Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Ю. Антонов, О сходимости почти всюду по кубам кратных тригонометрических рядов Фурье, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 2, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/im472>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 13:24:47

УДК 517.518

Н. Ю. Антонов

О сходимости почти всюду по кубам кратных тригонометрических рядов Фурье

Доказана теорема о том, что при некоторых условиях на функцию $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ из сходимости почти всюду тригонометрических рядов Фурье всех функций из класса $\varphi(L)_{[-\pi, \pi]}$ следует сходимость по кубам кратного ряда Фурье и всех его сопряженных рядов любой функции $f \in \varphi(L)(\log^+ L)_{[-\pi, \pi]}^{d-1}$, $d \in \mathbb{N}$. Из этой теоремы и полученного автором ранее результата о сходимости почти всюду рядов Фурье функций одной переменной из класса $L(\log^+ L)(\log^+ \log^+ \log^+ L)_{[-\pi, \pi]}$ вытекает следующее утверждение: если $f \in L(\log^+ L)^d(\log^+ \log^+ \log^+ L)_{[-\pi, \pi]}^d$, $d \in \mathbb{N}$, то ряд Фурье функции f и все его сопряженные ряды сходятся по кубам почти всюду.

Библиография: 15 наименований.

§ 1. Введение

Пусть d – натуральное число, $\mathbb{T}^d = [-\pi, \pi]^d$ – d -мерный тор, $\mathbb{Z}^d$ – целочисленная решетка в $\mathbb{R}^d$, $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d$, $kx = k_1x_1 + \dots + k_dx_d$,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k e^{ikx} \quad (1.1)$$

– кратный тригонометрический ряд Фурье суммируемой на $\mathbb{T}^d$ функции f , а

$$S_n(f, x) = S_n^d(f, x) = \sum_{k=(k_1, \dots, k_d): \max |k_i| \leq n} a_k e^{ikx}$$

– его n -я кубическая частичная сумма.

Пусть B – некоторое непустое подмножество множества первых d натуральных чисел: $B = \{r_1, \dots, r_l\} \subset \{1, \dots, d\}$. Ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \prod_{j=1}^l (-i \operatorname{sign} k_{r_j}) a_k e^{ikx} \quad (1.2)$$

называется *сопряженным к ряду (1.1) по переменным, номера которых входят во множество B , или B -сопряженным*, а n -я кубическая частичная сумма

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 02-01-00764 и 02-01-06042) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96035).

$\tilde{S}_{n,B}(f, x) = \tilde{S}_{n,B}^d(f, x)$ ряда (1.2) определяется аналогично n -й кубической частичной сумме ряда (1.1).

Всего для ряда (1.1) можно определить $2^d - 1$ сопряженных рядов. Заметим, что, взяв в качестве B пустое множество, можно полагать ряд (1.1) B -сопряженным ($\emptyset$ -сопряженным) к самому себе. Отметим также, что введенные здесь для $d \geq 1$ определения при $d = 1$ совпадают с обычными определениями тригонометрического ряда и его сопряженного ряда для 2π -периодической функции.

Пусть $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ – неубывающая функция. Обозначим через $\varphi(L) = \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ множество всех определенных на $\mathbb{T}^d$ и измеримых по Лебегу функций f , удовлетворяющих условию

$$\int_{\mathbb{T}^d} \varphi(|f(t)|) dt < \infty.$$

Заметим, что если $\varphi_1(u) = O(\varphi_2(u))$ при $u \rightarrow \infty$, то $\varphi_2(L) \subset \varphi_1(L)$.

В случае $d = 1$ Л. Карлесон [1] доказал, что если $f \in L^2(\mathbb{T})$, то тригонометрический ряд Фурье функции f сходится почти всюду. Затем Р. Хант [2] обобщил утверждение о сходимости почти всюду рядов Фурье на функции из классов $L^p(\mathbb{T})$, $p > 1$, и $L(\log^+ L)^2(\mathbb{T})$, а П. Шёлин [3] – на функции из класса $L(\log^+ L)(\log^+ \log^+ L)(\mathbb{T})$. Автором [4] было установлено, что условие $f \in L(\log^+ L)(\log^+ \log^+ \log^+ L)(\mathbb{T})$ также является достаточным для сходимости почти всюду ряда Фурье функции f . С другой стороны, С.В. Конягиным [5] доказано, что для любой неубывающей функции $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, удовлетворяющей условию $\varphi(u) = o(u\sqrt{\ln u}/\sqrt{\ln \ln u})$ при $u \rightarrow \infty$, найдется функция из класса $\varphi(L)$ такая, что ее ряд Фурье неограниченно расходится всюду на $\mathbb{T}$.

Пусть $d \geq 2$. Ряд (1.1) (соответственно, (1.2)) сходится по кубам (в случае $d = 2$ – по квадратам) в точке $x_0 \in \mathbb{T}^d$, если последовательность $S_n(f, x_0)$ (соответственно, $\tilde{S}_{n,B}(f, x_0)$) имеет предел при $n \rightarrow \infty$.

Сходимость почти всюду по квадратам рядов Фурье функций $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ была установлена Н.Р. Тевзадзе [6]. Ч. Фефферман [7] распространил этот результат на функции $f \in L^p(\mathbb{T}^d)$, $p > 1$, $d \geq 2$, а затем П. Шёлин [8] доказал, что если $f \in L(\log^+ L)^d(\log^+ \log^+ L)(\mathbb{T}^d)$, то ее ряд Фурье сходится по кубам почти всюду. Для доказательства последнего результата Шёлин использовал свою теорему [3] о сходимости п.в. рядов Фурье функций из $L(\log^+ L)(\log^+ \log^+ L)$ в одномерном случае.

Наилучший в настоящее время результат, касающийся расходимости по кубам на множестве положительной меры кратных рядов Фурье функций из $\varphi(L)(\mathbb{T}^d)$, $d \geq 2$, также принадлежит С.В. Конягину [9]: для любой функции $\varphi(u) = o(u(\log u)^{d-1} \log \log u)$ при $u \rightarrow \infty$ существует $f(x) \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ с расходящимся всюду по кубам рядом Фурье.

В настоящей работе доказана теорема, позволяющая переносить результаты о сходимости почти всюду обычных рядов Фурье функций из классов $\varphi(L)$ на кратные ряды Фурье в случае сходимости по кубам.

Неотрицательную неубывающую функцию $\psi(u)$ назовем *медленно растущей*, если при любом $\delta > 0$ функция $\psi(u)u^{-\delta}$ убывает при достаточно больших u .

Будем говорить, что функция $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ удовлетворяет условиям (1.3) если

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0, \quad \varphi(u) &\text{ -- выпуклая и возрастающая на } [0, +\infty), \\ \varphi(u^{\frac{1}{2}}) &\text{ -- вогнутая на } [0, +\infty). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Далее будем полагать $\log u = \log_2 u$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\psi(u)$ – медленно растущая функция, и пусть для любого натурального d существует константа u_d такая, что функция

$$\varphi_d(u) = u\psi(u + u_d)(\log(u + u_d))^{d-1}$$

удовлетворяет условиям (1.3). Предположим, что для любой функции $f \in \varphi_1(L)(\mathbb{T})$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f, x) = f(x) \quad \text{н. в.}$$

Тогда для любого $d \in \mathbb{N}$, если $f \in \varphi_d(L)(\mathbb{T}^d)$, ряд Фурье функции f и все его сопряженные ряды сходятся по кубам почти всюду.

