Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Никулин, Константа переноса для арифметических гиперболических групп отражений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 5, 103–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4697>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:52:58

УДК 512.817.72+512.817.6+511.6

В. В. Никулин

Константа переноса для арифметических гиперболических групп отражений

При использовании результатов и методов из работ автора [1], [2] степень основного поля арифметической гиперболической группы отражений в размерностях $n \geq 6$ оценивается сверху числом 25; в размерностях 3, 4, 5 – числом 44. Это существенно улучшает оценки, полученные автором в [2]–[4]. Дополнительно при использовании полученных недавно результатов из работы [5] и сообщения [6] последние оценки могут быть улучшены до 35. Приведен обзор и коррективы результатов из [1, § 1].

Библиография: 24 наименования.

Ключевые слова: группа, порожденная отражениями, арифметическая группа, гиперболическое пространство, числовое поле, поле определения, квадратичная форма.

Посвящается памяти В. И. Арнольда

§ 1. Введение

Константа переноса была введена в работе автора [1] (1981 г.) и обозначена как $N(14)$. Она равна максимальной степени основных полей V -арифметических связанных реберных графов минимальности 14 с четырьмя вершинами. В [1] было показано, что число таких полей конечно и $N(14)$ – конечная эффективная константа, а также что степень основных полей арифметических гиперболических групп отражений в размерностях $n \geq 10$ (гиперболического пространства) оценивается сверху числом $N(14)$.

В работе автора [2] показано, что степень основных полей арифметических гиперболических групп отражений в размерностях $n \geq 6$ оценивается сверху максимумом из чисел $N(14)$ и 11 (здесь 11 – число, которым оцениваются сверху степени основных полей плоских гиперболических групп отражений с четырехугольным фундаментальным многоугольником минимальности 14). В [7] мы показали, что степень основных полей арифметических гиперболических групп отражений оценивается сверху максимумом из $N(14)$ и степеней основных полей арифметических гиперболических групп отражений в размерностях $n = 2, 3$. В общем, константа переноса $N(14)$ фундаментальна, так как если степень основного поля арифметической гиперболической группы отражений больше, чем $N(14)$, то данное поле совпадает с основным полем некоторых специальных плоских групп отражений (см. [1]–[4], [7]).

В [2] утверждалось, что $N(14) \leq 56$. Используя аналогичные, но более сложные рассуждения, здесь мы показываем, что $N(14) \leq 25$.

Работа выполнена при финансовой поддержке EPSRC, Великобритания (грант EP/D061997/1).

Как приложения данных результатов и методов (см. § 5), мы также показываем, что степень основных полей арифметических гиперболических групп отражений в размерностях $n \geq 6$ оценивается сверху числом 25; в размерностях $n = 3, 4, 5$ – числом 44. Данные оценки существенно лучше, чем в работах [2]–[4]. Отметим, что это также дает другое доказательство конечности в размерности $n = 3$, отличное от первого доказательства И. Агола [8].

М. Белолипецкий в работе [5], используя результаты [8], получил оценку сверху числом 35 для размерности $n = 3$. К. Маклахлан в работе [6] получил оценку сверху числом 11 для размерности $n = 2$. При использовании этих оценок и результатов из [7] вышеприведенная оценка сверху числом 44 в размерностях $n = 4, 5$ также может быть улучшена до 35.

Данные результаты и развитые методы будут важны для дальнейшей классификации арифметических гиперболических групп отражений (см. пример в теореме 5.6).

В § 6 приведены обзор и коррективы результатов из [1, § 1], важных для наших методов (см. также замечание 5.1).

Автор благодарен профессору К. Маклахлану за письмо с препринтом его новых результатов [6].

Предварительный вариант настоящей работы вначале был опубликован как препринт [9].

§ 2. Обзор некоторых основных фактов о гиперболических фундаментальных многогранниках

В настоящем параграфе мы напомним основные определения и результаты о фундаментальных многогранниках (всегда для дискретных групп отражений) в гиперболических пространствах и их матрицах Грама (см. [1], [10]–[12]).

Мы рассматриваем модель Клейна гиперболического пространства $\mathcal{L}$, ассоциированную с гиперболической формой Φ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ сигнатуры $(1, n)$, где $n = \dim \mathcal{L}$. Пусть $V = \{x \in \Phi \mid x^2 > 0\}$ – конус, задаваемый формой Φ , и V^+ – пола этого конуса. Тогда $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi) = V^+/\mathbb{R}^+$ – множество лучей полу V^+ ; через $[x]$ обозначается элемент пространства $\mathcal{L}$, определяемый лучом $\mathbb{R}^+x$, $x \in V^+$, где $\mathbb{R}^+$ – множество положительных действительных чисел. Гиперболическое расстояние задается формулой

$$\text{ch}(\rho([x], [y])) = \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2 y^2}}, \quad [x], [y] \in \mathcal{L},$$

что дает кривизну -1 пространства $\mathcal{L}$.

Каждое полупространство $\mathcal{H}^+$ в $\mathcal{L}$ определяет и определяется ортогональным элементом $e \in \Phi$ с квадратом $e^2 = -2$:

$$\mathcal{H}^+ = \mathcal{H}_e^+ = \{[x] \in \mathcal{L} \mid x \cdot e \geq 0\}.$$

Оно ограничено гиперплоскостью

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_e = \{[x] \in \mathcal{L} \mid x \cdot e = 0\},$$

ортогональной e . Если два полупространства $\mathcal{H}_{e_1}^+$, $\mathcal{H}_{e_2}^+$, $e_1^2 = e_2^2 = -2$, имеют общее непустое открытое подмножество в $\mathcal{L}$, то $\mathcal{H}_{e_1}^+ \cap \mathcal{H}_{e_2}^+$ – угол ϕ такой, что

$2 \cos \phi = e_1 \cdot e_2$, если $-2 < e_1 \cdot e_2 \leq 2$, и расстояние между гиперплоскостями $\mathcal{H}_{e_1}$ и $\mathcal{H}_{e_2}$ равно числу ρ такому, что $2 \operatorname{ch} \rho = e_1 \cdot e_2$, если $e_1 \cdot e_2 > 2$.

Выпуклый многогранник $\mathcal{M}$ в $\mathcal{L}$ является пересечением конечного числа полупространств $\mathcal{H}_e^+$, $e \in P(\mathcal{M})$, где $P(\mathcal{M})$ – все векторы с квадратом -2 , ортогональные граням (корамерности 1) многогранника $\mathcal{M}$ и направленные наружу. Матрица

$$A = (a_{ij}) = (e_i \cdot e_j), \quad e_i, e_j \in P(\mathcal{M}), \quad (2.1)$$

называется *матрицей Грама* $\Gamma(\mathcal{M}) = \Gamma(P(\mathcal{M}))$ многогранника $\mathcal{M}$. Она однозначно определяет $\mathcal{M}$ с точностью до движений пространства $\mathcal{L}$. Если многогранник $\mathcal{M}$ достаточно общий, то $P(\mathcal{M})$ порождает форму

$$\Phi = \sum_{e_i, e_j \in P(\mathcal{M})} a_{ij} X_i Y_j \mod \operatorname{Ker}, \quad (2.2)$$

где множество $P(\mathcal{M})$ естественно отождествляется с подмножеством формы Φ и задает $\mathcal{M}$.

Многогранник $\mathcal{M}$ является фундаментальным многогранником (или фундаментальной камерой) для дискретной группы отражений W в $\mathcal{L}$, если и только если для всех $i \neq j$ выполнено $a_{ij} \geq 0$ и $a_{ij} = 2 \cos \frac{\pi}{m_{ij}}$, где $m_{ij} \geq 2$ – натуральное число, при $a_{ij} < 2$. Симметрические действительные матрицы A , удовлетворяющие этим условиям и имеющие все диагональные элементы, равные -2 , называются *фундаментальными* (тогда множество $P(\mathcal{M})$ формально соответствует множеству индексов матрицы A). Как обычно, далее мы отождествляем фундаментальные матрицы с фундаментальными графами Γ . Их вершины соответствуют элементам $P(\mathcal{M})$. Две различные вершины $e_i \neq e_j \in P(\mathcal{M})$ соединяются *тонким ребром* натурального веса $m_{ij} \geq 3$, если $0 < a_{ij} = 2 \cos \frac{\pi}{m_{ij}} < 2$, *толстым ребром*, если $a_{ij} = 2$, и *пунктирным ребром* веса a_{ij} , если $a_{ij} > 2$. В частности, вершины e_i и e_j не соединяются ребром, если и только если $e_i \cdot e_j = a_{ij} = 2 \cos \frac{\pi}{2} = 0$ (эквивалентно, e_i и e_j перпендикулярны или ортогональны). Примеры таких графов приведены на рис. 1–8 далее.

Для действительного $t > 0$ фундаментальная матрица $A = (a_{ij})$ (и соответствующий фундаментальный многогранник $\mathcal{M}$) имеет *минимальность* t , если $a_{ij} < t$ для всех a_{ij} . Здесь мы следуем работам [1] и [12]. Минимальность $t = 14$ будет особенно важна в настоящей работе.

Известно, что фундаментальные области арифметических гиперболических групп должны иметь конечный объем. Предположим, что это верно для фундаментального многогранника дискретной гиперболической группы отражений. Э.Б. Винберг показал в [10], что для того, чтобы $\mathcal{M}$ был фундаментальным многогранником арифметической группы отражений W в $\mathcal{L}$, необходимо и достаточно, чтобы все циклические произведения

$$b_{i_1 \dots i_m} = a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{m-1} i_m} a_{i_m i_1} \quad (2.3)$$

были целыми алгебраическими числами, поле $\tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{Q}(\{a_{ij}\})$ было чисто вещественным и для любого вложения $\tilde{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbb{R}$, не тождественного на *основном поле* $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\{b_{i_1 \dots i_m}\})$, порожденном всеми циклическими произведениями (2.3), форма (2.2) была отрицательно определена.

Фундаментальные вещественные матрицы $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = e_i \cdot e_j$, $e_i, e_j \in P(\mathcal{M})$ (или соответствующие графы), с гиперболической формой Φ в (2.2), удовлетворяющие данным условиям Винберга, будут называться *V-арифметическими* (здесь мы не требуем, чтобы соответствующий многогранник $\mathcal{M}$ имел конечный объем). Хорошо известно (и легко видеть; см. рассуждения, приведенные в § 4), что всякое подмножество $P \subset P(\mathcal{M})$ также определяет V-арифметическую матрицу $(e_i \cdot e_j)$, $e_i, e_j \in P$, с тем же самым основным полем $\mathbb{K}$, если подмножество P гиперболично, т.е. соответствующая P форма (2.2) гиперболична.

§ 3. V-арифметические реберные многогранники

Фундаментальный многогранник $\mathcal{M}$ (соответствующая матрица Грама A или граф) называется *реберным многогранником* (матрицей или графом), если все гиперплоскости $\mathcal{H}_e$, $e \in P(\mathcal{M})$, содержат одну из двух различных вершин v_1, v_2 одномерного ребра $v_1 v_2$ многогранника $\mathcal{M}$. Предположим, что обе вершины v_1 и v_2 конечны (далее мы рассматриваем только этот случай). Назовем такие реберные многогранники *конечными*. Предположим, что $\dim \mathcal{L} = n$. Тогда $P(\mathcal{M})$ состоит из $n + 1$ элементов: e_1, e_2 и $n - 1$ элементов $P(\mathcal{M}) - \{e_1, e_2\}$. Здесь $P(\mathcal{M}) - \{e_1, e_2\}$ соответствует гиперплоскостям, содержащим ребро $v_1 v_2$ многогранника $\mathcal{M}$. Элемент e_1 соответствует гиперплоскостям, содержащим v_1 и не содержащим v_2 . Элемент e_2 соответствует гиперплоскостям, содержащим v_2 и не содержащим v_1 . Тогда множество $P(\mathcal{M})$ гиперболично (имеет гиперболическую матрицу Грама), но его подмножества $P(\mathcal{M}) - \{e_1\}$ и $P(\mathcal{M}) - \{e_2\}$ отрицательно определены (они имеют отрицательно определенную матрицу Грама) и задают графы Коксетера. Только элемент $u = e_1 \cdot e_2$ матрицы Грама многогранника $\mathcal{M}$ может быть больше, чем 2. Таким образом, $\mathcal{M}$ имеет минимальность $t > 2$, если и только если $u = e_1 \cdot e_2 < t$.

В силу данных рассуждений граф Грама $\Gamma(P(\mathcal{M}))$ реберного многогранника $\mathcal{M}$ имеет ровно одну гиперболическую компоненту связности $P(\mathcal{M})^{\text{hyp}}$ (содержащую e_1 и e_2) и несколько отрицательно определенных компонент связности. Матрица Грама $\Gamma(P(\mathcal{M})^{\text{hyp}})$, очевидно, соответствует реберному многограннику размерности $\#P(\mathcal{M})^{\text{hyp}} - 1$. Если $\mathcal{M}$ является V-арифметическим, то основное поле $\mathbb{K}$ многогранника $\mathcal{M}$ то же, что и для гиперболической компоненты связности $\Gamma(P(\mathcal{M})^{\text{hyp}})$.

ТЕОРЕМА 3.1 [1, теорема 2.3.1]. *Для заданного $t > 0$ существует эффективная константа $N(t)$ такая, что всякий V-арифметический реберный многогранник минимальности t с основным полем $\mathbb{K}$ степени, большей $N(t)$, над $\mathbb{Q}$ имеет гиперболическую компоненту связности его графа Грама, содержащую менее четырех вершин.*

Из доказательства данной теоремы в [1] (и в [12]) также вытекает, что множество возможных основных полей $\mathbb{K}$ гиперболических компонент связности с по крайней мере четырьмя вершинами V-арифметических реберных многогранников минимальности t конечно. Более того, множество графов Грама $\Gamma(P(\mathcal{M})^{\text{hyp}})$ минимальности t с фиксированными по крайней мере четырьмя вершинами конечно. Учитывая это и следуя [2], ниже мы приведем более простое определение констант $N(t)$, $t > 0$, и $N(14)$.

