Общероссийский математический портал

С. В. Пчелинцев, Первичные альтернативные алгебры, близкие к коммутативным,
Изв. РАН. Сер. матем., 2004, том 68, выпуск 1, 183–206

DOI: <https://doi.org/10.4213/im470>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 12:52:30

УДК 512.554.5

С. В. Пчелинцев

Первичные альтернативные алгебры, близкие к коммутативным

Доказано, что, деформируя умножение в первичной коммутативной альтернативной алгебре с помощью S -операции, получаем первичную некоммутативную альтернативную алгебру. При определенных ограничениях на некоммутативную алгебру указанная связь между алгебрами обратима. Частным случаем деформаций являются изотопы. Вводится и изучается линейное пространство, порожденное S -операциями Брака. Доказано, что пространство Брака порождается операциями ранга 1 и 2 и “общие” операции Брака ранга 2 независимы в следующем смысле: сумма n операций ранга 2 не может быть записана в виде линейной комбинации $(n - 1)$ -й операции ранга 2 и произвольной операции ранга 1. Указаны бесконечные серии неизоморфных первичных некоммутативных алгебр ограниченной степени, являющихся деформациями конкретной первичной коммутативной алгебры.

Библиография: 8 наименований.

Введение

Хорошо известна теорема Слейтера о строении первичных невырожденных альтернативных алгебр: всякая такая алгебра является либо ассоциативной алгеброй, либо кольцом Кэли–Диксона [1]. Если характеристика основного поля не равна трем, то первичная алгебра невырождена, т. е. не содержит ненулевых абсолютных делителей нуля. Напомним, что элемент a альтернативной алгебры A называется ее *абсолютным делителем нуля*, если $aAa = 0$. Первичные вырожденные алгебры называются *исключительными*. Существование исключительных первичных альтернативных алгебр было доказано автором в [2]; об их строении к настоящему времени известно недостаточно много.

Пусть A – исключительная первичная алгебра, I – ее ненулевой идеал. Тогда:

- а) I – исключительная алгебра [1, гл. 9];
- б) если c – обратимый элемент A , то изотоп I^c относительно умножения $x \cdot_c y := (xc)y$ является исключительной алгеброй; если алгебра A коммутативна, то всякий ее изотоп удовлетворяет тождеству ливевой нильпотентности индекса не более 4 [3].

Некоторые исключительные первичные алгебры можно получать с помощью простых альтернативных супералгебр. Более точно, свободная алгебра многообразия, порожденного грассмановой оболочкой простой супералгебры, всегда T -первична, но может быть и не первична. Этим свойством обладает супералгебра $B(1, 2)$ (см. § 3). Классификация простых альтернативных супералгебр произвольной характеристики получена И. П. Шестаковым [4].

Настоящая работа состоит из восьми параграфов и посвящена изучению исключительных первичных алгебр, в которых коммутативный центр отличен от центра; такие алгебры мы называем *близкими к коммутативным* (или *НС-алгебрами*).

В §1 собраны необходимые определения, общие обозначения и основные тождества. В §2 доказывается теорема 0.1, в связи с которой и возникает понятие “NC-алгебры”.

ТЕОРЕМА 0.1. Пусть A – альтернативная алгебра над произвольным полем, $K(A)$ – ее коммутативный центр, $(K(A), A, A)^\nabla$ и $E(A)$ – идеалы, порожденные соответственно ассоциаторами (k, a, b) , где $k \in K(A)$, $a, b \in A$, и коммутаторами $[[x, y], y]$, где $x, y \in A$. Тогда идеалы $(K(A), A, A)^\nabla$ и $E^2(A)$ аннулируют друг друга.

Далее, из теоремы 0.1 выводятся следствия. В частности, доказано, что исключительная первичная альтернативная алгебра удовлетворяет тождеству лиевой нильпотентности индекса n только при $n = 2, 3, 4$ (следствие 2.2).

В §3 вводится понятие NC-алгебры и доказывается, что исключительная первичная альтернативная алгебра является NC-алгеброй тогда и только тогда, когда ее нильрадикал является нильалгеброй индекса 3 (теорема 3.1). Кроме того, в этом параграфе доказывается, что простая супералгебра $B(1, 2)$ не связана с первичными алгебрами.

В §4–7 изучено строение NC-алгебр. В §4 доказана теорема 4.1, позволяющая сводить описание структуры NC-алгебр к изучению C-операций на первичных коммутативных алгебрах (C-операция является коммутатором в исходной алгебре, откуда и происходит ее название). Каждая ненулевая C-операция σ на первичной коммутативной альтернативной алгебре S позволяет определить на ней структуру некоммутативной первичной альтернативной алгебры S^σ (деформация алгебры S). Верно и обратное утверждение: всякая исключительная первичная NC-алгебра A является деформацией $(A^{(+)})^\sigma$ присоединенной алгебры, где σ – подходящая C-операция на первичной коммутативной альтернативной алгебре $A^{(+)}$.

Простейший пример C-операций – коммутатор на изотопе. В §5 вводится естественное обобщение указанного примера – это В-операции, тесно связанные с известными функциями Брака [5]. Согласно теореме 5.1 каждой первичной коммутативной альтернативной алгебре S можно сопоставить линейное пространство Брака $\mathfrak{Br}(S)$, порожденное В-операциями. Тем самым пространство $\mathfrak{Br}(S)$ можно рассматривать как меру множества таких первичных альтернативных алгебр A , что $A^{(+)} = S$.

В §6 получены теоремы 6.1 и 6.2 о структуре пространства Брака $\mathfrak{Br}(S)$. Более точно, доказано, что пространство Брака линейно порождается В-операциями ранга не более 2, а “общие” В-операции ранга 2 независимы в следующем смысле: сумма n операций ранга 2 не может быть записана в виде линейной комбинации $(n - 1)$ -й операции ранга 2 и произвольной операции ранга 1.

В §7 построены две бесконечные серии неизоморфных алгебр ограниченной степени, являющихся деформациями исключительной первичной коммутативной альтернативной алгебры. Алгебры этих серий обладают, на самом деле, более сильным свойством: алгебры разных серий не могут быть получены факторизацией одна из другой (теоремы 7.1 и 7.2). Одна серия состоит из лиевых нильпотентных алгебр индекса 3 (такие алгебры называются *строгими*), а другая – из лиевых нильпотентных алгебр индекса 4.

В §8 приведен пример однородной C-операции, отличной от операции Брака.

В заключение работы сформулированы открытые вопросы.

§ 1. Определения, общие обозначения, основные тождества

1.1. Основные определения и обозначения. В настоящей работе используются следующие обозначения:

- коммутатор $[a, b] = ab - ba$;
- йорданово произведение $a \circ b = ab + ba$;
- ассоциатор $(a, b, c) = (ab)c - a(bc)$;
- алгебра $A^\#$, полученная из A внешним присоединением единицы;
- идеал X^∇ алгебры A , порожденный подмножеством X алгебры A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Алгебра называется *альтернативной*, если ассоциатор в ней является кососимметрической функцией.

Далее через A обозначается альтернативная алгебра над полем Φ характеристики 3.

Пусть $A^- = \langle A; +; [\cdot, \cdot] \rangle$ и $A^+ = \langle A; +; \circ \rangle$ – присоединенные лиева и йорданова алгебры. Алгебра A^- удовлетворяет тождеству Якоби

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0,$$

а алгебра A^+ – тождеству Йордана

$$(a^2, b, a)^+ = 0,$$

где $(a, b, c)^+$ – ассоциатор в алгебре A^+ . Наряду с A^+ мы рассматриваем также алгебру $A^{(+)}$ с умножением $\frac{1}{2} a \circ b$; ассоциатор в алгебре $A^{(+)}$ обозначается через $(a, b, c)^{(+)}$. Заметим, что поскольку характеристика поля равна трем, то верно равенство $(a, b, c)^{(+)} = (a, b, c)^+$.

Операторы правого умножения на элемент a в алгебрах A , A^+ , A^- будем обозначать через R_a , R_a^+ , R_a^- соответственно.

1.2. Тождества альтернативных алгебр. Напомним основные тождества, выполняющиеся в произвольной альтернативной алгебре характеристики 3 [1]:

$$[ab, c] = a[b, c] + [a, c]b, \quad (1.1)$$

$$[a \circ b, c] = a \circ [b, c] + [a, c] \circ b, \quad (1.2)$$

$$(a, b, c) = (a, b, c)^+ + [[a, c], b], \quad (1.3)$$

$$(a, x, xb) = (a, x, b)x, \quad (a, x, bx) = x(a, x, b), \quad (1.4)$$

$$(x \circ y, a, b) = (x, a, b) \circ y + x \circ (y, a, b), \quad (1.5)$$

$$(ab, r, s) + (a, b, [r, s]) = a(b, r, s) + (a, r, s)b, \quad (1.6)$$

$$([a, b], r, s) + 2(a, b, [r, s]) = [a, (b, r, s)] + [(a, r, s), b]. \quad (1.7)$$

Тождества (1.4) и (1.5) называются *тождествами Муфана*, а тождества (1.6) и (1.7) – *тождествами Клейнфелда*.

Напомним, что линейное отображение $x \rightarrow x'$ алгебры A в себя называется *дифференцированием*, если для любых $x, y \in A$ выполнено $(xy)' = x'y + xy'$. Из тождеств (1.2) и (1.5) вытекает, что операторы $R_a^- : x \rightarrow [x, a]$ и $R(a, b) := R_a R_b - R_{ab} : x \rightarrow (x, a, b)$ являются дифференцированиями йордановой алгебры A^+ .

Множество операторов вида R_a^- и $R(a, b)$ обозначим через $\delta(A)$. Подпространство V алгебры A назовем *δ -инвариантным*, если $V\delta(A) \subseteq V$. Заметим, что йорданово произведение δ -инвариантных подпространств является δ -инвариантным подпространством.

§ 2. О коммутативном центре

Целью этого параграфа является доказательство теоремы 0.1. Заметим, что если характеристика не равна 3, то $(K(A), A, A) = 0$.

2.1. Идеал $E(A)$. Обозначим через $E_0(A)$ и $E(A)$ линейную оболочку и идеал, порожденные коммутаторами вида $[[a, b], b]$. Ясно, что $[[a, b], c] + [[a, c], b] \in E_0(A)$. Идеал $E(A)$ назовем *2-энгелевым* идеалом алгебры A . Алгебру A назовем *энгелевой* *индекса 2* (или *2-энгелевой*), если $E(A) = 0$.

ЛЕММА 2.1. *Если V – δ -инвариантное подпространство алгебры A , то идеал V^∇ представим в виде $V^\nabla = V \circ A^\#$, т. е. всякий элемент идеала V^∇ является линейной комбинацией элементов вида $v \circ x$, где $v \in V$, $x \in A^\#$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу тождеств (1.2) и (1.3) имеем

$$\begin{aligned} [v \circ x, y] &= v \circ [x, y] + [v, y] \circ x \in V \circ A^\#, \\ (v \circ x) \circ y &= v \circ (x \circ y) + (v, x, y)^+ = v \circ (x \circ y) + (v, x, y) - [[v, y], x] \in V \circ A^\#. \end{aligned}$$

Поскольку верно равенство $2(v \circ x)y = (v \circ x) \circ y + [v \circ x, y]$, то лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. $E_0(A)$ – δ -инвариантное подпространство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $[[a, b], b]$ – йорданов многочлен от a, b , а отображения $R_x^-, R(x, y)$ – йордановы дифференцирования, то $E_0(A)$ δ -инвариантно.

