Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Махнев, О сильной регулярности некоторых реберно регулярных графов,
Изв. РАН. Сер. матем., 2004, том 68, выпуск 1, 159–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/im469>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:30:46

УДК 519.14

А. А. Махнев

О сильной регулярности некоторых реберно регулярных графов

Неориентированный v -вершинный граф, в котором степени всех вершин равны k , а каждое ребро принадлежит λ треугольникам, называется реберно регулярным с параметрами (v, k, λ) . Положим $b_1 = v - k - \lambda$. А. Е. Броувер, А. М. Коэн и А. Ноймайер доказали, что связный реберно регулярный граф при $\lambda \geq k + 1/2 - \sqrt{2k + 2}$ (равносильно, $k \geq b_1(b_1 + 3)/2 + 1$) является сильно регулярным. В работе построен пример реберно регулярного, но не сильно регулярного графа на 36 вершинах с $k = 27 = b_1(b_1 + 3)/2$. Тем самым установлена точность вышеуказанной границы. Доказано, что связный реберно регулярный граф при $\lambda \geq k + 1/2 - \sqrt{2k + 8}$ (равносильно, $k \geq b_1(b_1 + 3)/2 - 2$) либо удовлетворяет неравенству $b_1 \leq 3$, либо имеет параметры $(36, 27, 20)$ или $(64, 52, 42)$, либо является сильно регулярным.

Библиография: 5 наименований.

Введение

Рассмотрим неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b – вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ – подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a . Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины a* и обозначается $[a]$. Подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a , обозначается $a^\perp$. Собственными значениями графа являются собственные значения его матрицы смежности. Далее термином “подграф” будем обозначать индуцированный подграф. Пусть $\mathcal{F}$ – семейство графов. Граф Γ называется *локальным $\mathcal{F}$ -графом*, если $[a] \in \mathcal{F}$ для любой вершины $a \in \Gamma$.

Граф Γ называется *регулярным графом степени k* , если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ)* , если содержит v вершин, является регулярным степени k и каждое его ребро лежит точно в λ треугольниках. Граф Γ называется *корегулярным графом с параметрами (v, k, μ)* , если содержит v вершин, является регулярным степени k и подграф $[a] \cap [b]$ содержит точно μ вершин для любых несмежных вершин a, b . Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ)* , если он реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Число вершин

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00772).

в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем λ -подграфом (μ -подграфом).

Через $K_{m_1, \dots, m_n}$ обозначим полный n -дольный граф с долями порядков $m_1, \dots, m_n$. Если $m_1 = \dots = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n \times m}$. Граф $K_{1, m}$ называется m -лапой. Треугольным графом $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$, и пары $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется $(m \times n)$ -решеткой, если $|X| = m$, $|Y| = n$, и вершины (x_1, y_1) , (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Граф Пэли $P(q)$ в качестве вершин имеет элементы поля F_q , $q \equiv 1 \pmod{4}$, и две вершины a , b смежны, только если $b - a$ является ненулевым квадратом в F_q .

Граф Клебша (Шлефли) – это единственный сильно регулярный граф с параметрами $(16, 10, 6, 6)$ (с параметрами $(27, 16, 10, 8)$). Граф Шрикханде – это единственный сильно регулярный локально шестиугольный граф с параметрами $(16, 6, 2, 2)$. Граф Тервиллигера – это неполный граф Γ такой, что для любых двух вершин a , b на расстоянии 2 подграф $[a] \cap [b]$ является кликой порядка μ , $\mu > 0$.

Полный (вполне несвязный) подграф данного графа называется *кликкой* (кокликкой). Кликовое (кокликковое) α -расширение графа Γ – это граф, полученный заменой каждой вершины a из Γ на клику (кокклику) (a) , содержащую α вершин, при этом указанные клики (кокклики) попарно не пересекаются, а вершины из (a) и (b) смежны тогда и только тогда, когда a и b смежны в Γ .

Если вершины u , w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами (v, k, λ) значение $b_1 = b_1(u, w)$ не зависит от выбора ребра $\{u, w\}$ и равно $k - \lambda - 1$.

В [1, теорема 1.4.3] доказано, что если Γ – связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , в котором $\lambda \geq k + 1/2 - \sqrt{2k + 2}$ (равносильно, $k \geq b_1(b_1 + 3)/2 + 1$), то Γ – дополнительный граф для сильно регулярного графа с $\mu \leq 2$. Там же сформулирован вопрос: будет ли сильно регулярным связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , в котором $\lambda > k + 1 - \sqrt{4k + 1}$ (равносильно, $k > (b_1^2 + 2b_1 + 3)/4$)?

В такой форме вопрос имеет отрицательное решение. Например, реберные графы для графов степени 3 без треугольников ($k = 4$, $\lambda = 1$) могут иметь сколь угодно большой диаметр. Другой класс примеров дают дополнительные графы для кликовых расширений регулярных графов с $\mu = 1$.

ПРИМЕР 1. Пусть $\Delta = \bar{\Gamma}$ – кликовое α -расширение кореберно регулярного графа с $\mu = 1$. Согласно [1, лемма 1.1.3] кореберно регулярный граф с $\mu = 1$ является сильно регулярным. Поэтому окрестность любой вершины в таком графе состоит из r изолированных s -клик для подходящих натуральных чисел r , s . Отсюда Δ имеет параметры $v = \alpha(1 + sr + s^2r(r - 1))$, $\bar{k} = \alpha - 1 + \alpha sr$, $\bar{\mu} = \alpha$. Поэтому Γ является реберно регулярным с $k = v - \bar{k} - 1 = \alpha s^2r(r - 1)$, $\lambda = v - 2\bar{k} - 2 + \bar{\mu} = k - \alpha sr$, $b_1 = \alpha sr - 1$.

Если $\alpha = 2$, то $2k + s^2 = (b_1 - s + 1)^2$ и $\lambda = k - s - \sqrt{2k + s^2}$.

Следующий класс графов введен А. А. Махневым и Д. В. Падучих. Для четного натурального числа ω через $MP(\omega)$ обозначим класс реберно регулярных графов Γ с параметрами $b_1 = 3\omega/2 - 3$, $k = \omega^2 - 3\omega/2$, $\lambda = \omega^2 - 3\omega + 2$, $v = \omega^2$, содержащих пару непересекающихся подграфов Ω и Ω' , изоморфных $K_{\omega \times \omega/2}$, причем любая вершина из Ω (Ω') не смежна с единственной вершиной в каждой доле из Ω' (Ω) и для любого ребра $\{d, e\}$ из Ω подграф $\Gamma - (d^\perp \cup e^\perp)$ является ребром из Ω' . Любой граф из $MP(2)$ состоит из двух изолированных ребер, а граф из $MP(4)$ совпадает с графом Клебша, имеющим параметры $(16, 10, 6, 6)$. Существование графов из $MP(\omega)$ при $\omega \geq 8$ неизвестно. Пример для $\omega = 6$ построен Д. В. Падучих с использованием компьютерных вычислений.

ПРИМЕР 2. Для графа Γ из $MP(\omega)$ рассмотрим блок-схему $\mathcal{D} = (\Omega, \Omega')$, где точка a из Ω инцидентна блоку B из Ω' тогда и только тогда, когда a и B не смежны в Γ . Тогда $\mathcal{D}$ является делимой схемой, точечные классы которой совпадают с долями графа Ω , пара точек из одного класса не инцидентна ни одному блоку, а пара точек из разных классов инцидентна точно двум блокам. Следующая матрица инцидентности схемы $\mathcal{D}$ обеспечивает существование графа из $MP(6)$ (здесь точки из Ω и блоки из Ω' сгруппированы тройками, отвечающими долям исходных подграфов Ω и Ω'):

100 100 100 100 100 100	100 010 001 100 001 010
010 010 010 010 010 010	010 001 100 010 100 001
001 001 001 001 001 001	001 100 010 001 010 100
100 100 010 010 001 001	100 001 010 001 100 010
010 010 001 001 100 100	010 100 001 100 010 001
001 001 100 100 010 010	001 010 100 010 001 100
100 010 100 001 010 001	100 001 001 010 010 100
010 001 010 100 001 100	010 100 100 001 001 010
001 100 001 010 100 010	001 010 010 100 100 001

Для этого примера $b_1 = \gamma = 6$ и $k = b_1(b_1 + 3)/2 = 27$. Таким образом, граница $k > b_1(b_1 + 3)/2$ в теореме 1.4.3 из [1] является точной.

В связи с этим примером представляет интерес

ГИПОТЕЗА. *Связные реберно регулярные графы с параметрами (v, k, λ) , в которых $\lambda > k - \sqrt{2k + 1}$ (равносильно, $k > (b_1^2 + 2b_1)/2$), являются сильно регулярными, за исключением конкретного списка графов.*

В настоящей работе указанная гипотеза подтверждается в случае $\lambda \geq k + 1/2 - \sqrt{2k + 8}$. Тогда $2k \geq (b_1 + 3/2)^2 - 8$. Поскольку $b_1(b_1 + 3)$ четно, то $2k \geq b_1^2 + 3b_1 - 4$. Обратно, если $2k \geq b_1^2 + 3b_1 - 4$, то $\lambda \geq k + 1/2 - \sqrt{2k + 8}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Γ – неполный связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) .

- 1) Если $\lambda \geq k + 1 - \sqrt{3k + 1}$, то либо Γ является графом икосаэдра или графом Шлефли, либо дополнительный граф $\bar{\Gamma}$ кореберно регулярен при $\bar{\mu} \leq 3$.
- 2) Если $\lambda \geq k + 3/2 - \sqrt{3k}$, то $\bar{\Gamma}$ кореберно регулярен при $\bar{\mu} \leq 2$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть Γ – неполный связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) . Если $k > (b_1^2 + 2b_1)/2$, то Γ является одним из следующих графов:

- 1) многоугольник, граф икосаэдра, граф Клебша или треугольный граф $T(6)$;
- 2) дополнительный граф для кореберно регулярного графа и $\bar{\mu} \leq 2$.

Графом Деза с параметрами (v, k, a, b) называется регулярный граф степени k на v вершинах, причем $|[u] \cap [w]| = a$ или $|[u] \cap [w]| = b$ ($a \leq b$) для любых двух различных вершин u, w (см. [2]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть реберно регулярный граф Γ с параметрами (v, k, λ) является графом Деза с $\mu(u, w) = \lambda$ или $\mu(u, w) = k - \gamma$ для любых вершин u, w при $d(u, w) = 2$. Для вершины u положим $\Sigma_u = \{w \in \Gamma_2(u) \mid \mu(u, w) = k - \gamma\}$. Если для любого ребра $\{x, y\}$ подграф $\Gamma - (x^\perp \cup y^\perp)$ состоит из двух смежных вершин, то Σ_u является полным многодольным графом $K_{r \times s}$, $s = b_1 + 2 - \gamma$, число $(s + 1)$ -клик в Γ равно $vr/(s + 1)$ и выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) $r = 1$ и либо граф $\bar{\Gamma}$ является сильно регулярным при $\bar{\lambda} = 0$, $\bar{\mu} = 2$, либо Γ является полным двудольным графом с удаленным максимальным паросочетанием на $2b_1 + 4$ вершинах, либо Γ принадлежит $\text{MP}(\omega)$, $\omega \geq 6$;
- 2) $r > 1$, $\delta = b_1 + 2 - rs = t^2 + 1$ для некоторого натурального числа t , $\gamma = \delta^2 = b_1 + 2 - s$, $(r - 1)s = \delta(\delta - 1)$, $2k = (\delta^2 + \delta)b_1 + 2\delta^2 + \delta - \delta^3$ и множество вершин графа Γ разбивается сильно регулярными подграфами, дополнительными к графам с параметрами $((\delta^2 + \delta + 2)/2, \delta, 0, 2)$.

Известные сильно регулярные графы при $\lambda = 0$, $\mu = 2$ – это или четырехугольник, или дополнительный граф для графа Клебша с параметрами $(16, 5, 0, 2)$, или граф Гевиртта с параметрами $(56, 10, 0, 2)$. Найдем возможные параметры графов из п. 2) теоремы 2, имеющих разбиение известными сильно регулярными графами.

Пусть $\delta = 2$. Тогда $s = 2$, $b_1 = 4$, $k = 13$ и $v = 20$. Получили противоречие с тем, что $r = 2$ и $s + 1 = 3$ не делит rv .