3.1. Арифметические ланнеровские графы, имеющие по крайней мере четыре вершины. Напомним, что ланнеровские графы – это графы Грама ограниченных фундаментальных гиперболических симплексов. Они характеризуются как гиперболические фундаментальные графы такие, что любой их собственный подграф является графом Коксетера. Их классификация

Рис. 1. Арифметические ланнеровские графы, имеющие по крайней мере четыре вершины

получена Ф. Ланнером в [13]. На рис. 1 приведены все арифметические ланнеровские графы, имеющие по крайней мере четыре вершины (только один ланнеровский граф, имеющий по крайней мере четыре вершины, не арифметичен). Как обычно, мы заменяем $(k - 2)$ -кратным ребром тонкое ребро веса k для небольших k . Основные поля ланнеровских графов, имеющих по крайней мере четыре вершины, состоят из трех полей (см. [14]):

$$\mathcal{FL}^4 = \{\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \mathbb{Q}(\sqrt{5})\}. \quad (3.1)$$

3.2. Арифметические треугольные графы. Треугольные графы – это графы Грама ограниченных фундаментальных треугольников на гиперболической плоскости (мы не рассматриваем неограниченные треугольники). Эквивалентно, они являются ланнеровскими графами с тремя вершинами. Треугольные графы приведены на рис. 2, где $k, l, m \geq 2$ и $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} < 1$.

Арифметические треугольники были перечислены в [15]. Все ограниченные арифметические треугольники задаются следующими тройками (k, l, m) (пред-

Рис. 2. Треугольные графы

полагается, что $k \leq l \leq m$):

(2, 3, 7 – 12), (2, 3, 14), (2, 3, 16), (2, 3, 18), (2, 3, 24), (2, 3, 30), (2, 4, 5 – 8),
 (2, 4, 10), (2, 4, 12), (2, 4, 18), (2, 5, 5), (2, 5, 6), (2, 5, 8), (2, 5, 10), (2, 5, 20),
 (2, 5, 30), (2, 6, 6), (2, 6, 8), (2, 6, 12), (2, 7, 7), (2, 7, 14), (2, 8, 8), (2, 8, 16),
 (2, 9, 18), (2, 10, 10), (2, 12, 12), (2, 12, 24), (2, 15, 30), (2, 18, 18),
 (3, 3, 4 – 9), (3, 3, 12), (3, 3, 15), (3, 4, 4), (3, 4, 6), (3, 4, 12),
 (3, 5, 5), (3, 6, 6), (3, 6, 18), (3, 8, 8), (3, 8, 24), (3, 10, 30), (3, 12, 12),
 (4, 4, 4 – 6), (4, 4, 9), (4, 5, 5), (4, 6, 6), (4, 8, 8), (4, 16, 16),
 (5, 5, 5), (5, 5, 10), (5, 5, 15), (5, 10, 10), (6, 6, 6), (6, 12, 12),
 (6, 24, 24), (7, 7, 7), (8, 8, 8), (9, 9, 9), (9, 18, 18), (12, 12, 12), (15, 15, 15).

Их основные поля найдены в [16]. Они дают множество полей

$$\begin{aligned} \mathcal{FT} = \{ \mathbb{Q} \} \cup \{ \mathbb{Q}(\sqrt{a}) \mid a = 2, 3, 5, 6 \} \cup \{ \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \} \\ \cup \left\{ \mathbb{Q} \left(\cos \frac{2\pi}{b} \right) \mid b = 7, 9, 11, 15, 16, 20 \right\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

3.3. V-арифметические конечные реберные графы с четырьмя вершинами для $2 < u < 14$. Используя классификацию графов Коксетера, легко нарисовать все возможные конечные реберные графы $\Gamma^{(4)}$ с четырьмя вершинами и $u = e_1 \cdot e_2 > 2$, которые соответствуют всем трехмерным конечным фундаментальным реберным многогранникам со связным графом Грама и $u > 2$. Они приведены на рис. 3 и дают пять типов графов $\Gamma^{(4)} = \Gamma_i^{(4)}$, $1 \leq i \leq 5$. Все возможные натуральные параметры $s, k, r, p \geq 2$ для таких графов могут быть легко перечислены при использовании того, что $\Gamma^{(4)} - \{e_1\}$ и $\Gamma^{(4)} - \{e_2\}$ – графы Коксетера. Они будут даны в § 4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Для $1 \leq i \leq 5$ и $t > 0$ через $\Gamma_i^{(4)}(t)$ обозначается множество всех V-арифметических конечных реберных графов с четырьмя вершинами $\Gamma_i^{(4)}$ минимальности t , т. е. для $2 < u < t$, и через $\mathcal{FT}_i^{(4)}(t)$ обозначается множество основных полей всех таких графов.

Все V-арифметические графы $\Gamma_i^{(4)}$ для $2 < u < t$ дают частные случаи графов V-арифметических гиперболических реберных многогранников с гиперболической компонентой связности, имеющей четыре вершины и минимальность t . Таким образом, по теореме 3.1 степень (над $\mathbb{Q}$) основных полей

Рис. 3. Пять графов $\Gamma_i^{(4)}$, $1 \leq i \leq 5$

из $\mathcal{F}\Gamma_i^{(4)}(t)$ ограничена эффективной константой $N(t)$. Отсюда следует, что множества V -арифметических графов $\Gamma_i^{(4)}(t)$ и полей $\mathcal{F}\Gamma_i^{(4)}(t)$ также конечны.

Обратно, теорема 3.1 вытекает из конечности данных множеств полей в силу следующего простого утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Основное поле любого V -арифметического гиперболического реберного многогранника минимальности $t > 0$ с гиперболической компонентой связности ее графа Грама, имеющей по крайней мере четыре вершины, принадлежит одному из конечных множеств полей $\mathcal{F}L^4$, $\mathcal{F}T$ или $\mathcal{F}\Gamma_i^{(4)}(t)$, $1 \leq i \leq 5$. В частности, теорема 3.1 эквивалентна конечности множеств полей $\mathcal{F}\Gamma_i^{(4)}(t)$, $1 \leq i \leq 5$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [2].

Степени полей из $\mathcal{F}L^4$ и $\mathcal{F}T$ ограничены сверху числами 2 и 5 соответственно.

В теории арифметических гиперболических групп отражений особенно важна минимальность $t = 14$. Используя те же методы, что и для доказательства теоремы 3.1 в [1], мы доказываем следующие явные оценки сверху, которые улучшают оценки сверху из [2] (например, в [2] утверждалось только, что $N(14) \leq 56$).

ТЕОРЕМА 3.2. *Степени полей из $\mathcal{F}\Gamma_1^{(4)}(14)$ и $\mathcal{F}\Gamma_2^{(4)}(14)$ ограничены (не больше) числом 23. Степени полей из $\mathcal{F}\Gamma_3^{(4)}(14)$, $\mathcal{F}\Gamma_4^{(4)}(14)$, $\mathcal{F}\Gamma_5^{(4)}(14)$ ограничены числом 25. Таким образом, в качестве константы $N(14)$ теоремы 3.1 можно взять число $N(14) = 25$ (или $N(14) \leq 25$).*

Доказательство теоремы 3.2 будет приведено в следующем параграфе.

§ 4. Основные поля V -арифметических связных конечных реберных графов, имеющих четыре вершины и минимальность 14

В настоящем параграфе мы получим явные оценки сверху степеней полей из конечных множеств $\mathcal{F}\Gamma_i^{(4)}(14)$, $1 \leq i \leq 5$ (см. определение 3.1), и докажем теорему 3.2. Кроме того, наши рассуждения дают важную информацию о данных множествах полей.

4.1. Некоторые результаты о гиперболических числах. Как и при доказательстве теоремы 3.1 из [1], используются следующие общие результаты из [1, § 1] (см. их обзор и некоторые коррективы далее, в дополнении, § 6).

ТЕОРЕМА 4.1 [1, теорема 1.2.1]. Пусть $\mathbb{F}$ – чисто вещественное поле алгебраических чисел и каждому вложению $\sigma: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ соответствует отрезок $[a_\sigma, b_\sigma]$ в $\mathbb{R}$, причем

$$\prod_{\sigma} \frac{b_{\sigma} - a_{\sigma}}{4} < 1.$$

Кроме того, пусть фиксированы натуральное число m и отрезки $[s_1, t_1], \dots, [s_m, t_m]$ в $\mathbb{R}$. Тогда существует константа $N(s_i, t_i)$ такая, что если α – чисто вещественное целое алгебраическое число, удовлетворяющее для всех вложений $\tau: \mathbb{F}(\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ неравенствам

$$\begin{aligned} s_i &\leq \tau(\alpha) \leq t_i, & \tau &= \tau_1, \dots, \tau_m, \\ a_{\tau|\mathbb{F}} &\leq \tau(\alpha) \leq b_{\tau|\mathbb{F}}, & \tau &\neq \tau_1, \dots, \tau_m, \end{aligned}$$

то

$$[\mathbb{F}(\alpha) : \mathbb{F}] \leq N(s_i, t_i).$$

ТЕОРЕМА 4.2 [1, теорема 1.2.2]. При условиях теоремы 4.1 в качестве $N(s_i, t_i)$ можно взять $N(s_i, t_i) = N$, где N – наименьшее натуральное решение неравенства

$$N \ln \frac{1}{R} - M \ln(2N + 2) - \ln B \geq \ln S. \quad (4.1)$$

Здесь

$$M = [\mathbb{F} : \mathbb{Q}], \quad B = \sqrt{|\text{discr} \mathbb{F}|}, \quad (4.2)$$

$$R = \sqrt{\prod_{\sigma} \frac{b_{\sigma} - a_{\sigma}}{4}}, \quad S = \prod_{i=1}^m \frac{2er_i}{b_{\sigma_i} - a_{\sigma_i}}, \quad (4.3)$$

где

$$\sigma_i = \tau_i | \mathbb{F}, \quad r_i = \max\{|t_i - a_{\sigma_i}|, |b_{\sigma_i} - s_i|\}. \quad (4.4)$$

Отметим, что доказательства теорем 4.1, 4.2 используют вариант теоремы Фекете (1923 г.) о существовании ненулевых многочленов над $\mathbb{Z}$ ограниченной степени, которые мало отличаются от нуля на подходящих интервалах (см. [1, теорема 1.1.1], а также обзор и некоторые коррективы в дополнении, § 6, теоремы 6.1, 6.2).

К сожалению, теоремы 4.1, 4.2 обычно дают плохую оценку степени. Их следует рассматривать, главным образом, как теоремы существования, показывающие, что степень ограничена, и представляющие некоторую явную оценку степени. Чтобы получить хорошую оценку степени в аналогичных случаях, в настоящей работе мы используем подходящие явные многочлены. В этом заключается коренное отличие настоящей работы от предыдущих работ автора на аналогичную тему.

Мы используем следующее утверждение. Аналогичные аргументы используются при доказательстве теорем 4.1, 4.2 (см. дополнение, § 6).

ЛЕММА 4.1. Пусть $\mathbb{F}$ – чисто вещественное поле алгебраических чисел, и пусть каждому вложению $\sigma: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ соответствует отрезок $[a_\sigma, b_\sigma]$ в $\mathbb{R}$. Кроме того, пусть фиксированы натуральное число m и отрезки $[s_1, t_1], \dots, [s_m, t_m]$ в $\mathbb{R}$. Пусть $P(x)$ – ненулевой многочлен над кольцом целых поля $\mathbb{F}$,

$$\delta(\sigma) = \max_{x \in [a_\sigma, b_\sigma]} |P^\sigma(x)|, \quad \sigma: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R},$$

и $a_i = \max_{x \in [s_i, t_i]} |P^{\sigma_i}(x)|$, где $\sigma_i = \tau_i|_{\mathbb{F}}$ (см. ниже). Предположим, что $\prod_{\sigma} \delta(\sigma) < 1$. Пусть α – чисто вещественное целое алгебраическое число такое, что для всех вложений $\tau: \mathbb{F}(\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} s_i &\leq \tau(\alpha) \leq t_i, & \tau &= \tau_1, \dots, \tau_m, \\ a_{\tau|_{\mathbb{F}}} &\leq \tau(\alpha) \leq b_{\tau|_{\mathbb{F}}}, & \tau &\neq \tau_1, \dots, \tau_m. \end{aligned}$$

Тогда имеет место следующая оценка степени $[\mathbb{F}(\alpha) : \mathbb{F}]$:

$$1 \leq [\mathbb{F}(\alpha) : \mathbb{F}] \leq \frac{\ln \prod_i a_i - \ln \prod_i \delta(\sigma_i)}{-\ln \prod_{\sigma} \delta(\sigma)},$$

если $P(\alpha) \neq 0$. Отметим, что α не существует, если правая часть последней оценки меньше 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $P(\alpha) \neq 0$, получаем неравенство

$$\begin{aligned} 1 &\leq |N_{\mathbb{F}(\alpha)/\mathbb{Q}}(P(\alpha))| = \left| \prod_{\tau} \tau(P(\alpha)) \right| = \prod_{\tau} |P^{\tau}(\tau(\alpha))| \\ &= \prod_{\tau \neq \tau_i} |P^{\tau}(\tau(\alpha))| \prod_{i=1}^m |P^{\tau_i}(\tau_i(\alpha))| \leq \prod_{\tau \neq \tau_i} \max_{x \in [a_{\tau|_{\mathbb{F}}}, b_{\tau|_{\mathbb{F}}}] } |P^{\tau}(x)| \prod_{i=1}^m \max_{x \in [s_i, t_i]} |P^{\sigma_i}(x)| \\ &\leq \prod_{\tau} \max_{x \in [a_{\tau|_{\mathbb{F}}}, b_{\tau|_{\mathbb{F}}}] } |P^{\tau}(x)| \frac{\prod_{i=1}^m \max_{x \in [s_i, t_i]} |P^{\sigma_i}(x)|}{\prod_{i=1}^m \max_{x \in [a_{\tau_i|_{\mathbb{F}}}, b_{\tau_i|_{\mathbb{F}}}] } |P^{\tau_i}(x)|} \\ &= \left(\prod_{\sigma} \delta(\sigma) \right)^{[\mathbb{F}(\alpha) : \mathbb{F}]} \frac{\prod_{i=1}^m a_i}{\prod_{i=1}^m \delta(\sigma_i)}. \end{aligned}$$

Взяв логарифм левой и правой частей последней цепочки соотношений и используя то, что $\prod_{\sigma} \delta(\sigma) < 1$, получим утверждение.

Доказательство леммы 4.1 аналогично доказательству теорем 4.1, 4.2 (см. дополнение, § 6), использующему многочлены Фекете.

4.2. Основные поля некоторых V-арифметических связных конечных реберных графов с тремя вершинами и данной минимальностью.

Несмотря на то, что мы главным образом интересуемся связными реберными графами с четырьмя вершинами, некоторые связные реберные графы с тремя вершинами также будут очень важны.