ЛЕММА 2.3. а) $E(A) = E_0(A) \circ A^\# \subseteq U + U \circ U$, где $U = [A, A]$;

б) $[x, y]^2, [[x, y], z], [t] \in E(A)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Из лемм 2.1 и 2.2 вытекает равенство $E(A) = E_0(A) \circ A^\#$. Поскольку $[[x, y], y] \circ z = [[x, y] \circ z, y] - [x, y] \circ [z, y] \in U + U \circ U$, то $E(A) \subseteq U + U \circ U$.

б) Аналогично п. а) имеем

$$\begin{aligned} 2[x, y]^2 &= [x, y] \circ [x, y] = [[x, y] \circ x, y] - [[x, y], y] \circ x \\ &= [[x^2, y], y] - [[x, y], y] \circ x \in E(A). \end{aligned}$$

Второе соотношение п. б) хорошо известно: алгебра Ли с тождеством $[[a, b], b] = 0$ характеристики, не равной 2, нильпотентна индекса $n \leq 4$.

2.2. Функция $f_k(a, b, c)$. Введем в рассмотрение функцию

$$f_k(a, b, c) := (k, a, [b, c]), \quad k \in K(A), \quad a, b, c \in A.$$

ЛЕММА 2.4. *Если $k \in K(A)$, то в произвольной альтернативной алгебре A :*

а) функции $f_k(a, b, c)$ и $[(k, a, b), c]$ кососимметричны по a, b, c ;

б) $2f_k(a, b, c) = [(k, a, b), c]$, $f_k(a, b, c) = 2[(k, a, b), c]$;

в) $(k, [a, b], [c, d]) = 0$, $f_k(a, b, [c, d]) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Поскольку в силу тождеств Муфанг справедливы равенства

$$(k, b, [b, c]) = [(k, b, c), b] = ([b, k], b, c) = 0,$$

то функции $(k, a, [b, c])$ и $[(k, a, b), c]$ кососимметричны по переменным a, b, c .

б) Из тождества Клейнфелда (1.7) на основании утверждения а) получаем

$$2(k, a, [b, c]) = [(k, b, c), a] = [(k, a, b), c].$$

в) Функция $f_k(a, b, [c, d])$ кососимметрична по a, b , а также по c, d . Покажем, что она кососимметрична по b, d . В силу утверждений а) и б) имеем

$$f_k(a, b, [c, b]) = f_k([c, b], a, b) = 2[(k, [c, b], a), b] = 2[(k, [a, c], b), b] = 0.$$

Следовательно, функция $f_k(a, b, [c, d])$ кососимметрична по a, b, c, d .

Далее, $f_k(a, b, [c, d]) = f_k([c, d], a, b) = (k, [c, d], [a, b])$, откуда в силу кососимметричности функции f_k получаем $(k, [c, d], [a, b]) = (k, [a, b], [c, d])$. С другой стороны, в силу правой альтернативности $(k, [c, d], [a, b]) = -(k, [a, b], [c, d])$. Суммируя почленно два последних равенства, имеем $2(k, [c, d], [a, b]) = 0$. Лемма доказана.

2.3. Доказательство теоремы 0.1. Учитывая леммы 2.3 и 2.4, имеем

$$(k, E(A), E(A)) \subseteq (k, U + U \circ U, U + U \circ U) \subseteq (k, U, U)^\nabla = 0.$$

Далее, равенство $(k, E(A), E(A)) = 0$ влечет включение $(k, A, E(A)) \subseteq \text{Ann } E(A)$, и, аналогично,

$$(k, A, A)^\nabla E(A) + E(A)(k, A, A)^\nabla \subseteq \text{Ann } E(A).$$

Поскольку в альтернативной алгебре квадрат идеала является идеалом, то отсюда вытекает требуемое утверждение.

2.4. Следствия из теоремы 0.1. Прежде всего заметим, что из теоремы 0.1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2.1. Пусть A – исключительная первичная алгебра. Тогда либо A удовлетворяет тождеству энгелевности индекса 2, либо коммутативный центр $K(A)$ совпадает с центром $Z(A)$. В частности, если A – ниль-алгебра, то $E(A) = 0$ или $K(A) = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Алгебра A называется *левой нильпотентной индекса n* , если ее коммутаторная алгебра A^- является нильпотентной индекса n .

В работах [2], [3] были указаны первичные альтернативные алгебры, левые нильпотентные индекса $n = 2, 3, 4$. В этом пункте докажем, что не существует первичных альтернативных алгебр, левых нильпотентных индекса не менее 5.

СЛЕДСТВИЕ 2.2. Исключительная первичная альтернативная алгебра удовлетворяет тождеству левой нильпотентности индекса n только для одного из трех значений: $n = 2, 3, 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если первичная алгебра A лиева нильпотентна индекса $n > 4$, то она не может быть 2-энгелевой, и тогда в силу следствия 2.1 верно равенство $K(A) = Z(A)$. Пусть $L_1 = A, \dots, L_n = [L_{n-1}, A]$. Тогда $L_{n-1} \subseteq Z(A)$. Кроме того, используя тождество (1.1), легко понять, что произведение коммутаторов веса $n - 1$ равно нулю, значит, $L_{n-1} = 0$ ввиду первичности алгебры.

§ 3. О нильрадикале NC-алгебры

3.1. Понятие NC-алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Исключительную первичную алгебру A назовем *близкой к коммутативной* (или *NC-алгеброй*), если выполнены эквивалентные условия:

$$K(A) \neq Z(A), \quad E(A) = 0.$$

По лемме 2.3 всякая NC-алгебра удовлетворяет следующим тождествам:

$$[x, y]^2 = 0, \tag{3.1}$$

$$[[x, y], z], t] = 0. \tag{3.2}$$

Справедлив критерий NC-алгебры.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть алгебра A – исключительная первичная. Тогда A является NC-алгеброй, если и только если ее нильрадикал $\text{Nil}(A)$ является нильалгеброй индекса 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – NC-алгебра, $x \in A$. Покажем, что элемент x^3 централен. Пусть $'$ – йорданово дифференцирование алгебры A . Тогда, учитывая, что алгебра A имеет характеристику 3 и $x^3 = (x \circ x) \circ x$, получаем

$$(x^3)' = x^2x' + xx'x + x'x^2 = x^2x' - 2xx'x + x'x^2 = [[x', x], x] = 0.$$

Поскольку R_a^- и $R(a, b)$ – йордановы дифференцирования, то $x^3 \in Z(A)$. Так как центр первичной алгебры не содержит ненулевых нильпотентных элементов, то нильрадикал является нильалгеброй индекса 3.

Обратно, пусть нильрадикал $\text{Nil}(A)$ удовлетворяет тождеству $x^3 = 0$, но алгебра A не является 2-энгелевой. Тогда $K(A) = Z(A)$. Линеаризуем тождество $x^3 = 0$:

$$x^2y + xyx + yx^2 = 0.$$

Далее, $[[y, x], x] = (yx - xy)x - x(yx - xy) = yx^2 - 2xyx + x^2y = x^2y + xyx + yx^2$, поскольку характеристика равна 3. Значит, $\text{Nil}(A)$ удовлетворяет тождеству 2-энгелевости. Тогда $\text{Nil}(A)$ удовлетворяет тождеству (3.2). Отсюда в силу (1.1) имеем $[[x, y], z] \in Z(A)$ для любых $x, y, z \in \text{Nil}(A)$, значит, $[[x, y], z] = 0$. Точно так же получаем $[\text{Nil}(A), \text{Nil}(A)] = 0$, $\text{Nil}(A) = 0$, что невозможно. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Пусть A – первичная NC-алгебра. Тогда факторалгебра $A/\text{Nil}(A)$ является алгеброй без нильпотентных элементов.

Пусть S – свободная первичная коммутативная альтернативная нильалгебра индекса 3 счетного ранга (см. [2]). Тогда алгебра $S^\#$ также первична [3, лемма 2]. Можно показать, что свободная алгебра A счетного ранга многообразия, порожденного алгеброй $S^\#$, первична, а факторалгебра $A/\text{Nil}(A)$ – алгебра многочленов $\Phi[t_1, t_2, \dots]$.

3.2. О связи простых супералгебр с первичными алгебрами. Напомним [4], что супералгебра B над полем Φ характеристики 3 с базисом $1, x, y$ (1 – четный элемент; x, y – нечетные элементы) называется *супералгеброй* $B(1, 2)$, если умножение суперкоммутативно, 1 – единица и $xy = 1$. Известно, что супералгебра B проста и суперальтернативна.

Докажем, что супералгебра $B(1, 2)$ не приводит к исключительным первичным альтернативным алгебрам. Более точно, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Многообразие, порожденное грассмановой оболочкой $S := G(B)$ супералгебры $B(1, 2)$, не содержит исключительных первичных алгебр.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что пространство $V(B) := (B, B, B)$ совпадает с нечетной частью супералгебры B , значит, $V^2(B) = \Phi \cdot 1$, откуда

$$(V^2(B), B, B) = 0.$$

Тогда в алгебре S выполнено равенство $(V^2(S), S, S) = 0$, т.е. $V^2(S) \subseteq Z(S)$. Далее, $V^2(S) \subseteq \text{Nil}(S)$.

Пусть A – исключительная первичная алгебра из многообразия, порожденного алгеброй S . Тогда $V^2(A) = 0$. Отсюда вытекает, что идеал W^∇ , порожденный множеством $W := (V(A), A, A)$, удовлетворяет соотношениям $W^\nabla = WA^\# \subseteq V(A)$, значит, W^∇ – идеал с нулевым умножением, и $W = 0$ ввиду первичности алгебры A . Тогда $V(A) \subseteq Z(A) \cap \text{Nil}(A)$ и $V(A) = 0$, т.е. алгебра A ассоциативна. Противоречие.

§ 4. Структура первичных 2-энгелевых алгебр

В этом параграфе изучается конструкция, позволяющая получать произвольные первичные альтернативные 2-энгелевы алгебры из первичных коммутативных альтернативных алгебр.

4.1. Понятие С-операции. Пусть A – альтернативная алгебра. Тогда в силу тождества (1.3) алгебра $A^{(+)}$ йорданова, причем $A^{(+)}$ альтернативна тогда и только тогда, когда A энгелева индекса 2. Поскольку переход от A к $A^{(+)}$ сохраняет свойство первичности (см. лемму 4.2 далее), то структура алгебры A определяется алгеброй $A^{(+)}$ и операцией коммутирования в алгебре A (отсюда и название “С-операция”).

Такой подход впервые был предложен В. Г. Скосырским [6] при изучении строго первичных некоммутативных йордановых алгебр.