Пусть $\delta = 5$. Тогда $s = 2, 4, 5, 10, 20$. Далее, $b_1 = s + 23$, $k = 5(3b_1 - 7)$, $v = 16(b_1 - 2)$ и $s + 1$ делит $16 \cdot 20 \cdot r$. Поскольку $vk\lambda$ делится на 3, то b_1 не сравнимо с 1 по модулю 3, поэтому $s \neq 2, 20$. Если $s = 5$, то $r = 5$ и $s + 1 = 6$ не делит vr . Если $s = 10$, то $r = 3$ и $s + 1 = 11$ снова не делит vr . Таким образом, $s = 4$, $b_1 = 27$, $k = 370$, $v = 400$ и $\Sigma_u = K_{6 \times 4}$.

Пусть $\delta = 10$. Тогда $s = 2, 3, 6, 9, 10, 15, 30, 45, 90$. Далее, $b_1 = s + 98$, $k = 5(11b_1 - 79)$, $v = 56(b_1 - 7)$ и $s + 1$ делит $56 \cdot 90 \cdot r$. Отсюда $s = 2, 3, 6, 9, 15$ и $\Sigma_u = K_{46 \times 2}, K_{31 \times 3}, K_{16 \times 6}, K_{11 \times 9}, K_{7 \times 15}$ соответственно.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть Γ – неполный связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) . Если $\lambda \geq k + 1/2 - \sqrt{2k + 8}$ (равносильно, $2k \geq b_1^2 + 3b_1 - 4$), то выполняется одно из следующих утверждений:

- 1) граф Γ является n -угольником, $n \geq 6$, тривалентным графом без треугольников, реберным графом тривалентного графа без треугольников, графом икосаэдра, треугольным графом $T(6)$ или графом Клебша (во всех этих графах $b_1 \leq 3$);
- 2) граф Γ является дополнительным к сильно регулярному графу и $\bar{\mu} \leq 2$;
- 3) граф Γ принадлежит $MP(\omega)$, $\omega = 6, 8$.

В следствии из [3] доказано, что если в реберно регулярном графе $3\lambda \geq 2k - 5$, то либо Γ – многоугольник или реберный граф тривалентного графа без треугольников, имеющий диаметр, больший 2, либо Γ – граф икосаэдра, (3×3) -решетка или треугольный граф $T(7)$, либо диаметр Γ равен 2 и число его вершин не больше $2k$. В [3], [4] найдены методы работы с графами, в которых λ близко к k . Развитие этих методов позволило получить основные результаты настоящей статьи.

Хорошо известно, что связный реберно регулярный граф с $b_1 = 1$ является многоугольником или полным многодольным графом $K_{r \times 2}$. В § 2 помещены результаты, описывающие реберно регулярные графы с $b_1 = 2, 3$, а также графы с $b_1 = 4$ и $k \geq 10$. В § 3 доказаны теорема 1 и следствие 1. В § 4 приведены результаты о реберно регулярных графах Деза. Следствие 2 доказано в § 5.

§ 1. Предварительные результаты

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные результаты. Для вершин u, w графа Γ через $\Lambda_{u,w}$ обозначим подграф $\Gamma - (u^\perp \cup w^\perp)$. Для реберно регулярного графа Γ с параметрами (v, k, λ) положим $\mu_* = k - 2b_1 + 1$.

ЛЕММА 1. Пусть Γ – реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) и $b_1 = k - \lambda - 1$. Если вершины u, w находятся на расстоянии 2 в Γ , то выполняются следующие утверждения:

- 1) степень любой вершины в μ -подграфе из Γ не меньше $k - 2b_1$;
- 2) вершина d имеет степень α в графе $[u] \cap [w]$ тогда и только тогда, когда $[d]$ содержит $\alpha - (k - 2b_1)$ вершин вне $u^\perp \cup w^\perp$;
- 3) если $\mu(u, w) = \mu_*$, то подграф $[u] \cap [w]$ является кликой и $[d] \subset u^\perp \cup w^\perp$ для любой вершины $d \in [u] \cap [w]$;
- 4) если $\Lambda_{u,w}$ содержит единственную вершину z , то $\mu(u, z) = \mu(w, z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d \in [u] \cap [w]$. Тогда $|[d] - [u]| = |[d] - [w]| = b_1$. Поэтому по крайней мере $k - 2b_1$ вершин из $[d]$ содержатся в $[u] \cap [w]$. Утверждение 1) доказано.

Пусть $d \in [u] \cap [w]$ и степень d в этом μ -подграфе равна α . Тогда $k = \alpha + 2b_1 - |[d] - (u^\perp \cup w^\perp)|$. Поэтому $[d]$ содержит $\alpha - (k - 2b_1)$ вершин вне $u^\perp \cup w^\perp$. Верно и обратное. Утверждение 2) доказано.

Утверждение 3) следует из утверждений 1), 2).

Пусть $\{z\} = \Lambda_{u,w}$. Поскольку число ребер между $[u] - [w]$ и $[w] - [u]$ равно $b_1|[u] - [w]| - \mu(u, z)$, то $\mu(u, z) = \mu(w, z)$. Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что в реберно регулярном графе для любых вершин u, w , находящихся на расстоянии 2, выполнено неравенство $\mu(u, w) \geq \mu_*$. Пару несмеж-

ных вершин (u, w) назовем *хорошей*, если $\mu(u, w) = \mu_*$. Если любая пара несмежных вершин графа Γ является хорошей, то Γ оказывается графом Тервиллигера без 3-лап и в силу [1, теорема 1.2.3] Γ – пятиугольник или граф икосаэдра.

Пусть до конца параграфа Γ – реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) . Число ребер в Γ (в окрестности вершины из Γ) равно $vk/2$ (равно $k\lambda/2$), поэтому vk и $k\lambda$ четны. Число треугольников в Γ равно $vk\lambda/6$, поэтому $vk\lambda$ делится на 3.

ЛЕММА 2. Пусть (u, w) – хорошая пара и $\mu(u, z) \leq \mu_* + 1$ для смежной с w вершины z из $\Gamma_2(u)$. Тогда $|[u] \cap [w] \cap [z]| < 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma = |[u] \cap [w] \cap [z]|$ и p, q – различные вершины из $[u] \cap [w] \cap [z]$.

Рассмотрим сначала случай $\mu(u, z) = \mu_*$. Тогда $[p]$ содержит $b_1 - 2$ вершин из $([z] \cap [w]) - [u]$, причем $|([z] \cap [w]) - [u]| = \lambda - \gamma$. Отсюда $[p] \cap [q]$ содержит $u, w, z, \gamma - 2$ вершин из $[u] \cap [w] \cap [z]$, по $\mu_* - \gamma$ вершин из $([u] \cap [w]) - [z]$ и из $([u] \cap [z]) - [w]$ и не менее $2(b_1 - 2) - (\lambda - \gamma)$ вершин из $([z] \cap [w]) - [u]$. Поэтому $|[p] \cap [q]| \geq 3 + (\gamma - 2) + 2(\mu_* - \gamma) + (2b_1 - 4 - \lambda + \gamma)$, т.е. $2\mu_* - 3 + 2b_1 \leq 2\lambda$. Получили противоречие с тем, что $\mu_* = \lambda + 2 - b_1$.

Пусть теперь $\mu(u, z) = \mu_* + 1$. Если $[p]$ содержит α вершин из $[w] - ([u] \cup [z])$, то по лемме 1 $[p]$ содержит $\mu_* - \gamma + \alpha$ вершин из $([z] \cap [u]) - [w]$ и $b_1 - 2 - \alpha$ вершин из $([z] \cap [w]) - [u]$, причем $|([z] \cap [w]) - [u]| = \lambda - \gamma$. Отсюда $[p] \cap [q]$ содержит $u, w, z, \mu_* - 2$ вершин из $[u] \cap [w] \cap [z]$, $2(\mu_* - \gamma - 2) - (\mu_* - 2b_1 - \gamma + 1 + \lambda - \gamma)$ вершин из $([u] \cap [z] - [w]) \cup ([w] \cap [z] - [u])$. Поэтому $|[p] \cap [q]| \geq 3 + (\mu_* - 2) + (\mu_* + 2b_1 - 5 - \lambda)$, т.е. $2\mu_* - 4 + 2b_1 \leq 2\lambda$. Поскольку $\mu_* = \lambda + 2 - b_1$, то нестрогое неравенство преобразуется в равенство, поэтому каждая вершина из $[w] - [u]$ смежна не более чем с одной вершиной из $[u] \cap [w] \cap [z]$ и $[w] \cap [z] \subset [x] \cup [y]$ для любых различных вершин x, y из $[u] \cap [w] \cap [z]$.

Поскольку p не смежна по крайней мере с $\lambda - \gamma - b_1 + 2$ вершинами из $[w] \cap [z]$, то $\gamma(\lambda - \gamma - b_1 + 2) \leq \lambda - \gamma$. Отсюда $\gamma^2 - \gamma(\lambda + 3 - b_1) + \lambda \geq 0$. Заметим, что $(\lambda - b_1 + 3)^2 - 2\lambda < (\lambda + 4 - b_1)^2$ при $b_1 \geq 4$, и в этом случае $\gamma \geq \lambda - b_1 + 3 = \mu_* + 1$. Противоречие.

Пусть $b_1 = 3$. Тогда $\gamma^2 - \gamma\lambda + \lambda \geq 0$ и $\lambda = \mu_* + 1 \leq 4$. Поскольку $\gamma \geq 2$, то $3 \leq k - 4 \leq 4$. Отсюда $k = 8$, $\lambda = 4$ и $v = 15$. Поэтому $\Gamma = u^\perp \cup w^\perp$, $[z]$ содержит три вершины из $[u] - [w]$ и $\mu(u, z) \geq 5$. Противоречие.

Если $b_1 = 2$, то $\gamma^2 - \gamma(\lambda + 1) + \lambda \geq 0$ и $\lambda = 1$. Отсюда $k = 4$ и $\mu_* = 1$. Противоречие. Наконец, если $b_1 = 1$, то Γ – многоугольник или полный многодольный граф $K_{u \times 2}$ и условия леммы нарушаются.

ЛЕММА 3. Пусть Γ – сильно регулярный граф, имеющий параметры (v, k, λ, μ) . Тогда либо $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$ (так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения $n - t, -t$ графа Γ – целые числа, где $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu)$, $n - \lambda + \mu = 2t$ и кратность собственного значения $n - t$ равна $\frac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. Далее, если t – целое число, большее 1, то $t - 1$ делит $k - \lambda - 1$ и

$$\mu = \lambda + 2 + (t - 1) - \frac{k - \lambda - 1}{t - 1}, \quad n = t - 1 + \frac{k - \lambda - 1}{t - 1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [5, лемма 3.1].

Сильно регулярные графы с собственным значением -2 были классифицированы Зейделем [1, теорема 3.12.4]. Любой зейделев граф – это либо полный многодольный граф $K_{r \times 2}$, либо решетчатый или треугольный граф, либо один из графов Шрикханде, Чанга, Петерсена, Клебша или Шлефли.

ЛЕММА 4. Пусть Γ – сильно регулярный граф, имеющий целочисленные собственные значения, и $b_1 = k - \lambda - 1$. Тогда:

1) если b_1 – простое число, то Γ является полным многодольным графом $K_{r \times (b_1+1)}$ или зейделевым графом;

2) если $b_1 = 2p$, p – простое число, то Γ является либо полным многодольным графом, либо имеет собственное значение -2 или -3 , либо является дополнительным к зейделеву графу;

3) если $b_1 = 4$, то Γ является полным многодольным графом $K_{r \times 5}$, (5×5) -решеткой, треугольным графом $T(7)$ или дополнительным графом к (4×4) -решетке, треугольному графу $T(6)$ или графу Клебша (заметьте, что в половинном случае параметры графа равны $(17, 8, 3, 4)$ и он является графом Пэли).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $-m$ – наименьшее собственное значение графа. Если $m = 1$, то Γ состоит из изолированных клик. Но в этом случае $b_1 = 0$. Пусть m – целое число, большее 1. Тогда по лемме 3 число $m - 1$ делит b_1 .

Если b_1 – простое число, то либо $m - 1 = 1$, либо $m - 1 = b_1$. Однако в последнем случае Γ является полным многодольным графом $K_{r \times (b_1+1)}$. Утверждение 1) доказано.

Пусть $b_1 = 2p$, p – простое число и Γ не является полным многодольным графом или зейделевым графом. Тогда либо $m - 1 = 2$ (и Γ имеет собственное значение -3), либо $m - 1 = p$. Но в последнем случае по лемме 3 получим, что $n - m = 1$ и Γ является дополнительным к зейделеву графу. Утверждение 2) доказано.

