nu}^d)}^q \\ &\leq \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d} \left(\sum_{\substack{\{\nu' \in \mathcal{N}_{0, \kappa' - \vec{1}}^d: \\ Q_{\kappa, \nu}^d \cap Q_{\kappa', \nu'}^d \neq \emptyset\}}} \|(\mathcal{D}^\lambda S_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\lambda S_{\kappa', \nu'}^{d, l+m-\vec{1}} f) \chi_{\kappa', \nu'}^d\|_{L_q(Q_{\kappa, \nu}^d)} \right)^q. \end{aligned} \quad (1.3.37)$$

Для оценки слагаемых в правой части (1.3.37) определим при $\kappa \in \mathbb{N}^d$ и $\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$ линейный оператор $T_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}}: L_1(G_{\kappa, \nu}) \rightarrow \mathcal{D}^{d, l+m-\vec{1}}$, полагая

$$T_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} = P_{\delta, x^0}^{d, l+m-\vec{1}, 0}, \quad \delta = \varepsilon_{\kappa, \nu}, \quad x^0 = y_{\kappa, \nu}.$$

Тогда для $\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$, $\nu' \in \mathcal{N}_{0, \kappa' - \vec{1}}^d$ таких, что $Q_{\kappa, \nu}^d \cap Q_{\kappa', \nu'}^d \neq \emptyset$, пользуясь неравенством (1.3.1), находим

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{D}^\lambda S_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\lambda S_{\kappa', \nu'}^{d, l+m-\vec{1}} f) \chi_{\kappa', \nu'}^d\|_{L_q(Q_{\kappa, \nu}^d)} \\ &\leq \|\mathcal{D}^\lambda (S_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f - S_{\kappa', \nu'}^{d, l+m-\vec{1}} f)\|_{L_q(Q_{\kappa, \nu}^d)} \\ &\leq c_{24} \kappa^{\lambda+p-1} \vec{1}^{-q-1} \vec{1} \|S_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f - S_{\kappa', \nu'}^{d, l+m-\vec{1}} f\|_{L_p(Q_{\kappa, \nu}^d)} \\ &\leq c_{24} \kappa^{\lambda+p-1} \vec{1}^{-q-1} \vec{1} (\|S_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f - T_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f\|_{L_p(Q_{\kappa, \nu}^d)} \\ &\quad + \|T_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f - S_{\kappa', \nu'}^{d, l+m-\vec{1}} f\|_{L_p(Q_{\kappa, \nu}^d)}). \end{aligned} \quad (1.3.38)$$

Оценивая правую часть (1.3.38), в силу соотношений (1.3.3), (1.3.2) и (1.3.33) при $\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$ получаем

$$\begin{aligned} & \|S_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f - T_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f\|_{L_p(Q_{\kappa, \nu}^d)} = \|S_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}}(f - T_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f)\|_{L_p(Q_{\kappa, \nu}^d)} \\ &\leq c_{25} \|f - T_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} f\|_{L_p(G_{\kappa, \nu})}, \end{aligned} \quad (1.3.39)$$

а для $\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d$, $\nu' \in \mathcal{N}_{0,\kappa'-\vec{1}}^d$ таких, что $Q_{\kappa,\nu}^d \cap Q_{\kappa',\nu'}^d \neq \emptyset$, используя сначала (1.3.33) и (1.3.3), а затем учитывая (1.3.34), (1.3.32), применяя (1.3.2) и снова пользуясь (1.3.34), выводим

$$\begin{aligned} \|T_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f - S_{\kappa',\nu'}^{d,l+m-\vec{1}} f\|_{L_p(Q_{\kappa,\nu}^d)} &\leq \|S_{\kappa',\nu'}^{d,l+m-\vec{1}} (T_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f - f)\|_{L_p(G_{\kappa,\nu})} \\ &\leq c_{26} \|f - T_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f\|_{L_p(G_{\kappa,\nu})}. \end{aligned} \quad (1.3.40)$$

Объединяя (1.3.38)–(1.3.40) и применяя неравенства (1.3.5), (1.3.32), для $\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d$, $\nu' \in \mathcal{N}_{0,\kappa'-\vec{1}}^d$ таких, что $Q_{\kappa,\nu}^d \cap Q_{\kappa',\nu'}^d \neq \emptyset$, имеем

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{D}^\lambda S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\lambda S_{\kappa',\nu'}^{d,l+m-\vec{1}} f) \chi_{\kappa',\nu'}^d\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu}^d)} \\ &\leq c_{27} \kappa^{\lambda+p^{-1}\vec{1}-q^{-1}\vec{1}} \|f - T_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f\|_{L_p(G_{\kappa,\nu})} \\ &\leq c_{28} \kappa^{\lambda+p^{-1}\vec{1}-q^{-1}\vec{1}} \sum_{j=1}^d \kappa_j^{-l_j+1/p} \left(\int_{c_{22}\kappa_j^{-1}B^1} \int_{(G_{\kappa,\nu})_{m_j\xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (1.3.37) и повторяя выкладку (1.3.29), заменяя в ней $D_{\kappa,\nu}$ на $G_{\kappa,\nu}$, а c_6 – на c_{22} и используя вместо неравенства (1.3.17) оценку (1.3.36), а вместо неравенства (1.3.16) – оценку (1.3.35), приходим к (1.3.31).

С помощью лемм 1.3.4, 1.3.6 и 1.3.7 устанавливается справедливость следующей леммы, для формулировки которой введем обозначения.

Для $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$ и функции $g \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$, удовлетворяющей условиям (1.3.6)–(1.3.8), при $k \in \mathbb{Z}_+$ положим

$$E_k^{d,l,\alpha,g} = E_{\kappa(k,\alpha)}^{d,l,g},$$

где $\kappa(k,\alpha)$ имеет компоненты $\kappa_j(k,\alpha) = 2^{\lfloor k/\alpha_j \rfloor}$, $j = 1, \dots, d$, а $E_{-1}^{d,l,\alpha,g} = 0$.

Для $x, y \in \mathbb{R}^d$ обозначим $(x, y) = \sum_{j=1}^d x_j y_j$.

ЛЕММА 1.3.8. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l, m \in \mathbb{Z}_+^d$, $l+m \in \mathbb{N}^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l+m-\vec{1})$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$ и функция $g \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ подчинена условиям (1.3.6)–(1.3.8) и (1.3.23). Пусть $1 \leq p < \infty$ и $1 \leq q \leq \infty$. Тогда существуют константы $c_{29}(d, l, m, \lambda, \alpha, p, q, g) > 0$ и $c_{30}(d, \alpha, g) > 0$ такие, что если для функции $f \in W_p^l(I^d)$ функция

$$\begin{aligned} K(f, t) &= K_{p,q}^{d,l,m,\lambda,\alpha,g}(f, t) = t^{-(\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1}-q^{-1})_+ \vec{1}) - 1} \\ &\times \sum_{j=1}^d t^{(l_j-p^{-1})/\alpha_j} \left(\int_{c_{30}t^{1/\alpha_j}B^1} \int_{I_{m_j\xi e_j}^d} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} \end{aligned}$$

удовлетворяет условию

$$K(f, t) \in L_1(I), \quad (1.3.41)$$

то для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ выполнено неравенство

$$\|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda E_k^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_{29} \int_0^{2^{-k}} K(f, t) dt. \quad (1.3.42)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала проведем доказательство при $p \leq q$.

Для $f \in W_p^l(I^d)$ и каждого $k \in \mathbb{Z}_+$ при $\kappa = \kappa(k, \alpha)$ согласно (1.3.12) имеем

$$\begin{aligned} & \left\| f - \sum_{j=0}^k (E_j^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f - E_{j-1}^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f) \right\|_{L_p(I^d)} = \|f - E_k^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f\|_{L_p(I^d)} \\ & = \|f - E_\kappa^{d,l+m-\vec{1},g} f\|_{L_p(I^d)} \\ & \leq c_{31} \sum_{j=1}^d 2^{-kl_j/\alpha_j} \Omega_j^{m_j} (\mathcal{D}_j^{l_j} f, c_{32} 2^{-k/\alpha_j})_{L_p(I^d)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Это значит, что для $f \in W_p^l(I^d)$ в $L_p(I^d)$ имеет место равенство

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (E_k^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f - E_{k-1}^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f). \quad (1.3.43)$$

Далее, пусть $f \in W_p^l(I^d)$ и соблюдается условие (1.3.41). Тогда в силу (1.3.24), учитывая (1.3.30) и то, что для $k \in \mathbb{N}$ при $j = 1, \dots, d$ выполнено соотношение $\kappa_j(k-1, \alpha) \leq \kappa_j(k, \alpha) \leq 2^{1+1/\alpha_j} \kappa_j(k-1, \alpha)$, на основании неравенства (1.3.31) получаем, что при $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{D}^\lambda E_k^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f - \mathcal{D}^\lambda E_{k-1}^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f \right\|_{L_q(I^d)} \\ & \leq \left\| \mathcal{D}^\lambda E_{\kappa(k,\alpha)}^{d,l+m-\vec{1},g} f - U_{\kappa(k,\alpha),\lambda}^{d,l+m-\vec{1}} f \right\|_{L_q(I^d)} \\ & \quad + \left\| U_{\kappa(k,\alpha),\lambda}^{d,l+m-\vec{1}} f - U_{\kappa(k-1,\alpha),\lambda}^{d,l+m-\vec{1}} f \right\|_{L_q(I^d)} \\ & \quad + \left\| U_{\kappa(k-1,\alpha),\lambda}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\lambda E_{\kappa(k-1,\alpha)}^{d,l+m-\vec{1},g} f \right\|_{L_q(I^d)} \\ & \leq c_{33} 2^{k(\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1} - q^{-1})\vec{1})} \\ & \quad \times \sum_{j=1}^d 2^{-k(l_j - p^{-1})/\alpha_j} \left(\int_{c_{30} 2^{-k/\alpha_j} B^1} \int_{I_{m_j \xi e_j}^d} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} \\ & \leq c_{29} \int_{2^{-k}}^{2^{-k+1}} t^{-(\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1} - q^{-1})\vec{1}) - 1} \\ & \quad \times \sum_{j=1}^d t^{(l_j - p^{-1})/\alpha_j} \left(\int_{c_{30} t^{1/\alpha_j} B^1} \int_{I_{m_j \xi e_j}^d} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} dt. \end{aligned} \quad (1.3.44)$$

Из соотношений (1.3.44) и (1.3.41) вытекает, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{D}^\lambda E_k^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f - \mathcal{D}^\lambda E_{k-1}^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f)$$

сходится в $L_q(I^d)$. Учитывая это обстоятельство, а также равенство (1.3.43), для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(I^d)$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}^\lambda f, \varphi \rangle &= (-1)^{|\lambda|} \int_{I^d} f \mathcal{D}^\lambda \varphi \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{|\lambda|} \int_{I^d} (E_k^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f - E_{k-1}^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f) \mathcal{D}^\lambda \varphi \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{I^d} (\mathcal{D}^\lambda E_k^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f - \mathcal{D}^\lambda E_{k-1}^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f) \varphi \, dx \\ &= \int_{I^d} \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{D}^\lambda E_k^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f - \mathcal{D}^\lambda E_{k-1}^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f) \right) \varphi \, dx. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для обобщенной производной $\mathcal{D}^\lambda f$ функции f в $L_q(I^d)$ имеет место равенство

$$\mathcal{D}^\lambda f = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathcal{D}^\lambda E_k^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f - \mathcal{D}^\lambda E_{k-1}^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f).$$

Исходя из этого равенства, используя (1.3.44), при $k \in \mathbb{Z}_+$ выводим оценку

$$\begin{aligned} &\| \mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda E_k^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f \|_{L_q(I^d)} \\ &\leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \| \mathcal{D}^\lambda E_j^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f - \mathcal{D}^\lambda E_{j-1}^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f \|_{L_q(I^d)} \\ &\leq \sum_{j=k+1}^{\infty} c_{29} \int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}} K(f, t) \, dt = c_{29} \int_0^{2^{-k}} K(f, t) \, dt, \end{aligned}$$

что совпадает с (1.3.42) при $p \leq q$.