Рис. 4. Связные конечные реберные графы с тремя вершинами

Все связные конечные реберные графы с тремя вершинами приведены на рис. 4: это $\Gamma_1^{(3)}$, где $s, k \geq 3$, и $\Gamma_2^{(3)}$, где $d \geq 3$. Мы обозначаем через $\mathcal{F}\Gamma_1^{(3)}(t)$ и $\mathcal{F}\Gamma_2^{(3)}(t)$ их основные поля для минимальности $t > 2$. Это означает, что $2 < \sigma^{(+)}(u) < t$.

4.2.1. Основные поля графов $\Gamma_2^{(3)}(t)$. Сначала рассмотрим графы $\Gamma_2^{(3)}(t)$. Соответствующая матрица Грама равна

$$\begin{pmatrix} -2 & u & 0 \\ u & -2 & 2 \cos \frac{\pi}{d} \\ 0 & 2 \cos \frac{\pi}{d} & -2 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

где $d \geq 3$ – натуральное и u – чисто вещественное целое алгебраическое число. Основное поле есть $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(u^2, \cos^2 \frac{\pi}{d})$. Определитель $d(u)$ данной матрицы Грама задается равенством

$$\frac{d(u)}{2} = u^2 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{d}.$$

Отсюда следует, что граф $\Gamma_2^{(3)}$ является V-арифметическим с минимальностью $t > 2$, если и только если для $\alpha = u^2$ имеем

$$0 < \sigma(\alpha) < \sigma\left(4 \sin^2 \frac{\pi}{d}\right) \quad (4.6)$$

при всех $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$, отличных от $\sigma^{(+)}$ (т. е. тождественного), и

$$4 < \sigma^{(+)}(\alpha) < t^2. \quad (4.7)$$

Следовательно, $\mathbb{F}_d = \mathbb{Q}(\cos^2 \frac{\pi}{d}) \subset \mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha)$. Нас будут особенно интересовать случаи $t = 14$ и $t = 16$. Оценим степень $n = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$.

Предположим, что $d = 3$. Тогда α удовлетворяет неравенствам

$$0 < \sigma(\alpha) < 3, \quad 4 < \sigma^{(+)}(\alpha) < t^2.$$

Рассмотрим многочлен

$$P(x) = x^3(x-1)^4(x-2)^4(x-3)^3(x^2-3x+1)^3 \quad (4.8)$$

с целыми коэффициентами степени 20. Максимум модуля $|P(x)|$ на отрезке $[0, 3]$ есть

$$\delta = \frac{884736}{9765625} = 0.0905969664.$$

По лемме 4.1 получаем оценку

$$[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 1 + \frac{\ln P(t^2)}{-\ln \delta}.$$

Для $t = 14$ получаем $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 44$, а для $t = 16$ получаем $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 47$. (Теоремы 4.1, 4.2 дают худшие оценки сверху числом 76 для $t = 14$ и числом 78 для $t = 16$.)

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Приведенные выше утверждения о многочлене $P(x)$ одной переменной x легко проверяются с необходимой точностью с помощью компьютера, поскольку многочлены являются простыми функциями для компьютера.

Мы пользовались программой GP/PARI Calculator, version 2.2.13. Эта программа вычисляет производную многочлена (с помощью команды “deriv”) и находит корни многочлена (с помощью команды “polroots”). Таким образом, при использовании стандартного математического анализа все вышеприведенные утверждения о многочлене $P(x)$ легко проверяются. Те же вычисления можно применить для всех многочленов от одной переменной, которые мы рассмотрим далее. Они имеют “разумную” степень и “разумные” коэффициенты.

Пусть $d = 4$. Тогда α удовлетворяет неравенствам

$$0 < \sigma(\alpha) < 2, \quad 4 < \sigma^{(+)}(\alpha) < t^2.$$

Рассмотрим многочлен

$$P(x) = x(x-1)^2(x-2) \quad (4.9)$$

с целыми коэффициентами степени 4. Максимум модуля $|P(x)|$ на отрезке $[0, 2]$ равен $\delta = \frac{1}{4}$. По лемме 4.1 получаем

$$[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 1 + \frac{\ln P(t^2)}{-\ln \delta}.$$

Для $t = 14$ и $t = 16$ получаем $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 16$. (Теоремы 4.1, 4.2 дают только оценку сверху числом 31.)

Пусть $d = 5$. Рассмотрим многочлен

$$P(x) = x(x-1) \left(x + 1 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{5} \right) \left(x - 4 \sin^2 \frac{\pi}{5} \right) \quad (4.10)$$

степени 4 над кольцом целых поля $\mathbb{F}_5$. Максимум модуля $|P(x)|$ на отрезке $[0, 4 \sin^2 \frac{\pi}{5}]$ есть $\delta_1 = 0.04559 \dots$. Для сопряженного многочлена

$$P^\sigma(x) = x(x-1) \left(x+1 - 4 \sin^2 \frac{2\pi}{5} \right) \left(x - 4 \sin^2 \frac{2\pi}{5} \right)$$

максимум модуля $|P^\sigma(x)|$ на сопряженном интервале $[0, 4 \sin^2 \frac{2\pi}{5}]$ есть $\delta_2 = 2.1419 \dots$. Очевидно, $P(\alpha)$ не равно нулю. По лемме 4.1 получаем

$$[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq \frac{\ln P(t^2) - \ln \delta_1}{-\ln(\delta_1 \delta_2)}.$$

Для $t = 14$ и $t = 16$ получаем $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 10$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 20$ соответственно. (Из теорем 4.1, 4.2 имеем только $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 27$ для $t = 14$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 28$ для $t = 16$.)

Пусть $d \geq 6$. Рассмотрим многочлен

$$P(x) = x \left(x - 4 \sin^2 \frac{\pi}{d} \right) \quad (4.11)$$

над кольцом целых поля $\mathbb{F}_d$. Для $\sigma : \mathbb{F}_d \rightarrow \mathbb{R}$ максимум модуля $|P^\sigma(x)|$ на отрезке $[0, \sigma(4 \sin^2 \frac{\pi}{d})]$, очевидно, равен $4\sigma(\sin^4 \frac{\pi}{d})$. Ясно, что $P(\alpha) \neq 0$. Тогда (фактически мы повторяем доказательство леммы 4.1 для этого случая) имеем

$$1 \leq |N_{\mathbb{K}/\mathbb{Q}}(P(\alpha))| < N_{\mathbb{F}_d/\mathbb{Q}} \left(4 \sin^4 \frac{\pi}{d} \right)^{[\mathbb{K}:\mathbb{F}_d]} \frac{|P(t^2)|}{4 \sin^4 \frac{\pi}{d}} = \left(\frac{\gamma(d)^2}{4^{[\mathbb{F}_d:\mathbb{Q}]}} \right)^{[\mathbb{K}:\mathbb{F}_d]} \frac{|P(t^2)|}{4 \sin^4 \frac{\pi}{d}},$$

где для $d \geq 3$ имеем

$$N_{\mathbb{F}_d/\mathbb{Q}} \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{d} \right) = \gamma(d) = \begin{cases} p, & \text{если } d = p^t > 2, \text{ где } p \text{ просто,} \\ 1 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (4.12)$$

и $[\mathbb{F}_d : \mathbb{Q}] = \frac{\varphi(d)}{2}$, где $\varphi(d)$ – функция Эйлера.

Обозначая $m = [\mathbb{K} : \mathbb{F}_d]$, получаем неравенство

$$m(\varphi(d) \ln 2 - 2 \ln \gamma(d)) < \ln t^2 + \ln \left(t^2 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{d} \right) - \ln \left(4 \sin^4 \frac{\pi}{d} \right).$$

Легко видеть, что $\varphi(d) \ln 2 - 2 \ln \gamma(d) > 0$ для $d \geq 6$. Тогда получаем

$$1 \leq m < \frac{\ln t^2 + \ln(t^2 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{d}) - \ln(4 \sin^4 \frac{\pi}{d})}{\varphi(d) \ln 2 - 2 \ln \gamma(d)}. \quad (4.13)$$

Соответственно, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq \frac{m}{2} \varphi(d)$, где m удовлетворяет (4.13).

Воспользуемся тривиальными оценками $\varphi(d) \geq \sqrt{d-2}$ и $\gamma(d) \leq d$. Тогда из соотношения (4.13) получаем, что для $t = 14$ возможны только следующие

$d \geq 6$ с соответствующими оценками для $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$:

$d = 6$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 8$;	$d = 7$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 138$;
$d = 8$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 18$;	$d = 9$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 18$;
$d = 10$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 10$;	$d = 11$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 30$;
$d = 12$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 10$;	$d = 13$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 24$;
$d = 14$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 9$;	$d = 15$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 8$;
$d = 16$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 8$;	$d = 17$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 16$;
$d = 18$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 9$;	$d = 19$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 18$;
$d = 20$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 8$;	$d = 21$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$;
$d = 22$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 10$;	$d = 23$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{23}$;
$d = 24$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$;	$d = 25$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{25}$;
$d = 26$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$;	$d = 27$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{27}$;
$d = 28$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$;	$d = 29$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{29}$;
$d = 30$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$;	$d = 31$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{31}$;
$d = 32$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{32}$;	$d = 33$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{33}$;
$d = 34$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{34}$;	$d = 35$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{35}$;
$d = 36$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$;	$d = 37$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{37}$;
$d = 38$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{38}$;	$d = 39$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{39}$;
$d = 40$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{40}$;	$d = 42$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$;
$d = 44$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{44}$;	$d = 45$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{45}$;
$d = 46$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{46}$;	$d = 48$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{48}$;
$d = 50$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{50}$;	$d = 52$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{52}$;
$d = 54$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{54}$;	$d = 56$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{56}$;
$d = 58$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{58}$;	$d = 60$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{60}$;
$d = 62$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{62}$;	$d = 66$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{66}$;
$d = 70$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{70}$;	$d = 72$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{72}$;
$d = 78$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{78}$;	$d = 80$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{80}$;
$d = 84$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{84}$;	$d = 90$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{90}$;
$d = 96$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{96}$;	$d = 102$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{102}$;
$d = 120$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{120}$.	

Для $t = 16$ возможны только следующие $d \geq 6$ с соответствующими оценками для $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$:

$d = 6$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 8$;	$d = 7$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 144$;
$d = 8$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 18$;	$d = 9$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 21$;
$d = 10$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 10$;	$d = 11$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 30$;
$d = 12$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 10$;	$d = 13$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 24$;
$d = 14$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 9$;	$d = 15$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 8$;
$d = 16$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$;	$d = 17$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 24$;

$d = 18$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$;	$d = 19$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 18$;
$d = 20$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$;	$d = 21$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$;
$d = 22$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 10$;	$d = 23$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{23}$;
$d = 24$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$;	$d = 25$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{25}$;
$d = 26$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$;	$d = 27$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{27}$;
$d = 28$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$;	$d = 29$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{29}$;
$d = 30$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$;	$d = 31$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{31}$;
$d = 32$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{32}$;	$d = 33$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{33}$;
$d = 34$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{34}$;	$d = 35$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{35}$;
$d = 36$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$;	$d = 37$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{37}$;
$d = 38$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{38}$;	$d = 39$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{39}$;
$d = 40$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{40}$;	$d = 42$, тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$;
$d = 44$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{44}$;	$d = 45$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{45}$;
$d = 46$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{46}$;	$d = 48$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{48}$;
$d = 50$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{50}$;	$d = 52$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{52}$;
$d = 54$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{54}$;	$d = 56$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{56}$;
$d = 58$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{58}$;	$d = 60$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{60}$;
$d = 62$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{62}$;	$d = 64$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{64}$;
$d = 66$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{66}$;	$d = 68$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{68}$;
$d = 70$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{70}$;	$d = 72$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{72}$;
$d = 78$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{78}$;	$d = 80$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{80}$;
$d = 84$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{84}$;	$d = 90$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{90}$;
$d = 96$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{96}$;	$d = 102$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{102}$;
$d = 120$, тогда $\mathbb{K} = \mathbb{F}_{120}$.	

Для того чтобы улучшить эти результаты, применим многочлены, подобные тому, который мы использовали для $d = 5$. Для $d \geq 5$ рассмотрим многочлен

$$P(x) = x(x-1) \left(x+1 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{d} \right) \left(x - 4 \sin^2 \frac{\pi}{d} \right) \quad (4.14)$$

над кольцом целых поля $\mathbb{F}_d$. Для $\sigma: \mathbb{F}_d \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим через $\delta(\sigma)$ максимум модуля $|P^\sigma(x)|$ на отрезке $[0, \sigma(4 \sin^2 \frac{\pi}{d})]$ (чтобы найти этот максимум, вычисляются нули производной на данном отрезке). Отметим, что все $\frac{\varphi(d)}{2}$ вложений σ задаются равенством $\sigma(4 \sin^2 \frac{\pi}{d}) = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{d}$, где $1 \leq k \leq \frac{d}{2}$ и $(k, d) = 1$, и $\sigma^{(+)}$ соответствует $k = 1$.

Ясно, что $P(\alpha) \neq 0$; по лемме 4.1 получаем

$$1 \leq m \leq \frac{\ln P^{\sigma^{(+)}}(t^2) - \ln \delta(\sigma^{(+)})}{-\ln(\prod_{\sigma} \delta(\sigma))}, \quad (4.15)$$

если $\prod_{\sigma} \delta(\sigma) < 1$. Обычно это дает лучшую оценку для m , чем (4.13), но требует более сложных вычислений. Вычисляя (4.15) при $t = 14$, $t = 16$ для d из

приведенных выше списков, для некоторых d получаем лучшие оценки сверху степени m . Мы формулируем окончательные результаты в следующих теоремах.

ТЕОРЕМА 4.3. *Для $d \geq 3$ все V -арифметические конечные связанные реберные графы $\Gamma_2^{(3)}(14)$ (см. рис. 4) минимальности 14 (эквивалентно, все чисто вещественные целые алгебраические числа $\alpha = u^2$ над $\mathbb{F}_d = \mathbb{Q}(\cos^2 \frac{\pi}{d})$, удовлетворяющие условиям (4.6) и (4.7) для $t = 14$) возможны только для приведенных ниже d . Кроме того, имеют место следующие оценки степени $m = [\mathbb{K} : \mathbb{F}_d]$ основного поля $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha) \supset \mathbb{F}_d$:*

$d = 3, \quad m \leq 44;$	$d = 4, \quad m \leq 16;$	$d = 5, \quad m \leq 10;$
$d = 6, \quad m \leq 8;$	$d = 7, \quad m \leq 9;$	$d = 8, \quad m \leq 8;$
$d = 9, \quad m \leq 5;$	$d = 10, \quad m \leq 5;$	$d = 11, \quad m \leq 4;$
$d = 12, \quad m \leq 5;$	$d = 13, \quad m \leq 3;$	$d = 14, \quad m \leq 3;$
$d = 15, \quad m \leq 2;$	$d = 16, \quad m \leq 3;$	$d = 17, \quad m \leq 2;$
$d = 18, \quad m \leq 3;$	$d = 20, \quad m \leq 2;$	$d = 21, \quad m \leq 2;$
$d = 22, \quad m \leq 2;$	$d = 24, \quad m \leq 3;$	$d = 26, \quad m \leq 2;$
$d = 28, \quad m \leq 2;$	$d = 30, \quad m \leq 3;$	$d = 36, \quad m \leq 2;$
$d = 42, \quad m \leq 2;$		

для остальных $d = 19, 23, 25, 27, 29, 31-35, 38-40, 44-46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 66, 70, 72, 78, 84, 90, 102, 120$ верно, что $m = 1$ и $\mathbb{K} = \mathbb{F}_d$. В частности, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 44$ для $d = 3$; $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 27$ для $d = 7$; $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 20$ для $d = 5, 11$; $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 18$ для $d = 13$; $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 16$ для всех остальных d .