Наконец, если $b_1 = 4$, то ввиду утверждения 2) Γ является полным многодольным графом $K_{r \times 5}$, зейделевым графом или дополнительным к зейделеву графу. Среди зейделевых графов $b_1 = 4$ имеют только (5×5) -решетка и треугольный граф $T(7)$. Аналогично, среди дополнительных к зейделевым графов $b_1 = 4$ имеют дополнительный граф к (4×4) -решетке, треугольному графу $T(6)$ или графу Клебша.

ЛЕММА 5. Пусть Γ – регулярный граф валентности k , имеющий v вершин. Если $[[a] \cap [b]]$ не меньше λ (не меньше μ , $\mu > 0$) для любых смежных (несмежных) вершин a, b , то $v - k - 1 \leq k(k - 1 - \lambda)/\mu$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда Γ – сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [1, предложение 1.4.1].

ЛЕММА 6. Пусть Γ – связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) . Тогда:

1) если $\lambda \geq k - 1/2 - \sqrt{k}$ (равносильно, $k \geq b_1^2 + b_1 + 1$), то Γ – полный многодольный граф;

2) если $\lambda \geq 1/2 + k - \sqrt{2k+2}$ (равносильно, $k \geq (b_1^2 + 3b_1)/2 + 1$), то Γ – дополнительный граф для сильно регулярного графа Δ и либо $\mu(\Delta) \leq 1$, либо $\lambda(\Delta) = 0$ и $\mu(\Delta) = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [1, теорема 1.4.3].

ЛЕММА 7. Пусть Γ – реберно регулярный граф диаметра 2 с параметрами (v, k, λ) . Тогда для $\bar{\mu} = v - 2k + \lambda = (v - k - 1) - b_1$ и $\bar{\lambda} = \min\{v - |u^\perp \cup w^\perp| : d(u, w) = 2\}$ выполняется неравенство $k\bar{\mu} \leq (b_1 + \bar{\mu})(b_1 + \bar{\mu} - 1 - \bar{\lambda})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию граф $\bar{\Gamma}$ является кореберно регулярным с вышеуказанным $\bar{\mu}$. По лемме 5 имеем $v - \bar{k} - 1 \leq \bar{k}(\bar{k} - 1 - \bar{\lambda})/\bar{\mu}$. Поскольку $\bar{k} = b_1 + \bar{\mu}$, то $k\bar{\mu} \leq (b_1 + \bar{\mu})(b_1 + \bar{\mu} - 1 - \bar{\lambda})$. Лемма доказана.

§ 2. Реберно регулярные графы с $b_1 \leq 4$

В этом параграфе доказаны три предложения о реберно регулярных графах с $b_1 \leq 4$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть Γ – связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , в котором $b_1 = 2$. Тогда Γ является одним из следующих графов:

- 1) тривалентным графом без треугольников (в том числе графом Петерсена);
- 2) реберным графом тривалентного графа без треугольников (в том числе (3×3) -решеткой);
- 3) полным многодольным графом $K_{r \times 3}$, $r \geq 3$, или треугольным графом $T(5)$;
- 4) графом икосаэдра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ – связный реберно регулярный граф с $b_1 = 2$. Если $k = 3$, то $\lambda = 0$ и Γ является тривалентным графом без треугольников. Если $k = 4$, то $\lambda = 1$ и Γ является реберным графом тривалентного графа без треугольников. Пусть $k = 5 + y$, $\lambda = 2 + y$, $y \geq 0$. Тогда $3\lambda \geq 2k - 4$ и по следствию из [3] граф Γ имеет диаметр 2 или является графом икосаэдра.

Если Γ сильно регулярен, то по лемме 4 он либо является графом в половинном случае (т.е. (3×3) -решеткой) или полным многодольным графом $K_{r \times 3}$, либо имеет собственное значение -2 . Среди зейделевых графов $b_1 = 2$ имеют только (3×3) -решетка, треугольный граф $T(5)$ и граф Петерсена.

Пусть граф Γ не является сильно регулярным. По лемме 6 получим $\lambda < 1/2 + k - \sqrt{2k+2}$, т.е. $2k + 2 < (b_1 + 3/2)^2$ и $k \leq (b_1^2 + 3b_1)/2$. Отсюда $k = 5$, $\lambda = 2$. Получили противоречие с тем, что теперь диаметр Γ больше 2. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть Γ – связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , в котором $b_1 = 3$. Тогда Γ является одним из следующих графов:

- 1) четырехвалентным графом без треугольников;
- 2) реберным графом четырехвалентного графа без треугольников (в том числе (4×4) -решеткой);

3) локально шестиугольным графом (в том числе графом Пэли с параметрами $(13, 6, 2, 3)$ или графом Шрикханде с параметрами $(16, 6, 2, 2)$);

4) полным многодольным графом $K_{r \times 4}$, $r \geq 3$, треугольным графом $T(6)$ или графом Клебша с параметрами $(16, 10, 6, 6)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ – связный реберно регулярный граф с $b_1 = 3$. Тогда k четно. Если $k = 4$, то $\lambda = 0$ и Γ является четырехвалентным графом без треугольников.

Нам понадобятся следующие две леммы.

ЛЕММА 8. Если $k = 6$, то $\lambda = 2$ и Γ является локально шестиугольным графом или реберным графом четырехвалентного графа без треугольников.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию, окрестности вершин в графе Γ являются шестиугольниками или состоят из двух изолированных треугольников.

Если для некоторой вершины a подграф $\Gamma(a)$ состоит из двух изолированных треугольников, то для $x \in \Gamma(a)$ подграф $\Gamma(x)$ также состоит из изолированных треугольников. Теперь по связности графа окрестность любой вершины состоит из изолированных треугольников и Γ является реберным графом четырехвалентного графа без треугольников.

ЛЕММА 9. Если Γ сильно регулярен, то он является графом Пэли с параметрами $(13, 6, 2, 3)$, полным многодольным графом $K_{r \times 4}$, (4×4) -решеткой, треугольным графом $T(6)$, графом Шрикханде или графом Клебша.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если Γ сильно регулярен, то по лемме 4 он либо является графом в половинном случае (и совпадает с графом Пэли с параметрами $(13, 6, 2, 3)$) или полным многодольным графом $K_{r \times 4}$, либо имеет собственное значение -2 . Среди зейделевых графов $b_1 = 3$ имеют только (4×4) -решетка, треугольный граф $T(6)$, граф Шрикханде или граф Клебша. Лемма доказана.

Пусть $k \geq 8$. Тогда $k \geq 3b_1 - 1$ и ввиду [3] граф Γ имеет диаметр 2. Если Γ не является сильно регулярным, то по лемме 6 имеем $\lambda < 1/2 + k - \sqrt{2k+2}$ и $2k+2 < (b_1 + 3/2)^2$. Если $k = 9$, то $\lambda = 5$ и $k\lambda$ нечетно. Противоречие. Отсюда $k = 8$ и $\lambda = 4$. По утверждению 3) леммы 6 имеем $24 > 4(v - k - 1)$ и $v - k - 1 \leq 5$. Поскольку число треугольников в Γ равно $vk\lambda/6$, то v делится на 3, поэтому $v = 12$ и $\bar{\mu} = 1$. Противоречие. Предложение 2 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть Γ – связный реберно регулярный граф с $b_1 = 4$ и $k \geq 10$. Тогда Γ является полным многодольным графом $K_{r \times 5}$ или треугольным графом $T(7)$.

В следующих леммах предполагается, что граф Γ является контрпримером к предложению 3. По следствию из [3] диаметр Γ равен 2 и либо Γ является треугольным графом $T(7)$, либо $v \leq 2k$. Ввиду леммы 4 граф Γ не является сильно регулярным. Пусть $\bar{\Gamma}$ – граф, дополнительный к Γ . Если $k \geq 11$, то в силу [4, предложение 1] граф Γ является полным многодольным графом $K_{r \times 5}$. Поэтому $k = 10$, $\lambda = 5$ и $v \leq 18$. Поскольку диаметр Γ равен 2, но Γ не является сильно регулярным графом, то $v - k - 1 = b_1 + \bar{\mu}$, где $\bar{\mu} \geq 2$, следовательно, $v - 11 \geq 6$ и $v = 18$. Поэтому $\mu(u, w) \geq 4$ для любых несмежных вершин u, w . Для вершины u графа Γ число

ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно 40; далее, степень вершины в любом μ -подграфе не меньше 2. Пусть $w \in \Gamma_2(u)$ и $\mu(u, w) = \beta$.

ЛЕММА 10. Пусть $\beta = 4$. Тогда подграф $[u] \cap [w]$ является четырехугольником, каждая вершина из $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$ смежна с ребром из $[u] \cap [w]$ и каждый из подграфов $[u] - [w]$, $[w] - [u]$ является трехгранной призмой или полным двудольным графом $K_{3,3}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mu(u, w) = 4$, то $\Gamma = u^\perp \cup w^\perp$. Поэтому подграф $[u] \cap [w]$ является четырехугольником. Каждая вершина из $[u] \cap [w]$ смежна с тремя вершинами из $[u] - [w]$, поэтому имеется 24 ребра между $[u] \cap [w]$ и $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$. Далее, каждое ребро из $[u] \cap [w]$ смежно с тремя вершинами из $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$. Пусть X_i – множество вершин из $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$, смежных точно с i вершинами из $[u] \cap [w]$, $x_i = |X_i|$. Тогда $\sum x_i = 12$, $\sum ix_i = 24$, $\sum \binom{i}{2} = 24$, поэтому $x_0 + x_3 + 3x_4 = 0$ и $x_2 = 12$.

Значит, каждая вершина из $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$ смежна с ребром из $[u] \cap [w]$. Теперь любой из подграфов $[u] - [w]$, $[w] - [u]$ является трехгранной призмой или полным двудольным графом $K_{3,3}$.

ЛЕММА 11. Параметр β не больше 7, и если $\beta = 5$, то $\Lambda_{u,w} = \{z\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

1) $\mu(u, z) = \mu(w, z) = 6$, подграф $[u] \cap [w]$ состоит из вершин x, f, g, p, q , где $\{p, q\} = [z] \cap [u] \cap [w]$ – ребро, x смежна с p, q , вершины f, g смежны, f смежна с p , а g смежна с q ;

2) $\mu(u, z) = \mu(w, z) = 5$, подграфы $[u] \cap [w]$, $[u] \cap [z]$ и $[w] \cap [z]$ являются пятиугольниками, причем каждая вершина из $[u] \cap [w]$ смежна с тремя вершинами из $[u] \cap [z]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mu(u, w) = 5$, то $|\Lambda_{u,w}| = 1$. Пусть для $z \in \Lambda_{u,w}$ подграф $[z]$ содержит α вершин из $[u] \cap [w]$. Ввиду леммы 1 $\mu(u, z) = \mu(w, z) = 5 + \alpha/2$ и $\alpha = 0, 2, 4$.

Если $\mu(u, x) \geq 8$, то $\mu(u, y) \geq 6$ для любой вершины y из $\Gamma_2(u) - x^\perp$. Отсюда $\mu(u, x) = 8$, $\mu(u, y) = 6$ для любой вершины y из $\Gamma_2(u) - x^\perp$ и $\mu(u, r) = 4$ для $r \in \Gamma_2(u) \cap [x]$. Противоречие с леммой 10. Значит, $\beta \leq 7$.

Если $\alpha = 4$, то подграф $[u] \cap [w]$ состоит из вершин x, f, g, p, q , где x смежна с f, g , но не смежна с z , вершины p, q смежны и $[p] \cap [q] = \{f, g, u, w, z\}$. В этом случае $\mu(u, z) = \mu(w, z) = 7$, $\mu(z, z^*) = 6$ для единственной вершины $z^* \in \Gamma_2(z)$ и $\mu(y, z) = 5$ для любой вершины $y \in \Gamma_2(z) - \{u, w, z^*\}$. Далее, каждое ребро подграфа $\{f, g, p, q\}$, отличное от $\{p, q\}$, содержится в единственном треугольнике с вершиной из $([u] - [w]) \cup ([w] - [u])$. Отсюда $[f] \cap [g]$ содержит вершины p, q, u, w, x, z , причем степени вершин p, q в графе $[f] \cap [g]$ не меньше 4. Таким образом, $\mu(f, g) = 8$. Противоречие.

Если $\alpha = 2$, $\{p, q\} = [u] \cap [w] \cap [z]$, то $[p] - u^\perp$ содержит w, z и еще две вершины. Отсюда $[p] \cap [z]$ содержит q и по две вершины из $[u] - [w]$, $[w] - [u]$. Далее, подграф $[u] \cap [w]$ состоит из вершин x, f, g, p, q , где x смежна с p, q , вершины f, g смежны, f смежна с p , а g смежна с q .