Справедливость утверждения леммы при $q < p$ следует из того, что, как установлено, лемма верна при $p = q$, а также из того, что для $h \in L_p(I^d)$ при $q < p$ выполнено неравенство $\|h\|_{L_q(I^d)} \leq \|h\|_{L_p(I^d)}$.

ЛЕММА 1.3.9. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $l = l(\alpha) \in \mathbb{Z}_+^d$, $m = m(\alpha) \in \mathbb{N}^d$, т. е. $l_j = [\alpha_j]$, $m_j = 1$, если $\alpha_j \notin \mathbb{Z}$, $l_j = \alpha_j - 1$, $m_j = 2$, если $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l+m-\vec{1})$ и функция $g \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ удовлетворяет условиям (1.3.6)–(1.3.8) и (1.3.23). Пусть $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и соблюдается условие

$$1 - (\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1} - q^{-1})_+ \vec{1}) > 0. \quad (1.3.45)$$

Тогда существует константа $c_{34}(d, \alpha, \lambda, p, q, g) > 0$ такая, что для любой функции $f \in \mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ выполнено неравенство

$$\| \mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda E_k^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f \|_{L_q(I^d)} \leq c_{34} 2^{-k(1 - (\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1} - q^{-1})_+ \vec{1}))}. \quad (1.3.46)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что для параметров $d, \alpha, l, m, \lambda, p, q, g$, указанных в условии леммы, при соблюдении неравенства (1.3.45) для $f \in H_p^\alpha(I^d)$ при $t \in I$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} K(f, t) &= t^{-(\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1} - q^{-1})_+ \vec{1}) - 1} \\ &\quad \times \sum_{j=1}^d t^{(l_j - p^{-1})/\alpha_j} \left(\int_{c_{30} t^{1/\alpha_j} B^1} \|\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f\|_{L_p(I_{m_j \xi e_j}^d)}^p d\xi \right)^{1/p} \\ &\leq c_{35} t^{-(\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1} - q^{-1})_+ \vec{1}) - 1} \sum_{j=1}^d t^{l_j/\alpha_j} \Omega_j^{m_j} (\mathcal{D}_j^{l_j} f, c_{30} t^{1/\alpha_j})_{L_p(I^d)} \\ &\leq c_{36} t^{-(\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1} - q^{-1})_+ \vec{1})} \\ &\quad \times \max_{j=1, \dots, d} \sup_{\tau > 0} (1/\tau^{\alpha_j - l_j}) \Omega_j^{m_j} (\mathcal{D}_j^{l_j} f, \tau)_{L_p(I^d)} \in L_1(I). \end{aligned} \quad (1.3.47)$$

Учитывая (1.3.41) и (1.3.47), на основании неравенства (1.3.42) заключаем, что для $f \in \mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda E_k^{d, l+m-\vec{1}, \alpha, g} f\|_{L_q(I^d)} &\leq c_{29} \int_0^{2^{-k}} c_{36} t^{-(\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1} - q^{-1})_+ \vec{1})} dt \\ &= c_{34} 2^{-k(1 - (\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1} - q^{-1})_+ \vec{1}))}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 1.3.10. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $l = l(\alpha) \in \mathbb{Z}_+^d$, $m = m(\alpha) \in \mathbb{N}^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l + m - \vec{1})$. Пусть $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ и соблюдается условие (1.3.45). Тогда существуют константы $c_{37}(d, \alpha, \lambda, p, q) > 0$ и $c_{38}(d, \alpha) > 0$ такие, что для любого $\delta \in \mathbb{R}_+^d$ и любого $x^0 \in \mathbb{R}^d$, для $Q = x^0 + \delta I^d$ и любой функции $f \in H_p^\alpha(Q)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda P_{\delta, x^0}^{d, l+m-\vec{1}, 0} f\|_{L_q(Q)} &\leq c_{37} \delta^{-\lambda - p^{-1} \vec{1} + q^{-1} \vec{1}} \int_0^1 t^{-(\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1} - q^{-1})_+ \vec{1}) - 1} \\ &\quad \times \sum_{j=1}^d \delta_j^{l_j - 1/p} t^{(l_j - p^{-1})/\alpha_j} \left(\int_{c_{38} \delta_j t^{1/\alpha_j} B^1} \int_{Q_{m_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} dt. \end{aligned} \quad (1.3.48)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая, что для $f \in H_p^\alpha(I^d)$ в силу неравенства (1.3.45) имеет место (1.3.47), а следовательно, соблюдается (1.3.41), в соответствии с (1.3.42) при $k = 0$ с учетом того, что на I^d ввиду равенства (1.3.11) выполняется равенство

$$E_0^{d, l+m-\vec{1}, \alpha, g} f = P_{\vec{1}, 0}^{d, l+m-\vec{1}, 0} f,$$

получаем (1.3.48) при $\delta = \vec{1}$, $x^0 = 0$. Отсюда выводим неравенство (1.3.48) при произвольных $\delta \in \mathbb{R}_+^d$ и $x^0 \in \mathbb{R}^d$, переходя от функции $f \in H_p^\alpha(Q)$ к функции $(h_{\delta, x^0} f)(\cdot) = f(x^0 + \delta \cdot) \in H_p^\alpha(I^d)$ и учитывая равенство $P_{\delta, x^0}^{d, l+m-\vec{1}, 0} = h_{\delta, x^0}^{-1} P_{\vec{1}, 0}^{d, l+m-\vec{1}, 0} h_{\delta, x^0}$.

ТЕОРЕМА 1.3.11. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p < \infty$ и соблюдается условие

$$1 - (\alpha^{-1}, p^{-1}\vec{1}) > 0. \quad (1.3.49)$$

Тогда имеет место включение

$$H_p^\alpha(I^d) \subset C(I^d). \quad (1.3.50)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства (1.3.50) достаточно заметить, что при выполнении (1.3.49) для функции $g \in C(\mathbb{R}^d)$, удовлетворяющей (1.3.6)–(1.3.8), в силу (1.3.46) получим, что каждая функция $f \in \mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$, а следовательно, и каждая функция $f \in H_p^\alpha(I^d)$ являются пределом в $L_\infty(I^d)$ последовательности непрерывных в $\mathbb{R}^d$ функций $\{E_k^{d,l+m-\vec{1},\alpha,g} f, k \in \mathbb{Z}_+\}$.

Отметим, что теорему 1.3.11 также можно получить из известных результатов (см., например, [10] и приведенный там список литературы).

§ 2. Восстановление частных производных функций конечной гладкости из неизотропных классов по значениям функций в заданном числе точек

2.1. Получим оценку сверху величины наилучшей точности линейного восстановления в пространстве $L_q(I^d)$ частной производной $\mathcal{D}^\lambda f$ по значениям в n точках функций f из классов $\mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$ и $\mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(I^d)$.

Сначала опишем постановку задачи.

Пусть T – топологическое пространство, $C(T)$ – пространство непрерывных вещественных функций, заданных на T , X – банахово пространство над $\mathbb{R}$ и $U: D(U) \rightarrow X$ – линейный оператор с областью определения $D(U) \subset C(T)$. Пусть $K \subset D(U)$ – некоторый класс функций.

Для $n \in \mathbb{N}$ через $\Phi_n(C(T))$ обозначим совокупность всех отображений $\varphi: C(T) \rightarrow \mathbb{R}^n$, для которых существует набор точек $\{t^j \in T, j = 1, \dots, n\}$ такой, что $\varphi(f) = (f(t^1), \dots, f(t^n))$, $f \in C(T)$, а также через $\mathcal{A}^n(X)$ ($\overline{\mathcal{A}}^n(X)$) обозначим множество всех отображений (всех линейных отображений) $A: \mathbb{R}^n \rightarrow X$.

Тогда при $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\begin{aligned} \sigma_n(U, K, X) &= \inf_{A \in \mathcal{A}^n(X), \varphi \in \Phi_n(C(T))} \sup_{f \in K} \|Uf - A \circ \varphi(f)\|_X, \\ \bar{\sigma}_n(U, K, X) &= \inf_{A \in \overline{\mathcal{A}}^n(X), \varphi \in \Phi_n(C(T))} \sup_{f \in K} \|Uf - A \circ \varphi(f)\|_X. \end{aligned}$$

Для доказательства основного утверждения настоящего пункта, теоремы 2.1.2, необходима

ЛЕММА 2.1.1. Пусть $d \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{Z}_+^d$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) отображение $J: \mathcal{P}^{d,l} \rightarrow \mathbb{R}^{(l+\vec{1})^{\vec{1}}}$, которое каждому полиному $f \in \mathcal{P}^{d,l}$ ставит в соответствие набор вещественных чисел $y = \{y_\lambda = f(\lambda), \lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)\}$, является изоморфизмом;

2) для $\rho, \sigma, \tau \in \mathbb{R}_+^d$ существует константа $c_1(d, l, \rho, \sigma, \tau) > 0$ такая, что для любых $\delta \in \mathbb{R}_+^d$ и $\beta \in \mathbb{R}^d$, $|\beta_j| = 1$, $j = 1, \dots, d$, для любых точек

$x^0, y^0 \in \mathbb{R}^d$ таких, что $|x_j^0 - y_j^0| \leq \sigma_j \delta_j$, $j = 1, \dots, d$, любого множества $Q \subset \mathbb{R}^d$ такого, что $\sup_{x \in Q} |x_j - y_j^0| \leq \tau_j \delta_j$, $j = 1, \dots, d$, и любого полинома $f \in \mathcal{P}^{d,l}$ справедлива оценка

$$\sup_{x \in Q} |f(x)| \leq c_1 \max_{\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)} |f(x^0 + \rho \delta \beta \lambda)|. \quad (2.1.1)$$

Доказательство этой леммы проводится без затруднений.

ТЕОРЕМА 2.1.2. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $l = l(\alpha) \in \mathbb{Z}_+^d$, $m = m(\alpha) \in \mathbb{N}^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l + m - \vec{1})$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ таковы, что выполняются условия (1.3.49) и (1.3.45). Пусть $T = I^d$, $X = L_q(I^d)$, $D(U) = \{f \in C(I^d): \mathcal{D}^\lambda f \in L_q(I^d)\}$, $U = \mathcal{D}^\lambda$, $K = \mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$, $\mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(I^d)$, где $\theta \in \mathbb{R}^d$, $\theta_j \geq 1$, $j = 1, \dots, d$. Тогда существует константа $c_2(d, \alpha, p, q, \lambda) > 0$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq (l + m) \vec{1}$, выполнено неравенство

$$\bar{\sigma}_n(U, K, X) \leq c_2 n^{-(1 - (\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1} - q^{-1})_+ \vec{1})) / (\alpha^{-1}, \vec{1})}. \quad (2.1.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая включение (1.1.1), доказательство достаточно провести лишь в случае $K = \mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$.

Прежде всего, отметим, что выполнение условий (1.3.49) и (1.3.45) обеспечивает включение $K \subset D(U)$, и, следовательно, величина $\bar{\sigma}_n(U, K, X)$ определена.