Всюду далее через S обозначается исключительная первичная коммутативная альтернативная алгебра над полем Φ характеристики 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Билинейное отображение $\sigma: S \times S \rightarrow S$ назовем *С-операцией*, если выполнены условия:

- а) $x\sigma x = 0$ (кососимметричность);
- б) $x^2\sigma y = (x\sigma y) \circ x$ (дифференциальность);
- в) $(x\sigma y)\sigma y = 0$ (2-энгелевость).

Линеаризуя условие б), получаем

$$(xy)\sigma z = 2(x \circ y)\sigma z = 2(x\sigma z) \circ y + 2(y\sigma z) \circ x = (x\sigma z)y + x(y\sigma z).$$

Заметим, что последнее равенство равносильно условию б).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пусть на алгебре S задана С-операция σ . Алгебру S^σ с той же аддитивной структурой, что и S , но другим умножением $*$: $x * y = xy + 2x\sigma y$, где xy – произведение в S , назовем (*некоммутативной*) *деформацией* алгебры S .

Заметим, что степени элементов в алгебрах S^σ и S совпадают.

ЛЕММА 4.1. а) Коммутатор в деформированной алгебре S^σ совпадает со значением операции σ в алгебре S .

б) Деформация S^σ альтернативна и 2-энгелева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\langle x, y \rangle := x\sigma y$ и вычислим коммутатор в алгебре S^σ :

$$[a, b]^* = ab + 2\langle a, b \rangle - (ba + 2\langle b, a \rangle) = 4\langle a, b \rangle = \langle a, b \rangle.$$

Значит, $[[a, b]^*, b]^* = [\langle a, b \rangle, b]^* = \langle \langle a, b \rangle, b \rangle = 0$, т. е. алгебра S^σ является 2-энгелевой.

Теперь вычислим ассоциатор в алгебре S^σ :

$$\begin{aligned} (a, b, c)^* &= (a * b) * c - a * (b * c) = (ab + 2\langle a, b \rangle) * c - a * (bc + 2\langle b, c \rangle) \\ &= (ab + 2\langle a, b \rangle)c + 2\langle ab + 2\langle a, b \rangle, c \rangle - a(bc + 2\langle b, c \rangle) - 2\langle a, bc + 2\langle b, c \rangle \rangle \\ &= (a, b, c) + 2(\langle a, b \rangle c - a\langle b, c \rangle) + 2(\langle ab, c \rangle - \langle a, bc \rangle) + (\langle \langle a, b \rangle, c \rangle - \langle a, \langle b, c \rangle \rangle) \\ &= (a, b, c) + (\langle b, a \rangle c + \langle b, c \rangle a) + 2(\langle ba, c \rangle + \langle bc, a \rangle) + (\langle \langle a, b \rangle, c \rangle + \langle \langle b, c \rangle, a \rangle). \end{aligned}$$

Проверим последовательно, что алгебра S^σ удовлетворяет тождествам эластичности

$$\begin{aligned} (a, b, a)^* &= (a, b, a) + (\langle b, a \rangle a + \langle b, a \rangle a) \\ &\quad + 2(\langle ba, a \rangle + \langle ba, a \rangle) + (\langle \langle a, b \rangle, a \rangle + \langle \langle b, a \rangle, a \rangle) \\ &= 2\langle b, a \rangle a + \langle ba, a \rangle = 3\langle b, a \rangle a + b\langle a, a \rangle = 0 \end{aligned}$$

и правой альтернативности

$$\begin{aligned} (a, b, b)^* &= (a, b, b) + (\langle b, a \rangle b + \langle b, b \rangle a) \\ &\quad + 2(\langle ba, b \rangle + \langle b^2, a \rangle) + (\langle \langle a, b \rangle, b \rangle + \langle \langle b, b \rangle, a \rangle) \\ &= \langle b, a \rangle b + 2\langle ba, b \rangle + 2\langle b^2, a \rangle = \langle b, a \rangle b + 2\langle a, b \rangle b + 4\langle b, a \rangle b \\ &= 5\langle b, a \rangle b + 2\langle a, b \rangle b = 2\langle b, a \rangle b + 2\langle a, b \rangle b = 0. \end{aligned}$$

4.2. Лемма о первичности алгебр A и A^+ . Алгебра A называется невырожденной, если она не содержит ненулевых абсолютных делителей нуля [1]. Из структурной теории альтернативных алгебр легко вывести, что для невырожденной альтернативной алгебры A верно утверждение: A первична тогда и только тогда, когда A^+ первична.

Заметим, что импликация $\Leftarrow$ верна всегда, без каких-либо ограничений на A .

Действительно, допустим, что алгебра A^+ первична, I – тривиальный идеал в A , т. е. $I^2 = 0$. Тогда I – идеал в A^+ и $I \circ I = 0$, откуда в силу первичности A^+ получаем $I = 0$. Итак, мы доказали, что A полупервична. Пусть теперь I, J – идеалы в A и $IJ = 0$. Тогда $I \cap J$ – тривиальный идеал в A , значит, $I \cap J = 0$. Наконец, $I \circ J \subseteq IJ + JI \subseteq I \cap J = 0$, откуда в силу первичности A^+ либо $I = 0$, либо $J = 0$.

Справедливость обратной импликации в общем случае неизвестна. Однако для 2-энгелевых алгебр она имеет место. Для доказательства этого утверждения нам потребуется лемма, принадлежащая Слейтеру [1, с. 209]: *если I – ненулевой идеал первичной альтернативной алгебры A , $t \in A$ и $(t, I, I) = 0$, то $(t, A, A) = 0$.*

ЛЕММА 4.2. *Если A – первичная альтернативная 2-энгелева алгебра, то алгебра A^+ также первична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть J, H – такие ненулевые идеалы в A^+ , что $J \circ H = 0$. Как и прежде, через J^∇ обозначим идеал алгебры A , порожденный множеством J .

1°. Покажем сначала, что $J^\nabla = J + [J, A]$.

Ясно, что $JA + AJ \subseteq J + [J, A]$. Далее, ввиду 2-энгелевости верно включение

$$[[J, A], A] \subseteq [[A, J], A] \subseteq [[A, A], J] \subseteq [J, A].$$

Используя тождество (1.2), получаем $[J, A] \circ A \subseteq [J \circ A, A] + J \circ [A, A] \subseteq [J, A] + J$.

2°. Пусть $K := K(A)$. Тогда справедливы равенства

$$(K, J, H) = (K, J, [H, A]) = (K, H, [J, A]) = (K, [J, A], [H, A]) = 0.$$

Действительно, в силу (1.3) имеем $(K, J, H) = (K, J, H)^+ = (K \circ J) \circ H - K \circ (J \circ H) = 0$, откуда на основании леммы 2.4 $(K, J, [H, A]) = [(K, J, H), A] = 0$. В силу равноправия идеалов J, H получаем $(K, H, [J, A]) = 0$. Наконец, последнее равенство $(K, [J, A], [H, A]) = 0$ справедливо в силу леммы 2.4, в).

3°. Используя утверждения предыдущих пунктов, получим

$$(K, J^\nabla, H^\nabla) \subseteq (K, J, H) + (K, J, [H, A]) + (K, H, [J, A]) + (K, [J, A], [H, A]) = 0.$$

Применяя теперь лемму Слейтера для идеала $J^\nabla H^\nabla$, получаем $K(A) = Z(A)$. Поскольку ввиду леммы 2.3 всякая 2-энгелева алгебра удовлетворяет тождествам (3.1) и (3.2), а центр $Z(A)$ первичной алгебры A не содержит нильпотентных элементов, то получаем последовательно тождества строгости $[[x, y], z] = 0$ и коммутативности $[x, y] = 0$. Однако для коммутативной алгебры утверждение леммы тривиально.

Полученные результаты объединим в теорему.

ТЕОРЕМА 4.1. *Если A – первичная альтернативная 2-энгелева алгебра, то присоединенная алгебра $A^{(+)}$ (с умножением $(x, y) \rightarrow \frac{1}{2}x \circ y$) является первичной коммутативной альтернативной алгеброй; коммутатор в алгебре A является C -операцией на $A^{(+)}$.*

Обратно, если S – первичная коммутативная альтернативная алгебра с некоторой C -операцией σ , то ее деформация S^σ (с умножением $(x, y) \rightarrow xy + 2x\sigma y$, где xy – произведение в S) является первичной альтернативной 2-энгелевой алгеброй и присоединенная алгебра к деформации S^σ совпадает с S , т. е. $(S^\sigma)^{(+)} = S$.

§5. Операции Брака

В этом параграфе начинаем изучение C -операций. Выделим специальный класс C -операций, которые назовем *В-операциями* (в честь Р. Брака), и покажем, что линейные комбинации В-операций являются C -операциями. Таким образом, множество всех C -операций $\mathfrak{C}(S)$ на первичной коммутативной альтернативной алгебре S содержит линейное пространство $\mathfrak{Bt}(S)$, порожденное В-операциями. Пространство $\mathfrak{Bt}(S)$ назовем *пространством Брака алгебры S* .

5.1. Изотопы коммутативных алгебр. Пусть S – коммутативная альтернативная алгебра с единицей над полем характеристики 3, c – обратимый элемент в S . Обозначим через S^c изотоп алгебры S . Напомним, что алгебра S^c имеет ту

же аддитивную структуру, что и алгебра S , а умножение в алгебре S^c определено равенством $x \cdot_c y = (xc)y$, где xy — умножение в S .

Заметим, что отображение $': S \rightarrow (S^c)^{(+)}$, $a' = ac^{-1}$, является изоморфизмом алгебр, поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (a' \circ_c b') &= 2(a' \circ_c b') = 2a' \cdot_c b' + 2b' \cdot_c a' \\ &= 2(ac^{-1}) \cdot_c (bc^{-1}) + 2(bc^{-1}) \cdot_c (ac^{-1}) \\ &= 2a(bc^{-1}) + 2b(ac^{-1}) = 2(a \circ b)c^{-1} = (ab)c^{-1} = (ab)'. \end{aligned}$$

Вычислим коммутатор в изотопе S^c :

$$\begin{aligned} [x, y]_c &= x \cdot_c y - y \cdot_c x = (xc)y - (yc)x = (cx)y - (cy)x \\ &= (c, x, y) - (c, y, x) = 2(c, x, y) = -(c, x, y) = (x, c, y). \end{aligned}$$

Заметим, что $2x \cdot_c y = x' \circ_c y' + [x, y]_c$, откуда $x \cdot_c y = \frac{1}{2} (x' \circ_c y') + 2[x, y]_c$. Поскольку для любого $c \in S$ отображение $\sigma: (x, y) \rightarrow (x, c, y)$ является S -операцией на алгебре S , то, отождествляя алгебры S и $(S^c)^{(+)}$, получаем, что изотоп S^c совпадает с деформацией S^σ .

5.2. Вспомогательная лемма.