ТЕОРЕМА 4.4. *Для $d \geq 3$ все V -арифметические конечные связанные реберные графы $\Gamma_2^{(3)}(14)$ (см. рис. 4) минимальности 16 (эквивалентно, чисто вещественные целые алгебраические числа $\alpha = u^2$ над $\mathbb{F}_d = \mathbb{Q}(\cos^2 \frac{\pi}{d})$, удовлетворяющие условиям (4.6) и (4.7) для $t = 16$) возможны только для приведенных ниже d . Кроме того, имеют место следующие оценки степени $m = [\mathbb{K} : \mathbb{F}_d]$ основного поля $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha) \supset \mathbb{F}_d$:*

$d = 3, \quad m \leq 47;$	$d = 4, \quad m \leq 16;$	$d = 5, \quad m \leq 10;$
$d = 6, \quad m \leq 8;$	$d = 7, \quad m \leq 10;$	$d = 8, \quad m \leq 9;$
$d = 9, \quad m \leq 5;$	$d = 10, \quad m \leq 5;$	$d = 11, \quad m \leq 4;$
$d = 12, \quad m \leq 5;$	$d = 13, \quad m \leq 3;$	$d = 14, \quad m \leq 3;$
$d = 15, \quad m \leq 2;$	$d = 16, \quad m \leq 3;$	$d = 17, \quad m \leq 2;$
$d = 18, \quad m \leq 4;$	$d = 19, \quad m \leq 2;$	$d = 20, \quad m \leq 3;$
$d = 21, \quad m \leq 2;$	$d = 22, \quad m \leq 2;$	$d = 24, \quad m \leq 3;$
$d = 26, \quad m \leq 2;$	$d = 28, \quad m \leq 2;$	$d = 30, \quad m \leq 3;$
$d = 36, \quad m \leq 2;$	$d = 42, \quad m \leq 2;$	

для остальных $d = 23, 25, 27, 29, 31-35, 38-40, 44-46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 70, 72, 78, 80, 84, 90, 96, 102, 120$ верно, что $m = 1$ и $\mathbb{K} = \mathbb{F}_d$. В частности, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 47$ для $d = 3$; $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 30$ для $d = 7$; $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 20$ для $d = 5, 11$; $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 18$ для $d = 8, 13, 19$; $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 16$ для всех остальных d .

Согласно теореме 4.3 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.5. *Множество полей $\mathcal{F}\Gamma_2^{(3)}(14)$ конечно, и их степень над $\mathbb{Q}$ ограничена сверху числом 44 (подробнее об этих полях в зависимости от параметра d см. терему 4.3).*

4.2.2. Основные поля некоторых графов $\Gamma_1^{(3)}(t)$. Здесь мы рассмотрим основные поля из $\mathcal{F}\Gamma_1^{(3)}(t)$ для V-арифметических графов $\Gamma_1^{(3)}(t)$ с параметрами $3 \leq s \leq k \leq 5$ (см. рис. 4). Соответствующая матрица Грама равна

$$\begin{pmatrix} -2 & u & 2 \cos \frac{\pi}{s} \\ u & -2 & 2 \cos \frac{\pi}{k} \\ 2 \cos \frac{\pi}{s} & 2 \cos \frac{\pi}{k} & -2 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

где $s, k \geq 3$ – целые числа, u – чисто вещественное целое алгебраическое число. Основное поле есть

$$\mathbb{K} = \mathbb{Q}\left(u^2, \cos^2 \frac{\pi}{s}, \cos^2 \frac{\pi}{k}, u \cos \frac{\pi}{s} \cos \frac{\pi}{k}\right).$$

Определитель $d(u)$ матрицы Грама (4.16) задается равенством

$$\frac{d(u)}{2} = u^2 + 4u \cos \frac{\pi}{s} \cos \frac{\pi}{k} + 4 \cos^2 \frac{\pi}{s} + 4 \cos^2 \frac{\pi}{k} - 4.$$

Отсюда следует, что граф $\Gamma_1^{(3)}$ является V-арифметическим минимальности $t > 2$, если и только если

$$\begin{aligned} 0 &< -\tilde{\sigma}\left(2 \cos \frac{\pi}{s} \cos \frac{\pi}{k}\right) - \sqrt{\sigma\left(4 \sin^2 \frac{\pi}{s} \sin^2 \frac{\pi}{k}\right)} \\ &< \tilde{\sigma}(u) < -\tilde{\sigma}\left(2 \cos \frac{\pi}{s} \cos \frac{\pi}{k}\right) + \sqrt{\sigma\left(4 \sin^2 \frac{\pi}{s} \sin^2 \frac{\pi}{k}\right)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

для всех $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$, отличных от $\sigma^{(+)}$, и

$$4 < \sigma^{(+)}(u^2) < t^2, \quad (4.18)$$

где $\tilde{\sigma}$ продолжает $\sigma: \mathbb{K} = \mathbb{Q}(u^2) \rightarrow \mathbb{R}$ на $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{K}(\cos \frac{\pi}{s} \cos \frac{\pi}{k})$.

Случай $s = k = 3$. В этом случае $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(u)$ и

$$-2 < \sigma(u) < 1, \quad 2 < \sigma^{(+)}(u) < t.$$

Рассмотрим многочлен

$$P(x) = (x+2)^3(x+1)^4x^4(x-1)^3(x^2+x-1)^3 \quad (4.19)$$

с целыми коэффициентами, аналогичный (4.8). Получаем

$$[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 1 + \frac{\ln P(t)}{-\ln \delta},$$

где $\delta = 0.0905969664$. Для $t = 14$ получаем $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 23$. (Из теорем 4.1, 4.2 имеем только оценку сверху числом 57.)

Случай $s = 3, k = 4$. В этом случае $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{K}(u)$ и $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(u^2)$. Имеем включение $\sqrt{2} \in \mathbb{K}$ тогда и только тогда, когда $u \in \mathbb{K}$. В этом случае

$$\frac{d(u)}{2} = u^2 + \sqrt{2}u - 1.$$

Имеем

$$\tilde{\sigma}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{\frac{3}{2}} < \tilde{\sigma}(u) < \tilde{\sigma}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad 4 < \sigma^{(+)}(u^2) < t^2.$$

Рассмотрим многочлен

$$P(x) = x^4(x + \sqrt{2})^4(x^2 + \sqrt{2}x - 1) \quad (4.20)$$

над кольцом целых поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Максимум модуля $|P(x)|$ на отрезке $[-1/\sqrt{2} - \sqrt{3/2}, -1/\sqrt{2} + \sqrt{3/2}]$ есть $\delta_1 = 0.09375 \dots$. Максимум сопряженного члена $P^g(x) = x^4(x - \sqrt{2})^4(x^2 - \sqrt{2}x - 1)$ на отрезке $[1/\sqrt{2} - \sqrt{3/2}, 1/\sqrt{2} + \sqrt{3/2}]$ есть $\delta_2 = 0.09375 \dots$. По лемме 4.1 получаем

$$[\mathbb{K} : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] < \frac{\ln P(t) - \ln \delta_1}{-\ln(\delta_1 \delta_2)},$$

если $\sqrt{2} \in \mathbb{K}$, и

$$[\mathbb{K}(u) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] < \frac{\ln(P(t)P^g(-t)) - \ln(\delta_1 \delta_2)}{-\ln(\delta_1 \delta_2)},$$

если $\sqrt{2} \notin \mathbb{K}$.

Для $t = 14$ в этих двух случаях получаем $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$.

Случай $s = k = 4$. В этом случае $u \in \mathbb{K}$ и $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(u)$. Имеем

$$-2 < \sigma(u) < 0, \quad 2 < \sigma^{(+)}(u) < 14.$$

Рассмотрим многочлен

$$P(x) = (x + 2)(x + 1)^2x \quad (4.21)$$

с целыми коэффициентами, аналогичный (4.9). По лемме 4.1

$$[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 1 + \frac{\ln P(t)}{-\ln \frac{1}{4}}.$$

Для $t = 14$ получаем $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 8$.

Случай $s = 3, k = 5$. В этом случае $u \in \mathbb{K}$ и $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\cos^2 \frac{\pi}{5}) \subset \mathbb{K} = \mathbb{Q}(u)$. Тогда

$$\frac{d(u)}{2} = u^2 + 2u \cos \frac{\pi}{5} + 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 3.$$

Имеем

$$-\sigma\left(\cos \frac{\pi}{5}\right) - \sqrt{3}\sigma\left(\sin \frac{\pi}{5}\right) < \sigma(u) < -\sigma\left(\cos \frac{\pi}{5}\right) + \sqrt{3}\sigma\left(\sin \frac{\pi}{5}\right), \quad (4.22)$$

$$2 < \sigma^{(+)}(u) < 14.$$

Рассмотрим многочлен

$$P(x) = x(x+1) \left(x + 3 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{5} \right) \left(x + 2 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{5} \right) \times \left(x^2 + 2x \cos \frac{\pi}{5} + 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 3 \right) \quad (4.23)$$

над кольцом целых поля $\mathbb{F}_5$. Максимум $\delta(\sigma)$ модуля $|P^\sigma(x)|$ на соответствующих отрезках (4.22) есть $\delta_1 = 0.0690098\dots$, если $\sigma(\sin \frac{\pi}{5}) = \sin \frac{\pi}{5}$, и есть $\delta_2 = 1.2383316\dots$, если $\sigma(\sin \frac{\pi}{5}) = \sin \frac{3\pi}{5}$. По лемме 4.1

$$[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] < \frac{\ln P(t) - \ln \delta_1}{-\ln(\delta_1 \delta_2)}.$$

Для $t = 14$ получаем $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 7$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 14$.

Случай $s = 4$, $k = 5$ (этот случай является самым трудным). Здесь $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\cos^2 \frac{\pi}{5}) \subset \mathbb{K} = \mathbb{Q}(u^2)$ и $u \in \mathbb{K}$, если и только если $\sqrt{2} \in \mathbb{K}$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d(u)}{2} &= u^2 + 2\sqrt{2}u \cos \frac{\pi}{5} + 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 2 = u^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} \right) u + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right), \\ a(\tilde{\sigma}) &= -\tilde{\sigma} \left(\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{5} \right) - \sqrt{\sigma \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{5} \right)} \\ &< \tilde{\sigma}(u) < -\tilde{\sigma} \left(\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{5} \right) + \sqrt{\sigma \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{5} \right)} = b(\tilde{\sigma}) \end{aligned} \quad (4.24)$$

для всех $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$, отличных от $\sigma^{(+)}$, и

$$4 < \sigma^{(+)}(u^2) < t^2. \quad (4.25)$$

Рассмотрим многочлен степени 8:

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(x^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} \right) x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \\ &\times \left(4x^3 + (3\sqrt{2} + 3\sqrt{10})x^2 + (6 + 4\sqrt{5})x + \frac{5\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} \right) \\ &\times \left(4x^3 + (3\sqrt{2} + 3\sqrt{10})x^2 + (7 + 3\sqrt{5})x + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

над кольцом целых поля $\mathbb{F}_{4,5} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \cos^2 \frac{\pi}{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$.

Корни многочленов $P^{\tilde{\sigma}}(x)$ принадлежат соответствующим отрезкам $[a(\tilde{\sigma}), b(\tilde{\sigma})]$. Максимумы $\delta(\tilde{\sigma})$ модулей $|P^{\tilde{\sigma}}(x)|$ на соответствующих отрезках (4.24) следующие: на отрезке

$$[a(\tilde{\sigma}), b(\tilde{\sigma})] = [-1.97537668\dots, -0.31286893\dots]$$

максимум $|P^{\tilde{\sigma}}(x)|$ есть $\delta_1 = 0.045593135\dots$, если $\tilde{\sigma}(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ и $\tilde{\sigma}(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$; на отрезке

$$[a(\tilde{\sigma}), b(\tilde{\sigma})] = [0.31286893\dots, 1.97537668\dots]$$

есть $\delta_2 = 0.045593135\dots$, если $\tilde{\sigma}(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ и $\tilde{\sigma}(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$; на отрезке

$$[a(\tilde{\sigma}), b(\tilde{\sigma})] = [-0.90798099\dots, 1.78201304\dots]$$

есть $\delta_3 = 2.14190686\dots$, если $\tilde{\sigma}(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ и $\tilde{\sigma}(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$; на отрезке

$$[a(\tilde{\sigma}), b(\tilde{\sigma})] = [-1.78201304\dots, 0.90798099\dots]$$

есть $\delta_4 = 2.14190686\dots$, если $\tilde{\sigma}(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ и $\tilde{\sigma}(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$.

По лемме 4.1

$$[\mathbb{K} : \mathbb{F}_{4,5}] \leq \frac{\ln P(t) - \ln \delta_1}{-\ln(\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4)},$$

если $\sqrt{2} \in \mathbb{K}$, и

$$[\mathbb{K}(u) : \mathbb{F}_{4,5}] \leq \frac{\ln(P(t)P^\tau(-t)) - \ln(\delta_1 \delta_2)}{-\ln(\delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4)},$$

если $\sqrt{2} \notin \mathbb{K}$, где $\tau(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ и $\tau(\sqrt{5}) = \sqrt{5}$.

Для $t = 14$ в первом случае получаем $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_{4,5}] \leq 5$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 20$; во втором случае получаем $[\mathbb{K}(u) : \mathbb{F}_{4,5}] \leq 11$ и $[\mathbb{K}(u) : \mathbb{Q}] \leq 44$. Тогда $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 22$. Таким образом, в этих двух случаях имеем $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 22$. (Из теоремы 4.1, 4.2 имеем только оценку $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 72$.)