Пусть теперь $n \in \mathbb{N}$, $n \geq (l + m) \vec{1}$. Тогда выберем $k \in \mathbb{Z}_+$ таким, чтобы для $\kappa(k, \alpha) \in \mathbb{N}^d$ с компонентами $\kappa_j(k, \alpha) = 2^{\lfloor k / \alpha_j \rfloor}$, $j = 1, \dots, d$, имело место соотношение

$$n_{k,\alpha} = (l + m) \vec{1}(\kappa(k, \alpha)) \vec{1} \leq n \leq (l + m) \vec{1}(\kappa(k + 1, \alpha)) \vec{1}. \quad (2.1.3)$$

Далее, для $\kappa = \kappa(k, \alpha)$ построим систему точек

$$x_{\kappa,\nu}^\mu = \kappa^{-1} \left(\nu + \frac{1}{4} \vec{1} + \frac{1}{2} (l + m)^{-1} \mu \right) \in Q_{\kappa,\nu}^d = \kappa^{-1} \nu + \kappa^{-1} I^d,$$

$$\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d, \quad \mu \in \mathbb{Z}_+^d(l + m - \vec{1}),$$

и определим отображение $\varphi \in \Phi_{n_{k,\alpha}}(C(I^d))$, полагая для $f \in C(I^d)$, что

$$\varphi(f) = \{f(x_{\kappa,\nu}^\mu), \nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d, \mu \in \mathbb{Z}_+^d(l + m - \vec{1})\}.$$

Пользуясь леммой 2.1.1, рассмотрим систему полиномов

$$\{\pi_\mu^{d,l+m-\vec{1}} \in \mathcal{P}^{d,l+m-\vec{1}}, \mu \in \mathbb{Z}_+^d(l + m - \vec{1})\},$$

принимающих для $\mu, \mu' \in \mathbb{Z}_+^d(l + m - \vec{1})$ значения

$$\pi_\mu^{d,l+m-\vec{1}}(\mu') = \begin{cases} 1 & \text{при } \mu' = \mu, \\ 0 & \text{при } \mu' \neq \mu, \end{cases}$$

и обозначим через $R_{\kappa, \nu, \mu}^{d, l+m-\vec{1}}$ полином из $\mathcal{D}^{d, l+m-\vec{1}}$, равный

$$R_{\kappa, \nu, \mu}^{d, l+m-\vec{1}}(x) = \pi_{\mu}^{d, l+m-\vec{1}}(2(l+m)\kappa(x-x_{\kappa, \nu}^0)), \quad \nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa-\vec{1}}^d, \quad \mu \in \mathbb{Z}_+^d(l+m-\vec{1}).$$

Нетрудно видеть, что при $\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa-\vec{1}}^d$, $\mu, \mu' \in \mathbb{Z}_+^d(l+m-\vec{1})$ имеем

$$R_{\kappa, \nu, \mu}^{d, l+m-\vec{1}}(x_{\kappa, \nu}^{\mu'}) = \pi_{\mu}^{d, l+m-\vec{1}}(\mu').$$

Определим для $\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa-\vec{1}}^d$ линейный оператор $R_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}}: \mathbb{R}^{n_{k, \alpha}} \rightarrow \mathcal{D}^{d, l+m-\vec{1}}$, полагая для $t = \{t_{\nu', \mu} \in \mathbb{R}, \nu' \in \mathcal{N}_{0, \kappa-\vec{1}}^d, \mu \in \mathbb{Z}_+^d(l+m-\vec{1})\}$

$$R_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}}t = \sum_{\mu \in \mathbb{Z}_+^d(l+m-\vec{1})} t_{\nu, \mu} R_{\kappa, \nu, \mu}^{d, l+m-\vec{1}}.$$

Учитывая сказанное выше, получим, что при $\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa-\vec{1}}^d$ для $f \in C(I^d)$ и $\mu \in \mathbb{Z}_+^d(l+m-\vec{1})$ имеет место равенство

$$(R_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}} \circ \varphi(f))(x_{\kappa, \nu}^{\mu}) = f(x_{\kappa, \nu}^{\mu}). \quad (2.1.4)$$

Теперь определим оператор $A \in \overline{\mathcal{A}}^{n_{k, \alpha}}(X)$, полагая для $t = \{t_{\nu, \mu} \in \mathbb{R}, \nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa-\vec{1}}^d, \mu \in \mathbb{Z}_+^d(l+m-\vec{1})\}$ значение

$$At = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa-\vec{1}}^d} \mathcal{D}^{\lambda} R_{\kappa, \nu}^{d, l+m-\vec{1}}(t) \chi_{\kappa, \nu}^d,$$

где $\chi_{\kappa, \nu}^d$ — характеристическая функция множества $Q_{\kappa, \nu}^d$. Тогда, фиксировав некоторую функцию $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, удовлетворяющую условиям (1.3.6)–(1.3.8), для $f \in K$ имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^{\lambda} f - A \circ \varphi(f)\|_X &\leq \|\mathcal{D}^{\lambda} f - \mathcal{D}^{\lambda} E_k^{d, l+m-\vec{1}, \alpha, g} f\|_{L_q(I^d)} \\ &\quad + \|\mathcal{D}^{\lambda} E_k^{d, l+m-\vec{1}, g} f - U_{\kappa, \lambda}^{d, l+m-\vec{1}} f\|_{L_q(I^d)} \\ &\quad + \|U_{\kappa, \lambda}^{d, l+m-\vec{1}} f - A \circ \varphi(f)\|_{L_q(I^d)}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Оценка первого слагаемого в правой части (2.1.5) следует из неравенства (1.3.46). Применяя для оценки второго слагаемого в правой части (2.1.5) неравенство (1.3.24), при $p \leq q$ получаем

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{D}^{\lambda} E_k^{d, l+m-\vec{1}, g} f - U_{\kappa, \lambda}^{d, l+m-\vec{1}} f\|_{L_q(I^d)} \\ &\leq c_3 \kappa^{\lambda+p^{-1}\vec{1}-q^{-1}\vec{1}} \sum_{j=1}^d \kappa_j^{-l_j} \Omega_j^{m_j} (\mathcal{D}_j^{l_j} f, c_4 \kappa_j^{-1})_{L_p(I^d)} \\ &\leq c_5 \kappa^{\lambda+p^{-1}\vec{1}-q^{-1}\vec{1}} \sum_{j=1}^d \kappa_j^{-\alpha_j} \leq c_6 2^{-k(1-(\alpha^{-1}, \lambda+(p^{-1}-q^{-1})+\vec{1}))}. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Учитывая, что при $q < p$ для $h \in L_p(I^d)$ верна оценка $\|h\|_{L_q(I^d)} \leq \|h\|_{L_p(I^d)}$, находим, что (2.1.6) справедливо и при $q < p$.

Оценивая третье слагаемое в правой части (2.1.5), выводим

$$\begin{aligned} & \|U_{\kappa,\lambda}^{d,l+m-\vec{1}} f - A \circ \varphi(f)\|_{L_q(I^d)}^q \\ &= \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} \|\mathcal{D}^\lambda S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\lambda R_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} \circ \varphi(f)\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu}^d)}^q. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Используя для оценки слагаемых в правой части (2.1.7) сначала неравенство (1.3.1), затем применяя (2.1.1) и (2.1.4) и, наконец, учитывая (1.3.48), после соответствующей замены переменной получаем, что при $p \leq q$ для $f \in K$ и $\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{D}^\lambda S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\lambda R_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} \circ \varphi(f)\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu}^d)} \\ & \leq c_7 \kappa^{\lambda-q^{-1}\vec{1}} \sup_{x \in Q_{\kappa,\nu}^d} |(S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f - R_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} \circ \varphi(f))(x)| \\ & \leq c_8 \kappa^{\lambda-q^{-1}\vec{1}} \max_{\mu \in \mathbb{Z}_+^d(l+m-\vec{1})} |(S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f)(x_{\kappa,\nu}^\mu) - (R_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} \circ \varphi(f))(x_{\kappa,\nu}^\mu)| \\ & = c_8 \kappa^{\lambda-q^{-1}\vec{1}} \max_{\mu \in \mathbb{Z}_+^d(l+m-\vec{1})} |(S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f)(x_{\kappa,\nu}^\mu) - f(x_{\kappa,\nu}^\mu)| \\ & \leq c_8 \kappa^{\lambda-q^{-1}\vec{1}} \|S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f - f\|_{L_\infty(Q_{\kappa,\nu}^d)} \\ & \leq c_9 2^{k(\alpha^{-1}, \lambda+(p^{-1}-q^{-1})\vec{1})} \int_0^1 t^{-(\alpha^{-1}, p^{-1}\vec{1})-1} \sum_{j=1}^d (2^{-k}t)^{(l_j-p^{-1})/\alpha_j} \\ & \quad \times \left(\int_{c_{10}(2^{-k}t)^{1/\alpha_j} B^1} \int_{(Q_{\kappa,\nu}^d)_{m_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} dt \\ & = c_9 2^{k(\alpha^{-1}, \lambda-q^{-1}\vec{1})} \int_0^{2^{-k}} t^{-(\alpha^{-1}, p^{-1}\vec{1})-1} \sum_{j=1}^d t^{(l_j-p^{-1})/\alpha_j} \\ & \quad \times \left(\int_{c_{10}t^{1/\alpha_j} B^1} \int_{(Q_{\kappa,\nu}^d)_{m_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{1/p} dt. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Выбирая $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $1 - (\alpha^{-1}, p^{-1}\vec{1}) - \varepsilon > 0$, из (2.1.8), пользуясь неравенством Гёльдера, для $f \in K$ при $p \leq q$ и $\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d$ выводим оценку

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{D}^\lambda S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\lambda R_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} \circ \varphi(f)\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu}^d)} \\ & \leq c_{11} 2^{k(\alpha^{-1}, \lambda-q^{-1}\vec{1})-k\varepsilon} \left(\int_0^{2^{-k}} t^{-q(\alpha^{-1}, p^{-1}\vec{1})-q\varepsilon-1} \sum_{j=1}^d t^{q(l_j-p^{-1})/\alpha_j} \right. \\ & \quad \times \left. \left(\int_{c_{10}t^{1/\alpha_j} B^1} \int_{(Q_{\kappa,\nu}^d)_{m_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} dt \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (2.1.7) и проводя соответствующие выкладки, в частности применяя неравенство Гёльдера с показателем $p/q \leq 1$, для $f \in K$ при $p \leq q$ получаем

$$\begin{aligned}
& \|U_{\kappa, \lambda}^{d, l+m-\vec{1}} f - A \circ \varphi(f)\|_{L_q(I^d)}^q \\
& \leq \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa-\vec{1}}^d} (c_{11} 2^{k(\alpha^{-1}, \lambda-q^{-1}\vec{1})-k\varepsilon})^q \int_0^{2^{-k}} t^{-q(\alpha^{-1}, p^{-1}\vec{1})-q\varepsilon-1} \\
& \quad \times \sum_{j=1}^d t^{q(l_j-p^{-1})/\alpha_j} \left(\int_{c_{10} t^{1/\alpha_j} B^1} \int_{(Q_{\kappa, \nu}^d)_{m_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} dt \\
& = (c_{11} 2^{k(\alpha^{-1}, \lambda-q^{-1}\vec{1})-k\varepsilon})^q \int_0^{2^{-k}} t^{-q(\alpha^{-1}, p^{-1}\vec{1})-q\varepsilon-1} \sum_{j=1}^d t^{q(l_j-p^{-1})/\alpha_j} \\
& \quad \times \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa-\vec{1}}^d} \left(\int_{c_{10} t^{1/\alpha_j} B^1} \int_{(Q_{\kappa, \nu}^d)_{m_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} dt \\
& \leq (c_{11} 2^{k(\alpha^{-1}, \lambda-q^{-1}\vec{1})-k\varepsilon})^q \int_0^{2^{-k}} t^{-q(\alpha^{-1}, p^{-1}\vec{1})-q\varepsilon-1} \sum_{j=1}^d t^{q(l_j-p^{-1})/\alpha_j} \\
& \quad \times \left(\sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa-\vec{1}}^d} \int_{c_{10} t^{1/\alpha_j} B^1} \int_{(Q_{\kappa, \nu}^d)_{m_j \xi e_j}} |\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f(\eta)|^p d\eta d\xi \right)^{q/p} dt \\
& \leq (c_{11} 2^{k(\alpha^{-1}, \lambda-q^{-1}\vec{1})-k\varepsilon})^q \int_0^{2^{-k}} t^{-q(\alpha^{-1}, p^{-1}\vec{1})-q\varepsilon-1} \\
& \quad \times \sum_{j=1}^d t^{q(l_j-p^{-1})/\alpha_j} \left(\int_{c_{10} t^{1/\alpha_j} B^1} \|\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} f\|_{L_p(I_{m_j \xi e_j}^d)}^p d\xi \right)^{q/p} dt \\
& \leq (c_{12} 2^{k(\alpha^{-1}, \lambda-q^{-1}\vec{1})-k\varepsilon})^q \int_0^{2^{-k}} t^{-q(\alpha^{-1}, p^{-1}\vec{1})-q\varepsilon-1} \\
& \quad \times \sum_{j=1}^d t^{ql_j/\alpha_j} ((c_{10} t^{1/\alpha_j})^{\alpha_j-l_j})^q dt \\
& \leq (c_{13} 2^{k(\alpha^{-1}, \lambda-q^{-1}\vec{1})-k\varepsilon})^q \int_0^{2^{-k}} t^{q(1-(\alpha^{-1}, p^{-1}\vec{1})-\varepsilon)-1} dt \\
& = (c_{14} 2^{-k(1-(\alpha^{-1}, \lambda+(p^{-1}-q^{-1})_+ \vec{1}))})^q
\end{aligned}$$

или

$$\|U_{\kappa, \lambda}^{d, l+m-\vec{1}} f - A \circ \varphi(f)\|_{L_q(I^d)} \leq c_{14} 2^{-k(1-(\alpha^{-1}, \lambda+(p^{-1}-q^{-1})_+ \vec{1}))}. \quad (2.1.9)$$

В силу тех же соображений, которые использовались при выводе (2.1.6) в случае $q < p$, неравенство (2.1.9) также верно при $q < p$.