ЛЕММА 5.1. *Если на алгебре S задана S -операция σ , то для фиксированного $a \in S$ операция $x \diamond y = (x\sigma a, a, y)$ также является S -операцией на алгебре S .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через A деформацию S^σ . Напомним, что умножение в A имеет вид $x * y = xy + 2x\sigma y$, где xy — произведение в алгебре S ; $A^{(+)} = S$ и коммутатор в алгебре A совпадает с S -операцией σ . Как обычно, (x, y, z) , $(x, y, z)^*$ и $(x, y, z)^{(+)}$ обозначают ассоциаторы в алгебрах S , A и $A^{(+)}$. В силу тождеств (1.3) и (3.2) имеем

$$\begin{aligned} x \diamond y &= (x\sigma a, a, y) = (x\sigma a, a, y)^{(+)} = (x\sigma a, a, y)^* - [[x\sigma a, y]^*, a]^* \\ &= ([x, a]^*, a, y)^* - [[[x, a]^*, y]^*, a]^* = ([x, a]^*, a, y)^*. \end{aligned}$$

Поскольку алгебра A альтернативна и степени элементов в алгебрах A и S совпадают, то операция $x \diamond y$ является S -операцией на алгебре S :

$$\begin{aligned} \text{а) } x \diamond x &= ([x, a]^*, a, x)^* = 0, \\ \text{б) } x^2 \diamond y &= ([x * x, a]^*, a, y)^* = -([y, a]^*, a, x * x)^* \\ &= -([y, a]^*, a, x)^* * x - x * ([y, a]^*, a, x)^* \\ &= (x \diamond y) * x + x * (x \diamond y) = (x \diamond y)x + x(x \diamond y) = (x \diamond y) \circ x, \\ \text{в) } (x \diamond y) \diamond y &= ([x, a]^*, a, y)^* \diamond y = ([([x, a]^*, a, y)^*, a]^*, a, y)^* = 0, \end{aligned}$$

так как в силу тождеств Муфанг и 2-энгелевости

$$([([x, a]^*, a, y)^*, a]^*, a, y)^* = -([([x, a]^*, a, y)^*, a, y)^* = 0.$$

5.3. Функции Брака. Пусть L – коммутативная лупа Муфанг (КЛМ), т. е. лупа, удовлетворяющая тождествам $xy = yx$, $((xy)z)y = x((yz)y)$. Следуя работе [5], введем функции

$$[a, b, c] = (ab \cdot c)(a \cdot bc)^{-1},$$

$$x\beta_1(a)y = [x, a, y], \quad \dots, \quad x\beta_{n+1}(a_1, a_2, \dots, a_n, b)y = [x\beta_n(a_1, a_2, \dots, a_n)b, b, y].$$

Эти функции существенно использовались Браком при доказательстве его знаменитой теоремы о центральной нильпотентности конечно порожденной КЛМ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ – фиксированные элементы алгебры S . По индукции определим отображения

$$\beta_n: A \times A \rightarrow A, \quad (x, y) \rightarrow x\beta_n(a_1, a_2, \dots, a_n)y,$$

предполагая $x\beta_1(a_1)y = (x, a_1, y)$, $x\beta_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1})y = (x\beta_n(a_1, \dots, a_n)a_{n+1}, a_{n+1}, y)$.

Отображение β_n назовем *операцией Брака* (или *В-операцией*) *ранга* n .

Из леммы 5.1 вытекает, что В-операция является С-операцией.

ЛЕММА 5.2. *Во всякой коммутативной альтернативной алгебре функция Брака $x\beta_n(y, a_2, \dots, a_n)z$ кососимметрична по x, y, z и симметрична по $a_2, \dots, a_n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Кососимметричность функции Брака по x, y следует из альтернативности алгебры S , кососимметричность по x, z вытекает из леммы 5.1. Для доказательства симметричности по переменным $a_2, \dots, a_n$ достаточно проверить равенство $\beta_3(a, b, c) = \beta_3(a, c, b)$. Полагая $w := (a, b, c)$ и используя лемму 5.1, имеем

$$\begin{aligned} & ((x, a, b), b, c), c, y) - ((x, a, c), c, b), b, y) \\ &= -(((c, a, b), b, x), c, y) + ((b, a, c), c, x), b, y) \\ &= -((w, b, x), c, y) - ((w, c, x), b, y) = 0, \end{aligned}$$

поскольку в силу [7, лемма 2] в коммутативной алгебре выполнено тождество $((w, b, x), b, y) = 0$ и его линеаризация $b \rightarrow c$ приводит к равенству $((w, b, x), c, y) + ((w, c, x), b, y) = 0$.

5.4. Согласованность операций. Поскольку С-операции являются билинейными отображениями, то их можно складывать и умножать на скаляры из основного поля Φ , получая снова билинейные отображения. Множество $\mathfrak{C}(S)$ всех С-операций на S , очевидно, замкнуто относительно умножения на скаляры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. С-операции $\sigma, \tau \in \mathfrak{C}(S)$ назовем *согласованными*, если

$$(x\sigma y)\tau y + (x\tau y)\sigma y = 0 \quad \forall x, y \in A.$$

ЛЕММА 5.3. *Сумма С-операций является С-операцией только в случае их согласованности. Линейные комбинации попарно согласованных С-операций являются согласованными С-операциями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что сумма С-операций является кососимметрическим дифференцированием. Пусть σ, τ – С-операции и $\omega := \sigma + \tau$. Тогда

$$\begin{aligned} (x\omega y)\omega y &= (x(\sigma + \tau)y)(\sigma + \tau)y = (x\sigma y + x\tau y)(\sigma + \tau)y \\ &= (x\sigma y)\sigma y + (x\tau y)\tau y + \{(x\sigma y)\tau y + (x\tau y)\sigma y\} = (x\sigma y)\tau y + (x\tau y)\sigma y. \end{aligned}$$

Значит, отображение ω удовлетворяет условию 2-энгелевости тогда и только тогда, когда С-операции σ и τ согласованы.

ЛЕММА 5.4. *Любые две В-операции согласованы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждения функцию Брака удобно записать в виде $\langle xa_0a_1^2 \dots a_n^2y \rangle := x\beta_{n+1}(a_0, a_1, \dots, a_n)y$. Пусть В-операции σ, τ заданы формулами $x\sigma y = \langle xa_0a_1^2 \dots a_n^2y \rangle$, $x\tau y = \langle xb_0b_1^2 \dots b_m^2y \rangle$. Тогда, применяя лемму 5.2, получаем

$$\begin{aligned} (x\sigma y)\tau y + (x\tau y)\sigma y &= \langle \langle xa_0a_1^2 \dots a_n^2y \rangle b_0b_1^2 \dots b_m^2y \rangle + \langle \langle xb_0b_1^2 \dots b_m^2y \rangle a_0a_1^2 \dots a_n^2y \rangle \\ &= -\langle xa_0a_1^2 \dots a_n^2y^2b_1^2 \dots b_m^2b_0 \rangle - \langle xb_0b_1^2 \dots b_m^2y^2a_1^2 \dots a_n^2a_0 \rangle \\ &= \langle b_0a_0a_1^2 \dots a_n^2y^2b_1^2 \dots b_m^2x \rangle + \langle a_0b_0b_1^2 \dots b_m^2y^2a_1^2 \dots a_n^2x \rangle \\ &= \langle b_0a_0a_1^2 \dots a_n^2b_1^2 \dots b_m^2y^2x \rangle + \langle a_0b_0a_1^2 \dots a_n^2b_1^2 \dots b_m^2y^2x \rangle = 0. \end{aligned}$$

Их двух последних лемм вытекает

ТЕОРЕМА 5.1. *Линейное пространство Брака $\mathfrak{Br}(S)$, порожденное всеми В-операциями, содержится во множестве $\mathfrak{C}(S)$ всех С-операций на S .*

5.5. О тождествах коммутативных альтернативных алгебр.

ЛЕММА 5.5. *Пусть S – исключительная первичная коммутативная альтернативная алгебра. Для любого n на алгебре S существует ненулевая В-операция ранга n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что на алгебре S все В-операции ранга $n + 1$ нулевые. Введем функцию $f(x, y) := x\beta_n(y, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})t$. Из леммы 5.2 вытекает, что функция $f(x, y)$ является дифференцированием по x, y . Кроме того,

$$\begin{aligned} f((x, y, z), z) &= (x, y, z)\beta_n(z, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})t \\ &= x\beta_{n+1}(y, z, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})t = 0. \end{aligned}$$

Тогда в силу [8, лемма 10, в)] получаем, что $f(x, y) = 0$. Отсюда следует, что на алгебре S все В-операции ранга n нулевые, значит, на алгебре S все В-операции нулевые, что невозможно ввиду неассоциативности алгебры S .

Отметим одно применение функций Брака.

Пусть $\mathbf{C}$ – многообразие коммутативных альтернативных алгебр над полем характеристики 3; $\mathbf{C}_n$ – многообразие, порожденное $\mathbf{C}$ -свободной алгеброй от n порождающих. Известно [8, теорема 2], что в цепочке $\mathbf{C}_2 \subset \mathbf{C}_3 \subset \dots \subset \mathbf{C}_n \subset \dots$ все включения строгие, начиная с восьмого члена. Из лемм 5.2 и 5.5 вытекает строгость всех включений в указанной цепочке.

§6. Пространство операций Брака

6.1. Порождающие пространства Брака.

ТЕОРЕМА 6.1 (о линейных порождающих пространства Брака). *Пространство Брака $\mathfrak{Br}(S)$ порождается операциями ранга 1 и 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить, что В-операция ранга 3 является линейной комбинацией В-операций ранга 2. Учитывая коммутативность алгебры S и используя тождества (1.4)–(1.6), легко получить следующие операторные соотношения:

$$R(b^2, c) = 2R(b, bc) = 2R(b, c)R(b) = 2R(b)R(b, c), \quad (6.1)$$

$$R(a, bc) = R(b)R(a, c) + R(c)R(a, b) = R(a, b)R(c) + R(a, c)R(b). \quad (6.2)$$

Заметим, что из правой альтернативности вытекает равенство $R(a, b) = -R(b, a)$. Пусть y – фиксированный элемент алгебры S . Обозначим через W_y линейное пространство, порожденное операторами $R(p, q)R(q, y)$, где $p, q \in S$. Для операторов φ и ψ запишем $\varphi \equiv \psi$, если $\varphi - \psi \in W_y$. По модулю пространства W_y функция $R(p, q)R(r, y)$ кососимметрична по переменным p, q, r . Этими замечаниями будем пользоваться при доказательстве теоремы без дополнительных пояснений.