Если $\alpha = 0$, то подграфы $[u] \cap [w]$, $[u] \cap [z]$ и $[w] \cap [z]$ являются пятиугольниками, причем каждая вершина из $[u] \cap [w]$ смежна с тремя вершинами из $[u] \cap [z]$.

ЛЕММА 12. *Выполняется одно из утверждений:*

1) $\Gamma_2(u)$ содержит единственную вершину u^* с $\mu(u, u^*) = 4$, $\mu(u, a) = 6$ для $a \in \Gamma_2(u) - \{u^*\}$ и подграфы $[u] - [u^*]$, $[u^*] - [u]$ являются трехгранными призмами;

2) $\Gamma_2(u)$ содержит две несмежные вершины w, z с $\mu(u, w) = \mu(u, z) = 5$, $\mu(u, x) = 6$ для $x \in \Gamma_2(u) - \{w, z\}$ и подграф $\Gamma_2(u) - \{w, z\}$ является пяти-угольником.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mu(u, w) = 7$, то ввиду лемм 10 и 11 получим $\mu(u, x) = 6$ для любой вершины $x \in \Gamma_2(u) - w^\perp$, $\mu(u, y) = 5$ для любой вершины $y \in \Gamma_2(u) \cap [w]$.

Снова ввиду леммы 11 подграф $\{y_1, y_2, y_3\}$ для $y_i \in \Gamma_2(u) \cap [w]$ является кликой, иначе для несмежных вершин y_1, y_2 получим $\mu(u, x) = 6$ для любой вершины $x \in \Gamma_2(u) - \{y_1, y_2\}$. Таким образом, подграф $\Gamma_2(u) - \{w\}$ является октаэдром. Симметрично, $\Gamma_2(w) - \{u\}$ является октаэдром, и каждая вершина x_i из $\Gamma_2(u) - w^\perp$ смежна с четырьмя вершинами из $[u] \cap [w]$. Далее, $[x_1] \cap [x_2]$ содержит x_3 , по вершине из $[u] - [w]$, $[w] - [u]$ и две вершины из $[u] \cap [w]$. Таким образом, $[u] \cap [w]$ содержит либо по одной вершине, не смежной с парами вершин из $\{x_1, x_2, x_3\}$, либо единственную вершину, не смежную с x_1, x_2, x_3 . В первом случае $[u] \cap [w]$ содержит четыре вершины степени 4 и три степени 3. Противоречие. Во втором случае $[u] \cap [w]$ содержит шесть вершин степени 4 и одну вершину r степени 2. Пусть s_1, s_2 — смежные с r вершины из $[u] \cap [w]$. Тогда $[r] \cap [s_1]$ содержит по две вершины из $u^\perp - [w]$, $w^\perp - [u]$ и вершину s_2 . Отсюда подграф $\Omega = [u] \cap [w] - \{r, s_1, s_2\}$ является 4-кликой, причем пересечение окрестностей двух вершин из Ω содержит u, w , две вершины из Ω и не более одной вершины из $\{x_1, x_2, x_3\}$. Противоречие с тем, что $[x_i] \cap [x_j]$ содержит две вершины из Ω для подходящих $1 \leq i < j \leq 3$. Итак, $\mu(u, w) < 7$ для любых несмежных вершин u, w .

Допустим, что $\mu(u, u^*) = 4$ и подграф $\Omega = [u^*] - [u]$ является $K_{3,3}$ -подграфом. Пересечение окрестностей любых двух несмежных вершин из Ω содержит w , три вершины из Ω , две из $[u] - [u^*]$ и не пересекает $[u] \cap [u^*]$. Противоречие.

Пусть $\mu(u, w) = 5$, $\{z\} = \Lambda_{u,w}$ и $\mu(u, z) = \mu(w, z) = 6$. По лемме 11 подграф $[u] \cap [w]$ состоит из вершин x, f, g, p, q , где $\{p, q\} = [z] \cap [u] \cap [w]$ — ребро, x смежна с p, q , вершины f, g смежны, f смежна с p , а g смежна с q . Далее, подграфы $[u] - [w]$ и $[w] - [u]$ содержат по одной вершине r и s соответственно, не смежной с z . Ввиду леммы 11 $\mu(x, z) = 6$ и x смежна с r, s .

Если $\mu(u, s) = 5$, то $[s]$ содержит четыре вершины из $[u] - [w]$, единственную вершину из $[u] \cap [w]$ и четыре вершины из $[w] - [u]$. Противоречие с тем, что тогда $\mu(s, z) = 7$. Значит, $[u] \cap [s]$ содержит r и еще три вершины из $[u] - [w]$, две из $[u] \cap [w]$ и три вершины из $[w] - [u]$. Симметрично, $\mu(r, w) = 6$ и r смежна с единственной вершиной из $\{f, g\}$.

Ввиду леммы 11 имеем $\mu(f, z) = \mu(g, z) = 5$. Заметим, что $[f] \cap [z]$ содержит не менее двух вершин из $[w] - [u]$. Поэтому $[f] \cap [z]$ содержит не более двух вершин из $[u] - [w]$. Отсюда $[f]$ содержит r и две вершины из $[u] - [w]$, следовательно, $[f]$ содержит s и две вершины из $[w] - [u]$. Аналогично, $[g]$ содержит r, s . Противоречие.

ЛЕММА 13. Пусть $\mu(u, w) = 6$. Тогда для $\{p, q\} = \Lambda_{u, w}$ выполнены следующие утверждения:

- 1) вершины p, q смежны, $\mu(u, x) = \mu(w, x) = 6$ для $x \in \{p, q\}$ и $[p]$ содержит по три вершины из $[u] \cap [w]$, $[u] - [w]$, $[w] - [u]$;
- 2) $[p] \cap [q]$ пересекает $[u] \cap [w]$ по единственной вершине r , которая имеет степень 4 в $[u] \cap [w]$ и смежна с вершинами f, g в подграфах $[u] - [w]$, $[w] - [u]$ соответственно;
- 3) степень единственной вершины s из $[u] \cap [w] - r^\perp$ в подграфе $[u] \cap [w]$ равна 2 и s смежна с вершинами f, g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu(u, w) = 6$, $\{p, q\} = \Lambda_{u, w}$. Ввиду леммы 12 подграф $\Gamma_2(u)$ не содержит 3-клик. Поэтому вершины p, q смежны. Допустим, что $\mu(u, p) \neq 6$. Тогда $\mu(u, p) = 5$, $\{w\} = \Lambda_{u, p}$ и по лемме 12 получим $\mu(u, w) = 5$. Противоречие. Значит, $\mu(u, x) = \mu(w, x) = 6$ для $x \in \{p, q\}$ и $[p]$ содержит по три вершины из $[u] \cap [w]$, $[u] - [w]$, $[w] - [u]$. Утверждение 1) доказано.

Если $[p] \cap [q]$ содержит две вершины r, s из $[u] \cap [w]$, то вершины r, s смежны (иначе $[r] \cap [s]$ содержит u, w, p, q и не менее двух вершин из $[u] \cap [w]$). Теперь $[r] \cap [s]$ содержит u, w, p, q и четыре вершины из $[u] \cap [w]$. Противоречие.

Допустим, что $[p] \cap [q]$ содержит три вершины из $[u] - [w]$. Тогда для единственной не смежной с p, q вершины y из $[u] - [w]$ верно равенство $\mu(y, w) = 6$. Ввиду леммы 12 подграф $[p] \cap ([u] - [w])$ состоит из изолированной вершины и ребра $\{f, g\}$. Противоречие с тем, что $\Gamma_2(w) - \{f, g\}$ является пятиугольником.

Таким образом, $[p] \cap [q]$ содержит по две вершины из $[u] - [w]$, $[w] - [u]$ и единственную вершину r из $[u] \cap [w]$. Заметим, что степень r в графе $[u] \cap [w]$ равна 4 и $[r]$ содержит по одной вершине f, g из $[u] - [w]$, $[w] - [u]$ соответственно. Утверждение 2) доказано.

Пусть s – единственная вершина из $([u] \cap [w]) - r^\perp$. Если $\mu(r, s) = 4$, то $[r] \cap [s]$ – четырехугольник и $[u] \cap [w] \cap [r] \cap [s]$ является 2-кликкой. Противоречие с тем, что по лемме 10 подграф $[p] \cap [r] \cap [s]$ является ребром. Если $\mu(r, s) = 5$, то $[r] - [s]$ является пятиугольником. Противоречие с тем, что $[r] - [s]$ содержит 3-клику из $\{p, q, f, g\}$. Значит, $\mu(r, s) = 6$ и вершины f, g смежны с s . Лемма доказана.

Завершим доказательство предложения 3. Рассмотрим подграф $[r] \cap [s]$. Поскольку вершины u, w, f, g не могут иметь степень 4 в $[r] \cap [s]$, то для $\{x, y\} = [u] \cap [w] \cap [r] \cap [s]$ можно считать, что x имеет степень 4 в графе $[r] \cap [s]$. Так как x смежна с вершиной из $\{p, q\}$, лежащей в $[r] - [s]$, то вершины x, y смежны. Однако y имеет степень 3 в $[u] \cap [w]$, поэтому y не смежна с двумя вершинами из $[u] \cap [w] \cap ([r] - [s])$. Кроме того, y не смежна с вершиной из $\{p, q\}$, лежащей в $[r] - [s]$. Противоречие с тем, что y имеет степень 3 в $[r] \cap [s]$. Предложение доказано.

§3. Доказательство теоремы 1

Пусть граф Γ является контрпримером к утверждению 1) теоремы 1, $b_1 = k - \lambda - 1$. Тогда $b_1 + 2 \leq \sqrt{3k + 1}$ и $k \geq (b_1^2 + 4b_1 + 3)/3 \geq 3b_1 - 1$. Если $b_1 = 1$, то Γ – многоугольник или полный многодольный граф $K_{r \times 2}$. Однако в случае $k = 2$ нарушается неравенство $k \geq (b_1^2 + 4b_1 + 3)/3$, поэтому многоугольник не возникает. Пусть $b_1 = 2$. Ввиду неравенства $k \geq 3b_1 - 1$ по предложению 1 Γ –

треугольный граф $T(5)$ или граф икосаэдра. При этом в дополнительном графе для треугольного графа $T(5)$ имеем $\mu = 1$. Значит, $b_1 > 2$.

Поскольку $k \geq 3b_1 - 1$, $\lambda \geq 2b_1 - 2$, то по следствию из [3] диаметр Γ равен 2 и дополнительный граф $\bar{\Gamma}$ является кореберно регулярным с параметрами $(v, \bar{k}, \bar{\mu})$, где $\bar{k} = v - k - 1$, $\bar{\mu} = v - 2k + \lambda = \bar{k} - b_1$. Если $\bar{\mu} = 0$, то граф Γ является полным многодольным. Если $\bar{\mu} = 1$, то в силу [1, лемма 1.1.3] граф $\bar{\Gamma}$ сильно регулярен. Поэтому $\bar{\mu} \geq 2$.

Заметим, что $k\lambda$ всегда четно, поэтому при нечетном b_1 оба параметра k и λ четны.

ЛЕММА 14. *Параметр b_1 не меньше пяти и $k \geq 3b_1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $k = 3b_1 - 1$, то $3b_1 - 1 \geq (b_1^2 + 4b_1 + 3)/3$ и $b_1 = 2, 3$. В случае $b_1 = 3$ получим $k = 8$, $\lambda = 4$ и по предложению 2 Γ – треугольный граф $T(6)$.

Пусть $b_1 = 3$, $k \geq 3b_1$. Ввиду предложения 2 Γ является полным многодольным графом или графом Клебша, причем в последнем случае $\bar{\mu} = 2$.

Если $b_1 = 4$, то по предложению 3 граф Γ является полным многодольным, имеющим $\bar{\mu} = 0$. Лемма доказана.

Из лемм 14 и 6 следует неравенство $kb_1 > (b_1 + \bar{\mu})(k - 2b_1 + 2)$, поэтому верно неравенство

$$(k - 2b_1 + 2)\bar{\mu} < (2b_1 - 2)b_1. \quad (1)$$

Применяя лемму 7 к графу Γ при условии $\bar{\lambda} = 0$, получим нестрогое неравенство

$$k\bar{\mu} \leq (b_1 + \bar{\mu})(b_1 + \bar{\mu} - 1), \quad (2)$$

причем если здесь достигается равенство, то $\bar{\Gamma}$ – сильно регулярный граф с $\bar{\lambda} = 0$.