Следующее утверждение есть следствие теоремы 1 и результата автора о сходимости почти всюду одномерных рядов Фурье функций из класса

$$L(\log^+ L)(\log^+ \log^+ \log^+ L)(\mathbb{T}).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $f \in L(\log^+ L)^d(\log^+ \log^+ \log^+ L)(\mathbb{T}^d)$. Тогда ряд Фурье функции f и все его сопряженные ряды сходятся по кубам почти всюду.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Сформулируем известные результаты и получим вспомогательные утверждения, которые понадобятся нам при доказательстве теоремы 1.

Говорят, что функция $\tilde{\varphi}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ удовлетворяет Δ_2 -условию, если $\tilde{\varphi}(2u) = O(\tilde{\varphi}(u))$ при $u \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 1. Пусть неубывающая непрерывная функция $\tilde{\varphi}: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ удовлетворяет Δ_2 -условию и $\tilde{\varphi}(0) = 0$. Тогда для любой функции $h \in \tilde{\varphi}(L)(\mathbb{T}^d)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдется кратный тригонометрический полином $g(t)$ такой, что

$$\int_{\mathbb{T}^d} \tilde{\varphi}(|h(t) - g(t)|) dt < \varepsilon. \quad (2.1)$$

Отметим, что в случае $d = 1$ утверждение, более общее, чем лемма 1, получено П. Л. Ульяновым [10, следствие 3.2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку функция $\tilde{\varphi}$ непрерывна и $\tilde{\varphi}(0) = 0$, найдется число $u_0 > 0$ такое, что $0 < \tilde{\varphi}(u_0) < \varepsilon / (2(2\pi)^d)$. Так как $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет Δ_2 -условию, найдется $C > 0$ такое, что для всех $u \geq u_0$

$$\tilde{\varphi}(2u) \leq C\tilde{\varphi}(u).$$

Пусть $x \geq u_0$, $\alpha \geq 1$. Выберем натуральное n таким, что $2^{n-1} \leq \alpha < 2^n$. Тогда

$$\tilde{\varphi}(\alpha x) \leq \tilde{\varphi}(2^n x) \leq C^n \tilde{\varphi}(x) = C(2^{n-1})^{\log C} \leq C\alpha^{\log C} \tilde{\varphi}(x),$$

т. е.

$$\tilde{\varphi}(\alpha x) \leq C\alpha^p \tilde{\varphi}(x), \quad x \geq u_0, \quad p = \log C. \quad (2.2)$$

Поскольку множество тригонометрических полиномов (d переменных) всюду плотно в пространстве $L^p(\mathbb{T}^d)$, найдется полином $g(t)$, удовлетворяющий условию

$$\int_{\mathbb{T}^d} |h(t) - g(t)|^p dt < \frac{\varepsilon u_0^p}{2C\tilde{\varphi}(u_0)}. \quad (2.3)$$

Покажем, что выбранный полином g удовлетворяет условию (2.1). Ясно, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^d} \tilde{\varphi}(|h(t) - g(t)|) dt &= \int_{\{t \in \mathbb{T}^d : |h(t) - g(t)| \leq u_0\}} \tilde{\varphi}(|h(t) - g(t)|) dt \\ &\quad + \int_{\{t \in \mathbb{T}^d : |h(t) - g(t)| > u_0\}} \tilde{\varphi}(|h(t) - g(t)|) dt. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В силу выбора u_0 и неубывания $\tilde{\varphi}$ первое слагаемое в правой части (2.4) меньше $\varepsilon/2$. Для второго слагаемого, применяя (2.2) при $\alpha = |h(t) - g(t)|/u_0$ и $x = u_0$, а затем (2.3), получаем

$$\begin{aligned} &\int_{\{t \in \mathbb{T}^d : |h(t) - g(t)| > u_0\}} \tilde{\varphi}(|h(t) - g(t)|) dt \\ &\leq \frac{C\tilde{\varphi}(u_0)}{u_0^p} \int_{\{t \in \mathbb{T}^d : |h(t) - g(t)| > u_0\}} |h(t) - g(t)|^p dt < \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следующее утверждение является непосредственным следствием леммы 1.

ЛЕММА 2. Пусть функция $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ удовлетворяет условиям (1.3). Тогда для любых чисел $\varepsilon, a > 0$ и любой функции $h \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ найдется кратный тригонометрический полином $g(t)$ такой, что

$$\int_{\mathbb{T}^d} |h(t) - g(t)| dt < \varepsilon, \quad (2.5)$$

$$\int_{\mathbb{T}^d} \varphi(a|h(t) - g(t)|) dt < \varepsilon. \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из того, что $\varphi(u^{1/2})$ вогнутая и $\varphi(0) = 0$, следует, что $\varphi(u)$ удовлетворяет Δ_2 -условию. Положим $\tilde{\varphi}(u) = u + \varphi(au)$. Ясно, что функция $\tilde{\varphi}$ также удовлетворяет Δ_2 -условию. Применяя к $\tilde{\varphi}$ лемму 1, из неравенства (2.1) получаем (2.5) и (2.6). Лемма доказана.

Напомним, что оператор V является оператором типа (φ, φ) , если существует константа $A > 0$ такая, что для всех $f \in \varphi(L)$

$$\int_{\mathbb{T}^d} \varphi(|V(f, x)|) dx \leq \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(A|f(x)|) dx.$$

Оператор V инвариантен относительно сдвига, если

$$V(f(\cdot + s), x) = V(f(\cdot), x + s), \quad x, s \in \mathbb{T}^d.$$

ТЕОРЕМА А [11, с. 154, теорема 3]. Пусть V_n – последовательность линейных операторов, каждый из которых является оператором типа (φ, φ) и инвариантен относительно сдвига. Пусть функция φ удовлетворяет условиям (1.3). Предположим, что для каждой функции f из $\varphi(L)$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |V_n(f, x)| < \infty$$

для всех x из некоторого (зависящего от f) множества положительной меры. Пусть $V^*(f, x) = \sup_{n \geq 1} |V_n(f, x)|$. Тогда найдется положительное число A такое, что для всех $f \in \varphi(L)$

$$m\{x: V^*(f, x) > \alpha\} \leq \int_{\mathbb{T}^d} \varphi\left(\frac{A}{\alpha}|f(x)|\right) dx, \quad \alpha > 0.$$

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $B = \{r_1, \dots, r_k\}$ – непустое подмножество множества $\{1, 2, \dots, d\}$, $|B| = k$; B -сопряженному ряду функции $f \in L(\mathbb{T}^d)$ сопоставим B -сопряженную функцию $\tilde{f}_B(x)$, определяемую следующим образом. Пусть $\varepsilon(B) = (\varepsilon_{r_1}, \dots, \varepsilon_{r_k})$,

$$T_{\varepsilon(B)}^{|B|} = \prod_{j=1}^k (\mathbb{T} \setminus [-\varepsilon_{r_j}, \varepsilon_{r_j}]),$$

d -мерный вектор $t(B)$ имеет координаты

$$t_{\nu}(B) = \begin{cases} t_{\nu}, & \text{если } \nu = r_j, j = 1, \dots, k, \\ 0 & \text{при остальных } \nu. \end{cases}$$

Положим

$$\tilde{f}_B(x) = \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^k \lim_{\varepsilon(B) \rightarrow +0} \int_{T_{\varepsilon(B)}^{|B|}} f(x + t(B)) \left(\prod_{j=1}^k \operatorname{ctg}\left(\frac{t_{r_j}}{2}\right)\right) dt_{r_1} \dots dt_{r_k}. \quad (2.7)$$

Предел в (2.7) берется при независимом стремлении к $+0$ компонент вектора $\varepsilon(B)$. В случае, когда B – пустое множество, будем по определению полагать, что B -сопряженная функция совпадает с $f(x)$: $\tilde{f}_B(x) = \tilde{f}_{\emptyset}(x) = f(x)$.