Используя соотношения (6.1) и (6.2), имеем

$$\begin{aligned} 0 &\equiv R(b, ab \cdot c)R(c, y) + R(b, c)R(ab \cdot c, y) \\ &= (R(b, ab)R(c) + R(b, c)R(ab))R(c, y) + R(b, c)R(ab \cdot c, y) \\ &= (2R(b^2, a)R(c) + R(b, c)R(ab))R(c, y) + R(b, c)R(ab \cdot c, y) \\ &= (2R(b^2, a)R(c) + R(b, c)R(ab))R(c, y) \\ &\quad + R(b, c)(R(ab)R(c, y) + R(c)R(ab, y)) \\ &= 2R(b^2, a)R(c)R(c, y) + R(b, c)R(ab)R(c, y) \\ &\quad + R(b, c)R(ab)R(c, y) + R(b, c)R(c)R(ab, y) \\ &= R(b^2, a)R(c^2, y) + R(b, c)R(ab)R(c, y) \\ &\quad + R(b, c)R(ab)R(c, y) + 2R(b, c^2)R(ab, y) \\ &\equiv R(b^2, a)R(c^2, y) + R(b, c)R(ab)R(c, y) \\ &\quad + R(b, c)R(ab)R(c, y) - 2R(b, ab)R(c^2, y) \\ &= R(b^2, a)R(c^2, y) + R(b, c)R(ab)R(c, y) \\ &\quad + R(b, c)R(ab)R(c, y) - R(b^2, a)R(c^2, y) \\ &= 2R(b, c)R(ab)R(c, y), \end{aligned}$$

то есть

$$R(b, c)R(ab)R(c, y) \equiv 0. \quad (6.3)$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} 2R(b, c)R(b)R(a)R(c, y) &= R(b^2, c)R(a)R(c, y) \\ &= R(b^2, c)(R(ac, y) - R(c)R(a, y)) \\ &= R(b^2, c)R(ac, y) - R(b^2, c)R(c)R(a, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv -R(ac, c)R(b^2, y) - R(b^2, c)R(c)R(a, y) \\
&= 2R(ac, c)R(b^2, y) + 2R(b^2, c)R(c)R(a, y) \\
&= R(a, c^2)R(b^2, y) + R(b^2, c^2)R(a, y) \\
&\equiv -R(b^2, c^2)R(a, y) + R(b^2, c^2)R(a, y) = 0,
\end{aligned}$$

откуда

$$R(b, c)R(b)R(a)R(c, y) \equiv 0. \quad (6.4)$$

Из сравнений (6.3) и (6.4) ввиду коммутативности алгебры S получаем

$$R(b, c)R(b, a)R(c, y) \equiv 0. \quad (6.5)$$

Поскольку в алгебре S верно тождество $((x, a, b), a, b) = 0$, то $R^2(a, b) = 0$, значит, справедлива и его линеаризация:

$$R(a, b)R(a, c) = -R(a, c)R(a, b). \quad (6.6)$$

Тогда из (6.5) и (6.6) получаем $R(a, b)R(b, c)R(c, y) \equiv 0$. Но это и означает, что всякая В-операция ранга 3 является линейной комбинацией В-операций ранга 2.

6.2. Независимость В-операций ранга $n \leq 2$. Далее поле Φ предполагается бесконечным и через $S[X]$ обозначена относительно свободная исключительная первичная коммутативная альтернативная Φ -алгебра от счетного множества X свободных порождающих.

ТЕОРЕМА 6.2 (о независимости операций ранга 2). *Сумма $\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$ “общих” В-операций ранга 2 на алгебре $S[X]$ не представима в виде суммы $\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{n-1} + \rho$, где τ_i – В-операции ранга 2, ρ – В-операция ранга 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $[a] := \beta_1(a)$, $[a, b] := \beta_2(a, b)$. Допустим от противного, что операция $\sum_{i=1}^{n+1} [x_i, y_i]$ на алгебре $S[X]$ представима в виде

$$\sum_{i=1}^{n+1} [x_i, y_i] = [u] + \sum_{i=1}^n [v_i, w_i].$$

Тогда для любого $N > 3n$ верно тождество

$$\sum_{i=1}^N p[a, x_i]q = p[u]q + \sum_{i=1}^n p[v_i, w_i]q, \quad a, x_i, p, q \in X. \quad (6.7)$$

Ввиду однородности тождеств многочлены u, v_i, w_i имеют вид

$$\begin{aligned}
u &= u_0 + \sum_i U_i, & u_0 &= \sum_{i=1}^N \gamma_i a x_i^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_{ij} (a x_i) x_j + \sum_{i=1}^N \mu_i a^2 x_i, \\
v_i &= l(v_i) + \sum_j V_{ij}, & l(v_i) &= \alpha_i a + f_i, \\
w_i &= l(w_i) + \sum_j W_{ij}, & l(w_i) &= \beta_i a + g_i,
\end{aligned}$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \lambda_{ij}, \mu_i \in \Phi$; f_i, g_i – линейные функции над Φ от $x_1, \dots, x_N$; U_i, V_{ij}, W_{ij} – одночлены над Φ от $a, x_1, x_2, \dots, x_N$ и $\deg U_i \geq 4$, $\deg V_{ij} \geq 2$, $\deg W_{ij} \geq 2$. Тогда из тождества (6.7) имеем

$$\sum_{i=1}^N p[a, x_i]q - p[u_0]q - \sum_{i=1}^n p[l(v_i), l(w_i)]q = \sum_i Y_i,$$

где каждый из одночленов Y_i имеет степень не меньше 6. Поскольку степень любого одночлена из левой части равна 5, то правая часть равна нулю. Значит, тождество (6.7) имеет вид

$$\sum_{i=1}^N p[a, x_i]q = p[u]q + \sum_{i=1}^n p[v_i, w_i]q, \quad (6.8)$$

где $a, x_i, p, q \in X$; $u = \sum_{i=1}^N \gamma_i a x_i^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_{ij} (a x_i) x_j + \sum_{i=1}^N \mu_i a^2 x_i$, $v_i = \alpha_i a + f_i$, $w_i = \beta_i a + g_i$. Далее, $p[v, w]q = p[v + \theta w, w]q$, $\theta \in \Phi$, следовательно, можно для каждого индекса i предположить, что числа α_i, β_i не могут быть одновременно отличны от нуля. Тогда выполнено одно из условий: а) $v_i = f_i$, $w_i = \beta_i a + g_i$ или б) $v_i = \alpha_i a + f_i$, $w_i = g_i$. Для случая а) имеем

$$p[v_i, w_i]q = p[f_i, \beta_i a + g_i]q = \beta_i^2 p[f_i, a]q + p[f_i, g_i]q + \beta_i p\{f_i, a, g_i\}q,$$

где $\{x, y, z\} = [x, y + z] - [x, y] - [x, z]$. Для случая б) имеем

$$p[v_i, w_i]q = p[\alpha_i a + f_i, g_i]q = \alpha_i p[a, g_i]q + p[f_i, g_i]q.$$

Ввиду однородности тождеств равенство (6.8) принимает вид

$$\sum_{i=1}^N p[a, x_i]q = p[u]q + \sum_{i=1}^n \alpha_i p[a, g_i]q + \sum_{i=1}^n \beta_i p\{f_i, a, g_i\}q, \quad (6.9)$$

где $a, x_i, p, q \in X$; $\alpha_i, \beta_i \in \Phi$; $u = \sum_{i=1}^N \gamma_i a x_i^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_{ij} (a x_i) x_j$; f_i, g_i – линейные функции над Φ от переменных $x_1, x_2, \dots, x_N$.

Тождество (6.9) по каждой переменной имеет степень не более 2, значит, оно эквивалентно системе полилинейных тождеств (Φ – бесконечное поле характеристики, не равной 2). Тогда оно выполнено не только в алгебре $S[X]$, но и в любом ее скалярном расширении. Рассмотрим алгебру $\Phi(t_1, t_2, \dots) \otimes_{\Phi} S[X]$, где $\Phi(t_1, t_2, \dots)$ – поле дробно-рациональных функций от переменных $t_1, t_2, \dots$ над полем Φ . Полагая в (6.9) $x_i = t_i b$, $b \in X$, получаем, что линейные функции f_i и g_i пропорциональны b : $f_i = \varphi_i b$, $g_i = \psi_i b$, где φ_i, ψ_i – линейные формы над Φ от переменных $t_1, t_2, \dots$. Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^N t_i^2 - \sum_{i=1}^n Q_i \right) ((p, a, b), b, q) = \mu(p, ab^2, q),$$

где $Q_i = \alpha_i \psi_i^2 - \beta_i \varphi_i \psi_i$, $\mu \in \Phi(t_1, t_2, \dots)$. Докажем, что $\mu = 0$.

Положим $q = a$. Тогда $\mu(p, ab^2, a) = 0$, $\mu(p, a^2, b^2) = 0$, что невозможно при $\mu \neq 0$. Поскольку ввиду леммы 5.5 $((p, a, b), b, q) \neq 0$, то $\sum_{i=1}^N t_i^2 = \sum_{i=1}^n Q_i$.

Заметив теперь, что $2\varphi_i \psi_i = (\varphi_i + \psi_i)^2 - \varphi_i^2 - \psi_i^2$, получаем равенство квадратичных форм $\sum_{i=1}^N t_i^2 = \sum_{i=1}^{3n} \delta_i \zeta_i^2$, $N > 3n$, где $\delta_i \in \Phi$, а ζ_i – линейные формы над полем Φ относительно переменных $t_1, t_2, \dots$. Однако указанное равенство квадратичных форм не может выполняться, так как их матрицы имеют различные ранги.

§ 7. Неизоморфные алгебры ограниченной степени

В настоящем параграфе построим бесконечные серии неизоморфных первичных алгебр ограниченной степени, являющихся деформациями алгебры $S[X]$. Заметим, что алгебры этих серий не являются изотопами алгебры $S[X]$.

7.1. Внутренние операции. Пусть $f(x, y, a_1, \dots, a_n)$ – многочлен свободной алгебры $S := S[X]$, линейный по x, y . С-операцию σ на алгебре S назовем *внутренней*, если для подходящих $a_1, \dots, a_n \in S$ и любых $x, y \in S$ верно равенство $x\sigma y = f(x, y, a_1, \dots, a_n)$. Если все одночлены многочлена $f(x, y, a_1, \dots, a_n)$ имеют одну полную степень d относительно свободных порождающих, входящих в многочлены $a_1, \dots, a_n$, то назовем число d *степенью операции* σ . Если многочлен $f(x, y, a_1, \dots, a_n)$ является однородным, то операция σ называется *однородной*. Например, В-операция ранга n от свободных порождающих является однородной степени $2n + 1$. *Степенью алгебры* S^σ назовем степень операции σ (при условии, что она определена).

Внутренние операции $\sigma(a_1, \dots, a_n)$ и $\tau(b_1, \dots, b_m)$ на алгебре S назовем *подобными*, если существует такой автоморфизм φ алгебры S , что $\sigma(a_1\varphi, \dots, a_n\varphi) = \tau(b_1, \dots, b_m)$.

Допустим, что $\varphi: S^\sigma \rightarrow S^\tau$ – изоморфизм деформаций S^σ и S^τ . Тогда φ является автоморфизмом алгебры S , поскольку S совпадает с присоединенными алгебрами $(S^\sigma)^{(+)}$ и $(S^\tau)^{(+)}$. Кроме того, $(x\sigma y)\varphi = (x\varphi)\tau(y\varphi) \quad \forall x, y \in S$.

Поскольку $x\sigma y = f(x, y, a_1, \dots, a_n)$ и $x\tau y = g(x, y, b_1, \dots, b_m)$, где f, g – некоторые многочлены S , то $f(x\varphi, y\varphi, a_1\varphi, \dots, a_n\varphi) = g(x\varphi, y\varphi, b_1, \dots, b_m)$.

Итак, изоморфизм алгебр S^σ и S^τ влечет подобие внутренних операций σ и τ . Легко понять, что верно и обратное: подобие операций влечет изоморфизм деформаций.

Если отображение φ является эпиморфизмом, то $\tau(b_1, \dots, b_m)$ принадлежит множеству значений $\sigma(S, \dots, S)$ операции σ . Если $\tau(b_1, \dots, b_m) \notin \sigma(S, \dots, S)$, то алгебра S^τ не может быть гомоморфным образом алгебры S^σ .