Случай $s = k = 5$. В этом случае $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\cos^2 \frac{\pi}{5}) \subset \mathbb{K} = \mathbb{Q}(u)$ и

$$\begin{aligned} -2 < \sigma(u) < \sigma\left(4 \sin^2 \frac{\pi}{5}\right) - 2, \\ 2 < \sigma^{(+)}(u) < 14. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Рассмотрим многочлен

$$P(x) = (x+2)(x+1)\left(x+3-4 \sin^2 \frac{\pi}{5}\right)\left(x+2-4 \sin^2 \frac{\pi}{5}\right), \tag{4.28}$$

аналогичный (4.10). Максимум $\delta(\sigma)$ модуля $|P^\sigma(x)|$ на соответствующем отрезке (4.27) есть $\delta_1 = 0.0455931\dots$, если $\sigma(\sin^2 \frac{\pi}{5}) = \sin^2 \frac{\pi}{5}$, и есть $\delta_2 = 2.1419068\dots$, если $\sigma(\sin^2 \frac{\pi}{5}) = \sin^2 \frac{2\pi}{5}$.

По лемме 4.1

$$[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq \frac{\ln P(t) - \ln \delta_1}{-\ln(\delta_1 \delta_2)}.$$

Для $t = 14$ получаем $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 6$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$.

В результате получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4.6. *Имеют место следующие оценки сверху степени основных полей $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_1^{(3)}(14)$, т. е. для V-арифметических реберных графов $\Gamma_1^{(3)}$ минимальности 14 (для $2 < u < 14$) с параметрами $3 \leq s \leq k \leq 5$ (см. рис. 4):*

- (i) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 23$ для $s = k = 3$;
- (ii) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$ для $s = 3, k = 4$;
- (iii) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 8$ для $s = k = 4$;
- (iv) $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 7$ для $s = 3, k = 5$;

(v) для $s = 4, k = 5$ имеем $\mathbb{F}_{4,5} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \subset \mathbb{K}, [\mathbb{K} : \mathbb{F}_{4,5}] \leq 5$, если $\sqrt{2} \in \mathbb{K}$,
и $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{K}, [\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 11$, если $\sqrt{2} \notin \mathbb{K}$;

(vi) $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 6$ для $s = k = 5$.

В частности, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 23$ для всех полей $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_1^{(3)}(14)$ с параметрами $3 \leq s \leq k \leq 5$.

4.3. Поля из $\mathcal{F}\Gamma_1^{(4)}(14)$. Для графа $\Gamma_1^{(4)}(14)$ (рис. 5) предполагается, что $s, k, r, p \geq 3$. Подграфы $\Gamma_1^{(4)} - \{e_1\}$ и $\Gamma_1^{(4)} - \{e_2\}$ должны быть графами Кокстера. Отсюда следует, что нужно рассмотреть только следующие (с точностью до очевидных симметрий) случаи: либо $s = k = 3$ и $5 \geq r \geq p \geq 3$, либо $s = p = 3$ и $5 \geq r \geq k \geq 4$; чисто вещественное целое алгебраическое число u удовлетворяет неравенству $2 < u < 14$.

Рис. 5. Граф $\Gamma_1^{(4)}$

Поскольку граф $\Gamma_1^{(4)}(14)$ с параметрами s, k, r, p содержит два подграфа $\Gamma_1^{(3)}(14)$ с параметрами s, k и r, p , поле $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_1^{(4)}(14)$ с параметрами s, k, r, p принадлежит как $\mathcal{F}\Gamma_1^{(3)}(14)$ с параметрами s, k , так и $\mathcal{F}\Gamma_1^{(3)}(14)$ с параметрами p, r . Таким образом, степень поля $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_1^{(4)}(14)$ с параметрами s, k, r, p не превосходит минимума из максимума степеней полей из $\mathcal{F}\Gamma_1^{(3)}(14)$ с параметрами s, k и максимума степеней полей из $\mathcal{F}\Gamma_1^{(3)}(14)$ с параметрами p, r . Поэтому из теоремы 4.6 получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Имеют место следующие оценки сверху степеней основных полей $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_1^{(4)}(14)$, т. е. для V-арифметических реберных графов $\Gamma_1^{(4)}$ минимальности 14 (для $2 < u < 14$) в зависимости от их параметров s, k, p, r (см. рис. 5):*

- (i) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 23$ для $s = k = p = r = 3$;
- (ii) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$ для $s = k = 3, r = 4, p = 3$;
- (iii) $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 7$ для $s = k = 3, r = 5, p = 3$;
- (iv) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 8$ для $s = k = 3, r = p = 4$;
- (v) $\mathbb{F}_{4,5} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_{4,5}] \leq 5$, если $s = k = 3, r = 5, p = 4$;
- (vi) $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 6$ для $s = k = 3, r = p = 5$;
- (vii) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$ для $s = p = 3, r = k = 4$;

(viii) $\mathbb{F}_{4,5} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_{4,5}] \leq 3$ для $s = p = 3, r = 5, k = 4$;

(ix) $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 6$ для $s = p = 3, r = k = 5$.

В частности, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 23$ для всех полей $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_1^{(4)}(14)$.

Рассматривая графы $\Gamma_1^{(4)}$ непосредственно, можно существенно улучшить предложение 4.1. Мы надеемся показать это в дальнейших публикациях.

4.4. Поля из $\mathcal{F}\Gamma_2^{(4)}(14)$. Для графа $\Gamma_2^{(4)}(14)$ (рис. 6) предполагается, что $s, k, p \geq 3$ – натуральные числа и $2 < u < 14$ – чисто вещественное целое алгебраическое число. Кроме того, имеют место только следующие параметры: $3 \leq s \leq k \leq 5, p = 3; s = k = 3, p = 4, 5$.

Рис. 6. Граф $\Gamma_2^{(4)}$

Поскольку граф $\Gamma_2^{(4)}(14)$ с параметрами s, k, p содержит подграф $\Gamma_1^{(3)}(14)$ с параметрами s, k , любое поле $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_2^{(4)}(14)$ с параметрами s, k, p принадлежит $\mathcal{F}\Gamma_1^{(3)}(14)$ с параметрами s, k . Таким образом, степени полей $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_2^{(4)}(14)$ с параметрами s, k, p не превосходят степени полей из $\mathcal{F}\Gamma_1^{(3)}(14)$ с параметрами s, k . Применяя теорему 4.6, получаем следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Имеют место следующие оценки сверху степеней основных полей $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_2^{(4)}(14)$, т.е. для V-арифметических реберных графов $\Gamma_2^{(4)}$ минимальности 14 (для $2 < u < 14$) в зависимости от их параметров s, k, p (см. рис. 6):*

- (i) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 23$ для $s = k = 3, p = 3, 4, 5$;
- (ii) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 12$ для $s = 3, k = 4, p = 3$;
- (iii) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 8$ для $s = k = 4, p = 3$;
- (iv) $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 7$ для $s = 3, k = 5, p = 3$;
- (v) для $s = 4, k = 5, p = 3$ имеем $\mathbb{F}_{4,5} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$, $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_{4,5}] \leq 5$, если $\sqrt{2} \in \mathbb{K}$, и $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$, $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 11$, если $\sqrt{2} \notin \mathbb{K}$;
- (vi) $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 6$ для $s = k = 5, p = 3$.

В частности, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 23$ для всех полей $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_2^{(4)}(14)$.

Рассматривая графы $\Gamma_2^{(4)}$ непосредственно, можно существенно улучшить предложение 4.2. Мы надеемся показать это в дальнейших публикациях.

4.5. Поля из $\mathcal{F}\Gamma_3^{(4)}(14)$. Для графа $\Gamma_3^{(4)}(14)$ (рис. 7) предполагается, что $s \geq 2, k, r \geq 3$ – натуральные числа и $2 < u < 14$ – чисто вещественное целое алгебраическое число. Кроме того, имеют место только следующие возможности: $s = 2, k = 3, r = 3, 4, 5; s = 2, k = 4, 5, r = 3; 3 \leq s \leq k \leq 5, r = 3; s = k = 3, r = 4, 5$.

Основное поле $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(u^2)$ содержит циклические произведения

$$\cos^2 \frac{\pi}{s}, \quad \cos^2 \frac{\pi}{k}, \quad \cos^2 \frac{\pi}{r}, \quad u^2, \quad u \cos \frac{\pi}{s} \cos \frac{\pi}{k} \cos \frac{\pi}{r}.$$

Определитель $d(u)$ матрицы Грама задается равенством

$$-\frac{d(u)}{4} = u^2 \sin^2 \frac{\pi}{r} + u \cdot 2 \cos \frac{\pi}{s} \cos \frac{\pi}{k} \cos \frac{\pi}{r} + 4 \cos^2 \frac{\pi}{r} - 4 \sin^2 \frac{\pi}{s} \sin^2 \frac{\pi}{k}. \quad (4.29)$$

Пусть

$$D = 4 \cos^2 \frac{\pi}{s} \cos^2 \frac{\pi}{k} \cos^2 \frac{\pi}{r} + 16 \sin^2 \frac{\pi}{s} \sin^2 \frac{\pi}{k} \sin^2 \frac{\pi}{r} - 16 \sin^2 \frac{\pi}{r} \cos^2 \frac{\pi}{r}$$

– дискриминант квадратичного многочлена (4.29) переменной u . Граф $\Gamma_3^{(4)}(14)$ является V-арифметическим тогда и только тогда, когда для $\tau: \mathbb{K}(u) \rightarrow \mathbb{R}$, отличного от $\sigma^{(+)}$ на $\mathbb{K}$, выполнено

$$\frac{-2\tilde{\tau}(\cos \frac{\pi}{s} \cos \frac{\pi}{k} \cos \frac{\pi}{r}) - \sqrt{\tau(D)}}{2\tau \sin^2 \frac{\pi}{r}} < \tau(u) < \frac{-2\tilde{\tau}(\cos \frac{\pi}{s} \cos \frac{\pi}{k} \cos \frac{\pi}{r}) + \sqrt{\tau(D)}}{2\tau \sin^2 \frac{\pi}{r}}, \quad (4.30)$$

где $\tilde{\tau}$ продолжает τ .

Поскольку граф $\Gamma_3^{(4)}(14)$ с параметрами s, k, r содержит подграфы $\Gamma_2^{(3)}(14)$ с параметром s , если $s \geq 3$, и параметром $3 \leq k \leq 5$, поле $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_3^{(4)}(14)$ с параметрами s, k, r принадлежит $\mathcal{F}\Gamma_2^{(3)}(14)$ с параметром s , если $s \geq 3$, и $\mathcal{F}\Gamma_2^{(3)}(14)$ с параметром $3 \leq k \leq 5$. Таким образом, степени полей $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_3^{(4)}(14)$ с параметрами s, k, r не превосходят степеней полей из $\mathcal{F}\Gamma_2^{(3)}(14)$ с параметром s , если $s \geq 3$, и степеней полей из $\mathcal{F}\Gamma_2^{(3)}(14)$ с параметром $3 \leq k \leq 5$. Применяя теорему 4.3, получаем следующий результат.

Рис. 7. Граф $\Gamma_3^{(4)}$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Имеют место следующие оценки сверху степеней основных полей $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_3^{(4)}(14)$, т. е. для V-арифметических реберных графов $\Gamma_3^{(4)}$ минимальности 14 (для $2 < u < 14$) в зависимости от их параметров s, k, r (см. рис. 7):*

- (i) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 44$ для $s = 2, k = 3, r = 3, 4, 5$;

- (ii) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 16$ для $s = 2, k = 4, r = 3$;
- (iii) $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 10$ для $s = 2, k = 5, r = 3$;
- (iv) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 44$ для $s = k = 3, r = 3, 4, 5$;
- (v) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 16$ для $s = 3, k = 4, r = 3$;
- (vi) $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 10$ для $s = 3, k = 5, r = 3$;
- (vii) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 16$ для $s = k = 4, r = 3$;
- (viii) $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 8$ для $s = 4, k = 5, r = 3$;
- (ix) $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 10$ для $s = k = 5, r = 3$.

Улучшим плохие оценки для $s = 2, k = 3$ и $s = k = 3$ предложения 4.3.

Пусть $s = 2$. Тогда для $\alpha = u^2$ и $\sigma : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$ получаем

$$0 < \sigma(\alpha) < \sigma\left(\frac{D}{4 \sin^4 \frac{\pi}{r}}\right),$$

если $\sigma \neq \sigma^{(+)}$.

Для $s = 2, k = r = 3$ получаем

$$0 < \sigma(\alpha) < \frac{8}{3}, \quad 4 < \sigma^{(+)}(\alpha) < 14^2.$$

Рассмотрим многочлен

$$P(x) = x(x-1)^2(x-2)^2(x^2-3x+1)^2. \quad (4.31)$$

Максимум $|P(x)|$ на отрезке $[0, \frac{8}{3}]$ есть $\delta = 0.148148 \dots$. По лемме 4.1 имеем

$$[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 1 + \frac{\ln P(14^2)}{-\ln \delta} \leq 25.9.$$

В результате $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 25$.

Для $s = 2, k = 3, r = 4$ получаем

$$0 < \sigma(\alpha) < 2, \quad 4 < \sigma^{(+)}(\alpha) < 14^2.$$

Рассмотрим многочлен

$$P(x) = x(x-1)^2(x-2). \quad (4.32)$$

Максимум $|P(x)|$ на отрезке $[0, 2]$ есть $\delta = \frac{1}{4}$. По лемме 4.1 имеем

$$[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 1 + \frac{\ln P(14^2)}{-\ln \delta} < 16.3.$$

В результате $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 16$.

Для $s = 2, k = 3, r = 5$ получаем

$$0 < \sigma(\alpha) < 4 - \frac{16}{5} \sigma\left(\sin^2 \frac{2\pi}{5}\right), \quad 4 < \sigma^{(+)}(\alpha) < 14^2.$$

Рассмотрим многочлен

$$P(x) = x(x-1)\left(x+1-4\sin^2 \frac{\pi}{5}\right) \quad (4.33)$$

над кольцом целых поля $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\cos^2 \frac{\pi}{5})$. Максимум модуля $|P(x)|$ на отрезке $[0, 4 - \frac{16}{5} \sin^2 \frac{2\pi}{5}]$ есть $\delta_1 = 0.0844582\dots$, а максимум модуля $|P^g(x)|$ на отрезке $[0, 4 - \frac{16}{5} \sin^2 \frac{\pi}{5}]$, где $g: \mathbb{F}_5 \rightarrow \mathbb{R}$ не тождествен, есть $\delta_2 = 1.51554175\dots$. По лемме 4.1 имеем

$$[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq \frac{\ln P(14^2) - \ln \delta_1}{-\ln(\delta_1 \delta_2)} \leq 8.91.$$

В результате $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 8$.