Ввиду леммы 7 можно считать, что $\lambda < k + 1/2 - \sqrt{2k + 2}$, т.е. $2k + 2 < (b_1 + 3/2)^2$. Отсюда следует неравенство

$$k \leq (b_1^2 + 3b_1)/2. \quad (3)$$

ЛЕММА 15. *Параметр $\bar{\mu}$ не больше четырех.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставив $(b_1^2 + 4b_1 + 3)/3$ вместо k в неравенство (1), получим

$$(\bar{\mu} - 6)b_1^2 - (2\bar{\mu} - 6)b_1 + 9\bar{\mu} < 0.$$

Дискриминант этого квадратного трехчлена равен $-8\bar{\mu}^2 + 48\bar{\mu} + 9$ и отрицателен при $\bar{\mu} \geq 7$.

Если $\bar{\mu} = 6$, то ввиду (1) получим $b_1^2 - 2b_1 + 9 < b_1(b_1 - 1)$ и $b_1 > 9$, а в силу (2) получим $6k \leq (b_1 + 6)(b_1 + 5)$, т.е. $b_1^2 - 3b_1 - 24 \leq 0$ и $b_1 \leq 6$. Противоречие.

Пусть $\bar{\mu} = 5$. Тогда в силу неравенства (2) имеем

$$5(b_1^2 + 4b_1 + 3) \leq 3(b_1 + 5)(b_1 + 4),$$

т.е. $2b_1^2 - 7b_1 - 45 \leq 0$. Отсюда $b_1 \leq 6$.

Пусть $b_1 = 6$, $v = 33 + t$, $k = 21 + t$, $\lambda = 14 + t$, $t \geq 0$. Тогда в силу (1) получим $5(11 + t) < 60$ и $t = 0$. Противоречие с тем, что число ребер в Γ равно $vk/2$.

Пусть $b_1 = 5$, $v = 27 + t$, $k = 16 + t$, $\lambda = 10 + t$, t четно и $t \geq 0$. Ввиду неравенства (1) имеем $5(8 + t) < 40$. Противоречие.

ЛЕММА 16. *Параметр $\bar{\mu}$ меньше четырех.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\bar{\mu} = 4$. Тогда, учитывая неравенство (2), имеем

$$4(b_1^2 + 4b_1 + 3) \leq 3(b_1 + 4)(b_1 + 3),$$

т. е. $b_1^2 - 5b_1 - 24 \leq 0$. Отсюда $b_1 \leq 8$, причем в случае $b_1 = 8$ граф $\bar{\Gamma}$ сильно регулярен с параметрами $(298, 33, 0, 4)$. Противоречие.

Пусть $b_1 = 7$, $v = 39 + t$, $k = 27 + t$, $\lambda = 19 + t$, $t \geq 0$. Снова ввиду неравенства (2) получим $4(27 + t) \leq 110$ и $t = 0$. Противоречие с тем, что $k\lambda$ четно.

Пусть $b_1 = 6$, $v = 32 + t$, $k = 21 + t$, $\lambda = 14 + t$, $t \geq 0$. В силу неравенства (2) имеем $4(21 + t) \leq 90$ и $t < 2$.

Для вершины u графа Γ число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно $6(21 + t)$. Пусть $w \in \Gamma_2(u)$ и $x \in [u] \cap [w]$. По лемме 1 степень x в этом μ -подграфе не меньше $9 + t$.

Пусть $t = 1$. Тогда $\mu(u, w_i) = 13$ только для восьми вершин w_i из $\Gamma_2(u)$, причем $u^\perp \cup w_i^\perp = \Gamma$. Заметим, что $[w_2]$ содержит шесть вершин из $[u] - [w_1]$ и семь из $[u] \cap [w_1]$. Если w_3 смежна с α вершинами из $[u] - ([w_1] \cup [w_2])$, то $[w_3]$ содержит по $6 - \alpha$ вершин из $([u] \cap [w_1]) - [w_2]$, $([u] \cap [w_2]) - [w_1]$ и $2\alpha + 1$ вершин из $[u] \cap [w_1] \cap [w_2]$. Отсюда $(6 - \alpha) + (2\alpha + 1) = 7$ и $\alpha = 0$. Противоречие с тем, что тогда $[w_3] \cap [w_4]$ содержит по шесть вершин из $([u] \cap [w_1]) - [w_2]$, $([u] \cap [w_2]) - [w_1]$.

Пусть $t = 0$. Тогда $\mu(u, w_i) = 12$ по крайней мере для четырех вершин w_i из $\Gamma_2(u)$, причем $u^\perp \cup w_i^\perp = \Gamma$ и $[u] \cap [w_i]$ является регулярным графом степени 9. Далее, $|[u] \cap [w_1] \cap [w_2]| = 6$ и если вершина p из $[u] \cap [w_1] \cap [w_2]$ смежна с β вершинами из $[u] - ([w_1] \cup [w_2])$, то $[p]$ содержит по $5 - \beta$ вершин из $([u] \cap [w_1]) - [w_2]$, $([u] \cap [w_2]) - [w_1]$ и $4 + \beta$ вершин из $[u] \cap [w_1] \cap [w_2]$. Если $\beta = 0$, то p не смежна с вершиной q из $[u] \cap [w_1] \cap [w_2]$ и $[p] \cap [q]$ содержит u, w_1, w_2 и по крайней мере по четыре вершины из $[u] \cap [w_1] \cap [w_2]$, $([u] \cap [w_1]) - [w_2]$ и из $([u] \cap [w_2]) - [w_1]$. В этом случае $\mu(p, r_i) = 12$ по крайней мере для семи вершин r_i из $\Gamma_2(p)$. Противоречие с тем, что $|[q] - [p]| = 6$.

Итак, каждая вершина из $[u] \cap [w_1] \cap [w_2]$ смежна точно с одной вершиной из $[u] - ([w_1] \cup [w_2])$ и подграфы $[u] \cap [w_1] \cap [w_2]$, $([u] \cap [w_1]) - [w_2]$ являются 6-кликами. Если w_3 смежна с γ вершинами из $[u] - ([w_1] \cup [w_2])$, то $[w_3]$ содержит по $6 - \gamma$ вершин из $([u] \cap [w_1]) - [w_2]$, $([u] \cap [w_2]) - [w_1]$ и γ вершин из $[u] \cap [w_1] \cap [w_2]$. Если $\gamma = 2$, p, q — различные вершины из $[u] \cap [w_1] \cap [w_2] \cap [w_3]$, то $[p] \cap [q]$ содержит u, w_1, w_2, w_3 и по четыре вершины из $[u] \cap [w_1] \cap [w_2]$, $([u] \cap [w_1]) - [w_2]$ и из $([u] \cap [w_2]) - [w_1]$. Противоречие. Если $\gamma = 1$, $p \in [u] \cap [w_1] \cap [w_2] \cap [w_3]$, то $[p] \cap [u]$ содержит по пять вершин из $([w_1] \cap [w_2]) - [w_3]$, $([w_2] \cap [w_3]) - [w_1]$ и из $([w_3] \cap [w_1]) - [w_2]$. Противоречие. Если $\gamma = 0$, то любая вершина из $[u] \cap [w_1] \cap [w_2]$ смежна с единственной вершиной из $[u] - ([w_1] \cup [w_2])$ и $[w_4]$ содержит по три вершины из $[u] - ([w_1] \cup [w_2])$, $([u] \cap [w_1]) - [w_2]$, $([u] \cap [w_2]) - [w_1]$ и из $[u] \cap [w_1] \cap [w_2]$. Противоречие с тем, что подграф $([u] \cap [w_4]) - [w_3]$ является 6-кликой. Таким образом, $[w_3] \cap [w_4]$ содержит по три вершины из $[u] - ([w_1] \cup [w_2])$, $[u] \cap [w_1] \cap [w_2]$. Противоречие с тем, что $[u] \cap [w_3] \cap [w_4]$ является кликой.

Пусть $b_1 = 5$, $v = 26 + t$, $k = 16 + t$, $\lambda = 10 + t$, t четно и $t \geq 0$. В силу неравенства (2) $4(16 + t) \leq 72$ и $t \leq 2$. Если $t = 2$, то граф Γ сильно регулярен

с параметрами (28, 18, 12, 10). В этом случае Γ имеет собственное значение -2 . Противоречие с тем, что среди зейделевых графов нет графа с такими параметрами. Значит, $t = 0$ и $vk\lambda$ не делится на 3. Противоречие. Лемма, а вместе с ней и утверждение 1) теоремы доказаны.

ЛЕММА 17. Если $\lambda \geq k + 3/2 - \sqrt{3k}$, то $\bar{\Gamma}$ – кореберно регулярный граф и $\bar{\mu} \leq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию леммы $3k \geq b_1^2 + 5b_1 + 25/4$. Поскольку для графов икосаэдра и Шлефли неравенство $\lambda \geq k + 3/2 - \sqrt{3k}$ нарушается, то по утверждению 1) теоремы диаметр Γ равен 2 и $\bar{\Gamma}$ – кореберно регулярный граф с параметрами $\bar{k} = v - k - 1 = b_1 + \bar{\mu}$, $\bar{\mu} = v - 2k - 2 + \lambda \leq 3$. Допустим, что $\bar{\mu} = 3$.

Неравенство $\lambda \geq k + 3/2 - \sqrt{3k}$ равносильно $k > (b_1^2 + 5b_1 + 6)/3$. Подставив последнее неравенство в (2), получим

$$b_1^2 + 5b_1 + 6 < k\bar{\mu} \leq (b_1 + 3)(b_1 + 2).$$

Противоречие. Лемма и утверждение 2) теоремы 1 доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если Γ – реберно регулярный граф с $k = (b_1 + 3)(b_1 + 2)/3$, то $\bar{\Gamma}$ – либо кореберно регулярный граф с $\bar{\mu} \leq 2$, либо сильно регулярный граф с параметрами (162, 21, 0, 3).

Действительно, в случае $\bar{\mu} = 3$ имеем $k = (b_1 + 3)(b_1 + 2)/3$ и в (2) достигается равенство. Поэтому $\bar{\Gamma}$ – сильно регулярный граф с $\bar{k} = b_1 + 3$, $\bar{\lambda} = 0$ и $\bar{\mu} = 3$. В этом случае $4b_1 + 9 = (2u + 1)^2$ и неглавные собственные значения графа $\bar{\Gamma}$ равны $u - 1$ и $-u - 2$. По условию целочисленности $3(2u + 1)$ делит $(u + 1)(u^2 + u + 1) \times (u^2 + 2u + 3)$, поэтому $2u + 1$ делит 27 и $u = 1, 4, 13$. Но в случае $u = 13$ число $(u + 1)(u^2 + u + 1)(u^2 + 2u + 3)$ не делится на 81. Поэтому $\bar{\Gamma}$ – сильно регулярный граф с параметрами (162, 21, 0, 3).

Докажем следствие 1. Пусть Γ – связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , $(b_1^2 + 2b_1)/2 < k$ и Γ не является многоугольником или графом икосаэдра.

ЛЕММА 18. Выполнены следующие утверждения:

- 1) если $b_1 \leq 4$, то Γ является полным многодольным графом, треугольным графом $T(m)$, $m = 5, 6$, или графом Клебша;
- 2) если $k < 3b_1$, то $b_1 \leq 3$;
- 3) если $b_1 > 4$, то диаметр Γ равен 2 и $v \leq 2k - 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $b_1 = 1$, то Γ является полным многодольным графом $K_{r \times 2}$. Если $b_1 = 2$, то $k \geq 5$. Ввиду предложения 1 граф Γ является полным многодольным графом $K_{r \times 3}$ или треугольным графом $T(5)$. Если $b_1 = 3$, то $k \geq 8$ и ввиду предложения 2 граф Γ является полным многодольным графом $K_{r \times 4}$, треугольным графом $T(6)$ или графом Клебша. Если $b_1 = 4$, то $k > 12$ и ввиду предложения 3 граф Γ является полным многодольным графом $K_{r \times 5}$.

Если $k < 3b_1$, то $b_1^2 - 4b_1 < 0$. Утверждения 1) и 2) доказаны.

Если $b_1 > 4$, то по утверждению 2) $k \geq 3b_1$. В силу [1, лемма 1.4.2] диаметр Γ равен 2 и $v \leq 2k - 2$.

ЛЕММА 19. Если $b_1 \geq 4$, то $\bar{\Gamma}$ – кореберно регулярный граф с $\bar{\mu} = 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\bar{\mu} > 2$, то ввиду утверждения 2) теоремы 1 получим $\lambda < k + 3/2 - \sqrt{3k}$. Тогда $3k \leq b_1^2 + 5b_1 + 6$, $b_1^2 - 4b_1 - 12 < 0$ и $b_1 \leq 5$.