Пусть $D_n(t)$ и $\tilde{D}_n(t)$ – соответственно ядро Дирихле и сопряженное с ним ядро:

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin(\frac{t}{2})}, \quad \tilde{D}_n(t) = \frac{\cos(\frac{t}{2}) - \cos(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin(\frac{t}{2})}.$$

Тогда n -ю кубическую сумму ряда (1.2) можно представить следующим образом:

$$\tilde{S}_{n,B}(f, x) = \frac{1}{\pi^d} \int_{\mathbb{T}^d} \prod_{i \in B} (-\tilde{D}(t_i)) \prod_{j \in \{1, \dots, d\} \setminus B} D_n(t_j) f(x + t) dt, \quad (2.8)$$

где B может быть и пустым, а произведение $\prod$, в котором множество сомножителей пусто, по определению считаем равным единице.

ЛЕММА 3. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $B \subset \{1, 2, \dots, d\}$. Предположим, что удовлетворяющая условиям (1.3) функция φ такова, что $u(\log u)^{d-1} = O(\varphi(u))$ при $u \rightarrow \infty$. Тогда эквивалентны следующие три условия:

1) если $f \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$, то для почти всех $x \in \mathbb{T}^d$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_{n,B}(f, x) = \tilde{f}_B(x);$$

2) найдется константа $A_1 > 0$ такая, что для всех $f \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ и $y > 0$

$$m\left\{x \in \mathbb{T}^d : \sup_{n \geq 1} |\tilde{S}_{n,B}(f, x)| > y\right\} \leq \int_{\mathbb{T}^d} \varphi\left(\frac{A_1}{y} |f(t)|\right) dt; \quad (2.9)$$

3) найдутся константы $A > 0$ и $y_0 \geq 0$ такие, что для любого кратного тригонометрического полинома g , определенного на $\mathbb{T}^d$, и любого числа $y > y_0$ справедливо неравенство

$$m\left\{x \in \mathbb{T}^d : \max_{n \geq 1} |\tilde{S}_{n,B}(g, x)| > y\right\} \leq \frac{A}{y} \left(\int_{\mathbb{T}^d} \varphi(|g(t)|) dt + 1 \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как нетрудно видеть, условие 2) следует из 1) в силу теоремы А. Докажем, что условие 2) влечет 1).

Пусть $f \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$. Для любого $y > 0$

$$m\{x \in \mathbb{T}^d : |\tilde{f}_B(x)| > y\} \leq \frac{C}{y} \left(\int_{\mathbb{T}^d} |f(t)| (\log^+ |f(t)|)^{d-1} dt + 1 \right). \quad (2.10)$$

Если B непусто, то при $d = 1$ это есть (с точностью до $+1$ в правой части) неравенство Колмогорова [12] для сопряженных функций, при $d \geq 2$ неравенство (2.10) является частным случаем результата Л. В. Жижиашвили [13]. Если $B = \{\emptyset\}$, то (2.10) следует из того, что для любых $y > 0$

$$y \cdot m\{t \in \mathbb{T}^d : |f(t)| > y\} \leq \int_{\{t \in \mathbb{T}^d : |f(t)| > y\}} |f(t)| dt \leq \int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt.$$

Согласно условию леммы для некоторых $C_1 > 0$ и $u_0 > 2$ при $u \geq u_0$ справедливо неравенство $u(\log u)^{d-1} \leq C_1 \varphi(u)$, поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^d} |f(t)| (\log^+ |f(t)|)^{d-1} dt \\ &= \left(\int_{\{t \in \mathbb{T}^d: |f(t)| \leq u_0\}} + \int_{\{t \in \mathbb{T}^d: |f(t)| > u_0\}} \right) |f(t)| (\log^+ |f(t)|)^{d-1} dt \\ &\leq (2\pi)^d u_0 (\log u_0)^{d-1} + C_1 \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(|f(t)|) dt. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (2.10) получаем

$$m\{x \in \mathbb{T}^d: |\tilde{f}_B(x)| > y\} \leq \frac{C_2}{y} \left(\int_{\mathbb{T}^d} \varphi(|f(t)|) dt + 1 \right), \quad (2.11)$$

где $C_2 = \max\{CC_1, C(2\pi)^d u_0 (\log u_0)^{d-1}\}$.

В силу выпуклости функции $\varphi(u)$ и условия $\varphi(0) = 0$ справедливо неравенство

$$\varphi\left(\frac{A_1 |f(t)|}{y}\right) \leq \frac{A_1}{y} \varphi(|f(t)|), \quad 0 \leq \frac{A_1}{y} \leq 1, \quad t \in \mathbb{T}^d. \quad (2.12)$$

Отсюда и из (2.9) следует

$$m\left\{x \in \mathbb{T}^d: \sup_{n \geq 1} |\tilde{S}_{n,B}(f, x)| > y\right\} \leq \frac{A_1}{y} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(|f(t)|) dt \quad (2.13)$$

при $y > A_1$.

Обозначим $U_{n,B}(f, x) = \tilde{S}_{n,B}(f, x) - \tilde{f}_B(x)$. Поскольку

$$\begin{aligned} & \left\{x \in \mathbb{T}^d: \sup_{n \geq 1} |U_{n,B}(f, x)| > y\right\} \\ & \subset \left\{x \in \mathbb{T}^d: \sup_{n \geq 1} |\tilde{S}_{n,B}(f, x)| > \frac{y}{2}\right\} \cup \left\{x \in \mathbb{T}^d: \sup_{n \geq 1} |\tilde{f}_B(x)| > \frac{y}{2}\right\}, \end{aligned}$$

то из неравенств (2.13) и (2.11) следует

$$m\left\{x \in \mathbb{T}^d: \sup_{n \geq 1} |U_{n,B}(f, x)| > y\right\} \leq \frac{K}{y} \left(\int_{\mathbb{T}^d} \varphi(|f(t)|) dt + 1 \right), \quad y > A_1, \quad (2.14)$$

где $K = 2(C_2 + A_1)$.