Пусть $s = k = r = 3$. Тогда

$$0 < \sigma(u^2) < x_1^2 = 2.15612498\dots, \quad 4 < \sigma^{(+)}(u^2) < 14^2,$$

где x_1 – левый корень многочлена $3x^2 + x - 5$, задаваемого (4.29). Рассмотрим многочлен

$$P(x) = x(x-1)(x-2). \quad (4.34)$$

Максимум $|P(x)|$ на отрезке $[0, 2.15612498\dots]$ есть $\delta = 0.38918054\dots$. По лемме 4.1 имеем

$$[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 1 + \frac{\ln P(14^2)}{-\ln \delta} \leq 17.8.$$

В результате $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 17$.

Пусть $s = k = 3$, $r = 4$. Тогда

$$0 < \sigma(u^2) < x_1^2 = 1.30901699\dots, \quad 4 < \sigma^{(+)}(u^2) < 14^2,$$

где x_1 – левый корень многочлена $2x^2 + \sqrt{2}x - 1$, задаваемого (4.29). Рассмотрим многочлен

$$P(x) = x(x-1)^2. \quad (4.35)$$

Максимум $|P(x)|$ на отрезке $[0, 1.30901699\dots]$ есть $\delta = 0.14814\dots$. По лемме 4.1 имеем

$$[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 1 + \frac{\ln P(14^2)}{-\ln \delta} \leq 9.3.$$

В результате $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 9$.

Пусть $s = k = 3$, $r = 5$. Тогда $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\cos^2 \frac{\pi}{5}) \subset \mathbb{K} = \mathbb{Q}(u)$. В этом случае $\sigma(D) < 0$, если $\sigma(\sin^2 \frac{\pi}{5}) = \sin^2 \frac{\pi}{5}$. Отсюда имеем $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5$.

Получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.7. *Имеют место следующие оценки сверху степеней основных полей $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_3^{(4)}(14)$, т.е. для V-арифметических реберных графов $\Gamma_3^{(4)}$ минимальности 14 (для $2 < u < 14$) в зависимости от их параметров s, k, r (см. рис. 7):*

- (i) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 25$ для $s = 2, k = r = 3$;
- (ii) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 16$ для $s = 2, k = 3, r = 4$;
- (iii) $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 8$ для $s = 2, k = 3, r = 5$;
- (iv) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 16$ для $s = 2, k = 4, r = 3$;
- (v) $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 10$ для $s = 2, k = 5, r = 3$;
- (vi) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 17$ для $s = k = r = 3$;
- (vii) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 9$ для $s = k = 3, r = 4$;

- (viii) $\mathbb{K} = \mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ для $s = k = 3, r = 5$;
- (ix) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 16$ для $s = 3, k = 4, r = 3$;
- (x) $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 10$ для $s = 3, k = 5, r = 3$;
- (xi) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 16$ для $s = k = 4, r = 3$;
- (xii) $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 8$ для $s = 4, k = 5, r = 3$;
- (xiii) $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \subset \mathbb{K}$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 10$ для $s = k = 5, r = 3$.

В частности, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 25$ для всех полей $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_3^{(4)}(14)$.

Рассматривая графы $\Gamma_3^{(4)}$ непосредственно во всех случаях, можно существенно улучшить теорему 4.7. Мы надеемся показать это в дальнейших публикациях.

4.6. Поля из $\mathcal{F}\Gamma_5^{(4)}(14)$. Для графа $\Gamma_5^{(4)}(14)$ (рис. 8) предполагается, что $3 \leq s \leq k$ – натуральные числа и $2 < u < 14$ – чисто вещественное целое алгебраическое число.

Рис. 8. Графы $\Gamma_5^{(4)}$

Основное поле $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(u^2)$ содержит циклические произведения

$$\cos^2 \frac{\pi}{k}, \quad \cos^2 \frac{\pi}{s}, \quad u^2.$$

Поэтому $\mathbb{F}_{s,k} = \mathbb{Q}(\cos^2 \frac{\pi}{s}, \cos^2 \frac{\pi}{k}) \subset \mathbb{K} = \mathbb{Q}(u^2)$. Определитель $d(u)$ матрицы Грама задается равенством

$$-\frac{d(u)}{4} = u^2 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{k} \sin^2 \frac{\pi}{s}.$$

Граф $\Gamma_5^{(4)}$ является V-арифметическим, если и только если для $\alpha = u^2$ имеем

$$0 < \sigma(\alpha) < \sigma\left(4 \sin^2 \frac{\pi}{k} \sin^2 \frac{\pi}{s}\right)$$

при всех $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$, отличных от $\sigma^{(+)}$, и

$$4 < \sigma^{(+)}(\alpha) < 14^2.$$

Граф $\Gamma_5^{(4)}(14)$ с параметрами s, k содержит два подграфа $\Gamma_2^{(3)}(14)$ с параметрами $d = s$ и $d = k$. Таким образом, поле $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_5^{(4)}(14)$ с параметрами $3 \leq s \leq k$ принадлежит $\mathcal{F}\Gamma_2^{(3)}(14)$ с параметром s и $\mathcal{F}\Gamma_2^{(3)}(14)$ с параметром k . По теореме 4.3 имеем $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 20$, если одно из чисел s, k не принадлежит множеству $\{3, 7\}$. Предположим, что оба числа s и k принадлежат $\{3, 7\}$.

Пусть $s = k = 3$. Тогда $0 < \sigma(\alpha) < \frac{9}{4}$. Рассмотрим многочлен

$$P(x) = x(x-1)^2(x-2)^2(x^2-3x+1). \quad (4.36)$$

Максимум $|P(x)|$ на отрезке $[0, \frac{9}{4}]$ есть $\delta = 0.21570956 \dots$. По лемме 4.1 имеем

$$[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 1 + \frac{\ln P(14^2)}{-\ln \delta} \leq 25.06$$

и $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 25$.

Пусть $s = 3$, $k = 7$. В этом случае

$$0 < \sigma(\alpha) < 3\sigma\left(\sin^2 \frac{\pi}{7}\right)$$

для $\sigma : \mathbb{F}_7 = \mathbb{Q}(\cos^2 \frac{\pi}{7}) \rightarrow \mathbb{R}$. Рассмотрим многочлен

$$P(x) = x^2(x-1)^2(x-2)(x^2-3x+1)\left(x+1-4\sin^2 \frac{\pi}{7}\right)\left(x-4\sin^2 \frac{\pi}{7}\right) \quad (4.37)$$

над кольцом целых поля $\mathbb{F}_7$. Его можно рассматривать как подходящую комбинацию многочленов (4.8) для $d = 3$ и (4.14) для $d = 7$. Для $\sigma_k : \mathbb{F}_7 \rightarrow \mathbb{R}$, где $\sigma_k(\sin^2 \frac{\pi}{7}) = \sin^2 \frac{k\pi}{7}$, $k = 1, 2, 3$, получаем, что максимумы $\delta_k = \delta(\sigma_k)$, $k = 1, 2, 3$, модулей $|P^{\sigma_k}(x)|$ на отрезках $[0, 3\sigma_k(\sin^2 \frac{\pi}{7})]$ равны соответственно $\delta_1 = 0.0050709048 \dots$, $\delta_2 = 0.110711589 \dots$, $\delta_3 = 1.23817314 \dots$. По лемме 4.1 имеем

$$[\mathbb{K} : \mathbb{F}_7] \leq \frac{\ln P(14^2) - \ln \delta_1}{-\ln(\delta_1 \delta_2 \delta_3)} \leq 7.3. \quad (4.38)$$

В результате $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_7] \leq 7$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 21$.

Пусть $s = k = 7$. В этом случае $0 < \sigma(\alpha) < \sigma(4\sin^4 \frac{\pi}{7})$. Рассмотрим многочлен

$$P(x) = x(x-1)\left(x+1-4\sin^2 \frac{\pi}{7}\right)\left(x-4\sin^2 \frac{\pi}{7}\right), \quad (4.39)$$

который мы уже использовали в (4.14) для $d = 7$. В приведенных выше обозначениях для σ_k , $k = 1, 2, 3$, максимумы модулей $|P^{\sigma_k}(x)|$ на отрезках $[0, \sigma_k(4\sin^4 \frac{\pi}{7})]$ равны соответственно $\delta_1 = 0.0289099468 \dots$, $\delta_2 = 0.52203650 \dots$, $\delta_3 = 2.93338845 \dots$. Как и выше, $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_7] \leq 7$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 21$.

Получаем окончательный результат.

ТЕОРЕМА 4.8. *Имеют место следующие оценки сверху степеней основных полей $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_5^{(4)}(14)$, т. е. для V-арифметических реберных графов $\Gamma_5^{(4)}$ минимальности 14 (для $2 < u < 14$) в зависимости от их параметров s , k (см. рис. 8):*

- (i) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 25$ для $s = k = 3$;
- (ii) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 21$ для $s = 3$, $k = 7$;
- (iii) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 21$ для $s = k = 7$;
- (iv) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 20$ для всех других $3 \leq s \leq k$.

В частности, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 25$ для всех полей $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_5^{(4)}(14)$.

Данная теорема может быть существенно улучшена при дополнительном использовании результатов и методов работ автора [2]–[4]. Мы надеемся показать это в дальнейших публикациях.

4.7. Поля из $\mathcal{F}\Gamma_4^{(4)}(14)$. Для графа $\Gamma_4^{(4)}(14)$ (рис. 9) предполагается, что $k \geq 2$, $s, r \geq 3$ – натуральные числа и $2 < u < 14$ – чисто вещественное целое алгебраическое число. Кроме того, имеются только следующие возможности: $s = 3, r = 3, 4, 5$; $s = 4, 5, r = 3$.

Рис. 9. Графы $\Gamma_4^{(4)}$

Основное поле $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(u^2)$ содержит циклические произведения

$$\cos^2 \frac{\pi}{s}, \quad \cos^2 \frac{\pi}{r}, \quad \cos^2 \frac{\pi}{k}, \quad u^2, \quad u \cos \frac{\pi}{s} \cos \frac{\pi}{k}.$$

Этот случай может рассматриваться как специализация графа $\Gamma_1^{(4)}$ для $p = 2$. Определитель $d(u)$ матрицы Грама задается равенством

$$\frac{-d(u)}{4} = u^2 + 4u \cos \frac{\pi}{s} \cos \frac{\pi}{k} + 4 \cos^2 \frac{\pi}{s} - 4 \sin^2 \frac{\pi}{k} \sin^2 \frac{\pi}{r}.$$

Получаем

$$\sigma \left(u^2 + 4u \cos \frac{\pi}{s} \cos \frac{\pi}{k} + 4 \cos^2 \frac{\pi}{s} - 4 \sin^2 \frac{\pi}{k} \sin^2 \frac{\pi}{r} \right) < 0 \quad (4.40)$$

для $\sigma \neq \sigma^{(+)}$ и

$$4 < \sigma^{(+)}(u^2) < 14^2. \quad (4.41)$$

Пусть $k = 2$. Тогда имеем

$$0 < \sigma(u^2) < 4 - \sigma \left(4 \cos^2 \frac{\pi}{s} \right) - \sigma \left(4 \cos^2 \frac{\pi}{r} \right).$$

Если $s = r = 3$, получаем $0 < \sigma(u^2) < 2$. Применяя, как и выше, многочлен (4.9), получаем $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 16$.

Если $(s, r) = (3, 4), (4, 3)$, имеем $0 < \sigma(u^2) < 1$. Применяя многочлен $P(x) = x(x-1)$, получаем $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 8$.

Если $(s, r) = (3, 5), (5, 3)$, имеем $0 < \sigma(u^2) < \sigma(4 \sin^2 \frac{\pi}{5}) - 1$. Применяя многочлен $P(x) = x(x-1)(x+1-4 \sin^2 \frac{\pi}{5})$, получаем $[\mathbb{K} : \mathbb{F}_5] \leq 5$ и $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 10$.

Пусть $k \geq 3$. Тогда

$$\tilde{u} = u^2 + 4u \cos \frac{\pi}{s} \cos \frac{\pi}{k} + 4 \cos^2 \frac{\pi}{s} \quad (4.42)$$

– чисто положительное целое алгебраическое число (так как минимум этого квадратичного многочлена от u равен $4 \cos^2 \frac{\pi}{s} \sin^2 \frac{\pi}{k}$), принадлежащее $\mathbb{K}$, и $\Gamma_4^{(4)}$

является V -арифметическим, если и только если

$$0 < \sigma \left(4 \cos^2 \frac{\pi}{s} \sin^2 \frac{\pi}{k} \right) \leq \sigma(\tilde{u}) < \sigma \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{r} \sin^2 \frac{\pi}{k} \right) < 4 \quad (4.43)$$

для всех $\sigma: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$, отличных от (тождественного) $\sigma^{(+)}$. Для $\sigma^{(+)}$ имеем

$$4 < 4 + 8 \cos \frac{\pi}{s} \cos \frac{\pi}{k} + 4 \cos^2 \frac{\pi}{s} < \sigma^{(+)}(\tilde{u}) < 14^2 + 56 \cos \frac{\pi}{s} \cos \frac{\pi}{k} + 4 \cos^2 \frac{\pi}{s} < 16^2. \quad (4.44)$$

Отсюда следует, что $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\tilde{u})$.

Далее мы используем только неравенства

$$0 < \sigma(\tilde{u}) < \sigma \left(4 \sin^2 \frac{\pi}{r} \sin^2 \frac{\pi}{k} \right) < 4, \quad 4 < \sigma^{(+)}(\tilde{u}) < 16^2.$$

Этот случай аналогичен предыдущему случаю графа $\Gamma_5^{(4)}(14)$ с заменой оценки сверху числом 14^2 на 16^2 (или с использованием (4.44), если нужно), при этом $s = \min(r, k)$. Вместо теоремы 4.3 следует использовать теорему 4.4. Здесь аналогичные плохие случаи следующие.

В случае $r = k = 3$ имеем $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 25$ (следует использовать величину $14^2 + 56 \cos \frac{\pi}{s} \cos \frac{\pi}{k} + 4 \cos^2 \frac{\pi}{s}$ вместо 14^2).

В случае $r = 3, k = 7$ имеем $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 21$.