Покажем, что существуют бесконечные последовательности алгебр S^{ρ_n} , ни одна из которых не может быть гомоморфным образом никакой предыдущей алгебры из данной последовательности. Причем эти алгебры могут быть как нестрогими, так и строгими, а все операции имеют ограниченную степень.

7.2. Нестрогие алгебры. Сначала рассмотрим случай нестрогих алгебр, поскольку для них получены почти все необходимые результаты. Напомним, что алгебра называется *строгой*, если она удовлетворяет тождеству $[[a, b], c] = 0$.

ЛЕММА 7.1. Пусть $S := S[X]$ и $\rho := \beta_{n+1}(x, y_1, \dots, y_n) + \beta_{n+1}(x, z_1, \dots, z_n)$, $x, y_i, z_i \in X$, $n \geq 1$. Тогда алгебра S^ρ является нестрогой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что алгебра S^ρ является строгой. Поскольку коммутатор в алгебре S^ρ совпадает с операцией ρ в алгебре S , то $(a\rho b)\rho c = 0$. Вводя обозначения $\sigma = \beta_{n+1}(x, y_1, \dots, y_n)$ и $\tau = \beta_{n+1}(x, z_1, \dots, z_n)$, имеем

$$0 = (a\rho b)\rho c = (a\sigma b)\sigma c + (a\sigma b)\tau c + (a\tau b)\sigma c + (a\tau b)\tau c.$$

Ввиду леммы 5.2 получаем

$$\begin{aligned} (a\sigma b)\sigma c &= (a\beta_{n+1}(x, y_1, \dots, y_n)b)\beta_{n+1}(x, y_1, \dots, y_n)c \\ &= -(a\beta_{n+1}(b, y_1, \dots, y_n)x)\beta_{n+1}(x, y_1, \dots, y_n)c \\ &= -a\beta_{2n+2}(b, y_1, \dots, y_n, x, y_1, \dots, y_n)c = -a\beta_{2n+2}(b, y_1, y_1, \dots)c = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (a\sigma b)\tau c &= (a\beta_{n+1}(x, y_1, \dots, y_n)b)\beta_{n+1}(x, z_1, \dots, z_n)c \\
 &= -(a\beta_{n+1}(b, y_1, \dots, y_n)x)\beta_{n+1}(x, z_1, \dots, z_n)c \\
 &= -a\beta_{2n+2}(b, x, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)c.
 \end{aligned}$$

Отсюда имеем $(a\sigma b)\sigma c = (a\tau b)\tau c = 0$ и $(a\sigma b)\tau c = (a\tau b)\sigma c$, значит,

$$0 = (a\sigma b)\tau c + (a\tau b)\sigma c = a\beta_{2n+2}(b, x, y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n)c,$$

что противоречит лемме 5.5.

Из леммы 7.1 и теоремы 6.2 немедленно вытекает

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть $S := S[X]$, $X = \{a, b, x_1, y_1, x_2, y_2, \dots\}$, $\rho_n := \sum_{i=1}^n \beta_2(x_i, y_i)$. Тогда все деформации S^{ρ_n} , $n = 1, 2, \dots$, являются нестрогими алгебрами и ни одна из них не является гомоморфным образом никакой предшествующей.

7.3. Строгие алгебры. В случае строгих алгебр нам необходима функция

$$G_p(x, a, b, c, y) := xR(a, p)D^+(b, p)R(c, y) - xR(a, b)D^+(p, c)R(p, y),$$

где $D^+(a, b) = 2[R_a^+, R_b^+]$.

Напомним [7], [8], что функция $G_p(x, a, b, c, y)$ является муфганговой относительно переменных x, a, b, c, y . Поскольку в алгебре S верно равенство $D^+(a, b) = R(a, b)$ в силу тождества (1.3), то функция $G_p(x, a, b, c, y)$ принимает вид

$$G_p(x, a, b, c, y) = xR(a, p)R(b, p)R(c, y) - xR(a, b)R(p, c)R(p, y).$$

ЛЕММА 7.2. Операция $\langle x, y \rangle := G_p(x, a, b, c, y)$, где a, b, c, p – фиксированные элементы алгебры S , содержится в пространстве Брака $\mathfrak{Br}(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду кососимметричности функции $G_p(x, a, b, c, y)$ по переменным x, a, b, c, y имеем

$$\begin{aligned}
 \langle x, y \rangle &= G_p(x, a, b, c, y) = -G_p(a, b, c, x, y) \\
 &= -aR(b, p)R(c, p)R(x, y) + aR(b, c)R(p, x)R(p, y) \\
 &= (x, aR(b, p)R(c, p), y) + (x, (a, b, c), p)R(p, y) = x\beta_1(w)y + x\beta_2(v, p)y,
 \end{aligned}$$

где $w = aR(b, p)R(c, p)$, $v = (a, b, c)$. Поскольку $\mathfrak{Br}(S)$ – линейное пространство, получаем требуемое утверждение.

Введем отображение $\varphi_p(a, b, c)$, полагая $x\varphi_p(a, b, c)y = G_p(x, a, b, c, y)$. В силу леммы 7.2 отображение $\varphi_p(a, b, c)$ (при фиксированных элементах $a, b, c, p \in S$) является С-операцией. В следующем параграфе проверим, что эта операция не является операцией Брака.

Нам необходим следующий аналог теоремы 6.2.

ЛЕММА 7.3. Пусть $N \geq 4^6 n^2$. Тогда операция $\sum_{i=1}^N \varphi_{x_i}(a, b, c)$, где $a, b, c, x_i \in X$, не представима в виде $\sum_{i=1}^n \varphi_{p_i}(q_i, r_i, s_i)$, где $p_i, q_i, r_i, s_i \in S[X]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим от противного, что возможно равенство

$$\sum_{i=1}^N \varphi_{x_i}(a, b, c) = \sum_{i=1}^n \varphi_{p_i}(q_i, r_i, s_i).$$

Тогда в алгебре $S[X]$ выполнено тождество

$$\sum_{i=1}^N G_{x_i}(x', a, b, c, y') = \sum_{i=1}^n G_{p_i}(x', q_i, r_i, s_i, y'). \quad (7.1)$$

Ввиду однородности тождеств можно предположить, что многочлены p_i, q_i, r_i, s_i являются линейными функциями над Φ от $a, b, c, x_i, i = 1, \dots, N$. Запишем каждый из них в виде:

$$p_i = p_i^0 + u_i, \quad q_i = q_i^0 + v_i, \quad r_i = r_i^0 + w_i, \quad s_i = s_i^0 + z_i,$$

где $p_i^0, q_i^0, r_i^0, s_i^0$ — линейные функции от a, b, c ; u_i, v_i, w_i, z_i — линейные функции от $x_i, i = 1, \dots, N$. Каждое из слагаемых $G_{p_i}(x', q_i, r_i, s_i, y')$ является суммой слагаемых вида $G_{k,l}(\vec{v}) := G_{k+l}(\vec{v}) - G_k(\vec{v}) - G_l(\vec{v})$, где $\vec{v} = (x', f, g, h, y')$, $k, l \in \{p_i^0, u_i\}$, $f, g, h \in \{q_i^0, r_i^0, s_i^0, v_i, w_i, z_i\}$.

Рассуждая аналогичным образом, получаем, что $\sum_{i=1}^n G_{p_i}(x', q_i, r_i, s_i, y')$ является линейной комбинацией многочленов $G_{k,l}(x', f, g, h, y')$, где $k, l, f, g, h \in \{a, b, c, u_i, v_i, w_i, z_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Ввиду однородности тождеств среди элементов k, l, f, g, h обязательно присутствуют переменные a, b, c и два линейных многочлена из множества $\{u_i, v_i, w_i, z_i \mid i = 1, \dots, n\}$, состоящего из $4n$ элементов. Следовательно, правая часть равенства (7.1) является линейной комбинацией не более чем $m := A_5^3 A_{4n}^2$ элементов вида $G_{k,l}(x', f, g, h, y')$. Заметим, что

$$m = A_5^3 A_{4n}^2 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4n \cdot 4(n-1) < 4^5 n^2. \quad (7.2)$$

Без ограничения общности можно считать, что тождество (7.1) выполнено в алгебре $\Phi(t_1, t_2, \dots) \otimes_{\Phi} S[X]$, где $\Phi(t_1, t_2, \dots)$ — поле дробно-рациональных функций от переменных $t_1, t_2, \dots$ над полем Φ . Полагая теперь в равенстве (7.1) $x_i = t_i p$, получаем, что линейные функции $\{u_i, v_i, w_i, z_i \mid i = 1, \dots, n\}$ пропорциональны элементу p , т.е. $u_i(\vec{x}) = u_i(\vec{t})p$, $v_i(\vec{x}) = v_i(\vec{t})p, \dots$, где $\vec{x} = (x_1, \dots, x_N)$, $\vec{t} = (t_1, \dots, t_N)$.

Далее, $G_{x_i}(x', a, b, c, y') = t_i^2 G_p(x', a, b, c, y')$. Аналогично, каждый из элементов вида $G_{k,l}(x', f, g, h, y')$ на основании линеаризации тождества $G_a(x, a, b, c, y) = 0$ принимает значение $\alpha \varphi \psi G_p(x', a, b, c, y')$, где α — скаляр, а φ и ψ являются линейными функциями из множества $\{u_i(\vec{t}), v_i(\vec{t}), w_i(\vec{t}), z_i(\vec{t}) \mid \vec{t} = (t_1, \dots, t_N), i = 1, \dots, n\}$.

Заметим, что $G_p(x', a, b, c, y')$ не является тождеством алгебры $S[X]$ (см. [8, теорема 1]). Поскольку $2\varphi\psi = (\varphi + \psi)^2 - \varphi^2 - \psi^2$, то отсюда получаем равенство квадратичных форм $\sum_{i=1}^N t_i^2 = \sum_{i=1}^{3m} \delta_i \zeta_i^2$, где $\delta_i \in \Phi$, а ζ_i — линейные формы над полем Φ относительно переменных $t_1, t_2, \dots$. В силу неравенства (7.2) имеем $N > 3m$ и указанное равенство квадратичных форм не может выполняться, так как их матрицы имеют разные ранги.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть $S := S[X]$, $X = \{a, b, c, p, q, x, y, z, x_1, x_2, \dots\}$, $\omega_n := \sum_{i=1}^n \varphi_{x_i}(a, b, c)$. Тогда все деформации S^{ω_n} являются строгими алгебрами и существует бесконечная подпоследовательность алгебр вида S^{ω_n} , $n = 1, 2, \dots$, ни одна из которых не является гомоморфным образом никакой предшествующей алгебры из подпоследовательности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Указанные алгебры являются строгими, поскольку

$$(x\varphi_p(a, b, c)y)\varphi_q(a, b, c)z = G_q(G_p(x, a, b, c, y), a, b, c, z) = 0$$

в силу [8, лемма 7]. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 7.1 и учитывая лемму 7.3, получаем требуемое утверждение.