Далее зафиксируем произвольные числа $\theta > 0$ и $\alpha > A_1$. Согласно лемме 2, примененной при $\varepsilon = 1$, $a = 1$, $h = \theta f$, найдется тригонометрический полином $g(x) = g_{\theta, f}(x)$ такой, что

$$\int_{\mathbb{T}^d} \varphi(|\theta f(t) - g(t)|) dt < 1. \quad (2.15)$$

Частичные суммы B -сопряженного ряда тригонометрического полинома, начиная с некоторого номера n , совпадают с B -сопряженной функцией этого полинома. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_{n,B}(g, x) = 0.$$

Используя это равенство, имеем

$$\begin{aligned} & m \left\{ x \in \mathbb{T}^d : \limsup_{n \rightarrow \infty} |U_{n,B}(f, x)| > \frac{\alpha}{\theta} \right\} \\ &= m \left\{ x \in \mathbb{T}^d : \limsup_{n \rightarrow \infty} |U_{n,B}(\theta f, x)| > \alpha \right\} \\ &= m \left\{ x \in \mathbb{T}^d : \limsup_{n \rightarrow \infty} |U_{n,B}(\theta f, x) - U_{n,B}(g, x)| > \alpha \right\} \\ &= m \left\{ x \in \mathbb{T}^d : \limsup_{n \rightarrow \infty} |U_{n,B}(\theta f - g, x)| > \alpha \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя неравенство (2.14) к функции $\theta f(t) - g(t)$, а затем (2.15), получаем

$$\begin{aligned} & m \left\{ x \in \mathbb{T}^d : \limsup_{n \rightarrow \infty} |U_{n,B}(f, x)| > \frac{\alpha}{\theta} \right\} \\ &\leq \frac{K}{\alpha} \left(\int_{\mathbb{T}^d} \varphi(|\theta f(t) - g(t)|) dt + 1 \right) < \frac{2K}{\alpha}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Поскольку $\theta > 0$ и $\alpha > A_1$ выбраны произвольно, можно взять $\theta = \alpha/y$ ($y > 0$). Тогда, переходя в (2.16) к пределу при $\alpha \rightarrow \infty$, для любого $y > 0$ получим

$$m \left\{ x \in \mathbb{T}^d : \limsup_{n \rightarrow \infty} |U_{n,B}(f, x)| > y \right\} = 0. \quad (2.17)$$

Теперь, пользуясь тем, что

$$\begin{aligned} & \left\{ x \in \mathbb{T}^d : \limsup_{n \rightarrow \infty} |U_{n,B}(f, x)| > 0 \right\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{T}^d : \limsup_{n \rightarrow \infty} |U_{n,B}(f, x)| > \frac{1}{k} \right\}, \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} & m \left\{ x \in \mathbb{T}^d : \limsup_{n \rightarrow \infty} |U_{n,B}(f, x)| > 0 \right\} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} m \left\{ x \in \mathbb{T}^d : \limsup_{n \rightarrow \infty} |U_{n,B}(f, x)| > \frac{1}{k} \right\} \end{aligned}$$

и, замечая, что в силу (2.17) все члены ряда в правой части последнего неравенства равны нулю, получаем

$$m \left\{ x \in \mathbb{T}^d : \limsup_{n \rightarrow \infty} |U_{n,B}(f, x)| > 0 \right\} = 0,$$

т. е. для почти всех $x \in \mathbb{T}^d$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S}_{n,B}(f, x) = \tilde{f}_B(x).$$

Таким образом, мы установили эквивалентность условий 1) и 2). Нам осталось доказать эквивалентность условий 2) и 3). Предположим, что выполнено условие 2). Замечая, что произвольный полином есть функция ограниченная, а значит, принадлежит $\varphi(L)(\mathbb{T}^d)$, и применяя ранее полученное неравенство (2.12), мы видим, что условие 3) выполняется с константами $A = A_1$ и $y_0 = A_1$.

Наконец, докажем, что из условия 3) следует 2).

Пусть $f \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$, $B \subset \{1, 2, \dots, d\}$. Зафиксируем $y > y_0 + 1$ и $n \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$M_{n,B}(f, x) = \max_{1 \leq k \leq n} |\tilde{S}_{k,B}(f, x)|, \quad M_B(f, x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\tilde{S}_{n,B}(f, x)|. \quad (2.18)$$

Согласно лемме 2 найдется тригонометрический полином $g(t)$ такой, что выполняются условия (2.5) и (2.6) при $\varepsilon = 1/(n+1)^d$, $a = 2$, $h = f$. Тогда с помощью представления (2.8) и неравенства (2.5) имеем для $x \in \mathbb{T}^d$ и $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$|\tilde{S}_{k,B}(f, x) - \tilde{S}_{k,B}(g, x)| = |\tilde{S}_{k,B}(f - g, x)| \leq (n+1)^d \int_{\mathbb{T}^d} |f(t) - g(t)| dt < 1,$$

откуда

$$M_{n,B}(f, x) \leq M_{n,B}(g, x) + 1, \quad x \in \mathbb{T}^d.$$

Используя это неравенство, получаем вложение

$$\{x \in \mathbb{T}^d : M_{n,B}(f, x) > y\} \subset \{x \in \mathbb{T}^d : M_{n,B}(g, x) > y - 1\}. \quad (2.19)$$

Из выпуклости функции φ и неравенства (2.6) следует

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(|g(t)|) dt &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(2|f(t) - g(t)|) dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(2|f(t)|) dt < \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(2|f(t)|) dt + \frac{1}{2(n+1)^d}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Применяя последовательно (2.19), условие 3) леммы и (2.20), имеем

$$\begin{aligned} m\{x \in \mathbb{T}^d : M_{n,B}(f, x) > y\} &\leq m\{x \in \mathbb{T}^d : M_{n,B}(g, x) > y - 1\} \\ &\leq \frac{A}{y-1} \left(\int_{\mathbb{T}^d} \varphi(|g(t)|) dt + 1 \right) < \frac{A}{y-1} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d} \varphi(2|f(t)|) dt + \frac{1}{2(n+1)^d} + 1 \right) \\ &< \frac{2A}{y-1} \left(\int_{\mathbb{T}^d} \varphi(2|f(t)|) dt + 1 \right). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $M_B(f, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} M_{n,B}(f, x)$, получаем

$$m\{x \in \mathbb{T}^d : M_B(f, x) > y\} < \frac{2A}{y-1} \left(\int_{\mathbb{T}^d} \varphi(2|f(t)|) dt + 1 \right).$$

Выбрав u достаточно большим, можно сделать правую часть последнего неравенства сколь угодно малой, в частности, меньшей, чем $m\mathbb{T}^d = (2\pi)^d$. Следовательно, для произвольной функции $f \in \varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ соотношение $M_B(f, x) < +\infty$ выполнено для всех x из некоторого множества положительной меры. Применяя теорему А, получаем условие 2). Лемма доказана.

Положительная функция $b(u)$, определенная для $u \geq u_0 \geq 0$, называется *медленно колеблющейся*, если при любом $\delta > 0$ функция $b(u)u^\delta$ при достаточно больших u возрастает, а $b(u)u^{-\delta}$ убывает. Заметим, что согласно данному нами во введении определению медленно растущая функция есть частный случай медленно колеблющейся.

ТЕОРЕМА В [14, с. 179, теорема 4.39]. *Предположим, что $\chi(u) = u\psi(u)$, где $\psi(u)$ – медленно колеблющаяся функция, положительная, за исключением окрестности точки $u = 0$, где она равна нулю. Тогда для функции φ , определенной равенством*

$$\varphi(u) = u \int_0^u t^{-2} \chi(t) dt,$$

имеем

$$\int_{\mathbb{T}} \chi(|\tilde{f}(t)|) dt \leq K \int_{\mathbb{T}} \varphi(|f(t)|) dt + K$$

для любой $f \in \varphi(L)(\mathbb{T})$, где $K = K(\psi)$ не зависит от f .