Подставляя оценки (1.3.46), (2.1.6) и (2.1.9) в неравенство (2.1.5), находим, что для $f \in K$ выполнено

$$\|\mathcal{D}^\lambda f - A \circ \varphi(f)\|_X \leq c_{15} 2^{-k(1-(\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1} - q^{-1})_+ \vec{1}))},$$

откуда с учетом соотношения (2.1.3) следует, что

$$\bar{\sigma}_n(U, K, X) \leq \bar{\sigma}_{n_{k,\alpha}}(U, K, X) \leq c_{15} 2^{-k(1-(\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1} - q^{-1})_+ \vec{1}))}.$$

Отсюда, пользуясь тем, что для n , удовлетворяющего (2.1.3), справедливо соотношение $n \asymp 2^{k(\alpha^{-1}, \vec{1})}$, приходим к неравенству (2.1.2).

2.2. Выведем оценку снизу величины наилучшей точности восстановления в $L_q(I^d)$ производной $\mathcal{D}^\lambda f$ по значениям в n точках функций f из $\mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$, $\mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(I^d)$.

ТЕОРЕМА 2.2.1. *В условиях теоремы 2.1.2 существует константа $c_1(d, \alpha, \theta, p, q, \lambda) > 0$ такая, что при $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$\sigma_n(U, K, X) \geq c_1 n^{-(1-(\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1} - q^{-1})_+ \vec{1})) / (\alpha^{-1}, \vec{1})}. \quad (2.2.1)$$

В основе доказательства теоремы 2.2.1 лежит

ЛЕММА 2.2.2. *Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $\theta \in \mathbb{R}^d$: $\theta_j \geq 1$, $j = 1, \dots, d$, $1 \leq p, q \leq \infty$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$. Тогда существует константа $c_2(d, \alpha, \theta, p, q, \lambda) > 0$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого набора точек $x^1, \dots, x^n \in I^d$ можно построить функцию $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(I^d)$, для которой*

$$f(x^i) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.2.2)$$

и

$$\|\mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(I^d)} \geq c_2 n^{-(1-(\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1} - q^{-1})_+ \vec{1})) / (\alpha^{-1}, \vec{1})}. \quad (2.2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего фиксируем функцию $\varphi \in C_0^\infty(I^d)$ такую, что $\varphi \neq 0$.

Далее, для произвольных $\kappa \in \mathbb{N}^d$, $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d$ и $\beta = \{\beta_\nu \in \mathbb{R}, \nu \in \mathcal{N}\}$ рассмотрим функцию $f_{\kappa,\mathcal{N},\beta}(x) = \sum_{\nu \in \mathcal{N}} \beta_\nu \varphi(\kappa x - \nu)$.

Тогда ясно, что $f_{\kappa,\mathcal{N},\beta} \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp } f_{\kappa,\mathcal{N},\beta} \subset \cup_{\nu \in \mathcal{N}} (\kappa^{-1}\nu + \kappa^{-1}I^d)$ и при $1 \leq s \leq \infty$ для $\mu \in \mathbb{Z}_+^d$ справедливо равенство

$$\|\mathcal{D}^\mu f_{\kappa,\mathcal{N},\beta}\|_{L_s(I^d)} = \|\mathcal{D}^\mu \varphi\|_{L_s(I^d)} \kappa^{\mu-s-\vec{1}} \|\beta\|_s^\mathcal{N}, \quad (2.2.4)$$

где

$$\|\beta\|_s^\mathcal{N} = \begin{cases} \left(\sum_{\nu \in \mathcal{N}} |\beta_\nu|^s \right)^{1/s} & \text{при } 1 \leq s < \infty, \\ \max_{\nu \in \mathcal{N}} |\beta_\nu| & \text{при } s = \infty. \end{cases}$$

Пусть теперь $n \in \mathbb{N}$ и $x^1, \dots, x^n \in I^d$. Тогда выберем $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, таким, чтобы для $\mathcal{K}(k, \alpha) \in \mathbb{N}^d$ с компонентами $\mathcal{K}_j(k, \alpha) = [k^{1/\alpha_j}]$, $j = 1, \dots, d$, соблюдалось соотношение

$$(\mathcal{K}(k-1, \alpha))^{\vec{1}} < 2n \leq (\mathcal{K}(k, \alpha))^{\vec{1}}, \quad (2.2.5)$$

и, полагая $\kappa = \mathcal{K}(k, \alpha)$, рассмотрим множество

$$\mathcal{N} = \{\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa^{-1}}^d: x^j \notin (\kappa^{-1}\nu + \kappa^{-1}I^d) \quad \forall j = 1, \dots, n\} \subset \mathcal{N}_{0, \kappa^{-1}}^d.$$

Тогда для функции $g = ck^{-1}\kappa^{p^{-1}\bar{1}}f_{\kappa, \mathcal{N}, \beta}$ при $c > 0$, $\|\beta\|_p^{\mathcal{N}} \leq 1$ для $l = l(\alpha) \in \mathbb{Z}_+^d$, $m = m(\alpha) \in \mathbb{N}^d$ при $j = 1, \dots, d$ в силу (2.2.4), с одной стороны, имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} g\|_{L_p(I_{m_j \xi e_j}^d)} &\leq 2^{m_j} ck^{-1}\kappa^{p^{-1}\bar{1}} \|\mathcal{D}_j^{l_j} \varphi\|_{L_p(I^d)} \kappa^{l_j e_j - p^{-1}\bar{1}} \|\beta\|_p^{\mathcal{N}} \\ &\leq cc_3 \kappa_j^{-(\alpha_j - l_j)}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

и, значит,

$$\Omega_j^{m_j}(\mathcal{D}_j^{l_j} g, t)_{L_p(I^d)} \leq cc_3 \kappa_j^{-\alpha_j + l_j}. \quad (2.2.6)$$

С другой стороны, ввиду (1.2.21) и (2.2.4) имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta_{\xi e_j}^{m_j} \mathcal{D}_j^{l_j} g\|_{L_p(I_{m_j \xi e_j}^d)} &\leq |\xi|^{m_j} ck^{-1}\kappa^{p^{-1}\bar{1}} \|\mathcal{D}_j^{l_j + m_j} \varphi\|_{L_p(I^d)} \kappa^{(l_j + m_j)e_j - p^{-1}\bar{1}} \|\beta\|_p^{\mathcal{N}} \\ &\leq cc_4 \kappa_j^{-\alpha_j + l_j + m_j} |\xi|^{m_j}, \quad \xi \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\Omega_j^{m_j}(\mathcal{D}_j^{l_j} g, t)_{L_p(I^d)} \leq cc_4 \kappa_j^{-\alpha_j + l_j + m_j} t^{m_j}. \quad (2.2.7)$$

При $j = 1, \dots, d$, используя неравенство (2.2.6), получаем

$$\begin{aligned} &\int_{\kappa_j^{-1}}^{\infty} t^{-1 - \theta_j(\alpha_j - l_j)} (\Omega_j^{m_j}(\mathcal{D}_j^{l_j} g, t)_{L_p(I^d)})^{\theta_j} dt \\ &\leq \int_{\kappa_j^{-1}}^{\infty} t^{-1 - \theta_j(\alpha_j - l_j)} (cc_3 \kappa_j^{-\alpha_j + l_j})^{\theta_j} dt \\ &= (cc_3)^{\theta_j} \int_1^{\infty} u^{-1 - \theta_j(\alpha_j - l_j)} du, \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

и, применяя неравенство (2.2.7), имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^{\kappa_j^{-1}} t^{-1 - \theta_j(\alpha_j - l_j)} (\Omega_j^{m_j}(\mathcal{D}_j^{l_j} g, t)_{L_p(I^d)})^{\theta_j} dt \\ &\leq \int_0^{\kappa_j^{-1}} t^{-1 - \theta_j(\alpha_j - l_j)} (cc_4 \kappa_j^{-\alpha_j + l_j + m_j} t^{m_j})^{\theta_j} dt \\ &= (cc_4)^{\theta_j} \int_0^1 u^{\theta_j(l_j + m_j - \alpha_j) - 1} du. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Из соотношений (2.2.8) и (2.2.9) видно, что существует такая константа $c_5(d, \alpha, p, \theta) > 0$, что при $\|\beta\|_p^{\mathcal{N}} \leq 1$ каждая функция $c_5 k^{-1} \kappa^{p^{-1}\bar{1}} f_{\kappa, \mathcal{N}, \beta}$ принадлежит $\mathcal{B}_{p, \theta}^{\alpha}(I^d)$.

Далее, заметим, что для каждого $i = 1, \dots, n$ существует не более одного $\nu \in \mathcal{N}_{0, \kappa^{-1}\bar{1}}^d$, для которого $x^i \in (\kappa^{-1}\nu + \kappa^{-1}I^d)$. Поэтому, учитывая соотношение (2.2.5), имеем

$$\text{card } \mathcal{N} = \text{card } \mathcal{N}_{0, \kappa^{-1}\bar{1}}^d - \text{card}(\mathcal{N}_{0, \kappa^{-1}\bar{1}}^d \setminus \mathcal{N}) \geq \kappa\bar{1} - n \geq n. \quad (2.2.10)$$

Как известно, существует $\bar{\beta} = \{\bar{\beta}_\nu \in \mathbb{R}, \nu \in \mathcal{N}\}$, для которого $\|\bar{\beta}\|_p^{\mathcal{N}} = 1$ и

$$\|\bar{\beta}\|_q^{\mathcal{N}} = \max_{\|\beta\|_p^{\mathcal{N}} \leq 1} \|\beta\|_q^{\mathcal{N}} = (\text{card } \mathcal{N})^{(q^{-1} - p^{-1})_+}. \quad (2.2.11)$$

Полагая $f = c_5 k^{-1} \kappa p^{-1} \bar{1} f_{\kappa, \mathcal{N}, \bar{\beta}}$, пользуясь соотношениями (2.2.4), (2.2.5), (2.2.11) и (2.2.10), получаем (2.2.3).