Пусть $\lambda < k + 1 - \sqrt{3k + 1}$. Тогда $3k + 1 < b_1^2 + 4b_1 + 4$ и $k < (b_1^2 + 4b_1 + 3)/3$. Отсюда $b_1^2 - 2b_1 - 6 < 0$ и $b_1 \leq 3$. Значит, $\lambda \geq k + 1 - \sqrt{3k + 1}$ и ввиду утверждения 1) теоремы 1 можно считать, что $\bar{\mu} = 3$.

Пусть $b_1 = 5$ и $\bar{\mu} = 3$. Тогда $17.5 \leq k < 19$, поэтому $k = 18$. Число ребер между $[u]$ и $\Gamma_2(u)$ равно 90. Отсюда $\mu(u, w) = \mu(u, z) = 12$ для двух вершин $u, w \in \Gamma_2(u)$ и $\mu(u, x) = 11$ для $x \in \Gamma_2(u) - \{z, w\}$. Окрестность вершины из $[u] \cap [w] \cap [z]$ содержит u, w, z , по три вершины из $([w] \cap [z]) - [u]$, $([u] \cap [w]) - [z]$, $([u] \cap [z]) - [w]$ и шесть вершин из $[u] \cap [w] \cap [z]$. Противоречие с тем, что $|[u] \cap [w] \cap [z]| = 6$. Итак, $\bar{\mu} = 2$. Лемма, а вместе с ней и следствие 1 доказаны.

§ 4. Реберно регулярные графы Деза

Напомним, что графом Деза с параметрами (v, k, a, b) называются регулярный граф степени k на v вершинах, причем $|[u] \cap [w]| = a$ или $|[u] \cap [w]| = b$, $a \leq b$, для любых двух различных вершин u, w .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть граф Деза Γ является α -кликковым или α -кокликковым расширением сильно регулярного графа Γ' с параметрами (v', k', λ', μ') . Тогда выполнены следующие утверждения:

1) в кликовом случае либо $\alpha\mu' = 2(\alpha - 1) + \alpha\lambda'$, либо Γ является кликовым расширением объединения изолированных клик (и граф Γ сильно регулярен), либо Γ является 2-кликковым расширением полного многодольного графа $K_{r \times s}$;

2) в кокликковом случае μ' совпадает с λ' или с k' (и в последнем случае граф Γ сильно регулярен).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ удовлетворяет условиям предложения. В кликовом случае имеем $\mu = \alpha\mu'$, $\lambda(u, w) = (\alpha - 2) + \alpha k'$, если вершины u, w лежат в общей клике, и $\lambda(u, w) = 2(\alpha - 1) + \alpha\lambda'$, если вершины u, w лежат в разных кликах. Поэтому либо $\alpha\mu' = 2(\alpha - 1) + \alpha\lambda'$, либо $(\alpha - 2) + \alpha k' = 2(\alpha - 1) + \alpha\lambda'$, либо $\alpha\mu' = (\alpha - 2) + \alpha k'$. В последнем случае $\alpha = 2$ и $k' = \mu'$. Если же $(\alpha - 2) + \alpha k' = 2(\alpha - 1) + \alpha\lambda'$, то Γ является кликовым расширением объединения изолированных клик. Утверждение 1) доказано.

В кокликковом случае имеем $\lambda(u, w) = \alpha\lambda'$, $\mu(u, w) = \alpha\mu'$, если вершины u, w лежат в разных кокликах, и $\mu(u, w) = \alpha k'$, если вершины u, w лежат в общей коклике. Поэтому μ' совпадает с λ' или k' . Ясно, что в последнем случае граф Γ сильно регулярен. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть Γ является связным реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ) . Допустим, что для некоторой вершины u подграф $\Gamma_2(u)$ состоит из $b_1 + 2$ вершин и $\{w \in \Gamma_2(u) \mid \mu(u, w) \neq k - b_1 - 1\}$ является кокликкой. Тогда либо Γ является дополнительным графом для сильно регулярного графа с $\bar{\lambda} = 0$, $\bar{\mu} = 2$ или полным двудольным графом с удаленным максимальным паросочетанием на $2b_1 + 4$ вершинах, либо $\Gamma \in \text{MP}(\omega)$, $\omega \geq 6$.

Пусть до конца параграфа Γ является таким реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ) , что $\bar{\Gamma}$ – кореберно регулярный граф с $\bar{\mu} = 2$. Допустим, что Γ не является сильно регулярным графом. Пусть $u \in \Gamma$ и $\mu(u, w_i) = k - b_1 - 1$ для δ вершин w_i из $\Gamma_2(u)$.

ЛЕММА 20. *Выполнены следующие утверждения:*

- 1) для любой вершины u верно равенство $|\Gamma_2(u)| = b_1 + 2$;
- 2) если $\mu(u, w) = k - b_1 - 1$, то $u^\perp \cup w^\perp = \Gamma$ и $[u] \cap [w]$ является регулярным графом степени $k - 2b_1$;
- 3) $|[u] \cap [w_i] \cap [w_j]| = k - 2b_1 - 1$ для $i \neq j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\bar{\Gamma}$ кореберно регулярен с $\bar{\mu} = 2$, то $|\Gamma_2(u)| = v - k - 1 = b_1 + \bar{\mu} = b_1 + 2$.

Пусть $\mu(u, w) = k - b_1 - 1$. Тогда $[w] - [u]$ содержит $b_1 + 1$ вершину, $u^\perp \cup w_i^\perp = \Gamma$ и $[u] \cap [w_i]$ является регулярным графом степени $k - 2b_1$. Утверждения 1) и 2) доказаны.

Для $i \neq j$ подграф $[w_j]$ содержит b_1 вершин из $[u] - [w_i]$, поэтому $|[u] \cap [w_i] \cap [w_j]| = k - 2b_1 - 1$. Лемма доказана.

Пусть $\Delta = \{w_1, \dots, w_\delta\}$ – множество вершин из $\Gamma_2(u)$ с $\mu(u, w_i) = k - b_1 - 1$, $\Sigma = \Gamma_2(u) - \Delta$. Для $i \neq j$ через x_{ij} обозначим единственную вершину из $[u] - ([w_i] \cup [w_j])$. Пусть X_i – множество вершин из $[u]$, смежных с i вершинами из Δ , $x_i = |X_i|$.

ЛЕММА 21. *Выполнены следующие утверждения:*

- 1) если $\delta \geq 3$, то $|[u] \cap [w_1] \cap [w_2] \cap [w_3]| = k - 3b_1$;
- 2) $x_i = 0$ для $i < \delta - 2$, $x_{\delta-2} = \binom{\delta}{2}$ (и $X_{\delta-2}$ состоит из вершин x_{ij}), $x_{\delta-1} = \delta(b_1 - \delta + 2)$ и $x_\delta = k - \delta b_1 + (\delta^2 - 3\delta)/2$;
- 3) для вершины z из Σ и для $i \in \{1, \dots, \delta\}$ подграф $[z]$ не содержит единственную вершину из $X_{\delta-1} - w_i^\perp$;
- 4) $\delta \leq b_1$ и в случае $\delta = b_1$ получим $x_\delta = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $|\Gamma_2(u)| = b_1 + 2$, то $[x_{ij}]$ содержит $\Gamma_2(u) - \{w_i, w_j\}$. Заметим, что каждая вершина из $([u] \cap [w_1]) - [w_2]$ не смежна с единственной вершиной из $\Gamma_2(u) - \{w_1, w_2\}$. Обратно, любая вершина из $\Gamma_2(u) - \{w_1, w_2\}$ смежна с $b_1 - 1$ вершиной из $([u] \cap [w_1]) - [w_2]$. Отсюда, в частности, $|[u] \cap [w_1] \cap [w_2] \cap [w_3]| = k - 3b_1$. Утверждение 1) доказано.

Подсчитав число ребер между $[u]$ и Δ , а также число треугольников с основанием в Δ и вершиной в $[u]$, получим равенства $\sum x_i = k$, $\sum i x_i = \delta(k - b_1 - 1)$ и $\sum \binom{i}{2} x_i = \binom{\delta}{2} (k - 2b_1 - 1)$.

Заметим, что $x_i = 0$ для $i < \delta - 3$, поэтому $x_{\delta-2} = \binom{\delta}{2}$ (и $X_{\delta-2}$ состоит из вершин x_{ij}), $x_{\delta-1} = \delta(b_1 - \delta + 2)$ и $x_\delta = k - \delta b_1 + (\delta^2 - 3\delta)/2$. Далее, $[u] - X_\delta$ содержит $\delta - 1$ вершину из $X_{\delta-2}$ и $b_1 - \delta + 2$ вершины из $X_{\delta-1}$, не смежные с вершиной w_i . Утверждение 2) доказано.

Для вершины z из Σ подграф $[z] - w_i^\perp$ содержит $\delta - 1$ вершину из $X_{\delta-2}$ и $b_1 - \delta + 1$ вершину из $X_{\delta-1}$. Поэтому подграф $[z]$ не содержит единственную вершину из $X_{\delta-1} - w_i^\perp$. Отсюда, в частности, $[z]$ содержит $\delta(b_1 - \delta + 1)$ вершин из $X_{\delta-1}$. Утверждение 3) доказано.

Если $\delta > b_1$, то подграф $\Gamma_2(u)$ является кликой и $\mu(u, w) = k - b_1 - 1$ для любой вершины w из $\Gamma_2(u)$. Противоречие с тем, что тогда граф $\bar{\Gamma}$ сильно регулярен с $\bar{\lambda} = 0$, $\bar{\mu} = 2$.

Пусть $\delta = b_1$. Тогда $x_{\delta-2} = b_1(b_1 - 1)/2$ и $x_{\delta-1} = 2b_1$. Поскольку $k \leq b_1(b_1 + 3)/2$, то $x_\delta = 0$.

ЛЕММА 22. *Выполнены следующие утверждения:*

- 1) *если $\mu(u, z) = k - \gamma$ для $z \in \Sigma$, то $\Gamma - z^\perp$ содержит u , $b_1 + 1 - \gamma$ вершин из Σ , δ вершин из $X_{\delta-1}$ и $\gamma - \delta$ вершин из X_δ , в частности $\delta \leq \gamma \leq b_1$;*
- 2) *если $\mu(u, z_j) = k - \gamma_j$ для вершин $z_j \in \Sigma$, то $\sum \gamma_j = (b_1 + 2 - \delta)\delta + 2x_\delta$;*
- 3) *$x_\delta \leq (b_1 - \delta)(b_1 + 2 - \delta)/2$, причем в случае выполнения равенства получим $\mu(u, z) = k - b_1$ для $z \in \Sigma$ и $b_1 + 2 - \delta$ чётно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu(u, z) = k - \gamma$ для $z \in \Sigma$. Тогда $\Gamma - z^\perp$ содержит u и $b_1 + 1 - \gamma$ вершин из Σ . По лемме 21 подграф $\Gamma - z^\perp$ содержит δ вершин из $X_{\delta-1}$ и $\gamma - \delta$ вершин из X_δ . В частности, $\delta \leq \gamma \leq b_1$. Утверждение 1) доказано.

Пусть $\mu(u, z_j) = k - \gamma_j$ для $z_j \in \Sigma$. Тогда число ребер между X_δ и Σ равно $x_\delta b_1 - x_\delta \delta$. С другой стороны, по утверждению 1) указанное число ребер равно

$$(b_1 + 2 - \delta)(x_\delta + \delta) - \sum_{j=1}^{b_1+2-\delta} \gamma_j.$$

Отсюда следует утверждение 2).

Ввиду утверждений 1) и 2) заключаем, что

$$(b_1 + 2 - \delta)\delta + 2x_\delta \leq b_1(b_1 + 2 - \delta).$$

Поэтому $x_\delta \leq (b_1 - \delta)(b_1 + 2 - \delta)/2$, причем в случае выполнения равенства имеем $\mu(u, z) = k - b_1$ для $z \in \Sigma$. Поэтому граф Σ является полным многодольным графом $K_{((b_1+2-\delta)/2) \times 2}$ и $b_1 + 2 - \delta$ чётно.

ЛЕММА 23. *Если $\mu(u, z) = k - \gamma$ для всех $z \in \Sigma$, то выполнены следующие утверждения:*

- 1) $x_\delta = (b_1 + 2 - \delta)(\gamma - \delta)/2$;
- 2) $k = (\gamma(b_1 + 2) + (b_1 - \gamma + 1)\delta)/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mu(u, z) = k - \gamma$ для $z \in \Sigma$. Тогда $\Gamma - z^\perp$ содержит u и $b_1 + 1 - \gamma$ вершин из Σ . По лемме 22 $\Gamma - z^\perp$ содержит δ вершин из $X_{\delta-1}$ и $\gamma - \delta$ вершин из X_δ .