ЛЕММА 4. *Пусть $\psi(u)$ – медленно растущая функция, и пусть для $d \in \mathbb{N}$ функции $\varphi_d(u)$ определяются следующим образом:*

$$\varphi_d(u) = u\psi(u)(\log(u + u_d))^{d-1},$$

где $u_d \geq 1$, $u_d \geq u_{d-1}$, $d \geq 2$, – константы. Тогда для каждого $d \geq 2$ неравенство

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi_{d-1}(|\tilde{f}(t)|) dt \leq K_d \int_{\mathbb{T}} \varphi_d(|f(t)|) dt + K_d,$$

где $K_d = K_d(\psi)$ не зависит от f , справедливо для всех $f \in \varphi_d(L)(\mathbb{T})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что произведение двух медленно растущих функций также является медленно растущей функцией. Поэтому из того, что $\psi(u)$ – медленно растущая, следует, что все функции φ_d/u , $d \geq 1$, также медленно растут.

Пусть $d \geq 2$. Поскольку $\varphi_{d-1}(u)/u$ – медленно растущая функция, то функция $\varphi_{d-1}^0(u)$, совпадающая с $\varphi_{d-1}(u)$ при $u > 1$ и равная нулю, если $0 \leq u \leq 1$,

удовлетворяет условиям теоремы В. Применяя теорему В при $\chi(u) = \varphi_{d-1}^0(u)$, имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} \varphi_{d-1}(|\tilde{f}(t)|) dt &\leq \int_{\mathbb{T}} \varphi_{d-1}^0(|\tilde{f}(t)|) dt + 2\pi\varphi_{d-1}(1) \\
&\leq K \int_{\mathbb{T}} |f(u)| \int_0^{|f(u)|} t^{-2} \varphi_{d-1}^0(t) dt du + K + 2\pi\varphi_{d-1}(1) \\
&= K \int_{\{u \in \mathbb{T}: |f(u)| > 1\}} |f(u)| \int_1^{|f(u)|} t^{-2} \varphi_{d-1}(t) dt du \\
&\quad + K + 2\pi\varphi_{d-1}(1).
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Оценим внутренний интеграл в первом слагаемом правой части (2.21). Воспользовавшись убыванием функции

$$\frac{\varphi_{d-1}(u)}{u} = \psi(u) (\log(u + u_{d-1}))^{d-2}$$

для u таких, что $|f(u)| > 1$, получаем

$$\begin{aligned}
\int_1^{|f(u)|} t^{-2} \varphi_{d-1}(t) dt &\leq \varphi_{d-1}(|f(u)|) |f(u)|^{-1} \left(\int_1^{|f(u)|} t^{-1} dt \right) \\
&= \psi(|f(u)|) (\log(|f(u)| + u_{d-1}))^{d-2} \left(\int_1^{|f(u)|} t^{-1} dt \right).
\end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что

$$\int_1^{|f(u)|} t^{-1} dt \leq \log(|f(u)| + u_{d-1})$$

и что $u_{d-1} \leq u_d$, заключаем:

$$\begin{aligned}
\int_1^{|f(u)|} t^{-2} \varphi_{d-1}(t) dt &\leq \psi(|f(u)|) (\log(|f(u)| + u_d))^{d-1} \\
&= |f(u)|^{-1} \varphi_d(|f(u)|).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Объединяя соотношения (2.21) и (2.22), получаем

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} \varphi_{d-1}(|\tilde{f}(t)|) dt &\leq K \int_{\{u \in \mathbb{T}: |f(u)| > 1\}} \varphi_d(|f(u)|) du + K + 2\pi\varphi_{d-1}(1) \\
&\leq K_d \int_{\mathbb{T}} \varphi_d(|f(u)|) du + K_d,
\end{aligned}$$

где $K_d = K + 2\pi\varphi_{d-1}(1)$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Пусть g – кратный тригонометрический полином, определенный на $\mathbb{T}^d$, $\mu, \nu \in \{-1, 0, 1\}$, $\mu^2 + \nu^2 \neq 0$. Функция φ_d удовлетворяет условиям леммы 4. Тогда функция $h = h^{\mu, \nu}$, определяемая равенством

$$h^{\mu, \nu}(x_1, x_2, \dots, x_d) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(x_1 + \mu t, x_2 + \nu t, x_3, \dots, x_d) \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) dt,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения, также является тригонометрическим полиномом и

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}^d} \varphi_{d-1}(|h(x_1, \dots, x_d)|) dx_1 \dots dx_d \\ & \leq \overline{K}_d \int_{\mathbb{T}^d} \varphi_d(|g(x_1, \dots, x_d)|) dx_1 \dots dx_d + \overline{K}_d. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Здесь $\overline{K}_d = \overline{K}_d(\psi)$ не зависит от g .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тригонометрический полином g представим в виде суммы слагаемых вида $c_k e^{ikx}$, $k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d$. Нетрудно убедиться в том, что исследуемое преобразование переводит каждое из этих слагаемых в функцию того же вида, откуда следует, что h является тригонометрическим полиномом.

Докажем теперь неравенство (2.23). Без ограничения общности можно считать, что $\mu \neq 0$. Введя новые переменные $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2 + (\nu/\mu)x'_1$, $x_3 = x'_3, \dots$, $x_d = x'_d$, имеем

$$\begin{aligned} & h(x_1, x_2, \dots, x_d) \\ & = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g\left(x'_1 + \mu t, x'_2 + \frac{\nu}{\mu}x'_1 + \nu t, x'_3, \dots, x'_d\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) dt \\ & = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g\left(x'_1 + \mu t, x'_2 + \frac{\nu}{\mu}(x'_1 + \mu t), x'_3, \dots, x'_d\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) dt. \end{aligned} \quad (2.24)$$

При фиксированных $x'_2, \dots, x'_d$ правая часть (2.24) как функция переменной x'_1 является (с точностью до знака) сопряженной к функции $g(x'_1, x'_2 + (\nu/\mu)x'_1, x'_3, \dots, x'_d)$, поэтому из леммы 4 следует

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}} \varphi_{d-1}\left(\left|\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g\left(x'_1 + \mu t, x'_2 + \frac{\nu}{\mu}(x'_1 + \mu t), x'_3, \dots, x'_d\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2}\right) dt\right|\right) dx'_1 \\ & \leq K_d \int_{\mathbb{T}} \varphi_d\left(\left|g\left(x'_1, x'_2 + \frac{\nu}{\mu}x'_1, x'_3, \dots, x'_d\right)\right|\right) dx'_1 + K_d, \end{aligned} \quad (2.25)$$

$(x'_2, \dots, x'_d) \in \mathbb{T}^{d-1}.$

Интегрируя (2.25) по $(x'_2, \dots, x'_d) \in \mathbb{T}^{d-1}$, пользуясь равенством (2.24) и замечая, что якобиан перехода от $(x'_1, x'_2, \dots, x'_d)$ к $(x_1, x_2, \dots, x_d)$ равен единице, получаем (2.23). Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Напомним, что через $M_B(f, x)$ мы обозначаем определенную равенством (2.18) максимальную функцию частичных сумм B -сопряженного ряда Фурье функции f .

Докажем индукцией по d , что при условиях теоремы 1 найдутся константы $A_d > 0$ и $y_0 > 0$ такие, что для любого кратного тригонометрического полинома g , определенного на $\mathbb{T}^d$, для всех $B \subset \{1, \dots, d\}$ и любых $y \geq y_0$ справедливо неравенство

$$m\{x \in \mathbb{T}^d : M_B(g, x) > y\} \leq \frac{A_d}{y} \left(\int_{\mathbb{T}^d} \varphi_d(|g(t)|) dt + 1 \right). \quad (3.1)$$

Утверждение теоремы тогда будет вытекать из (3.1) в силу леммы 3.