Условие (2.2.2), очевидно, выполнено в силу определения множества $\mathcal{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.2.1. Учитывая включение (1.1.1), доказательство проводим в случае $K = \mathcal{B}_{p, \theta}^\alpha(I^d)$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{A}^n(X)$ и $\varphi \in \Phi_n(C(I^d))$ определяется системой точек $x^1, \dots, x^n \in I^d$. Для $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$, удовлетворяющего условиям теоремы 2.2.1, рассмотрим функцию $f \in \mathcal{B}_{p, \theta}^\alpha(I^d)$, обладающую свойствами (2.2.2) и (2.2.3). Тогда

$$\begin{aligned} c_2 n^{-(1 - (\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1} - q^{-1})_+ \bar{1})) / (\alpha^{-1}, \bar{1})} &\leq \|\mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(I^d)} \\ &= \|\mathcal{D}^\lambda f - A \circ \varphi(f) + A \circ \varphi(0) - \mathcal{D}^\lambda 0\|_{L_q(I^d)} \leq 2 \sup_{g \in K} \|\mathcal{D}^\lambda g - A \circ \varphi(g)\|_X. \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду произвольности $A \in \mathcal{A}^n(X)$ и $\varphi \in \Phi_n(C(I^d))$ заключаем, что имеет место (2.2.1).

§ 3. Задача С.Б. Стечкина для оператора частного дифференцирования на неизотропных классах функций конечной гладкости

3.1. Получим оценку сверху наилучшей точности приближения в $L_q(I^d)$ оператора $\mathcal{D}^\lambda$ ограниченными операторами, действующими из $L_s(I^d)$ в $L_q(I^d)$, на классах $\mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$ и $\mathcal{B}_{p, \theta}^\alpha(I^d)$.

Напомним постановку общей задачи, частным случаем которой является задача, рассматриваемая в настоящем параграфе.

Пусть X, Y – банаховы пространства, $\mathcal{B}(X, Y)$ – банахово пространство непрерывных линейных операторов $V: X \rightarrow Y$ с обычной нормой

$$\|V\|_{\mathcal{B}(X, Y)} = \sup_{\{x \in X: \|x\|_X \leq 1\}} \|Vx\|_Y,$$

$A: D(A) \rightarrow Y$ – линейный оператор с областью определения $D(A) \subset X$. Пусть $K \subset D(A)$ и $\rho > 0$.

Необходимо описать поведение в зависимости от ρ величины

$$E(A, X, Y, K, \rho) = \inf_{\{V \in \mathcal{B}(X, Y): \|V\|_{\mathcal{B}(X, Y)} \leq \rho\}} \sup_{x \in K} \|Ax - Vx\|_Y.$$

ТЕОРЕМА 3.1.1. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q, s \leq \infty$ и $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$ удовлетворяют условию (1.3.45), а также при $p < s$ соблюдается неравенство

$$1 - (\alpha^{-1}, (p^{-1} - s^{-1})\vec{1}) > 0$$

и, кроме того, выполняется неравенство

$$(\alpha^{-1}, \lambda + (s^{-1} - q^{-1})_+\vec{1}) > 0.$$

Пусть $A = \mathcal{D}^\lambda$, $D(A) = \{f \in L_s(I^d) : \mathcal{D}^\lambda f \in L_q(I^d)\}$, $X = L_s(I^d)$, $Y = L_q(I^d)$, $K = \mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$, $\mathcal{B}_{p,\theta}^\alpha(I^d)$, где $\theta \in \mathbb{R}^d$: $\theta_j \geq 1$, $j = 1, \dots, d$, $\gamma = 1 - (\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1} - q^{-1})_+\vec{1})$, $\tau = (\alpha^{-1}, \lambda + (s^{-1} - q^{-1})_+\vec{1})$. Тогда существуют константы $\rho_1(d, \alpha, s, q, \lambda) > 0$ и $c_1(d, \alpha, p, q, s, \lambda) > 0$ такие, что для $\rho \geq \rho_1$ справедливо неравенство

$$E(A, X, Y, K, \rho) \leq c_1 \rho^{-\gamma/\tau}. \quad (3.1.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 3.1.1, по существу, сводится к доказательству следующей леммы.

ЛЕММА 3.1.2. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$ удовлетворяют условию (1.3.45) и $1 \leq s \leq \infty$. Пусть $l = l(\alpha) \in \mathbb{Z}_+^d$, $m = m(\alpha) \in \mathbb{N}^d$. Тогда существуют константы $c_2(d, \alpha, p, q, \lambda) > 0$ и $c_3(d, \alpha, s, q, \lambda) > 0$ такие, что при $k \in \mathbb{Z}_+$ для $\kappa = \kappa(k, \alpha) \in \mathbb{N}^d$ с компонентами $\kappa_j(k, \alpha) = 2^{\lfloor k/\alpha_j \rfloor}$, $j = 1, \dots, d$, и для $f \in \mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$ имеет место неравенство

$$\|\mathcal{D}^\lambda f - U_{\kappa, \lambda}^{d, l+m-\vec{1}} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_2 2^{-k\gamma}, \quad (3.1.2)$$

а для $f \in L_s(I^d)$ выполнено неравенство

$$\|U_{\kappa, \lambda}^{d, l+m-\vec{1}} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_3 2^{k\tau} \|f\|_{L_s(I^d)}. \quad (3.1.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксировав функцию $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, удовлетворяющую условиям (1.3.6)–(1.3.8), для произвольной функции $f \in \mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\kappa = \kappa(k, \alpha)$, учитывая, что в силу (1.3.45) производная $\mathcal{D}^\lambda f$ принадлежит $L_q(I^d)$, получим

$$\begin{aligned} \|\mathcal{D}^\lambda f - U_{\kappa, \lambda}^{d, l+m-\vec{1}} f\|_{L_q(I^d)} &\leq \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{D}^\lambda E_k^{d, l+m-\vec{1}, \alpha, g} f\|_{L_q(I^d)} \\ &\quad + \|\mathcal{D}^\lambda E_k^{d, l+m-\vec{1}, g} f - U_{\kappa, \lambda}^{d, l+m-\vec{1}} f\|_{L_q(I^d)}. \end{aligned}$$

Подставляя в правую часть последнего неравенства оценку (1.3.46) для первого слагаемого и оценку (2.1.6) для второго слагаемого, приходим к (3.1.2).

Если $s \leq q$, то, применяя неравенство (1.3.2) и неравенство Гёльдера с показателем $s/q \leq 1$, для $f \in L_s(I^d)$ получаем

$$\begin{aligned} \|U_{\kappa,\lambda}^{d,l+m-\vec{1}} f\|_{L_q(I^d)}^q &= \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} \|\mathcal{D}^\lambda S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu}^d)}^q \\ &\leq (c_3 2^{k(\alpha^{-1}, \lambda + (s^{-1}-q^{-1})\vec{1})})^q \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} \|f\|_{L_s(Q_{\kappa,\nu}^d)}^q \\ &\leq (c_3 2^{k(\alpha^{-1}, \lambda + (s^{-1}-q^{-1})\vec{1})})^q \left(\sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} \|f\|_{L_s(Q_{\kappa,\nu}^d)}^s \right)^{q/s} \\ &= (c_3 2^{k\tau} \|f\|_{L_s(I^d)})^q, \end{aligned}$$

откуда следует (3.1.3) при $s \leq q$.

Если $q < s$, то, пользуясь неравенством (3.1.3) при $q = s$ и неравенством Гёльдера, находим, что (3.1.3) справедливо и при $q < s$.

3.2. В этом пункте осуществляется оценка снизу величины, которая рассматривалась в п. 3.1.

Для вывода этой оценки необходимы вспомогательные утверждения, для формулировки которых напомним, что при $n \in \mathbb{N}$ и $1 \leq p \leq \infty$ через l_p^n обозначено пространство $\mathbb{R}^n$ с фиксированной в нем нормой

$$\|x\|_{l_p^n} = \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p \right)^{1/p} & \text{при } p < \infty, \\ \max_{j=1}^n |x_j| & \text{при } p = \infty, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Как показано в [2], имеет место

ТЕОРЕМА 3.2.1. *При любых $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $1 \leq p, q, s \leq \infty$ выполнено равенство*

$$\min \{ \|E - U\|_{\mathcal{B}(l_p^n, l_q^n)} : \|U\|_{\mathcal{B}(l_s^n, l_q^n)} \leq \varepsilon n^{(q^{-1}-s^{-1})_+} \} = (1 - \varepsilon) n^{(q^{-1}-p^{-1})_+}, \quad (3.2.1)$$

где E – тождественный оператор.

ЛЕММА 3.2.2. *Пусть $d \in \mathbb{N}$ и функция $\varphi \in C_0^\infty(I^d)$ такова, что $\varphi \not\equiv 0$. Для $\kappa \in \mathbb{N}^d$ и множества $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d$ обозначим через $\mathcal{L}_{\kappa,\mathcal{N}} = \mathcal{L}_{\kappa,\mathcal{N}}^{d,\varphi}$ линейную оболочку системы функций $\{\varphi(\kappa x - \nu), \nu \in \mathcal{N}\}$, а через $\mathcal{J}_{\kappa,\mathcal{N}} = \mathcal{J}_{\kappa,\mathcal{N}}^{d,\varphi} : \mathbb{R}^{|\mathcal{N}|} \rightarrow \mathcal{L}_{\kappa,\mathcal{N}}^{d,\varphi}$ – линейный оператор, определяемый равенством*

$$\mathcal{J}_{\kappa,\mathcal{N}} \beta = \sum_{\nu \in \mathcal{N}} \beta_\nu \varphi(\kappa x - \nu), \quad \beta = \{\beta_\nu \in \mathbb{R}, \nu \in \mathcal{N}\} \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}|},$$

и $|\mathcal{N}| = \text{card } \mathcal{N}$.

Тогда:

1) для любого $\kappa \in \mathbb{N}^d$ и любого непустого множества $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$ система функций $\{\varphi(\kappa x - \nu), \nu \in \mathcal{N}\}$ линейно независима и $\mathcal{J}_{\kappa, \mathcal{N}}$ – линейный изоморфизм $\mathbb{R}^{|\mathcal{N}|}$ на $\mathcal{L}_{\kappa, \mathcal{N}}$;

2) для любого $r, 1 \leq r \leq \infty$, существует константа $c_1(r, d, \varphi) > 0$ такая, что при любых $\kappa \in \mathbb{N}^d, \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$ и $\beta \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}|}$ справедливо равенство

$$\|\mathcal{J}_{\kappa, \mathcal{N}} \beta\|_{L_r(I^d)} = c_1 \kappa^{-r-1} \vec{1} \|\beta\|_{l_r^{|\mathcal{N}|}}; \quad (3.2.2)$$

3) для любых $\alpha \in \mathbb{R}_+^d, 1 \leq p \leq \infty, \theta \in \mathbb{R}^d: 1 \leq \theta_j < \infty, j = 1, \dots, d$, существует константа $c_2(d, \alpha, p, \theta, \varphi) > 0$ такая, что при любом $k \in \mathbb{N}$ для $\kappa = \mathcal{K}(k, \alpha) \in \mathbb{N}^d$ с компонентами $\mathcal{K}_j(k, \alpha) = [k^{1/\alpha_j}]$, $j = 1, \dots, d$, и для любого $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$ имеет место включение

$$\mathcal{J}_{\kappa, \mathcal{N}}(\{\beta \in \mathbb{R}^{|\mathcal{N}|}: \|\beta\|_{l_p^{|\mathcal{N}|}} \leq c_2 k^{-1} \kappa^{p-1} \vec{1}\}) \subset B(B_{p, \theta}^\alpha(I^d)). \quad (3.2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы очевидно, а справедливость (3.2.2) и (3.2.3), по существу, установлена при доказательстве леммы 2.2.2.