По утверждению 2) леммы 22 получим $(b_1 + 2 - \delta)\gamma = (b_1 + 2 - \delta)\delta + 2x_\delta$. Отсюда следует утверждение 1).

Напомним, что $x_{\delta-2} = \binom{\delta}{2}$, $x_{\delta-1} = \delta(b_1 + 2 - \delta)$. Поэтому

$$k = (b_1 - \delta + 2)(\gamma + \delta)/2 + \binom{\delta}{2}.$$

Лемма доказана.

Ввиду леммы 21 имеем $\mu(u, z) = k - \delta$ для любой вершины $z \in \Sigma$ тогда и только тогда, когда Σ является кокликкой.

ЛЕММА 24. Если Σ является кокликкой, то либо $\delta = 1$ и Γ является полным двудольным графом с удаленным максимальным паросочетанием на $2b_1 + 4$ вершинах, либо $\delta \geq 2$ и для $\omega = b_1 + 3 - \delta$ выполнены следующие утверждения:

- 1) ω -кокликка $C = \{u\} \cup \Sigma$ попадает в окрестности $\delta(\delta - 1)/2$ вершин;
- 2) подграф $\Omega = X_{\delta-1} \cup \Sigma$ является полным многодольным графом $K_{\delta \times \omega}$;
- 3) Γ разбивается α кокликками $C_1, \dots, C_\alpha$ порядка ω , в частности Γ является графом Дежа с $a = k - b_1 - 1$, $b = k - \delta$;
- 4) $2\beta\omega = (\delta^2 - \delta)/2$ для некоторого натурального числа β и для любой вершины x подграф $[x]$ содержит $\alpha - 1 - \delta = \beta$ коклик C_j и по $\omega - 1$ вершины в каждой из оставшихся δ коклик, не содержащих x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Σ является кокликкой. Если $\delta = 0$, то $kb_1 = (b_1 + 2)k$. Противоречие. Если $\delta = 1$, то $k = b_1 + 1$ для любой вершины $z \in \Sigma$. В этом случае Γ является полным двудольным графом с удаленным максимальным паросочетанием на $2b_1 + 4$ вершинах. Пусть $\delta \geq 2$. Заметим, что каждая вершина z из Σ смежна с $k - \delta$ вершинами из $[u]$.

Подграф $\Omega = X_{\delta-1} \cup \Delta$ состоит из ω клик порядка δ и совпадает с подграфом вершин графа Γ , каждая из которых не смежна с единственной вершиной кокликки C . Поэтому C попадает в окрестности $\delta(\delta - 1)/2$ вершин (и указанные вершины принадлежат $X_{\delta-2}$). Утверждение 1) доказано.

Поскольку каждая вершина из $X_{\delta-2}$ не смежна точно с двумя вершинами из Δ , то Ω – реберно регулярный граф с параметрами $(\omega\delta, (\omega - 1)\delta, (\omega - 2)\delta)$. Таким образом, $b_1(\Omega) = \delta - 1$, $\mu(\Omega) = (b_1 + 2 - \delta)\delta$ и подграф Ω является полным многодольным графом $K_{\delta \times \omega}$. Утверждение 2) доказано.

Так как окрестность каждой вершины из $X_{\delta-2}$ не содержит некоторую ω -кокликку из Ω , то любая вершина из Γ лежит в единственной ω -кокликке C_i и число α таких коклик равно $(k + 3 + b_1)/\omega$. Отсюда, в частности, Γ является графом Дежа с $a = k - b_1 - 1$, $b = k - \delta$. Утверждение 3) доказано.

Далее, $\delta(\delta - 1) = 2\beta\omega$ для некоторого натурального числа β . Для любой вершины x подграф $[x]$ содержит $\alpha - 1 - \delta = \beta$ коклик C_i и по $\omega - 1$ вершины в каждой из оставшихся δ коклик, не содержащих x .

ЛЕММА 25. Пусть Σ является кокликкой, $\delta \geq 2$, Γ' – факторграф Γ с множеством вершин $C_1, \dots, C_\alpha$ и две различные вершины C_i, C_j смежны в Γ' тогда и только тогда, когда каждая вершина из C_i смежна со всеми вершинами из C_j . Тогда либо $\bar{\Gamma}$ – сильно регулярный граф с $\bar{\lambda} = 0$, $\bar{\mu} = 2$, либо Γ' состоит из двух изолированных ω -клик.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 24 Γ' является регулярным графом степени β и $\Gamma' - C_i^\perp$ является ω -кликкой.

Поскольку Γ – реберно регулярный граф, являющийся $(b_1 + 3 - \omega)$ -кликковым расширением регулярного графа Γ' , то Γ' реберно регулярен. Таким образом, Γ' состоит из двух изолированных ω -клик или является сильно регулярным графом с параметрами (v', k', λ', μ') без 3-клик, где $v' = \alpha$, $k' = \beta$. В последнем случае ввиду предложения 4 имеем $\lambda' = \mu'$ и $\bar{\Gamma}'$ является сильно регулярным графом с параметрами $(\alpha, \omega, 0, 2)$. Поскольку $\bar{\mu} = 2$, то $b_1 + 3 - \omega = 1$ и $\bar{\Gamma}$ является сильно регулярным графом с $\bar{\lambda} = 0$, $\bar{\mu} = 2$. Лемма доказана.

Если $\delta \geq 2$ и $\bar{\Gamma}$ не является сильно регулярным графом с $\bar{\lambda} = 0$, $\bar{\mu} = 2$, то по лемме 25 для четного ω получим $b_1 = 3\omega/2 - 3$, $k = \omega^2 - 3\omega/2$, $\lambda = \omega^2 - 3\omega + 2$ и $v = \omega^2$. Таким образом, $\Gamma \in \text{MP}(\omega)$. Предложение 5 доказано.

ЛЕММА 26. Пусть Γ является графом Деза с $\mu(u, z) = k - \gamma$ для любой вершины $z \in \Sigma$. Тогда параметр δ не равен 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\delta = 1$. Тогда $kb_1 = k - b_1 - 1 + (b_1 + 1)(k - \gamma)$ и $2k = (b_1 + 1)(\gamma + 1)$. Докажем следующее утверждение:

(А) граф Γ разбивается множеством 2-клик $C_1, \dots, C_{v/2}$, где $C_i = \{u, w\}$ для вершин u, w с $\mu(u, w) = k - b_1 - 1$.

По лемме 23 Σ — регулярный граф степени $\gamma - 1$ на $b_1 + 1$ вершине. Далее, для любой вершины u найдется единственная вершина u^* с $\mu(u, u^*) = k - b_1 - 1$. Поэтому граф Γ разбивается множеством 2-клик $C_1, \dots, C_{v/2}$, где $C_i = \{u_i, u_i^*\}$.

Докажем следующее утверждение:

(Б) факторграф Γ' на множестве вершин $\{C_1, \dots, C_{v/2}\}$, в котором две различные вершины C_i, C_j смежны тогда и только тогда, когда каждая вершина из C_i смежна со всеми вершинами из C_j , является сильно регулярным графом с $k' = (k - b_1 - 1)/2$, $\lambda' = k' - 1 - 2(b_1 - 3)$, $\mu' = k' - 2(b_1 - \gamma + 1)$.

Положим $\Lambda = (\Gamma_2(u) - \{u^*\}) \cup (\Gamma_2(u^*) - \{u\})$. Тогда Λ разбивается $b_1 + 1$ кликами C_i , поэтому $k' = (k - b_1 - 1)/2$. Пусть $d, d^* \in [u] \cap [u^*]$. По лемме 20 $|[u] \cap [u^*] - d^\perp| = b_1 - 2$ и $\lambda' = k' - 1 - 2(b_1 - 3)$. Наконец, для $e \in \Sigma$ верны равенства $|\Sigma - e^\perp| = b_1 - \gamma + 1$ и $\mu' = k' - 2(b_1 - \gamma + 1)$. Утверждение (Б) доказано.

Прямоугольное соотношение для графа Γ' имеет вид $(b_1 + 1)\mu' = 2k'(b_1 - 3)$, поэтому $2\mu' = (\gamma - 1)(b_1 - 3)$. Отсюда $(7 - b_1)(\gamma - 1) = 8(b_1 - \gamma + 1)$ и $\gamma = (7b_1 + 15)/(15 - b_1) \leq b_1$.

Таким образом, $b_1 = \gamma = 3, 5$. Если $b_1 = 3$, то $k = 8, k' = 2, \lambda' = 1$ и $v' = 7$. Противоречие. Если же $b_1 = 5$, то $k = 18, k' = 6, \lambda' = 1$ и $\mu' = 4$. Противоречие. Лемма доказана.

Пусть до конца параграфа Γ является контрпримером к теореме 2. Тогда $\mu(u, z) = k - \gamma$ для любой вершины $z \in \Sigma$ и $\Gamma - (x^\perp \cup y^\perp)$ состоит из двух смежных вершин для любого ребра $\{x, y\}$.

Ввиду предложения 5 можно считать, что Σ не является кликой. По лемме 23 граф Σ является регулярным степени $\gamma - \delta$ на $b_1 + 2 - \delta$ вершинах. В силу леммы 26 можно считать, что $\delta \geq 2$. Напомним, что $\Delta = \{w_1, \dots, w_\delta\}$ — множество вершин из $\Gamma_2(u)$, $\mu(u, w_i) = k - b_1 - 1$, X_i — множество вершин из $[u]$, смежных с i вершинами из Δ , $x_i = |X_i|$ и для $i \neq j$ через x_{ij} обозначается единственная вершина из $[u] - ([w_i] \cup [w_j])$. Для вершины $y \in \Gamma$ положим

$$\begin{aligned}\Delta_y &= \{z \in \Gamma_2(y) \mid \mu(y, z) = k - b_1 - 1\}, \\ \Sigma_y &= \{x \in \Gamma_2(y) \mid \mu(x, y) = k - \gamma\}.\end{aligned}$$

ЛЕММА 27. Выполнены следующие утверждения:

1) граф Σ является полным многодольным с r долями порядка $s = b_1 + 2 - \gamma$, $sr = b_1 + 2 - \delta$ и число $(s + 1)$ -клик в Γ равно $vr/(s + 1)$;

2) имеем $\mu(w_i, x_{ij}) = \mu(w_j, x_{ij}) = k - b_1 - 1$ для различных $i, j \in \{1, \dots, \delta\}$, $[x_{ij}]$ содержит $k - 1 - 3b_1$ вершин из $[u] \cap [w_i] \cap [w_j]$ и по b_1 вершин из $([u] \cap [w_i]) - [w_j]$ и $([u] \cap [w_j]) - [w_i]$;

3) подграф Δ_{w_i} совпадает с $\{u\} \cup \{x_{ij} \mid j \neq i\}$ и $X_{\delta-1} - [w_i] = \Sigma_{w_i}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условий теоремы следует, что для любых смежных вершин d, e из Σ подграф $\Gamma - (d^\perp \cup e^\perp)$ содержит вершину из $[u]$. Тогда для $z \in \Sigma$, $d \in \Sigma(z)$ подграф $\Sigma - z^\perp$ содержится в $[d]$. Таким образом, Σ — полный многодольный граф с r долями порядка $s = b_1 + 2 - \gamma$ и $sr = b_1 + 2 - \delta$. Поскольку для любой вершины u в подграфе $\Gamma_2(u)$ имеются r коклик, содержащих по s вершин, то число $(s + 1)$ -клик в Γ равно $vr/(s + 1)$. Утверждение 1) доказано.

Пусть $[x_{ij}]$ содержит α вершин из $[u] \cap [w_i] \cap [w_j]$, β вершин из $([u] \cap [w_i]) - [w_j]$ и ω вершин из $([u] \cap [w_j]) - [w_i]$. По лемме 21 $|([w_i] \cap [w_j]) - [u]| = b_1$ и любая вершина из $([w_i] \cap [w_j]) - [u]$ смежна с x_{ij} . Далее, $\alpha + \beta + \omega = k - b_1 - 1$, $\mu(w_i, x_{ij}) = \alpha + \beta + b_1$, $\mu(w_i, x_{ij}) = \alpha + \omega + b_1$.

Если $\mu(w_i, x_{ij}) = k - \gamma$, то $\omega = \gamma - 1$. Если же $\mu(w_i, x_{ij}) = k - b_1 - 1$, то $\omega = b_1$. Число ребер между $([u] \cap [w_i]) - [w_j]$ и $([u] \cap [w_j]) - [w_i]$ равно $(b_1 - \gamma + 1) \times (b_1 - 1) + (\gamma - 1)(b_1 - 2)$ в первом случае и $b_1(b_1 - 2)$ во втором. Отсюда, в частности, $\mu(w_i, x_{ij}) = \mu(w_j, x_{ij})$ и $\beta = \omega$. Если $\mu(w_i, x_{ij}) = k - \gamma$, то $\alpha = k + 1 - b_1 - 2\gamma$. Если же $\mu(w_i, x_{ij}) = k - b_1 - 1$, то $\alpha = k - 1 - 3b_1$.