База индукции. Согласно условию теоремы ряд Фурье любой функции $f \in \varphi_1(L)(\mathbb{T})$ сходится почти всюду. Следовательно (см., например, [14, с. 262–263, теорема 5.1]), ряд, сопряженный к ряду Фурье функции f , также сходится почти всюду. Применяя лемму 3 при $d = 1$, $B = \{\emptyset\}$ и $d = 1$, $B = \{1\}$, получаем (3.1) для $d = 1$.

Шаг индукции. Пусть $d \geq 2$. Предположим, что (3.1) верно для всех размерностей, меньших d . Пусть $g(t) = g(t_1, t_2, \dots, t_d)$ – произвольный тригонометрический полином и B – некоторое подмножество множества $N_d = \{1, 2, \dots, d\}$. Обозначим $\bar{B} = N_d \setminus B$. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Пусть $1 \in \bar{B}$, $2 \in \bar{B}$. Обозначим

$$\Pi_n = \Pi_n(t_3, \dots, t_d) = \prod_{i \in B} (-\tilde{D}_n(t_i)) \prod_{j \in \bar{B} \setminus \{1, 2\}} D_n(t_j).$$

Тогда

$$\tilde{S}_{n,B}(g, x) = \frac{1}{\pi^d} \int_{\mathbb{T}^d} D_n(t_1) D_n(t_2) \Pi_n(t_3, \dots, t_d) g(x + t) dt. \quad (3.2)$$

Применяя последовательно тригонометрические тождества

$$\sin(\alpha t_1) \sin(\alpha t_2) = \frac{1}{2} [\cos \alpha(t_1 - t_2) - \cos \alpha(t_1 + t_2)]$$

при $\alpha = 1/2$ и $\alpha = n + 1/2$ и

$$\frac{1}{2 \sin(\frac{t_1}{2}) \cdot 2 \sin(\frac{t_2}{2})} = \frac{1}{2 \sin(\frac{t_1 \pm t_2}{2})} \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_2}{2}\right) \pm \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_1}{2}\right) \right)$$

при t_1, t_2 таких, что $t_1 \pm t_2 \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, получаем

$$\begin{aligned} D_n(t_1) D_n(t_2) &= \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t_1 \cdot \sin(n + \frac{1}{2})t_2}{2 \sin(\frac{t_1}{2}) \cdot 2 \sin(\frac{t_2}{2})} \\ &+ \frac{\frac{1}{2} \cos(\frac{t_1 + t_2}{2}) - \frac{1}{2} \cos(\frac{t_1 - t_2}{2}) + \sin(\frac{t_1}{2}) \sin(\frac{t_2}{2})}{2 \sin(\frac{t_1}{2}) \cdot 2 \sin(\frac{t_2}{2})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})(t_1 - t_2) - \cos(\frac{t_1 - t_2}{2})}{2 \sin(\frac{t_1}{2}) \cdot 2 \sin(\frac{t_2}{2})} \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})(t_1 + t_2) - \cos(\frac{t_1 + t_2}{2})}{2 \sin(\frac{t_1}{2}) \cdot 2 \sin(\frac{t_2}{2})} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})(t_1 - t_2) - \cos(\frac{t_1 - t_2}{2})}{2 \sin(\frac{t_1 - t_2}{2})} \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_2}{2}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_1}{2}\right) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{\cos(n + \frac{1}{2})(t_1 + t_2) - \cos(\frac{t_1 + t_2}{2})}{2 \sin(\frac{t_1 + t_2}{2})} \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_2}{2}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_1}{2}\right) \right) + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(n + \frac{1}{2})(t_1 - t_2) - \cos(\frac{t_1 - t_2}{2})}{2 \sin(\frac{t_1 - t_2}{2})} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\cos(n + \frac{1}{2})(t_1 + t_2) - \cos(\frac{t_1 + t_2}{2})}{2 \sin(\frac{t_1 + t_2}{2})} \right] \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_2}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(n + \frac{1}{2})(t_2 - t_1) - \cos(\frac{t_2 - t_1}{2})}{2 \sin(\frac{t_2 - t_1}{2})} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\cos(n + \frac{1}{2})(t_2 + t_1) - \cos(\frac{t_2 + t_1}{2})}{2 \sin(\frac{t_2 + t_1}{2})} \right] \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_1}{2}\right) + \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$D_n(t_1)D_n(t_2) = D_n^1 + D_n^2 + \frac{1}{4}, \quad (3.3)$$

где

$$D_n^1 = \frac{1}{2} [\tilde{D}_n(t_2 + t_1) - \tilde{D}_n(t_2 - t_1)] \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_1}{2}\right), \quad (3.4)$$

$$D_n^2 = \frac{1}{2} [\tilde{D}_n(t_1 + t_2) - \tilde{D}_n(t_1 - t_2)] \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_2}{2}\right). \quad (3.5)$$

Заметим, что при каждом n функции D_n^1 и D_n^2 ограничены при $(t_1, t_2) \in \mathbb{T}^2$.

Обе части равенства (3.4) умножаем на $\Pi_n g(x_1 + t_1, \dots, x_d + t_d)$ и интегрируем по множеству $\{(t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{T}^d : |t_1| > \varepsilon\}$ при произвольном $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d$. Затем разобьем получившийся в правой части интеграл на разность двух интегралов в соответствии с разностью в (3.4), сделаем в каждом из них замену переменных соответственно $u_1 = t_1$, $u_2 = t_2 + t_1$, $u_3 = t_3$, $\dots$, $u_d = t_d$ и $u_1 = t_1$, $u_2 = t_2 - t_1$, $u_3 = t_3$, $\dots$, $u_d = t_d$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Получим равенство

$$\int_{\mathbb{T}^d} D_n^1 \Pi_n g(x_1 + t_1, \dots, x_d + t_d) dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^d - 1} \tilde{D}_n(u_2) \Pi_n(u_3, \dots, u_d)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_{\mathbb{T}} g(x_1 + u_1, x_2 + u_2 - u_1, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d) \right. \\
& \times \left. \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{u_1}{2} \right) du_1 \right) du_2 \dots du_d - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \tilde{D}_n(u_2) \Pi_n(u_3, \dots, u_d) \\
& \times \left(\int_{\mathbb{T}} g(x_1 + u_1, x_2 + u_2 + u_1, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d) \right. \\
& \times \left. \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{u_1}{2} \right) du_1 \right) du_2 \dots du_d. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Внутренние интегралы в правой части (3.6), понимаемые в смысле главного значения, согласно обозначениям леммы 5 можно записать как $-\pi h^{1,-1}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d)$ и $-\pi h^{1,1}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d)$. Прделав с равенством (3.5) то же, что и с (3.4), только производя при этом замены $u_1 = t_1 + t_2, u_2 = t_2, \dots, u_d = t_d$ и $u_1 = t_1 - t_2, u_2 = t_2, \dots, u_d = t_d$, получаем