ЛЕММА 3.2.3. Пусть $d \in \mathbb{N}$ и функция $\varphi \in C_0^\infty(I^d)$ такова, что $\varphi \not\equiv 0$. Тогда при любом $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d$ существуют семейство констант $\{c_3(q, \lambda, d, \varphi) > 0: 1 \leq q \leq \infty\}$ и семейство линейных операторов $\pi_{\kappa, \mathcal{N}} = \pi_{\kappa, \mathcal{N}}^{\lambda, d, \varphi}: L_1(I^d) \rightarrow \mathcal{L}_{\kappa, \mathcal{N}}^{d, \varphi}, \kappa \in \mathbb{N}^d, \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$, такие, что:

1) при $\kappa \in \mathbb{N}^d$ и $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$ для $f \in \mathcal{L}_{\kappa, \mathcal{N}}$ справедливо равенство

$$\pi_{\kappa, \mathcal{N}} \mathcal{D}^\lambda f = \kappa^\lambda f; \quad (3.2.4)$$

2) при $\kappa \in \mathbb{N}^d, \mathcal{N} \subset \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$ и $1 \leq q \leq \infty$ для $f \in L_q(I^d)$ выполнено неравенство

$$\|\pi_{\kappa, \mathcal{N}} f\|_{L_q(I^d)} \leq c_3 \|f\|_{L_q(I^d)}. \quad (3.2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подбирая константу $c = c(\lambda, d, \varphi) > 0$ так, что для функции $\psi = c \mathcal{D}^\lambda \varphi$ выполнено условие

$$\int_{I^d} \mathcal{D}^\lambda \varphi(x) \psi(x) dx = 1,$$

рассмотрим для $\kappa \in \mathbb{N}^d$ и $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$ линейный оператор $\pi_{\kappa, \mathcal{N}} = \pi_{\kappa, \mathcal{N}}^{\lambda, d, \varphi}: L_1(I^d) \rightarrow \mathcal{L}_{\kappa, \mathcal{N}}^{d, \varphi}$, определенный для $f \in L_1(I^d)$ формулой

$$(\pi_{\kappa, \mathcal{N}} f)(x) = \kappa^{\vec{1}} \sum_{\nu \in \mathcal{N}} \left(\int_{I^d} f(y) \psi(\kappa y - \nu) dy \right) \varphi(\kappa x - \nu).$$

Проверка соотношений (3.2.4) и (3.2.5) проводится путем вычислений.

Теперь с помощью утверждений 3.2.1–3.2.3 установим справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3.2.4. В условиях теоремы 3.1.1 существуют константы $c_4(d, \alpha, \theta, p, q, s, \lambda) > 0$ и $\rho_2(d, \alpha, q, s, \lambda) > 0$ такие, что для $\rho > \rho_2$ выполнено неравенство

$$E(A, X, Y, K, \rho) \geq c_4 \rho^{-\gamma/\tau}. \quad (3.2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду включения (1.1.1) рассмотрим лишь случай $K = \mathcal{B}_{p, \theta}^\alpha(I^d)$.

Для $\rho > \rho_2 = c_5$, где константа c_5 будет указана ниже, выберем натуральное число $k \geq 2$, при котором для $\mathcal{K}(k, \alpha) \in \mathbb{N}^d$ с компонентами $\mathcal{K}_j(k, \alpha) = [k^{1/\alpha_j}]$, $j = 1, \dots, d$, выполнено условие

$$c_5(\mathcal{K}(k-1, \alpha))^{\lambda+(s^{-1}-q^{-1})_+ \bar{1}} < \rho \leq c_5(\mathcal{K}(k, \alpha))^{\lambda+(s^{-1}-q^{-1})_+ \bar{1}}. \quad (3.2.7)$$

Положим $\kappa = \mathcal{K}(k, \alpha)$, $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{0, \kappa-\bar{1}}^d$ и, фиксируя отличную от тождественного нуля функцию $\varphi \in C_0^\infty(I^d)$, построим подпространство $\mathcal{L}_{\kappa, \mathcal{N}}^{d, \varphi}$ и операторы $\mathcal{J}_{\kappa, \mathcal{N}}^{d, \varphi}$ и $\pi_{\kappa, \mathcal{N}}^{\lambda, d, \varphi}$, указанные в леммах 3.2.2 и 3.2.3.

Тогда для $V \in \mathcal{B}(L_s(I^d), L_q(I^d))$ при $\beta \in \mathbb{R}^{\kappa \bar{1}}$, учитывая соотношения (3.2.5), (3.2.2) и (3.2.4), имеем

$$\|\mathcal{D}^\lambda \mathcal{J}_{\kappa, \mathcal{N}} \beta - V \mathcal{J}_{\kappa, \mathcal{N}} \beta\|_{L_q(I^d)} \geq c_6 \kappa^{-q^{-1} \bar{1}} \|\kappa^\lambda \beta - \mathcal{J}_{\kappa, \mathcal{N}}^{-1} \pi_{\kappa, \mathcal{N}} V \mathcal{J}_{\kappa, \mathcal{N}} \beta\|_{l_q^{\kappa \bar{1}}}. \quad (3.2.8)$$

Используя (3.2.3) и (3.2.8), для $V \in \mathcal{B}(L_s(I^d), L_q(I^d))$ получаем

$$\begin{aligned} & \sup\{\|\mathcal{D}^\lambda f - V f\|_{L_q(I^d)} : f \in \mathcal{B}_{p, \theta}^\alpha(I^d)\} \\ & \geq \sup\{\|\mathcal{D}^\lambda \mathcal{J}_{\kappa, \mathcal{N}} \beta - V \mathcal{J}_{\kappa, \mathcal{N}} \beta\|_{L_q(I^d)} : \beta \in \mathbb{R}^{\kappa \bar{1}}, \|\beta\|_{l_p^{\kappa \bar{1}}} \leq c_2 k^{-1} \kappa^{p^{-1} \bar{1}}\} \\ & \geq c_2 k^{-1} \kappa^{p^{-1} \bar{1}} \sup\{c_6 \kappa^{-q^{-1} \bar{1}} \|\kappa^\lambda \beta - \mathcal{J}_{\kappa, \mathcal{N}}^{-1} \pi_{\kappa, \mathcal{N}} V \mathcal{J}_{\kappa, \mathcal{N}} \beta\|_{l_q^{\kappa \bar{1}}} : \beta \in B(l_p^{\kappa \bar{1}})\} \\ & = c_7 k^{-1} \kappa^{\lambda+p^{-1} \bar{1}-q^{-1} \bar{1}} \|E - \kappa^{-\lambda} \mathcal{J}_{\kappa, \mathcal{N}}^{-1} \pi_{\kappa, \mathcal{N}} V \mathcal{J}_{\kappa, \mathcal{N}}\|_{\mathcal{B}(l_p^{\kappa \bar{1}}, l_q^{\kappa \bar{1}})}. \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

Для $V \in \mathcal{B}(L_s(I^d), L_q(I^d))$ такого, что $\|V\|_{\mathcal{B}(L_s(I^d), L_q(I^d))} \leq \rho$, ввиду соотношений (3.2.2), (3.2.5) и (3.2.7) справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|\kappa^{-\lambda} \mathcal{J}_{\kappa, \mathcal{N}}^{-1} \pi_{\kappa, \mathcal{N}} V \mathcal{J}_{\kappa, \mathcal{N}}\|_{\mathcal{B}(l_p^{\kappa \bar{1}}, l_q^{\kappa \bar{1}})} \\ & \leq c_8 \kappa^{-\lambda-(s^{-1}-q^{-1})_+ \bar{1}} c_5 \kappa^{\lambda+(s^{-1}-q^{-1})_+ \bar{1}} = \frac{1}{2} \kappa^{(q^{-1}-s^{-1})_+ \bar{1}}, \end{aligned}$$

где $c_5 = \frac{1}{2c_8}$. Из неравенства (3.2.9) выводим

$$\begin{aligned} & \inf_{\|V\|_{\mathcal{B}(L_s(I^d), L_q(I^d))} \leq \rho} \sup_{f \in \mathcal{B}_{p, \theta}^\alpha(I^d)} \|\mathcal{D}^\lambda f - V f\|_{L_q(I^d)} \geq c_7 k^{-1} \kappa^{\lambda+(p^{-1}-q^{-1})_+ \bar{1}} \\ & \times \inf\left\{\|E - U\|_{\mathcal{B}(l_p^{\kappa \bar{1}}, l_q^{\kappa \bar{1}})} : \|U\|_{\mathcal{B}(l_p^{\kappa \bar{1}}, l_q^{\kappa \bar{1}})} \leq \frac{1}{2} (\kappa^{\bar{1}})^{(q^{-1}-s^{-1})_+}\right\}. \end{aligned}$$

Подставляя в правую часть последнего неравенства равенство (3.2.1) при $n = \kappa^{\bar{1}}$ и учитывая, что вследствие (3.2.7) имеет место соотношение

$$\rho \asymp k^{(\alpha^{-1}, \lambda+(s^{-1}-q^{-1})_+ \bar{1})},$$

получаем (3.2.6).

§ 4. Поперечники классов $\mathcal{D}^\lambda(B(H_p^\alpha(I^d)))$ и $\mathcal{D}^\lambda(B(B_{p,\theta}^\alpha(I^d)))$ в пространстве $L_q(I^d)$

4.1. Рассмотрим пространства кусочно полиномиальных функций и установим некоторые вспомогательные утверждения, которые будем использовать далее.

Для $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ через $\mathcal{P}_k^{d,l,\alpha}$ обозначим линейное подпространство в $L_\infty(I^d)$, состоящее из функций $f \in L_\infty(I^d)$, для которых при $\kappa = \kappa(k, \alpha) \in \mathbb{N}^d$ с компонентами $\kappa_j(k, \alpha) = 2^{[k/\alpha_j]}$, $j = 1, \dots, d$, существует набор полиномов $\{f_\nu \in \mathcal{P}^{d,l}, \nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d\}$ такой, что

$$f = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} f_\nu \chi_{\kappa,\nu}^d, \quad (4.1.1)$$

где, как и ранее, $\chi_{\kappa,\nu}^d$ — характеристическая функция множества $Q_{\kappa,\nu}^d = \kappa^{-1}\nu + \kappa^{-1}I^d$.

Обозначая $R_k^{d,l,\alpha} = \dim \mathcal{P}_k^{d,l,\alpha}$, отметим, что для $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$ существуют константы $c_1(d, l, \alpha) > 0$ и $c_2(d, l, \alpha) > 0$ такие, что при $k \in \mathbb{Z}_+$ выполнены неравенства

$$c_1 2^{k(\alpha^{-1}, \vec{1})} < R_k^{d,l,\alpha} < c_2 2^{k(\alpha^{-1}, \vec{1})}.$$

Нетрудно убедиться в том, что справедлива

ЛЕММА 4.1.1. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеет место включение

$$\mathcal{P}_{k-1}^{d,l,\alpha} \subset \mathcal{P}_k^{d,l,\alpha}. \quad (4.1.2)$$

Для формулировки следующей леммы введем обозначения.

Для $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)$, $\kappa \in \mathbb{N}^d$, $\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d$ обозначим через $\mathcal{S}_{\kappa,\nu}^{d,l,\lambda}: L_1(Q_{\kappa,\nu}^d) \rightarrow \mathcal{P}^{d,l}$ линейный оператор, определяемый равенством

$$\mathcal{S}_{\kappa,\nu}^{d,l,\lambda} = P_{\delta,x^0}^{d,l,\lambda} \quad \text{при } \delta = \kappa^{-1}, \quad x^0 = \kappa^{-1}\nu$$

(см. лемму 1.3.2).

Для $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}_+^d(l)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ рассмотрим непрерывный линейный оператор $\mathcal{U}_{k,\lambda}^{d,l,\mu,\alpha}: L_1(I^d) \rightarrow \mathcal{P}_k^{d,l-\lambda,\alpha} \cap L_\infty(I^d)$, определенный для $f \in L_1(I^d)$ равенством

$$\mathcal{U}_{k,\lambda}^{d,l,\mu,\alpha} f = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} (\mathcal{D}^\lambda \mathcal{S}_{\kappa,\nu}^{d,l,\mu}(f|_{Q_{\kappa,\nu}^d})) \chi_{\kappa,\nu}^d$$

при $\kappa = \kappa(k, \alpha) \in \mathbb{N}^d$ с компонентами $\kappa_j(k, \alpha) = 2^{[k/\alpha_j]}$, $j = 1, \dots, d$.