Легко понять, что операции ω_n и ρ_n , введенные в теоремах 7.1 и 7.2, не являются В-операциями ранга 1, т. е. алгебры S^{ω_n} не могут быть изотопами алгебры S .

§8. Отличие φ -операций от операций Брака

Сформулируем следующие две леммы.

ЛЕММА 8.1. Ассоциаторный идеал $D(S)$ исключительной первичной коммутативной альтернативной алгебры S не удовлетворяет тождеству

$$(a^2, b, c)a = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если это тождество, то тождеством будет и его линеаризация

$$0 = (a \circ b, b, c) \circ a + (a^2, b, c) \circ b = (a, b^2, c) \circ a + (a^2, b^2, c) = 2(a^2, b^2, c),$$

что невозможно.

Рассмотрим вспомогательную коммутативную альтернативную алгебру $A_0 := A(\Phi[t_1, t_2, \dots])$ [2, §3]. Напомним, что она порождается элементами z^α , $\alpha \in \Phi[t_1, t_2, \dots]$, и g_i , которые в [2] обозначались $\bar{e}_i$, $i = 1, 2, \dots$. Кроме того,

$$\begin{aligned} g_i g_j &= 0, & z^\alpha z^\beta &= z^{\alpha+\beta}, & (z^\alpha, z^\beta, A_0) &= 0, \\ z^\alpha D_{ij} &= \alpha z^{\alpha-1}(z D_{ij}), & z D_{ij} &\in Z(A_0), \end{aligned}$$

где $D_{ij}: x \rightarrow (x, g_i, g_j)$.

ЛЕММА 8.2. Пусть $S[X]$ – свободная алгебра многообразия, порожденного ассоциаторным идеалом $D(A_0)$ вспомогательной алгебры A_0 . Тогда С-операция $[x, a^2]$ на алгебре $S[X]$ отлична от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $[x, a^2] = 0$. Тогда, проводя линеаризации, получим последовательно операторные соотношения

$$\begin{aligned} \{x, a^2, ya\} &= 0, \\ 2\{x, ab, ya\} + \{x, a^2, yb\} &= 0, \\ \{x, ab, yc\} + \{x, bc, ya\} + \{x, ca, yb\} &= 0, \end{aligned} \tag{8.1}$$

где $\{x, y, z\} = [x, y + z] - [x, y] - [x, z]$.

Ввиду однородности соотношений (8.1) можно ограничиться вычислениями в алгебре A_0 . Действительно, умножая соответствующие элементы на элементы центра $zD_{s,s+1}$ и считая, что все индексы различны и не меньше 7, получим опровержение тождества (8.1) на ассоциаторном идеале $D(A_0)$. Положим

$$p = g_1, \quad x = g_2, \quad a = z^\alpha g_3, \quad b = z^\beta, \quad c = z^\gamma g_4, \quad y = g_5, \quad q = g_6.$$

Используя отмеченные выше свойства умножения в A_0 , преобразуем выражение

$$\begin{aligned} g_1\{g_2, z^\lambda g_3, z^\mu\}g_4 &= ((g_1, g_2, z^\lambda g_3), z^\mu, g_4) + ((g_1, g_2, z^\mu), z^\lambda g_3, g_4) \\ &= ((z^\lambda, g_1, g_2)g_3, z^\mu, g_4) + ((z^\mu, g_1, g_2), g_3, g_4)z^\lambda \\ &= (z^\lambda, g_1, g_2)(g_3, z^\mu, g_4) + ((z^\mu, g_1, g_2), g_3, g_4)z^\lambda \\ &= -(z^\lambda D_{12})(z^\mu D_{34}) + z^\mu D_{12}D_{34}z^\lambda \\ &= -\lambda z^{\lambda-1}(zD_{12})\mu z^{\mu-1}(zD_{34}) + \mu(\mu-1)z^{\mu-2}(zD_{12})(zD_{34})z^\lambda \\ &= -\lambda\mu z^{\lambda+\mu-2}(zD_{12})(zD_{34}) + \mu(\mu-1)z^{\lambda+\mu-2}(zD_{12})(zD_{34}) \\ &= \mu(-\lambda + \mu - 1)z^{\lambda+\mu-2}(zD_{12})(zD_{34}), \end{aligned}$$

значит,

$$g_1\{g_2, z^\lambda g_3, z^\mu\}g_4 = \mu(-\lambda + \mu - 1)z^{\lambda+\mu-2}(zD_{12})(zD_{34}). \quad (8.2)$$

Тогда, используя формулу (8.2) при $\lambda = \alpha + \beta$, $\mu = \gamma - 1$, имеем

$$\begin{aligned} p\{x, ab, yc\}q &= g_1\{g_2, (z^\alpha g_3)z^\beta, g_5(z^\gamma g_4)\}g_6 = g_1\{g_2, z^{\alpha+\beta}g_3, z^\gamma D_{45}\}g_6 \\ &= g_1\{g_2, z^{\alpha+\beta}g_3, \gamma z^{\gamma-1}(zD_{45})\}g_6 = \gamma(g_1\{g_2, z^{\alpha+\beta}g_3, z^{\gamma-1}\}g_6)(zD_{45}) \\ &= \gamma(\gamma-1)(-\alpha-\beta+\gamma-2)z^{\alpha+\beta+\gamma}(zD_{12})(zD_{36})(zD_{45}) \\ &= \gamma(\gamma-1)(-\alpha-\beta+\gamma-2)z^{\alpha+\beta+\gamma}(zD_{12})(zD_{34})(zD_{56}). \end{aligned}$$

Аналогично, меняя местами α и γ в полученной формуле, имеем

$$\begin{aligned} p\{x, bc, ya\}q &= g_1\{g_2, z^{\beta+\gamma}g_4, z^\alpha D_{35}\}g_6 = -g_1\{g_2, z^{\beta+\gamma}g_3, z^\alpha D_{45}\}g_6 \\ &= -\alpha(\alpha-1)(-\gamma-\beta+\alpha-2)z^{\alpha+\beta+\gamma}(zD_{12})(zD_{34})(zD_{56}) \\ &= \alpha(\alpha-1)(-\alpha+\beta+\gamma-2)z^{\alpha+\beta+\gamma}(zD_{12})(zD_{34})(zD_{56}). \end{aligned}$$

Наконец, учитывая, что $(z^\alpha g_3)(z^\gamma g_4) = (\alpha - \gamma)z^{\alpha+\gamma-1}(zD_{34})$, на основании равенства (8.2) при $\lambda = \beta$, $\mu = \alpha + \gamma - 1$ получаем

$$\begin{aligned} p\{x, ca, yb\}q &= g_1\{g_2, (z^\alpha g_3)(z^\gamma g_4), z^\beta g_5\}g_6 \\ &= (\alpha - \gamma)g_1\{g_2, z^{\alpha+\gamma-1}(zD_{34}), z^\beta g_5\}g_6 \\ &= (\alpha - \gamma)g_1\{g_2, z^\beta g_3, z^{\alpha+\gamma-1}(zD_{45})\}g_6 \\ &= (\alpha - \gamma)(g_1\{g_2, z^\beta g_3, z^{\alpha+\gamma-1}\}g_6)(zD_{45}) \\ &= (\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma - 1)(\alpha - \beta + \gamma - 2)z^{\alpha+\beta+\gamma}(zD_{12})(zD_{34})(zD_{56}). \end{aligned}$$

Тогда из тождества (8.1) вытекает

$$\gamma(\gamma-1)(-\alpha-\beta+\gamma-2) + \alpha(\alpha-1)(-\alpha+\beta+\gamma+2) + (\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma-1)(\alpha-\beta+\gamma-2) = 0.$$

Можно считать, что скаляры α, β, γ алгебраически независимы над полем Φ . Положив $\beta = 0$, получим

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma(\gamma - 1)(-\alpha + \gamma - 2) + \alpha(\alpha - 1)(-\alpha + \gamma + 2) + (\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma - 1)(\alpha + \gamma - 2) \\ &= \gamma(\gamma - 1)(-\alpha + \gamma + 1) + \alpha(\alpha - 1)(-\alpha + \gamma + 2) + (\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma - 1)(\alpha + \gamma + 1) \\ &= \gamma(\gamma - 1)(-\alpha) + \gamma(\gamma - 1)(\gamma + 1) + \alpha(\alpha - 1)(-\alpha + 2) \\ &\quad + \alpha(\alpha - 1)\gamma + (\alpha - \gamma)((\alpha + \gamma)^2 - 1). \end{aligned}$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены. Тогда коэффициенты при всех одночленах должны быть нулевыми. В частности, должен быть нулевым коэффициент при $\alpha^2\gamma$. По модулю пространства, порожденного всеми одночленами, отличными от $\alpha^2\gamma$, имеем

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \alpha(\alpha - 1)\gamma + (\alpha - \gamma)((\alpha + \gamma)^2 - 1) \equiv \alpha^2\gamma + (\alpha - \gamma)(\alpha + \gamma)^2 \\ &\equiv \alpha^2\gamma + (\alpha^2 - \gamma^2)(\alpha + \gamma) \equiv \alpha^2\gamma + \alpha^2\gamma = 2\alpha^2\gamma. \end{aligned}$$

Противоречие.

Теперь можно привести пример внутренней однородной С-операции, не являющейся В-операцией.

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть $S[X]$ – свободная алгебра многообразия, порожденного ассоциаторным идеалом $D(A_0)$ вспомогательной алгебры A_0 (основное поле Φ бесконечно). Тогда в алгебре $S[X]$ операция $\varphi_x(a, b, c)$ от свободных порождающих a, b, c, x не является В-операцией.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая от противного, рассмотрим возможные случаи

$$\varphi_x(a, b, c) = \beta_i(\dots), \quad i = 1, 2, 3.$$

1) $i = 1$. Пусть $G_x(p, a, b, c, q) = (p, v, q)$. Используя однородность алгебры $S[X]$, легко понять, что многочлен v представим в виде

$$v = \alpha((a, b, x), x, c) + \beta(a, b, c)x^2 + \gamma(x^2, a, b)c + \delta(x^2, b, c)a + \lambda(x^2, c, a)b + \mu x^2((ab)c).$$

Поскольку алгебра $S[X]$ удовлетворяет тождеству $x^3 = 0$, то ее ассоциативный центр нулевой. Подставим в исходное равенство $c = b$. Тогда

$$\begin{aligned} \gamma(x^2, a, b)b + \lambda(x^2, b, a)b + \mu x^2(ab^2) &= 0, \\ (\lambda - \gamma)(x^2, a, b^2) + \mu x^2(ab^2) &= 0. \end{aligned}$$

Меняя местами x и b и суммируя полученные равенства, получим $\mu a(x^2b^2) = 0$, откуда следует, что $\mu = 0$, значит, $\lambda = \gamma$. Аналогично, $\lambda = \delta$. Следовательно,

$$v = \alpha((a, b, x), x, c) + \beta(a, b, c)x^2 + \gamma((x^2, a, b)c + (x^2, b, c)a + (x^2, c, a)b).$$

Полагая $a = x$, получим $0 = \beta(x, b, c)x^2 + \gamma(x^2, b, c)x = -\beta(x^2, b, c)x + \gamma(x^2, b, c)x$, значит, в силу леммы 8.1 имеем $\beta = \gamma$. Тогда

$$\begin{aligned} v &= \alpha((a, b, x), x, c) + \beta((a, b, c)x^2 + (x^2, a, b)c + (x^2, b, c)a + (x^2, c, a)b) \\ &= \alpha((a, b, x), x, c) + \beta((x^2a, b, c) + (x^2, a, b)c + (x^2, c, a)b). \end{aligned}$$

Положим $a = b^2$, получим

$$\begin{aligned} 0 &= \beta((x^2 b^2, b, c) + (x^2, c, b^2)b) = \beta((x^2, b, c)b^2 - (x^2, c, b)b^2) \\ &= \beta((x^2, b, c)b^2 + (x^2, b, c)b^2) = -\beta(x^2, b, c)b^2 = \beta(x^2, b^2, c)b. \end{aligned}$$

Отсюда по лемме 8.1 имеем $\beta = 0$. Наконец, полагая $q = c$, получаем $\alpha = 0$ ввиду леммы 5.5. Тем самым первый случай рассмотрен.