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{T}^d} D_n^2 \Pi_n g(x_1 + t_1, \dots, x_d + t_d) dt \\
& = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \tilde{D}_n(u_1) \Pi_n(u_3, \dots, u_d) \\
& \quad \times \left(\int_{\mathbb{T}} g(x_1 + u_1 - u_2, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d) \right. \\
& \quad \times \left. \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{u_2}{2} \right) du_2 \right) du_1 du_3 \dots du_d - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \tilde{D}_n(u_1) \Pi_n(u_3, \dots, u_d) \\
& \quad \times \left(\int_{\mathbb{T}} g(x_1 + u_1 + u_2, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d) \right. \\
& \quad \times \left. \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{u_2}{2} \right) du_2 \right) du_1 du_3 \dots du_d \\
& = -\frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \tilde{D}_n(u_1) \Pi_n(u_3, \dots, u_d) \\
& \quad \times h^{-1,1}(x_1 + u_1, x_2, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d) du_1 du_3 \dots du_d \\
& \quad + \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \tilde{D}_n(u_1) \Pi_n(u_3, \dots, u_d) \\
& \quad \times h^{1,1}(x_1 + u_1, x_2, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d) du_1 du_3 \dots du_d. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Используя определение $M_B(g, x)$, соотношения (3.2), (3.3), (3.6) и (3.7), имеем

$$\begin{aligned}
2M_B(g, x) & \leq \max_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{\pi^{d-1}} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \tilde{D}_n(u_2) \Pi_n(u_3, \dots, u_d) \right. \\
& \quad \times \left. h^{1,-1}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d) du_2 \dots du_d \right| \\
& \quad + \max_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{\pi^{d-1}} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \tilde{D}_n(u_2) \Pi_n(u_3, \dots, u_d) \right. \\
& \quad \times \left. h^{1,1}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d) du_2 \dots du_d \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \max_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{\pi^{d-1}} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \tilde{D}_n(u_1) \Pi_n(u_3, \dots, u_d) \right. \\
& \quad \times h^{-1,1}(x_1 + u_1, x_2, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d) du_1 du_3 \dots du_d \Big| \\
& + \max_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{\pi^{d-1}} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \tilde{D}_n(u_1) \Pi_n(u_3, \dots, u_d) \right. \\
& \quad \times h^{1,1}(x_1 + u_1, x_2, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d) du_1 du_3 \dots du_d \Big| \\
& + \max_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{2\pi^d} \int_{\mathbb{T}^d} \Pi_n(u_3, \dots, u_d) g(x_1 + t_1, \dots, x_d + t_d) dt_1 \dots dt_d \right| \\
& = M_B^1(g, x) + M_B^2(g, x) + M_B^3(g, x) + M_B^4(g, x) + M_B^5(g, x). \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Покажем, что $M_B^1(g, x)$ удовлетворяет неравенству (3.1) с некоторой константой A_d^1 .

Зафиксируем $x_1 \in \mathbb{T}$. Согласно предположению индукции для полинома $h^{1,-1}(x_1, x_2, \dots, x_d)$ как функции $d-1$ переменных $x_2, \dots, x_d$ и для $B' = B \setminus \{1\} \subset \{2, 3, \dots, d\}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
& m \left\{ (x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^{d-1} : \max_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{\pi^{d-1}} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \tilde{D}_n(u_2) \Pi_n(u_3, \dots, u_d) \right. \right. \\
& \quad \times h^{1,-1}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d) du_2 \dots du_d \Big| > y \Big\} \\
& = m \left\{ (x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^{d-1} : \max_{n \in \mathbb{N}} |S_{n, B'}(h^{1,-1}(x_2, \dots, x_d))| > y \right\} \\
& \leq \frac{A_{d-1}}{y} \left(\int_{\mathbb{T}^{d-1}} \varphi_{d-1}(|h^{1,-1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_d)|) dx_2 \dots dx_d + 1 \right), \\
& \quad y > y_0. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Пользуясь тем, что

$$\begin{aligned}
& m \{ (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d : M_B^1(g, x) > y \} \\
& = \int_{\mathbb{T}} m \left\{ (x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^{d-1} : \max_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{\pi^{d-1}} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \tilde{D}_n(u_2) \Pi_n(u_3, \dots, u_d) \right. \right. \\
& \quad \times h^{1,-1}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d) du_2 \dots du_d \Big| > y \Big\} dx_1,
\end{aligned}$$

применяя (3.9), а затем теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned}
& m \{ (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d : M_B^1(g, x) > y \} \\
& \leq \frac{A_{d-1}}{y} \int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}^{d-1}} \varphi_{d-1}(|h^{1,-1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_d)|) dx_2 \dots dx_d + 1 \right) dx_1 \\
& = \frac{A_{d-1}}{y} \left(\int_{\mathbb{T}^d} \varphi_{d-1}(|h^{1,-1}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_d)|) dx_1 dx_2 \dots dx_d + 2\pi \right), \\
& \quad y > y_0.
\end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 5 заключаем

$$\begin{aligned} m\{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d : M_B^1(g, x) > y\} \\ \leq \frac{A_{d-1}}{y} \left(\overline{K}_d \int_{\mathbb{T}^d} \varphi_d(|g(x_1, x_2, \dots, x_d)|) dx_1 dx_2 \dots dx_d + \overline{K}_d + 2\pi \right) \\ \leq \frac{A_d^1}{y} \left(\int_{\mathbb{T}^d} \varphi_d(|g(x_1, x_2, \dots, x_d)|) dx_1 dx_2 \dots dx_d + 1 \right), \quad y > y_0, \end{aligned}$$

где $A_d^1 = A_{d-1}(\overline{K}_d + 2\pi)$.

Аналогично можно показать, что $M_B^i(g, x)$, $i = 2, 3, 4$, также удовлетворяют (3.1) с той же константой A_d^1 .

Рассмотрим слагаемое $M_B^5(g, x)$. При $d = 2$ имеем $\Pi_n \equiv 1$, поэтому

$$M_B^5(g, x) \leq \frac{1}{2\pi^d} \int_{\mathbb{T}^d} |g(t)| dt,$$

откуда в силу неубывания $\varphi_2(u)/u$ следует неравенство (3.1) с некоторой константой $A_2^5 = A_2^5(\psi)$. Если $d > 2$, то неравенство (3.1) следует из равенства

$$\begin{aligned} m\{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d : M_B^5(g, x) > y\} \\ = \int_{\mathbb{T}^2} m\left\{ (x_3, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^{d-2} : \max_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{2\pi^d} \int_{\mathbb{T}^{d-2}} \Pi_n(u_3, \dots, u_d) \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\int_{\mathbb{T}^2} g(x_1 + t_1, x_2 + t_2, x_3 + t_3, \dots, x_d + t_d) dt_1 dt_2 \right) dt_3 \dots dt_d \right| > y \right\} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

и предположения индукции, примененного для размерности $d - 2$ к полиному

$$h_{x_1, x_2}(t_3, \dots, t_d) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\mathbb{T}^2} g(x_1 + t_1, x_2 + t_2, t_3, \dots, t_d) dt_1 dt_2.$$

Таким образом, для $M_B(g, x)$ неравенство (3.1) выполняется при $A_d = 4A_d^1 + A_d^5$.