ЛЕММА 4.1.2. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $l = l(\alpha) \in \mathbb{Z}_+^d$, $m = m(\alpha) \in \mathbb{N}^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l + m - \vec{1})$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ удовлетворяют условию (1.3.45). Тогда существует константа $c_3(d, \alpha, p, q, \lambda) > 0$ такая, что для любой функции $f \in \mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ выполнено неравенство

$$\|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{U}_{k,0}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,0,\alpha} \mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(I^d)} \leq c_3 2^{-k(1-(\alpha^{-1}, \lambda+(p^{-1}-q^{-1})_+ \vec{1}))}. \quad (4.1.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях леммы для $f \in \mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$ и $\kappa = \kappa(k, \alpha)$ имеем

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{D}^\lambda f - \mathcal{U}_{k,0}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,0,\alpha} \mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(I^d)} \\ & \leq \|\mathcal{D}^\lambda f - U_{\kappa,\lambda}^{d,l+m-\vec{1}} f\|_{L_q(I^d)} + \|U_{\kappa,\lambda}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{U}_{k,0}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,0,\alpha} \mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(I^d)}. \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Оценка первого слагаемого в правой части (4.1.4) следует из неравенства (3.1.2). Для оценки второго слагаемого в правой части (4.1.4), применяя сначала (1.3.4), (1.3.3), (1.3.2), а затем используя (3.1.2) при $\lambda = 0$, получаем

$$\begin{aligned} & \|U_{\kappa,\lambda}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{U}_{k,0}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,0,\alpha} \mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(I^d)}^q \\ & = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} \|\mathcal{D}^\lambda S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{J}_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,0} \mathcal{D}^\lambda f\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu}^d)}^q \\ & = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} \|\mathcal{D}^\lambda S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f - \mathcal{D}^\lambda \mathcal{J}_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1},\lambda} f\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu}^d)}^q \\ & = \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} \|\mathcal{D}^\lambda \mathcal{J}_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1},\lambda} (S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f - f)\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu}^d)}^q \\ & \leq (c_4 2^{k(\alpha^{-1}, \lambda)})^q \sum_{\nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d} \|f - S_{\kappa,\nu}^{d,l+m-\vec{1}} f\|_{L_q(Q_{\kappa,\nu}^d)}^q \\ & = (c_4 2^{k(\alpha^{-1}, \lambda)})^q \|f - U_{\kappa,0}^{d,l+m-\vec{1}} f\|_{L_q(I^d)}^q \\ & \leq (c_5 2^{-k(1-(\alpha^{-1}, \lambda+(p^{-1}-q^{-1})+\vec{1}))})^q. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Объединяя неравенство (4.1.4) с (3.1.2) и (4.1.5), приходим к неравенству (4.1.3).

Следствием леммы 4.1.2 является следующая лемма, для формулировки которой необходимо ввести обозначения.

Для $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$ при $k \in \mathbb{Z}_+$, учитывая включение (4.1.2), определим непрерывный линейный оператор $V_k^{d,l,\alpha} : L_1(I^d) \rightarrow \mathcal{D}_k^{d,l,\alpha} \cap L_\infty(I^d)$ равенством

$$V_k^{d,l,\alpha} = \mathcal{U}_{k,0}^{d,l,0,\alpha} - \mathcal{U}_{k-1,0}^{d,l,0,\alpha},$$

где $\mathcal{U}_{-1,0}^{d,l,0,\alpha}$ – нулевой оператор.

ЛЕММА 4.1.3. В условиях леммы 4.1.2 для $f \in \mathcal{H}_p^\alpha(I^d)$ выполнено:

1) в $L_q(I^d)$ имеет место равенство

$$\mathcal{D}^\lambda f = \sum_{k=0}^{\infty} V_k^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha}(\mathcal{D}^\lambda f); \quad (4.1.6)$$

2) при $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|V_k^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha}(\mathcal{D}^\lambda f)\|_{L_q(I^d)} \leq c_6 2^{-k(1-(\alpha^{-1}, \lambda+(p^{-1}-q^{-1})+\vec{1}))}, \quad (4.1.7)$$

где $c_6 > 0$ – константа, зависящая от d, α, p, q, λ .

С применением леммы 4.1.2 устанавливается также

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.4. В условиях леммы 4.1.2 множество $\mathcal{D}^\lambda(B(H_p^\alpha(I^d)))$ вполне ограничено (а при $1 < p < \infty$ компактно) в $L_q(I^d)$.

В заключение этого пункта для $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $\mathcal{J}_k^{d,l,\alpha}: \mathcal{P}_k^{d,l,\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^{R_k^{d,l,\alpha}}$ линейный изоморфизм, определяемый для $f \in \mathcal{P}_k^{d,l,\alpha}$ равенством

$$\mathcal{J}_k^{d,l,\alpha} f = \{f_\nu(\kappa^{-1}\nu + \kappa^{-1}\lambda): \nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d, \lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l)\},$$

где $\kappa = \kappa(k, \alpha)$ имеет компоненты $\kappa_j(k, \alpha) = 2^{[k/\alpha_j]}$, $j = 1, \dots, d$, а $\{f_\nu \in \mathcal{P}^{d,l}, \nu \in \mathcal{N}_{0,\kappa-\vec{1}}^d\}$ – набор полиномов, удовлетворяющих (4.1.1).

Несложно проверить, что имеет место

ЛЕММА 4.1.5. Для $d \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{Z}_+^d$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$ и $1 \leq p \leq \infty$ существуют константы $c_7(d, l, \alpha, p) > 0$ и $c_8(d, l, \alpha, p) > 0$ такие, что при $k \in \mathbb{Z}_+$ для $f \in \mathcal{P}_k^{d,l,\alpha}$ выполнены неравенства

$$c_7 \|f\|_{L_p(I^d)} \leq 2^{-k(\alpha^{-1}, p^{-1}\vec{1})} \|\mathcal{J}_k^{d,l,\alpha} f\|_{l_p^{R_k^{d,l,\alpha}}} \leq c_8 \|f\|_{L_p(I^d)}. \quad (4.1.8)$$

4.2. В этом пункте дается описание слабой асимптотики изучаемых в настоящем параграфе поперечников, но сначала напомним их определения (см. [11]).

Пусть C – подмножество банахова пространства X и $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда n -поперечником по Колмогорову множества C в пространстве X называется величина

$$d_n(C, X) = \inf_{M \in \mathcal{M}_n(X)} \sup_{x \in C} \inf_{y \in M} \|x - y\|_X,$$

где $\mathcal{M}_n(X)$ – совокупность всех плоскостей M в X , у которых $\dim M \leq n$.

n -поперечником по Гельфанду множества C в пространстве X называется величина

$$d^n(C, X) = \inf_{M \in \mathcal{M}^n(X)} \sup_{x \in C \cap M} \|x\|_X,$$

где $\mathcal{M}^n(X)$ – множество всех замкнутых линейных подпространств M в X , у которых $\text{codim } M \leq n$.

Линейным n -поперечником множества C в пространстве X называется величина

$$\lambda_n(C, X) = \inf_{A \in \mathcal{L}_n(X)} \sup_{x \in C} \|x - Ax\|_X,$$

где $\mathcal{L}_n(X)$ – множество всех непрерывных аффинных отображений $A: X \rightarrow X$, у которых $\text{rank } A \leq n$.

n -поперечником по Александрову множества C в пространстве X называется величина

$$a_n(C, X) = \inf_{\varphi \in \mathcal{A}_n(C, X)} \sup_{x \in C} \|x - \varphi(x)\|_X,$$

где $\mathcal{A}_n(C, X)$ – множество всех непрерывных отображений $\varphi: C \rightarrow X$, для которых существует компакт $K_\varphi \subset X$ такой, что $\text{Im } \varphi \subset K_\varphi$ и $\dim K_\varphi \leq n$.

Введем следующую величину:

$$a^n(C, X) = \inf_{\varphi \in \mathcal{A}^n(C, X)} \sup_{y \in \text{Im } \varphi} \text{diam}(\varphi^{-1}(y))_X,$$

где $\mathcal{A}^n(C, X)$ – совокупность всех непрерывных относительно метрики пространства X отображений $\varphi: C \rightarrow K_\varphi$, для которых K_φ – метрический компакт размерности не больше n , а $\text{diam}(E)_X$ – диаметр множества E в метрике пространства X .

Наконец, энтропийным n -поперечником множества C в пространстве X будем называть величину

$$\varepsilon_n(C, X) = \inf \left\{ \varepsilon > 0: \exists x^1, \dots, x^{2^n} \in X: C \subset \bigcup_{j=1}^{2^n} (x^j + \varepsilon B(X)) \right\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2.1. Пусть $U: X \rightarrow Y$ – непрерывное линейное отображение банахова пространства X в банахово пространство Y и $L \subset X$ – замкнутое линейное подпространство, для которого сужение $U|_L$ является гомеоморфизмом L на $U(L)$, и пусть $C \subset L$ – некоторое множество. Тогда для $p_n(\cdot, \cdot) = d_n(\cdot, \cdot)$, $d^n(\cdot, \cdot)$, $\lambda_n(\cdot, \cdot)$, $a^n(\cdot, \cdot)$, $\varepsilon_n(\cdot, \cdot)$ при $n \in \mathbb{Z}_+$ имеет место неравенство

$$p_n(U(C), Y) \leq \|U\| p_n(C, X). \quad (4.2.1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2.2. Пусть C – подмножество банахова пространства X , для которого существует последовательность непрерывных линейных отображений $V_j: X \rightarrow X_j$ пространства X в замкнутые линейные подпространства X_j , $j \in \mathbb{Z}_+$, такая, что для каждого $x \in C$ имеет место представление $x = \sum_{j=0}^{\infty} V_j x$. Тогда для любых $n, j_0 \in \mathbb{Z}_+$ и любого набора $\{n_j \in \mathbb{Z}_+, j = 0, \dots, j_0\}$ таких, что $n \geq \sum_{j=0}^{j_0} n_j$, для $p_n(\cdot, \cdot) = d_n(\cdot, \cdot)$, $d^n(\cdot, \cdot)$, $\lambda_n(\cdot, \cdot)$, $a^n(\cdot, \cdot)$, $\varepsilon_n(\cdot, \cdot)$ выполнено неравенство

$$p_n(C, X) \leq \sum_{j=0}^{j_0} p_{n_j}(V_j(C), X_j) + 2 \sum_{j=j_0+1}^{\infty} d^0(V_j(C), X_j). \quad (4.2.2)$$

С помощью предложений 4.2.1 и 4.2.2, взятых из [5], доказывается следующая лемма.