2) $i = 2$. Пусть $G_x(p, a, b, c, q) = p[u, v]q$. Запишем многочлены u и v в виде суммы многочленов: $u = u_1 + u_2 + \dots$, $v = v_1 + v_2 + \dots$, где u_s и v_s — суммы одночленов степени s , входящих в многочлены u и v соответственно.

Предположим сначала, что линейные части u_1 и v_1 отличны от нуля. Если они непропорциональны, то дополним u_1 и v_1 , используя порождающие a, b, c, x , до базиса линейной оболочки $L(a, b, c, x)$. Отображение базиса (a, b, c, x) в базис $(u_1, v_1, \dots)$ можно продолжить до автоморфизма ξ алгебры $S[X]$, который оставляет неподвижными все остальные переменные, в частности переменные p и q . Значит, в алгебре $S[X]$ верно тождество

$$G_{x\xi^{-1}}(p, a\xi^{-1}, b\xi^{-1}, c\xi^{-1}, q) = ((p, u_1, v_1), v_1, q)\xi^{-1} + f = ((p, a, b), b, q) + f,$$

где f — сумма одночленов, степень каждого из которых не меньше 6. Тогда многочлен $((p, a, b), b, q)$ нулевой, поскольку он, с одной стороны, имеет степень 5, а с другой, является суммой одночленов, степени которых не ниже 6. Однако равенство $((p, a, b), b, q) = 0$ невозможно ввиду леммы 5.5. Следовательно, если линейные части u_1 и v_1 отличны от нуля, то они пропорциональны. Пусть $u_1 = \lambda v_1$. Тогда в силу равенства $[u, v] = [u - \lambda v, v]$, $\lambda \in \Phi$, можно предполагать, что $u_1 = 0$. В этом случае в силу однородности должны быть выполнены условия $u = u_3$, $v = v_1$.

Допустим, что v является линейной комбинацией переменных a, b, c , причем коэффициент при переменной a отличен от нуля. Тогда ввиду кососимметричности функции $G_x(p, a, b, c, q)$ относительно переменных a, b, c получаем тождество вида

$$G_x(p, v, b, c, q) = ((p, u, v), v, q).$$

Применяя, как и ранее, подходящий автоморфизм, получаем, что в алгебре $S[X]$ верно тождество $G_x(p, a, b, c, q) = ((p, u, a), a, q)$. Однако последнее невозможно, поскольку один многочлен линеен по переменной a , а второй не линеен.

Таким образом, можно считать, что $v = x$, и в алгебре $S[X]$ верно тождество вида $G_x(p, a, b, c, q) = ((p, u, x), x, q)$. Многочлен u имеет вид $u = \lambda(ab)c + \mu(a, b, c)$, где λ, μ — скаляры. Подставляя $a := (a, b, c)$, получим $0 = \lambda((p, (a, b^2, c^2), x), x, q)$. Значит, ассоциаторный идеал удовлетворяет тождеству $0 = \lambda((p, (a, b, c), x), x, q)$. Полагая здесь $p = c$, имеем

$$0 = \lambda((c, (a, b, c), x), x, q) = -\lambda(((a, b, c), c, x), x, q).$$

Значит, $\lambda = 0$. Аналогично доказывается, что и $\mu = 0$. Но тогда $G_x(p, a, b, c, q) = 0$. Противоречие.

Осталось рассмотреть вариант, когда $u = u_1 + u_2 + \dots$, $v = v_2 + v_3 + \dots$. Без ограничения общности можно предположить, что $u = u_1$, $v = v_2$. Рассуждая аналогично предыдущему, достаточно рассмотреть два случая: $u = a$ и $u = x$.

а) Если $u = a$, то $v = r + xl + \theta x^2$, где r – сумма одночленов степени 2, l – линейная форма от a, b, c . Имеем

$$\varphi_x(a, b, c) = [u, v] = [a, r + xl + \theta x^2].$$

Тогда, сравнивая составы многочленов, получаем

$$\varphi_x(a, b, c) = \lambda\{a, bc, x^2\} + \mu\{a, xb, xc\}.$$

Поскольку левая часть этого равенства кососимметрична по переменным b и c , а правая часть – симметрична по этим переменным, то обе части нулевые. Противоречие.

б) Если $u = x$, то $v = r + xl$, где r и l имеют тот же смысл, что и в п. а). Итак, $\varphi_x(a, b, c) = [u, v] = [x, r + xl]$. Тогда $[x, r] = 0$ и $\varphi_x(a, b, c) = \{x, r, xl\}$.

Докажем, что $r = 0$. Отсюда будет следовать, что $v = xl$, значит, $\varphi_x(a, b, c) = [x, xl]$, что невозможно.

Итак, $[x, r] = 0$, где $r = \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \lambda ab + \mu bc + \nu ca$. Докажем, что все скаляры $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ нулевые. Ввиду однородности тождеств получаем $\alpha^2[x, a^2] = 0$, откуда $\alpha = 0$ по лемме 8.2. Аналогично, $\beta = 0, \gamma = 0$. Следовательно, $r = \lambda ab + \mu bc + \nu ca$. Аналогично получаем $\lambda^2[x, ab] = 0$, откуда при $b = a$ имеем $\lambda^2[x, a^2] = 0$, и $\lambda = 0$. Следовательно, и остальные скаляры μ, ν нулевые, т. е. $r = 0$.

Тем самым случай 2) полностью рассмотрен.

3) $i = 3$. Пусть $G_x(p, a, b, c, q) = (((p, u, v), v, w), w, q)$. Поскольку степени в левой и правой частях этого тождества равны, то можно предполагать, что многочлены u, v, w линейны относительно a, b, c, x . Заметим, что u, v, w линейно независимы, иначе в силу операторного равенства $R(x, a)R(y, a)R(z, a) = 0$ [7, лемма 2] и леммы 5.2 правая часть тождества равна нулю. Действительно, если $u = \alpha v + \beta w$, то

$$[u, v, w] = [\alpha v + \beta w, v, w] = \alpha[v, v, w] + \beta[w, v, w] = \beta[w, w, v] = 0.$$

Аналогично рассматривается случай $w = \alpha u + \beta v$.

Допустим теперь, что одна из переменных a, b, c, x не выражается линейно через u, v, w . Если эта переменная a , то система векторов (a, u, v, w) является базисом линейной оболочки $L(a, b, c, x)$. Отображение базиса (a, b, c, x) в базис (a, u, v, w) можно продолжить до автоморфизма ξ алгебры $S[X]$, который оставляет неподвижными все остальные переменные, в частности переменные p и q . Значит, в алгебре $S[X]$ верно тождество

$$G_{x\xi^{-1}}(p, a, b\xi^{-1}, c\xi^{-1}, q) = (((p, u, v), v, w), w, q)\xi^{-1} = (((p, b, c), c, x), x, q),$$

что невозможно, поскольку переменная a входит в одну часть равенства и не входит в другую.

Аналогично рассматриваются случаи, когда вместо переменной a участвуют переменные b или c . Если же переменная x не выражается линейно через u, v, w , то система векторов (x, u, v, w) является базисом линейной оболочки $L(a, b, c, x)$. Отображение базиса (a, b, c, x) в базис (u, v, w, x) можно продолжить до автоморфизма ξ алгебры $S[X]$, который оставляет неподвижными все остальные переменные. Тогда имеем

$$G_x(p, a\xi^{-1}, b\xi^{-1}, c\xi^{-1}, q) = (((p, u, v), v, w), w, q)\xi^{-1} = (((p, a, b), b, c), c, q).$$

Пусть $a\xi^{-1} = \alpha x + f_1[E]$, $b\xi^{-1} = \beta x + f_2[E]$, $c\xi^{-1} = \gamma x + f_3[E]$, где $[E] = (a, b, c)^t$. Тогда, учитывая тождество $G_x(p, x, b, c, q) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} ((p, a, b), b, c), c, q) &= G_x(p, a\xi^{-1}, b\xi^{-1}, c\xi^{-1}, q) \\ &= G_x(p, \alpha x + f_1[E], \beta x + f_2[E], \gamma x + f_3[E], q) \\ &= G_x(p, f_1[E], f_2[E], f_3[E], q) = \det(F) G_x(p, a, b, c, q), \end{aligned}$$

что, очевидно, невозможно, поскольку многочлены в разных частях тождества

$$(((p, a, b), b, c), c, q) = \det(F) G_x(p, a, b, c, q)$$

имеют разные степени по переменной b .

Сформулируем в заключение некоторые открытые вопросы.

1. Верно ли, что всякая исключительная первичная альтернативная алгебра является энгелевой индекса 2?
2. Является ли первичной свободная коммутативная альтернативная алгебра над полем характеристики 3?
3. Является ли конечным множество многообразий, порожденных исключительными первичными альтернативными алгебрами?
4. Для каких простых альтернативных супералгебр свободная алгебра многообразия, порожденного ее грассмановой оболочкой, первична?
5. Верно ли, что всякая внутренняя однородная С-операция содержится в пространстве Брака?
6. Может ли “общая” В-операция ранга $n \geq 3$ быть В-операцией меньшего ранга?

Список литературы

1. Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
2. Пчелинцев С. В. О нильпотентных элементах и нильрадикалах альтернативных алгебр // Алгебра и логика. 1985. Т. 24. № 6. С. 674–695.
3. Пчелинцев С. В. Первичные альтернативные алгебры // Фундаментальная и прикладная математика. 1998. Т. 4. № 2. С. 651–657.
4. Шестаков И. П. Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и логика. 1997. Т. 36. № 6. С. 675–716.
5. Bruck R. H. A survey of binary systems. Berlin: Springer, 1958.
6. Скоцырский В. Г. Строго первичные некоммутативные йордановы алгебры // Исследования по теории колец и алгебр. Новосибирск: Наука, 1989. С. 131–164.
7. Пчелинцев С. В. О кручении свободного альтернативного кольца // Сиб. матем. журн. 1991. Т. 32. № 6. С. 142–149.
8. Пчелинцев С. В. О тождествах свободных конечно порожденных альтернативных алгебр над полем характеристики 3 // Матем. сб. 2001. Т. 192. № 9. С. 109–124.

Поступило в редакцию
03.12.2002