Случай 2. Пусть $1 \in B$, $2 \in \overline{B}$. (Случай, когда $1 \in \overline{B}$, $2 \in B$, рассматривается аналогично.) Здесь

$$\tilde{S}_{n,B}(g, x) = -\frac{1}{\pi^d} \int_{\mathbb{T}^d} \tilde{D}_n(t_1) D_n(t_2) \Pi_n(t_3, \dots, t_d) g(x + t) dt. \quad (3.10)$$

Применяя последовательно тригонометрические тождества аналогично предыдущему случаю, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\cos(n + \frac{1}{2})t_1 - \cos(\frac{t_1}{2})}{2 \sin(\frac{t_1}{2})} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t_2}{2 \sin(\frac{t_2}{2})} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sin(n + \frac{1}{2})(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \sin(n + \frac{1}{2})(t_2 + t_1)}{2 \sin(\frac{t_1}{2}) \cdot 2 \sin(\frac{t_2}{2})} - \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t_2}{2 \sin(\frac{t_2}{2})} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t_2 - t_1)}{2 \sin(\frac{t_1 - t_2}{2})} \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_2}{2}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_1}{2}\right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t_2 + t_1)}{2 \sin(\frac{t_2 + t_1}{2})} \left(\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_2}{2}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_1}{2}\right) \right) \\
&\quad - \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t_2}{2 \sin(\frac{t_2}{2})} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t_2 + t_1)}{2 \sin(\frac{t_2 + t_1}{2})} + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t_2 - t_1)}{2 \sin(\frac{t_2 - t_1}{2})} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t_2}{\sin(\frac{t_2}{2})} \right] \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_1}{2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t_1 + t_2)}{2 \sin(\frac{t_1 + t_2}{2})} - \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t_1 - t_2)}{2 \sin(\frac{t_1 - t_2}{2})} \right] \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_2}{2}\right),
\end{aligned}$$

т. е.

$$\tilde{D}_n(t_1) D_n(t_2) = D_n^3 + D_n^4, \quad (3.11)$$

где

$$D_n^3 = \frac{1}{2} [D_n(t_2 + t_1) + D_n(t_2 - t_1) - 2D_n(t_2)] \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_1}{2}\right), \quad (3.12)$$

$$D_n^4 = \frac{1}{2} [D_n(t_1 + t_2) - D_n(t_1 - t_2)] \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(\frac{t_2}{2}\right). \quad (3.13)$$

Теперь обе части равенства (3.12) умножаем на $\Pi_n g(x_1 + t_1, \dots, x_d + t_d)$ и интегрируем по множеству $\{(t_1, t_2, \dots, t_d) \in \mathbb{T}^d: |t_1| > \varepsilon\}$ при произвольном $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d$. Затем разобьем получившийся в правой части интеграл на три интеграла, сделаем в первых двух из них замену переменных соответственно $u_1 = t_1, u_2 = t_2 + t_1, u_3 = t_3, \dots, u_d = t_d$ и $u_1 = t_1, u_2 = t_2 - t_1, u_3 = t_3, \dots, u_d = t_d$ и перейдем к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Аналогичные действия произведем с равенством (3.13). Используя получившиеся соотношения, а также (3.11) и (3.10), имеем

$$\begin{aligned}
2M_B(g, x) &\leq \max_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{\pi^{d-1}} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \tilde{D}_n(u_2) \Pi_n(u_3, \dots, u_d) \right. \\
&\quad \left. \times h^{1,-1}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d) du_2 \dots du_d \right| \\
&\quad + \max_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{\pi^{d-1}} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \tilde{D}_n(u_2) \Pi_n(u_3, \dots, u_d) \right. \\
&\quad \left. \times h^{1,1}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d) du_2 \dots du_d \right| \\
&\quad + \max_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{\pi^{d-1}} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \tilde{D}_n(u_2) \Pi_n(u_3, \dots, u_d) \right. \\
&\quad \left. \times h^{1,0}(x_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d) du_2 \dots du_d \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \max_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{\pi^{d-1}} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \tilde{D}_n(u_1) \Pi_n(u_3, \dots, u_d) \right. \\
& \times h^{-1,1}(x_1 + u_1, x_2, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d) du_1 du_3 \dots du_d \Big| \\
& + \max_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{\pi^{d-1}} \int_{\mathbb{T}^{d-1}} \tilde{D}_n(u_1) \Pi_n(u_3, \dots, u_d) \right. \\
& \times h^{1,1}(x_1 + u_1, x_2, x_3 + u_3, \dots, x_d + u_d) du_1 du_3 \dots du_d \Big|. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Используя те же рассуждения, что и в случае 1, можно показать, что все пять слагаемых в правой части (3.14) удовлетворяют (3.1), откуда следует (3.1) для $M_B(g, x)$.

Случай 3. Пусть $1 \in B$, $2 \in B$. Этот случай рассматривается аналогично двум предыдущим. Здесь используется тождество

$$\tilde{D}_n(t_1) \tilde{D}_n(t_2) = D_n^5 + D_n^6,$$

где

$$\begin{aligned}
D_n^5 &= \frac{1}{2} [\tilde{D}_n(t_2 + t_1) + \tilde{D}_n(t_2 - t_1) - 2\tilde{D}_n(t_2)] \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{t_1}{2} \right), \\
D_n^6 &= \frac{1}{2} [\tilde{D}_n(t_1 + t_2) + \tilde{D}_n(t_1 - t_2) - 2\tilde{D}_n(t_1)] \cdot \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{t_2}{2} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, (3.1) справедливо для любого $d \in \mathbb{N}$, всех кратных тригонометрических полиномов, определенных на $\mathbb{T}^d$, и произвольного $B \subset \{1, 2, \dots, d\}$. Теорема доказана.

Результаты этой работы были ранее депонированы в [15].

Список литературы

1. Carleson L. On convergence and growth of partial sums of Fourier series // Acta Math. 1966. V. 116. № 1–2. P. 135–157.
2. Hunt R. A. On the convergence of Fourier series // Orthogonal expansions and their continuous analogues. Carbondale–Illinois: SIU Press, 1968. P. 235–255.
3. Sjölin P. An inequality of Paley and convergence a. e. of Walsh–Fourier series // Arkiv för mat. 1969. V. 7. P. 551–570.
4. Antonov N. Yu. Convergence of Fourier series // East J. on Approx. 1996. V. 2. № 2. P. 187–196.
5. Конягин С. В. О расходимости всюду тригонометрических рядов Фурье // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 1. С. 103–126.
6. Тевзадзе Н. Р. О сходимости двойного ряда Фурье функции, суммируемой с квадратом // Сообш. АН ГССР. 1970. Т. 58. № 2. С. 277–279.
7. Fefferman C. On the convergence of multiple Fourier series // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. № 5. P. 744–745.
8. Sjölin P. Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series // Arkiv för mat. 1971. V. 9. № 1. P. 65–90.
9. Konyagin S. V. On divergence of trigonometric Fourier series over cubes // Acta Sci. Math. (Szeged). 1995. V. 61. P. 305–329.

10. Ульянов П. Л. Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$ // УМН. 1972. Т. 27. № 2. С. 3–52.
11. Stein E. M. On limits of sequences of operators // Annals of Math. 1961. V. 74. № 1. P. 140–170.
12. Kolmogoroff A. Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier // Fund. Math. 1925. V. 7. P. 24–29.
13. Жижиашивили Л. В. О справедливости теоремы А. Н. Колмогорова для сопряженных функций многих переменных // Матем. заметки. 1982. Т. 32. № 1. С. 13–21.
14. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 2. М.: Мир, 1965.
15. Антонов Н. Ю. Сходимость почти всюду кратных рядов Фурье. Деп. в ВИНТИ 24.11.97, № 3444-B97.

E-mail: Nikolai.Antonov@imm.uran.ru

Поступило в редакцию
24.11.2002