Получаем окончательно следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.9. *Имеют место следующие оценки сверху степени основного поля $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_4^{(4)}(14)$, т.е. для V -арифметических реберных графов $\Gamma_4^{(4)}$ минимальности 14 (для $2 < u < 14$) в зависимости от их параметров k, s, r (см. рис. 9):*

- (i) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 16$ для $k = 2, s = r = 3$;
- (ii) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 8$ для $k = 2, (s, r) = (3, 4), (4, 3)$;
- (iii) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 10$ для $k = 2, (s, r) = (3, 5), (5, 3)$;
- (iv) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 25$ для $r = k = 3$;
- (v) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 21$ для $r = 3, k = 7$;
- (vi) $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 20$ для всех остальных параметров k, s, r .

В частности, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] \leq 25$ для всех полей $\mathbb{K} \in \mathcal{F}\Gamma_4^{(4)}(14)$.

Данная теорема может быть существенно улучшена при дополнительном использовании результатов и методов из работ автора [2]–[4]. Мы надеемся показать это в дальнейших публикациях.

Из всего изложенного следует доказательство теоремы 3.2.

§ 5. Приложения

Используя [1]–[4], [7], [12], [17], [18], получаем следующие приложения к арифметическим гиперболическим группам отражений.

ТЕОРЕМА 5.1. *В размерностях $n \geq 10$ (гиперболического пространства) основное поле арифметической гиперболической группы отражений принадлежит одному из конечных множеств полей $\mathcal{F}L^4, \mathcal{F}T$ или $\mathcal{F}\Gamma_i^{(4)}(14)$, $1 \leq i \leq 5$. В частности, его степень не превосходит 25.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [1], [12] (см. также [2]) показано, что данное поле принадлежит $\mathcal{FL}^4$, $\mathcal{FT}$ или $\mathcal{FG}_i^{(4)}(14)$, $1 \leq i \leq 5$. Тогда по теореме 3.2 его степень не превосходит 25 (см. доказательство следующей теоремы).

ТЕОРЕМА 5.2. *В размерностях $n \geq 6$ основное поле арифметической гиперболической группы отражений принадлежит одному из конечных множеств полей $\mathcal{FL}^4$, $\mathcal{FT}$, $\mathcal{FG}_i^{(4)}(14)$, $1 \leq i \leq 5$, или $\mathcal{FG}_{2,4}(14)$. В частности, его степень не превосходит 25.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству в [2, теорема 9], где то же утверждалось для оценки сверху числом 56.

В [2] показано, что данное поле принадлежит $\mathcal{FL}^4$, $\mathcal{FT}$, $\mathcal{FG}_i^{(4)}(14)$, $1 \leq i \leq 5$, или $\mathcal{FG}_{2,4}(14)$. Хорошо известно, что степень полей из $\mathcal{FL}^4$ не превосходит 2 (см. п. 3.1). Согласно [15] (см. также [16], [19], [20]) степень полей из $\mathcal{FT}$ не превосходит 5 (см. п. 3.2). В [2] показано, что степень полей из $\mathcal{FG}_{2,4}(14)$ (данное множество состоит из основных полей арифметических гиперболических четырехугольников минимальности 14) не превосходит 11. По теореме 3.2 степень полей из $\mathcal{FG}_i^{(4)}(14)$, $1 \leq i \leq 5$, не превосходит 25. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5.3. *В размерностях $n = 4, 5$ основное поле арифметической гиперболической группы отражений принадлежит одному из конечных множеств полей $\mathcal{FG}_1^{(6)}(14)$, $\mathcal{FG}_2^{(6)}(14)$, $\mathcal{FG}_3^{(6)}(14)$, $\mathcal{FG}_1^{(7)}(14)$, $\mathcal{FG}_2^{(7)}(14)$ или $\mathcal{FG}_{2,5}(14)$, если оно не принадлежит ни одному из множеств полей $\mathcal{FL}^4$, $\mathcal{FT}$, $\mathcal{FG}_i^{(4)}(14)$, $1 \leq i \leq 5$, и $\mathcal{FG}_{2,4}(14)$ теоремы 5.2. В частности, его степень не превосходит 44.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству в [3, теорема 2.6], где то же самое утверждалось для оценки сверху числом 138.

В [3] показано, что данное поле принадлежит одному из множеств $\mathcal{FG}_1^{(6)}(14)$, $\mathcal{FG}_2^{(6)}(14)$, $\mathcal{FG}_3^{(6)}(14)$, $\mathcal{FG}_1^{(7)}(14)$, $\mathcal{FG}_2^{(7)}(14)$ или $\mathcal{FG}_{2,5}(14)$ и что степень полей из $\mathcal{FG}_{2,5}(14)$ (данное множество состоит из основных полей арифметических пятиугольников минимальности 14) не превосходит 12.

Предположим, что данное поле принадлежит одному из множеств $\mathcal{FG}_1^{(6)}(14)$, $\mathcal{FG}_2^{(6)}(14)$, $\mathcal{FG}_3^{(6)}(14)$, $\mathcal{FG}_1^{(7)}(14)$ или $\mathcal{FG}_2^{(7)}(14)$. Все диаграммы $\Gamma_1^{(6)}(14)$, $\Gamma_2^{(6)}(14)$, $\Gamma_3^{(6)}(14)$, $\Gamma_1^{(7)}(14)$ и $\Gamma_2^{(7)}(14)$ содержат поддиаграмму $\Gamma_2^{(3)}(14)$. Тогда по теореме 4.5 степень данного поля не превосходит 44. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5.4. *В размерности $n = 3$ основное поле арифметической гиперболической группы отражений принадлежит одному из конечных множеств полей $\mathcal{FG}_6^{(4)}(14)$, $\mathcal{FG}_1^{(5)}(14)$, $\mathcal{FG}_4^{(6)}(14)$ или $\mathcal{FG}_2(14)$, если оно не принадлежит ни одному из множеств полей $\mathcal{FG}_1^{(6)}(14)$, $\mathcal{FG}_2^{(6)}(14)$, $\mathcal{FG}_3^{(6)}(14)$, $\mathcal{FG}_1^{(7)}(14)$, $\mathcal{FG}_2^{(7)}(14)$, $\mathcal{FG}_{2,5}(14)$ и $\mathcal{FL}^4$, $\mathcal{FT}$, $\mathcal{FG}_i^{(4)}(14)$, $1 \leq i \leq 5$, $\mathcal{FG}_{2,4}(14)$ теорем 5.2, 5.3. В частности, его степень не превосходит 44.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству в [4, теорема 3.8], где то же самое утверждалось для оценки сверху числом 909.

В [4] показано, что данное поле принадлежит одному из множеств $\mathcal{FG}_6^{(4)}(14)$, $\mathcal{FG}_1^{(5)}(14)$, $\mathcal{FG}_4^{(6)}(14)$ или $\mathcal{FG}_2(14)$.

Множество $\mathcal{FG}_2(14)$ состоит из основных полей арифметических гиперболических групп отражений на гиперболической плоскости с фундаментальным многоугольником минимальности 14. В [2] при использовании результатов из [21] показано, что степень основного поля арифметической гиперболической группы отражений на гиперболической плоскости не превосходит 44.

Все диаграммы $\Gamma_6^{(4)}(14)$, $\Gamma_1^{(5)}(14)$, $\Gamma_4^{(6)}(14)$ содержат поддиаграмму $\Gamma_2^{(3)}(14)$. Тогда по теореме 4.5 степень данного поля не превосходит 44. Теорема доказана.

Отметим, что теорема 5.4 также дает другое доказательство конечности числа арифметических групп отражений в размерности 3, отличное от доказательства из [8].

В [5] при использовании результатов из работы [8] показано, что степень основного поля арифметической гиперболической группы отражений в размерности 3 не превосходит 35. В [6] показано, что степень основного поля арифметической гиперболической группы отражений в размерности 2 не превосходит 11.

Используя результаты, полученные в [5]–[7], мы можем улучшить оценку сверху числом 44 теоремы 5.3 для размерностей 4, 5.

ТЕОРЕМА 5.5. *В размерностях $n = 4, 5$ основное поле арифметической гиперболической группы отражений принадлежит одному из множеств $\mathcal{FL}^4$, $\mathcal{FT}$, $\mathcal{FG}_i^{(4)}(14)$, $1 \leq i \leq 5$, или является основным полем одной из арифметических гиперболических групп отражений в размерностях $n = 2, 3$. В частности, его степень не превосходит 35.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение доказано в [7].

Степени полей из $\mathcal{FL}^4$, $\mathcal{FT}$ не превосходят 5 (см. пп. 3.1, 3.2). По теореме 3.2 степени полей из $\mathcal{FG}_i^{(4)}(14)$, $1 \leq i \leq 5$, не превосходят 25.

В силу [5] степени полей в размерности $n = 3$ не превосходят 35, а в силу [6] степени полей в размерности $n = 2$ не превосходят 11. Теорема доказана.

Теоремы 4.5, 4.3 можно рассматривать как шаг к классификации арифметических гиперболических групп отражений над произвольным полем.

ТЕОРЕМА 5.6. *Предположим, что узкая грань минимальности 14 фундаментального многогранника (она существует в силу [12]) арифметической гиперболической группы отражений содержит ребро с гиперболической связной компонентой графа данного ребра, содержащей подграф $\Gamma_2^{(3)}$ с параметром d (см. рис. 4). Тогда $d \leq 120$ и основное поле данной группы отражений есть $\mathbb{F}_d = \mathbb{Q}(\cos^2 \frac{\pi}{d})$, если $d \geq 44$ (см. более точные результаты в теореме 4.3).*

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. В статье автора [2] в исключительных случаях использовались теоремы 4.1, 4.2. Однако из-за элементарной арифметической неточности вместо правильного условия (4.1) использовалось не совсем правильное условие, дающее завышенные хорошие оценки. Поэтому в [2] вместо утверждавшейся оценки $N(14) \leq 56$ реально было доказано только то, что $N(14) \leq 120$. (В настоящей работе показано, что $N(14) \leq 25$, таким образом, данная неточность исправлена.)

То же самое относится к работам автора [3] для размерностей $n = 4, 5$ и [4] для размерности $n = 3$. Однако утверждавшиеся в этих работах окончательные

оценки степени N сами по себе были достаточно высокими: $N \leq 138$ в [3] и $N \leq 909$ в [4]. Поэтому даже при использовании в исключительных случаях не совсем правильного условия вместо (4.1) окончательные оценки данных работ не меняются. (В настоящей работе мы показываем, что $N \leq 44$ в размерностях $n = 3, 4, 5$.)

§ 6. Дополнение: гиперболические числа

Здесь дается обзор и некоторые коррективы к результатам из [1, § 1] (см. теоремы 1.1.1, 1.2.2 в [1], которые аналогичны теоремам 6.2, 6.4 настоящей работы).

6.1. Теорема Фекете. Следующая важная теорема, которой посвящен данный пункт, получена М. Фекете в [22]. Хотя он рассматривал (насколько нам известно) случай поля $\mathbb{Q}$, его метод доказательства немедленно обобщается на чисто вещественные поля алгебраических чисел.

ТЕОРЕМА 6.1 (М. Фекете). Пусть $\mathbb{F}$ – чисто вещественное поле алгебраических чисел и каждому вложению $\sigma: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ сопоставлен отрезок $[a_\sigma, b_\sigma]$ в $\mathbb{R}$ и действительное число $\lambda_\sigma > 0$. Предположим, что $\prod_\sigma \lambda_\sigma = 1$. Тогда для любого неотрицательного целого числа n существует ненулевой многочлен $P_n(T) \in \mathbb{O}[T]$ степени не больше n над кольцом целых чисел $\mathbb{O}$ поля $\mathbb{F}$ такой, что для каждого σ выполняется неравенство

$$\max_{x \in [a_\sigma, b_\sigma]} |P_n^\sigma(x)| \leq \lambda_\sigma |\text{discr } \mathbb{F}|^{1/(2[\mathbb{F}:\mathbb{Q}])} 2^{n/(n+1)} (n+1) \left(\prod_{\sigma'} \frac{b_{\sigma'} - a_{\sigma'}}{4} \right)^{n/(2[\mathbb{F}:\mathbb{Q}])}. \quad (6.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $N = [\mathbb{F}:\mathbb{Q}]$ и $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ – базис кольца $\mathbb{O}$ над $\mathbb{Z}$. Пусть задан ненулевой многочлен

$$P_n(T) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \gamma_j T^i \in \mathbb{O}[T]$$

степени не выше n , где $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$ не все равны нулю. Для каждого $\sigma: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ рассмотрим вещественные функции $P_n^\sigma(x)$ на отрезке $[a_\sigma, b_\sigma]$.

Сделаем замену

$$x = x(z) = \frac{b_\sigma + a_\sigma}{2} + \frac{b_\sigma - a_\sigma}{2} \cos z.$$

Если z принимает значения из отрезка $[0, \pi]$, то x – из отрезка $[a_\sigma, b_\sigma]$. Положим $Q_n^\sigma(z) = P_n^\sigma(x(z))$. Поскольку $Q_n^\sigma(z)$ – четный тригонометрический многочлен, то имеем

$$Q_n^\sigma(z) = \sum_{k=0}^n A_{k\sigma} \cos(kz), \quad (6.2)$$

где

$$\begin{aligned} A_{k\sigma} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_n^{\sigma} \left(\frac{b_{\sigma} + a_{\sigma}}{2} + \frac{b_{\sigma} - a_{\sigma}}{2} \cos z \right) \cos(kz) dz \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_j^{\sigma} \left(\frac{b_{\sigma} + a_{\sigma}}{2} + \frac{b_{\sigma} - a_{\sigma}}{2} \cos z \right)^i \cos(kz) dz \right) \alpha_{ij}, \end{aligned}$$

если $k \geq 1$, и

$$\begin{aligned} A_{0\sigma} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_n^{\sigma} \left(\frac{b_{\sigma} + a_{\sigma}}{2} + \frac{b_{\sigma} - a_{\sigma}}{2} \cos z \right) dz \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \gamma_j^{\sigma} \left(\frac{b_{\sigma} + a_{\sigma}}{2} + \frac{b_{\sigma} - a_{\sigma}}{2} \cos z \right)^i dz \right) \alpha_{ij}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A_{k\sigma} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=1}^N c_{k\sigma ij} \alpha_{ij} \quad (6.3)$$

– линейные функции от α_{ij} , где

$$c_{k\sigma ij} = \gamma_j^{\sigma} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{b_{\sigma} + a_{\sigma}}{2} + \frac{b_{\sigma} - a_{\sigma}}{2} \cos z \right)^i \cos(kz) dz,$$

если $k \geq 1$, и

$$c_{0\sigma ij} = \gamma_j^{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{b_{\sigma} + a_{\sigma}}{2} + \frac{b_{\sigma} - a_{\sigma}}{2} \cos z \right)^i dz.$$

Заметим, что в силу последних формул $c_{k\sigma ij} = 0$, если $i < k$, и

$$c_{k\sigma kj} = \gamma_j^{\sigma} \cdot 2 \left(\frac{b_{\sigma} - a_{\sigma}}{4} \right)^k, \quad \text{если } k \geq 1$$

($c_{0\sigma 0j} = \gamma_j^{\sigma}$). Отсюда, лексикографически упорядочивая индексы $k\sigma$ и ij , получаем, что матрица линейных форм (6.3) является верхней блочно-треугольной матрицей с указанными выше $(N \times N)$ -матрицами ($c_{0\sigma 0j}$) и ($c_{k\sigma kj}$), $1 \leq k \leq n$, на диагонали. Следовательно, определитель матрицы (6.3) имеет вид

$$\Delta = \det(\gamma_j^{\sigma})^{n+1} \cdot 2^{Nn} \left(\prod_{\sigma} \frac{b_{\sigma} - a_{\sigma}}{4} \right)^{n(n+1)/2}.$$

Поскольку $\prod_{\sigma} \lambda_{\sigma}^{n+1} = (\prod_{\sigma} \lambda_{\sigma})^{n+1} = 1$, по теореме Минковского о линейных формах (см., например, [23], [24]) существуют $\alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$, не все равные нулю, такие, что $|A_{k\sigma}| \leq \lambda_{\sigma} |\Delta|^{1/(N(n+1))}$, и поэтому в силу 6.2

$$\max_z |Q_n^{\sigma}(z)| \leq \lambda_{\sigma} (n+1) |\Delta|^{1/(N(n+1))}.$$

Учитывая, что $\det(\gamma_j^{\sigma})^2 = \text{discr } \mathbb{F}$, получаем доказательство теоремы.