ЛЕММА 4.2.3. Пусть выполнены условия леммы 4.1.2. Тогда для $C = \mathcal{D}^\lambda(B(H_p^\alpha(I^d)))$ и $X = L_q(I^d)$ справедливы следующие утверждения:

1) существует константа $c_1(d, \alpha, p, q, \lambda) > 0$ такая, что для любых $n, k, j_0 \in \mathbb{Z}_+$ и любого набора $\{n_j \in \mathbb{Z}_+, j = 1, \dots, j_0\}$ таких, что $n \geq R_k^{d, l+m-\bar{1}-\lambda, \alpha} + \sum_{j=1}^{j_0} n_j$, для $p_n(\cdot, \cdot) = d_n(\cdot, \cdot)$, $d^n(\cdot, \cdot)$, $\lambda_n(\cdot, \cdot)$, $a^n(\cdot, \cdot)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} p_n(C, X) \leq c_1 & \left(2^{-k(1-(\alpha^{-1}, \lambda+(p^{-1}-q^{-1})\bar{1}))} \sum_{j=1}^{j_0} 2^{-j(1-(\alpha^{-1}, \lambda+(p^{-1}-q^{-1})\bar{1}))} p_{n_j} \right. \\ & \times \left(B \left(l_p^{d, l+m-\bar{1}-\lambda, \alpha}, l_q^{d, l+m-\bar{1}-\lambda, \alpha} \right) \right. \\ & \left. \left. + 2^{-(k+j_0)(1-(\alpha^{-1}, \lambda+(p^{-1}-q^{-1})\bar{1}))} \right) \right); \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

2) существует константа $c_2(d, \alpha, p, q, \lambda) > 0$ такая, что для любых $n, j_0 \in \mathbb{Z}_+$ и любого набора $\{n_j \in \mathbb{Z}_+, j = 0, \dots, j_0\}$ таких, что $n \geq \sum_{j=0}^{j_0} n_j$, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon_n(C, X) \leq c_2 \left(\sum_{j=0}^{j_0} 2^{-j(1-(\alpha^{-1}, \lambda+(p^{-1}-q^{-1})\vec{1}))} \right. \\ \left. \times \varepsilon_{n_j} \left(B \left(l_p^{R_j^{d,l+m-\vec{1}-\lambda, \alpha}} \right), l_q^{R_j^{d,l+m-\vec{1}-\lambda, \alpha}} \right) \right. \\ \left. + 2^{-j_0(1-(\alpha^{-1}, \lambda+(p^{-1}-q^{-1})\vec{1}))} \right). \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, в силу (4.1.6) при $k, j_0 \in \mathbb{Z}_+$ для $F \in C$ в X имеет место равенство

$$F = \mathcal{U}_{k,0}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,0,\alpha} F + \sum_{j=1}^{j_0} V_{k+j}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha} F + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} V_{k+j}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha} F.$$

Поэтому для $n \in \mathbb{Z}_+$ и $\{n_j \in \mathbb{Z}_+, j = 1, \dots, j_0\}$ таких, что $n \geq R_k^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha} + \sum_{j=1}^{j_0} n_j$, ввиду (4.2.2) справедлива оценка

$$\begin{aligned} p_n(C, X) \leq p_{R_k^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha}}(\mathcal{U}_{k,0}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,0,\alpha}(C), \mathcal{P}_k^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha} \cap X) \\ + \sum_{j=1}^{j_0} p_{n_j}(V_{k+j}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha}(C), \mathcal{P}_{k+j}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha} \cap X) \\ + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} d^0(V_{k+j}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha}(C), \mathcal{P}_{k+j}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha} \cap X). \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Ясно, что

$$p_{R_k^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha}}(\mathcal{U}_{k,0}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,0,\alpha}(C), \mathcal{P}_k^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha} \cap X) = 0. \quad (4.2.6)$$

Далее, при $j = 1, \dots, j_0$, применяя сначала неравенства (4.2.1) и (4.1.8), а затем используя (4.1.8) и (4.1.7) при $q = p$, получаем

$$\begin{aligned} p_{n_j}(V_{k+j}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha}(C), \mathcal{P}_{k+j}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha} \cap L_q(I^d)) \\ \leq c_3 2^{-(k+j)(1-(\alpha^{-1}, \lambda+(p^{-1}-q^{-1})\vec{1}))} p_{n_j} \left(B \left(l_p^{R_{k+j}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha}} \right), l_q^{R_{k+j}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Наконец, учитывая неравенство (4.1.7), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{j=j_0+1}^{\infty} d^0(V_{k+j}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha}(C), \mathcal{P}_{k+j}^{d,l+m-\vec{1}-\lambda,\alpha} \cap L_q(I^d)) \\ \leq c_4 2^{-(k+j_0)(1-(\alpha^{-1}, \lambda+(p^{-1}-q^{-1})\vec{1}))}. \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Объединяя соотношения (4.2.5)–(4.2.8), приходим к (4.2.3). Вывод неравенства (4.2.4) проводится аналогично.

ЛЕММА 4.2.4. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $l = l(\alpha) \in \mathbb{Z}_+^d$, $m = m(\alpha) \in \mathbb{N}^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l + m - \vec{1})$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ удовлетворяют условию (1.3.45) и $\theta \in \mathbb{R}^d$: $1 \leq \theta_j < \infty$, $j = 1, \dots, d$. Тогда существует константа $c_5(d, \alpha, \theta, p, q, \lambda) > 0$ такая, что для $C = \mathcal{D}^\lambda(B(B_{p,\theta}^\alpha(I^d)))$, $X = L_q(I^d)$ и $p_n(\cdot, \cdot) = d_n(\cdot, \cdot)$, $d^n(\cdot, \cdot)$, $\lambda_n(\cdot, \cdot)$, $a^n(\cdot, \cdot)$, $\varepsilon_n(\cdot, \cdot)$ и любых натуральных чисел $n < N$ имеет место неравенство

$$p_n(C, X) \geq c_5 N^{-(1-(\alpha^{-1}, \lambda + (p^{-1} - q^{-1})\vec{1})) / (\alpha^{-1}, \vec{1})} p_n(B(l_p^N), l_q^N). \quad (4.2.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть натуральные числа n и N таковы, что $n < N$. Фиксируя функцию $\varphi \in C_0^\infty(I^d)$, $\varphi \not\equiv 0$, и выбирая $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, так, чтобы для $\mathcal{K}(k, \alpha) \in \mathbb{N}^d$ с компонентами $\mathcal{K}_j(k, \alpha) = [k^{1/\alpha_j}]$, $j = 1, \dots, d$, соблюдалось условие

$$(\mathcal{K}(k-1, \alpha))^{\vec{1}} < N \leq (\mathcal{K}(k, \alpha))^{\vec{1}}, \quad (4.2.10)$$

для $\kappa = \mathcal{K}(k, \alpha)$ рассмотрим некоторое множество $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_{0, \kappa - \vec{1}}^d$, для которого $|\mathcal{N}| = \text{card } \mathcal{N} = N$, и подпространство $\mathcal{L}_{\kappa, \mathcal{N}}^{d, \varphi}$, а также операторы $\mathcal{J}_{\kappa, \mathcal{N}}^{d, \varphi}$ и $\pi_{\kappa, \mathcal{N}}^{\lambda, d, \varphi}$ из лемм 3.2.2 и 3.2.3.

Тогда, используя сначала включение (3.2.3), а затем неравенства (4.2.1) и (3.2.5), применяя (3.2.4) и (4.2.1) с учетом неравенства (3.2.2) и, наконец, принимая во внимание, что для N , удовлетворяющего (4.2.10), справедливо соотношение $N \asymp k^{(\alpha^{-1}, \vec{1})}$, приходим к (4.2.9).

Опираясь на соотношения (4.1.3), (4.2.3), (4.2.4) и (4.2.9), подобно тому, как это сделано в [5], устанавливается слабая асимптотика колмогоровского, гельфандовского, линейного, александровского и энтропийного поперечников классов $\mathcal{D}^\lambda(B(H_p^\alpha(I^d)))$ и $\mathcal{D}^\lambda(B(B_{p,\theta}^\alpha(I^d)))$ в пространстве $L_q(I^d)$.

ТЕОРЕМА 4.2.5. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+^d$, $l = l(\alpha) \in \mathbb{Z}_+^d$, $m = m(\alpha) \in \mathbb{N}^d$, $\lambda \in \mathbb{Z}_+^d(l + m - \vec{1})$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ удовлетворяют условию (1.3.45) и $\theta \in \mathbb{R}^d$: $1 \leq \theta_j < \infty$, $j = 1, \dots, d$. Тогда для $C = \mathcal{D}^\lambda(B(H_p^\alpha(I^d)))$, $\mathcal{D}^\lambda(B(B_{p,\theta}^\alpha(I^d)))$ и $X = L_q(I^d)$ справедливо соотношение

$$d_n(C, X) \asymp \begin{cases} n^{-(1-(\alpha^{-1}, \lambda)) / (\alpha^{-1}, \vec{1}) + (p^{-1} - q^{-1})_+} & \text{при } q \leq p \text{ или } p < q \leq 2, \\ n^{-(1-(\alpha^{-1}, \lambda)) / (\alpha^{-1}, \vec{1}) + (p^{-1} - 2^{-1})_+} & \text{при } q > \max(2, p), \\ 1 - (\alpha^{-1}, \lambda) - (\alpha^{-1}, \vec{1}) & \\ \times (1/p + (1/2 - 1/p)_+) > 0. & \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 4.2.6. Пусть d , α , θ , λ , p , q , а также C и X имеют тот же смысл, что и в теореме 4.2.5. Тогда имеет место соотношение

$$d^n(C, X) \asymp \begin{cases} n^{-(1-(\alpha^{-1}, \lambda)) / (\alpha^{-1}, \vec{1}) + (p^{-1} - q^{-1})_+} & \text{при } q \leq p \text{ или } 2 \leq p < q \\ & \text{и соблюдении} \\ & \text{условия (1.3.45),} \\ n^{-(1-(\alpha^{-1}, \lambda)) / (\alpha^{-1}, \vec{1}) + (2^{-1} - q^{-1})_+} & \text{при } p < \min(2, q), \\ 1 - (\alpha^{-1}, \lambda) - (\alpha^{-1}, \vec{1}) & \\ \times (1/q' + (1/2 - 1/q')_+) > 0. & \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 4.2.7. В условиях теоремы 4.2.5 верно соотношение

$$\lambda_n(C, X) \asymp \begin{cases} n^{-(1-(\alpha^{-1}, \lambda))/(\alpha^{-1}, \vec{1})+(p^{-1}-q^{-1})_+} & \text{при } q \leq p, \\ & \text{или } p < q \leq 2, \\ & \text{или } 2 \leq p < q, \\ n^{-(1-(\alpha^{-1}, \lambda))/(\alpha^{-1}, \vec{1})+1/2-1/q+(1/p+1/q-1)_+} & \text{при } p < 2 < q, \\ & 1 - (\alpha^{-1}, \lambda) - (\alpha^{-1}, \vec{1}) \\ & \times (1 + (1/p' - 1/q)_+) > 0. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 4.2.8. В условиях теоремы 4.2.5 соблюдается соотношение

$$a_n(C, X) \asymp n^{-(1-(\alpha^{-1}, \lambda))/(\alpha^{-1}, \vec{1})}.$$

ТЕОРЕМА 4.2.9. В условиях теоремы 4.2.5 при $1 - (\alpha^{-1}, \lambda) - (\alpha^{-1}, \vec{1}) > 0$ выполнено соотношение

$$\varepsilon_n(C, X) \asymp n^{-(1-(\alpha^{-1}, \lambda))/(\alpha^{-1}, \vec{1})}.$$

Список литературы

1. Кудрявцев С. Н. Восстановление функций вместе с их производными по значениям функций в заданном числе точек // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 6. С. 79–104.
2. Кудрявцев С. Н. Приближение оператора частного дифференцирования ограниченными операторами на классе функций конечной гладкости // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 3. С. 75–92.
3. Кудрявцев С. Н. Наилучшая точность восстановления функций конечной гладкости по их значениям в заданном числе точек // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 1. С. 21–58.
4. Кудрявцев С. Н. Задача С. Б. Стечкина для оператора частного дифференцирования на классах функций конечной гладкости // Матем. заметки. 2000. Т. 67. № 1. С. 77–86.
5. Кудрявцев С. Н. Поперечники классов гладких функций // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т. 59. № 4. С. 81–104.
6. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.
7. Бесов О. В., Ильин В. П. Проекционные представления функций через разности // Тр. МИАН. 1979. Т. 150. С. 3–10.
8. Брудный Ю. А. Многомерный аналог одной теоремы Уитни // Матем. сб. 1970. Т. 82(124). № 2(6). С. 175–191.
9. Бесов О. В. О плотности финитных функций в $\mathcal{L}_{p, \theta}$ и распространение функций // Тр. МИАН. 1967. Т. 89. С. 18–30.
10. Бесов О. В. Классы функций с обобщенным смешанным условием Гельдера // Тр. МИАН. 1969. Т. 105. С. 21–29.
11. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Наука, 1975.

Поступило в редакцию
06.02.2002