Допустим, что $\mu(w_i, x_{ij}) = k - \gamma$. Тогда число ребер между $[u] - x_{ij}^\perp$ и $\Gamma_2(u) - \{w_i, w_j\}$ равно

$$(2\gamma - 2 - b_1)(b_1 - 2) + 2(b_1 - \gamma + 1)(b_1 - 1) = b_1(b_1 - 2).$$

Противоречие. Утверждение 2) доказано.

Ввиду утверждения 2) получим $x_{ij} \in \Delta_{w_i}$ для $j \neq i$. Отсюда $\Delta_{w_i} = \{u\} \cup \{x_{ij} \mid j \neq i\}$. Следовательно, $X_{\delta-1} - [w_i] = \Sigma_{w_i}$.

ЛЕММА 28. Подграф $\{u\} \cup X_{\delta-2} \cup \Delta$ является дополнительным к сильно регулярному графу степени δ с $\lambda = 0$, $\mu = 2$ и $\delta = t^2 + 1$ для некоторого натурального числа t , не кратного 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\Sigma_i = \Sigma_{w_i}$. Выберем отличную от w_1, w_2 вершину d из $\Delta_{x_{12}}$. Тогда $d \in [u]$ и $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \subset [d]$. Если $d \in X_{\delta-1}$, то ввиду леммы 27 получим $d \notin \Delta_{w_1}$, поэтому Σ_1 не содержится в $[d]$. Противоречие. Если $d \in X_\delta$, то снова $d \notin \Delta_{w_1}$ и Σ_1 не содержится в $[d]$. Значит, $\Delta_{x_{12}} - \{w_1, w_2\} \subset X_{\delta-2}$ и $d = x_{ij}$ для подходящих $i, j \in \{3, \dots, \delta\}$.

На множестве вершин графа Γ определим граф Λ , считая вершины x, y смежными, только если $y \in \Delta_x$. Тогда подграф $\{u\} \cup X_{\delta-2} \cup \Delta$ является связной компонентой графа Λ , имеющей параметры дополнительного графа к сильно регулярному графу степени δ при $\lambda = 0$, $\mu = 2$.

Пусть Ω является сильно регулярным графом с параметрами $(v, k, 0, 2)$. Используя равенство $(\lambda - \mu)^2 + 4(k - \mu) = n^2$, получим $n^2 = 4k - 4$, поэтому $n = 2u$, $k = u^2 + 1$, $n - t = u - 1$, $-t = -u - 1$. Из прямоугольного соотношения $k(k - \lambda - 1) = \mu(v - k - 1)$ находим $v = (u^4 + 3u^2 + 4)/2$. Кратность собственного значения $n - t$ равна

$$f = (m - 1)k(k + m)/(n\mu) = u(u^2 + 1)(u^2 + u + 2)/(4u).$$

Следовательно, u нечетно или $u \equiv 2(4)$. Таким образом, $\delta = t^2 + 1$ для некоторого натурального числа t , не кратного 4. Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 2. Ввиду леммы 28 множество вершин графа Γ разбивается подграфами, дополнительными к сильно регулярным графам с параметрами $((\delta^2 + \delta + 2)/2, \delta, 0, 2)$. Пусть $d \in X_\delta$. Тогда $\Gamma - (d^\perp \cup w_1^\perp)$ содержит по вершине из $X_{\delta-2}$ и $X_{\delta-1}$. Поэтому $\bigcup\{\Sigma_x \mid x \in X_{\delta-2}\} = X_\delta$, и по лемме 23 получим

$$\binom{\delta}{2}(b_1 + 2 - \delta) = (b_1 + 2 - \delta)(\gamma - \delta)/2.$$

Отсюда $\gamma = \delta^2$, по лемме 27 имеем $rs = b_1 + 2 - \delta$ и $s = b_1 + 2 - \delta^2$. Таким образом, $(r - 1)s = \delta(\delta - 1)$ и $2k = (\delta + \delta^2)b_1 + \delta + 2\delta^2 - \delta^3$. Теорема 2 доказана.

§ 5. Доказательство следствия 2

Пусть Γ — неполный связный реберно регулярный граф с параметрами (v, k, λ) , $\lambda \geq k + 1/2 - \sqrt{2k + 8}$ (равносильно, $2k \geq b_1^2 + 3b_1 - 4$) и Γ не является дополнительным графом для сильно регулярного графа с $\bar{\mu} \leq 2$.

ЛЕММА 29. *Выполнены следующие утверждения:*

- 1) *если $b_1 \leq 3$, то Γ является n -угольником, $n \geq 6$, тривалентным графом без треугольников или реберным графом тривалентного графа без треугольников, графом икосаэдра, треугольным графом $T(6)$ или графом Клебша;*
- 2) *если $k < 3b_1$, то $b_1 \leq 3$;*
- 3) *если $b_1 > 2$, то диаметр Γ равен 2 и либо $v \leq 2k - 2$, либо Γ — треугольный граф $T(6)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $b_1 = 1$, то Γ является многоугольником или полным многодольным графом $K_{r \times 2}$. В последнем случае, а также если $n \leq 5$, получим противоречие с выбором Γ .

Если $b_1 = 2$, то $k \geq 3$ и ввиду предложения 1 граф Γ является тривалентным графом без треугольников или реберным графом тривалентного графа без треугольников, графом икосаэдра, треугольным графом $T(5)$ или полным многодольным графом $K_{r \times 3}$. Однако в последних двух случаях граф $\bar{\Gamma}$ является сильно регулярным и $\bar{\mu} \leq 1$. Противоречие.

Если $b_1 = 3$, то $k \geq 7$ и ввиду предложения 2 граф Γ является полным многодольным графом $K_{r \times 4}$, $r \geq 3$, треугольным графом $T(6)$ или графом Клебша. Если $b_1 = 4$, то $k \geq 12$ и ввиду предложения 3 граф Γ является полным многодольным графом $K_{r \times 5}$. Противоречие с выбором Γ .

Если $k < 3b_1$, то $b_1^2 - 3b_1 - 4 < 0$ и $b_1 \leq 3$. Утверждения 1) и 2) доказаны.

Если $b_1 = 3$, то диаметр Γ равен 2 и либо $v \leq 2k - 2$, либо Γ — треугольный граф $T(6)$. Если же $b_1 \geq 4$, то по утверждению 2) получим $k \geq 3b_1$, поэтому в силу [1, лемма 1.4.2] диаметр Γ равен 2 и $v \leq 2k - 2$.

В следующих леммах предполагается, что $b_1 \geq 5$.

ЛЕММА 30. *Граф $\bar{\Gamma}$ — кореберно регулярный граф и $\bar{\mu} = 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\bar{\mu} > 2$, то ввиду утверждения 2) теоремы 1 получим $\lambda < k + 3/2 - \sqrt{3k}$. Тогда $3k \leq b_1^2 + 5b_1 + 6$, поэтому $b_1^2 - b_1 - 24 \leq 0$ и $b_1 = 5$. В силу утверждения 1) теоремы 1 получим $\bar{\mu} = 3$.

Далее, $k \geq 18$ и ввиду леммы 29 имеем $k \leq 20$. Если $k = 20$, то $\lambda = 14$ и $v = 29$. Противоречие с тем, что $vk\lambda$ делится на 3. Если $k = 19$, то $\lambda = 13$. Противоречие с тем, что $k\lambda$ четно. Значит, $k = 18$, $\lambda = 12$ и $v = 27$. Однако в этом случае для любой вершины u подграф $\Gamma_2(u)$ содержит шесть вершин, смежных с 11 вершинами из $[u]$, и две вершины, смежные с 12 вершинами из $[u]$. Противоречие с предложением 5.

Для вершины u графа Γ положим $\Delta_u = \{w \in \Gamma_2(u) \mid \mu(u, w) = k - b_1 - 1\}$, $\Sigma_u = \Gamma_2(u) - \Delta_u$. Зафиксируем вершину u и положим $\Delta = \Delta_u$, $\delta = |\Delta|$, $\Sigma = \Sigma_u$, X_i – множество вершин из $[u]$, смежных с i вершинами из Δ , и x_{ij} – вершина из $[u]$, не смежная ни с w_i , ни с w_j .

ЛЕММА 31. *Выполнены следующие утверждения:*

- 1) *если Γ принадлежит $\text{MP}(\omega)$, то $\omega = 6, 8$;*
- 2) *если Γ не принадлежит $\text{MP}(\omega)$, то $k = (b_1^2 + 3b_1 - 4)/2$ и Σ является геодезическим 3-путем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Γ принадлежит $\text{MP}(\omega)$. Тогда $b_1 = 3\omega/2 - 3$ и $k = \omega^2 - 3\omega/2$. Отсюда $\omega = 2(b_1 - 3)/3$, $k = (4b_1^2 + 15b_1 + 9)/9$ и $b_1^2 - 3b_1 - 54 \leq 0$. Поэтому $b_1 = 6, 8$. Утверждение 1) доказано.

Пусть Γ не принадлежит $\text{MP}(\omega)$. Ввиду предложения 5 подграф Σ не является кокликкой. Поскольку $(b_1 + 2)(k - b_1 - 1) - kb_1 = 2k - (b_1 + 2)(b_1 + 1)$, то

$$\sum_{x \in \Sigma} (\mu(u, x) - (k - b_1 - 1)) \leq 6.$$

Если $\mu(u, w) = k - b_1$ для любой вершины $w \in \Sigma$, то $\Sigma = K_{2,2}$ или $K_{3 \times 2}$. По теореме 2 получим $(r - 1)s = \delta(\delta - 1)$, поэтому $\delta = r = s = 2$, $k = 13$ и $v = 20$. Противоречие с тем, что $s + 1 = 3$ не делит rv .

Значит, $\Gamma_2(u)$ содержит такую вершину w , что $\mu(u, w) = k - b_1 + i$, $i \geq 1$. Поскольку $\sum_{x \in \Sigma} (\mu(u, x) - (k - b_1 - 1)) \leq 6$, то $i = 1$ и $\Gamma_2(u) - w^\perp$ содержит две вершины y, z . Если вершины y, z несмежны, то $\mu(u, y) = \mu(u, z) = k - b_1 + 1$ и $\Sigma = \{w, y, z\}$ является кокликкой. Противоречие. Значит, можно считать, что $\mu(u, y) = k - b_1$. Тогда $\Gamma - (u^\perp \cup y^\perp)$ содержит единственную вершину w , и по лемме 1 получим $\mu(u, w) = \mu(y, w)$. В этом случае число ребер между $[w]$ и $\Gamma_2(w)$ не меньше $2(k - b_1 + 1) + b_1(k - b_1 - 1) + 2$. Отсюда $k = (b_1^2 + 3b_1 - 4)/2$ и Σ является геодезическим 3-путем $wxyz$. Лемма доказана.

Завершим доказательство следствия 2. Ввиду леммы 31 получим, что Σ является геодезическим 3-путем $wxyz$. Пусть o – единственная вершина из $[u]$, не смежная с x, y . Из доказательства леммы 31 следует, что $\mu(w, y) = \mu(x, z) = k - b_1 + 1$. Поэтому $\mu(o, x) = \mu(o, y) = k - b_1$ и четверка $\{o, u, x, y\}$ однозначно восстанавливается по любой ее вершине. Таким образом, $v = (b_1^2 + 6b_1 + 2)/2$ должно делиться на 4. Противоречие. Следствие 2 доказано.

Список литературы

1. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
2. *Erickson M., Fernando S., Haemers W., Hardy D., Hemmeter J.* Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs // J. Comb. Designs. 1999. V. 7. P. 395–405.
3. *Махнев А. А., Минакова И. М.* Об одном классе реберно регулярных графов // Изв. Гомельского гос. ун-та. Вопросы алгебры. 2000. Т. 3 (16). С. 145–154.
4. *Махнев А. А., Веденев А. А., Кузнецов А. Н., Носов В. В.* О хороших парах в реберно регулярных графах // Дискрет. матем. 2003. Т. 15. С. 77–97.
5. *Махнев А. А.* О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ -подграфы // Дискр. анализ и исслед. операций. 1996. Т. 3. № 3. С. 71–83.

Институт математики и механики УрО РАН
г. Екатеринбург
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

Поступило в редакцию
09.01.2001