Взяв $\lambda_\sigma = 1$, получим частный случай, которым далее будем пользоваться.

ТЕОРЕМА 6.2 (М. Фекете). Пусть $\mathbb{F}$ – чисто вещественное поле алгебраических чисел и каждому вложению $\sigma: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ поставлен в соответствие отрезок $[a_\sigma, b_\sigma]$ в $\mathbb{R}$. Тогда для каждого неотрицательного целого числа n найдется такой ненулевой многочлен $P_n(T) \in \mathbb{Q}[T]$ степени не выше n над кольцом $\mathbb{O}$ целых поля $\mathbb{F}$, что для каждого σ имеет место неравенство

$$\max_{x \in [a_\sigma, b_\sigma]} |P_n^\sigma(x)| \leq |\text{discr } \mathbb{F}|^{1/(2[\mathbb{F}:\mathbb{Q}])} \cdot 2^{n/(n+1)} (n+1) \left(\prod_{\sigma'} \frac{b_{\sigma'} - a_{\sigma'}}{4} \right)^{n/(2[\mathbb{F}:\mathbb{Q}])}. \quad (6.4)$$

6.2. Гиперболические числа. Чисто вещественные целые алгебраические числа $\{\alpha\}$, которые мы здесь рассматриваем, очень похожи на числа Пизо–Виджиярагхавана [24], хотя последние и не чисто вещественны.

ТЕОРЕМА 6.3. Пусть $\mathbb{F}$ – чисто вещественное поле алгебраических чисел и каждому вложению $\sigma: \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ поставлен в соответствие отрезок $[a_\sigma, b_\sigma]$ в $\mathbb{R}$, причем

$$\prod_{\sigma} \frac{b_{\sigma} - a_{\sigma}}{4} < 1.$$

Пусть, кроме того, фиксированы натуральное число m и отрезки $[s_1, t_1], \dots, [s_m, t_m]$ в $\mathbb{R}$. Тогда существует константа $N(s_i, t_i)$ такая, что если α – целое алгебраическое число и для вложений $\tau: \mathbb{F}(\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} s_i &\leq \tau(\alpha) \leq t_i, & \tau &= \tau_1, \dots, \tau_m, \\ a_{\tau|\mathbb{F}} &\leq \tau(\alpha) \leq b_{\tau|\mathbb{F}}, & \tau &\neq \tau_1, \dots, \tau_m, \end{aligned}$$

то

$$[\mathbb{F}(\alpha) : \mathbb{F}] \leq N(s_i, t_i).$$

ТЕОРЕМА 6.4. При условиях теоремы 6.3 в качестве $N(s_i, t_i)$ можно взять $N(s_i, t_i) = N(S)$, где $N(S)$ – наименьшее натуральное решение n неравенства

$$n \ln \frac{1}{R} - M \ln(2n+2) - \ln B \geq \ln S. \quad (6.5)$$

Здесь

$$M = [\mathbb{F} : \mathbb{Q}], \quad R = \sqrt{\prod_{\sigma} \frac{b_{\sigma} - a_{\sigma}}{4}}, \quad (6.6)$$

$$B = \sqrt{|\text{discr } \mathbb{F}|}, \quad S = \prod_{i=1}^m (2 \text{er}_i(b_{\sigma_i} - a_{\sigma_i})^{-1}), \quad (6.7)$$

где $\sigma_i = \tau_i|_{\mathbb{F}}$, $r_i = \max\{|t_i - a_{\sigma_i}|, |b_{\sigma_i} - s_i|\}$. Асимптотически имеем

$$N(s_i, t_i) \sim \frac{\ln S}{\ln \frac{1}{R}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 6.3, 6.4. Воспользуемся следующим утверждением.

ЛЕММА 6.1. Пусть $Q_n(T) \in \mathbb{R}[T]$ – ненулевой многочлен над $\mathbb{R}$ степени не выше $n > 0$, $a < b$ и $M_0 = \max_{[a,b]} \{|Q_n(x)|\}$. Тогда для $x \geq b$ имеем

$$|Q_n(x)| \leq \frac{M_0(x-a)^n n^n}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n n!} < \frac{M_0(x-a)^n e^n}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n \sqrt{2\pi n}} < \frac{M_0(x-a)^n e^n}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^n}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$. По интерполяционной формуле Лагранжа имеем

$$Q_n(x) = \sum_{i=0}^n Q_n(\alpha_i) F_i(x),$$

где

$$F_i(x) = \frac{(x-\alpha_0)(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_{i-1})(x-\alpha_{i+1})\dots(x-\alpha_n)}{(\alpha_i-\alpha_0)(\alpha_i-\alpha_1)\dots(\alpha_i-\alpha_{i-1})(\alpha_i-\alpha_{i+1})\dots(\alpha_i-\alpha_n)}.$$

Взяв $\alpha_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$, $0 \leq i \leq n$, для $x \geq b$ получим

$$|Q_n(x)| \leq \frac{M_0(x-a)^n}{\left(\frac{b-a}{n}\right)^n} \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!(n-i)!} = \frac{M_0(x-a)^n 2^n}{\left(\frac{b-a}{n}\right)^n n!}.$$

По формуле Стирлинга имеем $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\lambda_n}$, где $0 < \lambda_n < \frac{1}{12n}$. Таким образом, $\frac{n^n}{n!} < \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}} < e^n$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Продолжим доказательство теорем. Рассмотрим для данного n многочлен $P_n(T) \in \mathbb{O}[T]$, существование которого дает теорема 6.2. Полагая $N = [\mathbb{F}(\alpha) : \mathbb{F}]$ и $M = [\mathbb{F} : \mathbb{Q}]$, получаем по теореме 6.2 и лемме 6.1, что

$$\begin{aligned} \left| \prod_{\tau} \tau(P_n(\alpha)) \right| &= \prod_{\tau} |P_n^{\tau}(\tau(\alpha))| = \prod_{\tau \neq \tau_i} P_n^{\tau}(\tau(\alpha)) \prod_{i=1}^m |P_n^{\tau_i}(\tau_i(\alpha))| \\ &\leq \prod_{\tau \neq \tau_i} \max_{[a_{\tau|\mathbb{F}}, b_{\tau|\mathbb{F}}]} |P_n^{\tau}(x)| \prod_{i=1}^m \max_{[s_i, t_i]} |P_n^{\sigma_i}(x)| \\ &\leq (|\text{discr } \mathbb{F}|^{1/(2M)} \cdot 2(n+1)R^{n/M})^{NM} \prod_{i=1}^m \frac{r_i^n e^n}{\left(\frac{b_{\sigma_i} - a_{\sigma_i}}{2}\right)^n} \\ &= R^{nN} B^N S^n (2n+2)^{MN}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Поскольку $R < 1$, найдется достаточно большое n_0 такое, что

$$R^{n_0} B(2n_0+2)^M \leq \frac{1}{S}. \quad (6.9)$$

Тогда если $N > n_0$, то мы получаем, что

$$R^{n_0 N} B^N S^{n_0} (2n_0+2)^{MN} \leq S^{n_0-N} < 1,$$

так как $S > 1$. Отсюда и из цепочки неравенств (6.8) имеем

$$\left| \prod_{\tau} \tau(P_{n_0}(\alpha)) \right| < 1.$$

Однако

$$\prod_{\tau} \tau(P_{n_0}(\alpha)) = N_{\mathbb{F}(\alpha)/\mathbb{Q}}(P_{n_0}(\alpha)) \in \mathbb{Z},$$

откуда $P_{n_0}(\alpha) = 0$. Следовательно, $N \leq n_0$. Противоречие.

Итак, мы доказали, что $N \leq n_0$, где n_0 – натуральное решение неравенства (6.9), которое, очевидно, эквивалентно неравенству

$$n_0 \ln \frac{1}{R} - M \ln(2n_0 + 2) - \ln B \geq \ln S,$$

что завершает доказательство теорем.

Список литературы

1. В.В. Никулин, “О классификации арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **45**:1 (1981), 113–142; англ. пер.: V. V. Nikulin, “On the classification of arithmetic groups generated by reflections in Lobachevsky spaces”, *Math. USSR-Izv.*, **18**:1 (1982), 99–123.
2. V. V. Nikulin, “On ground fields of arithmetic hyperbolic reflection groups”, *Groups and symmetries* (Montreal, Canada, 2007), CRM Proc. Lecture Notes, **47**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, 299–326.
3. V. V. Nikulin, “On ground fields of arithmetic hyperbolic reflection groups. II”, *Mosc. Math. J.*, **8**:4 (2008), 789–812.
4. V. V. Nikulin, “On ground fields of arithmetic hyperbolic reflection groups. III”, *J. Lond. Math. Soc.* (2), **79**:3 (2009), 738–756.
5. M. Belolipetsky, “On fields of definition of arithmetic Kleinian reflection groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **137**:3 (2009), 1035–1038.
6. C. Maclachlan, “Bounds for discrete hyperbolic arithmetic reflection groups in dimension 2”, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **43**:1 (2011), 111–123.
7. В.В. Никулин, “Конечность числа арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:1 (2007), 55–60; англ. пер.: V. V. Nikulin, “Finiteness of the number of arithmetic groups generated by reflections in Lobachevsky spaces”, *Izv. Math.*, **71**:1 (2007), 53–56.
8. I. Agol, “Finiteness of arithmetic Kleinian reflection groups”, *Proceedings of the international congress of mathematicians*, v. II (Madrid, Spain, 2006), Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, 951–960.
9. V. V. Nikulin, *The transition constant for arithmetic hyperbolic reflection groups*, arXiv: 0910.5217.
10. Э.Б. Винберг, “Дискретные группы, порожденные отражениями, в пространствах Лобачевского”, *Матем. сб.*, **72(114)**:3 (1967), 471–488; англ. пер.: E. B. Vinberg, “Discrete groups generated by reflections in Lobachevskii spaces”, *Math. USSR-Sb.*, **1**:3 (1967), 429–444.
11. Э.Б. Винберг, “Гиперболические группы отражений”, *УМН*, **40**:1 (1985), 29–66; англ. пер.: E. B. Vinberg, “Hyperbolic reflection groups”, *Russian Math. Surveys*, **40**:1 (1985), 31–75.
12. В.В. Никулин, “Об арифметических группах, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:3 (1980), 637–669; англ. пер.: V. V. Nikulin, “On arithmetic groups generated by reflections in Lobachevsky spaces”, *Math. USSR-Izv.*, **16**:3 (1981), 573–601.

13. F. Lannér, “On complexes with transitive groups of automorphisms”, *Comm. Sémin. Math. Univ. Lund*, **11** (1950), 1–71.
14. Э. Б. Винберг, “Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности”, Тр. ММО, **47**, Изд-во Моск. ун-та, М., 1984, 68–102; англ. пер.: E. B. Vinberg, “The non-existence of crystallographic groups of reflections in Lobachevskij spaces of large dimension”, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 1985, 75–112.
15. K. Takeuchi, “Arithmetic triangle groups”, *J. Math. Soc. Japan*, **29**:1 (1977), 91–106.
16. K. Takeuchi, “Commensurability classes of arithmetic triangle groups”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **24**:1 (1977), 201–212.
17. V. V. Nikulin, “Discrete reflection groups in Lobachevsky spaces and algebraic surfaces”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v. 1 (Berkeley, CA, 1986), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 654–671.
18. V. V. Nikulin, *The remark on arithmetic groups generated by reflections in Lobachevsky spaces*, Preprint MPI/91 Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, 1991.
19. K. Takeuchi, “A characterization of arithmetic Fuchsian groups”, *J. Math. Soc. Japan*, **27**:4 (1975), 600–612.
20. K. Takeuchi, “Arithmetic Fuchsian groups with signature $(1, e)$ ”, *J. Math. Soc. Japan*, **35**:3 (1983), 381–407.
21. D. D. Long, C. Maclachlan, A. W. Reid, “Arithmetic Fuchsian groups of genus zero”, *Pure Appl. Math. Q.*, **2**:2 (2006), 569–599.
22. M. Fekete, “Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten”, *Math. Z.*, **17**:1 (1923), 228–249.
23. З. И. Борович, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, 3-е изд., Наука, М., 1985; англ. пер. 1-го изд.: A. I. Borevich, I. R. Shafarevich, *Number theory*, Academic Press, New York–London, 1966.
24. Дж. В. С. Касселс, *Введение в теорию диофантовых приближений*, ИЛ, М., 1961; пер. с англ.: J. W. S. Cassels, *An introduction to Diophantine approximation*, Cambridge Univ. Press, New York, 1957.

В. В. НИКУЛИН (V. V. NIKULIN)
 Department of Mathematical Sciences,
 University of Liverpool, United Kingdom;
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: vnikulin@liv.ac.uk, vvnikulin@list.ru

Поступило в редакцию
 04.08.2010