Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Архипова, Приграничные априорные оценки для решений недиагональных эллиптических систем с сильной нелинейностью, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 2, 23–38

DOI: <https://doi.org/10.4213/im473>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 17:46:44

УДК 517.953

А. А. Архипова

Приграничные априорные оценки для решений недиагональных эллиптических систем с сильной нелинейностью

Рассмотрены квазилинейные эллиптические недиагональные системы уравнений с сильной нелинейностью по градиенту. Ранее автором было установлено, что обобщенное решение такой системы будет непрерывным по Гёльдеру в окрестности тех точек области, где достаточно мала норма градиента решения в пространстве Морри $L^{2,n-2}$. В окрестности таких точек оценена норма Гёльдера решения через его норму в пространстве Соболева W_2^1 . Аналогичный результат получен при краевом условии Дирихле для точек, расположенных в окрестности границы области.

Библиография: 10 наименований.

§ 1. Постановка задачи. Формулировка основного результата

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$, $N > 1$, $u = (u^1, \dots, u^N)$ – решение задачи Дирихле

$$\begin{aligned} -(A_{kl}^{\alpha\beta}(x, u)u_{x_\beta}^l)_{x_\alpha} + b^k(x, u, u_x) &= 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Предположим, что матрица $A = \{A_{kl}^{\alpha\beta}\}_{k,l \leq N}^{\alpha,\beta \leq n}$ определена на множестве $\mathfrak{M} = \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$, $b = \{b^k\}_{k \leq N}$ – функция Каратеодори на $\mathfrak{M} \times \mathbb{R}^{nN}$ и выполнено следующее:

а) условие равномерной эллиптичности

$$(A(x, u)\xi, \xi) = \sum_{\substack{\alpha, \beta \leq n \\ k, l \leq N}} A_{kl}^{\alpha\beta}(x, u) \xi_\alpha^k \xi_\beta^l \geq \nu |\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^{nN}, \quad (x, u) \in \mathfrak{M}, \quad (2)$$

$$\sup_{\mathfrak{M}} \|A(x, u)\| \leq \mu; \quad (3)$$

б) все функции $A_{kl}^{\alpha\beta}$ равномерно непрерывны на $\mathfrak{M}$, более точно, мы предполагаем, что существует непрерывная, ограниченная и неубывающая функция $\omega(s, t)$ такая, что

$$\|A(x, u) - A(y, v)\| \leq \omega(|x - y|^2, |u - v|^2), \quad x, y \in \overline{\Omega}, \quad u, v \in \mathbb{R}^N, \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00276).

при этом $\omega(s, t) \rightarrow 0$, если $s, t \rightarrow 0$, ω выпукла по аргументу t при любом фиксированном s ;

в) условие на порядок роста функции b в форме

$$|b(x, u, z)| \leq a|z|^2 + \mu, \quad (x, u) \in \mathfrak{M}, \quad z \in \mathbb{R}^{nN}; \quad (5)$$

г) $\partial\Omega \in C^1$.

В случае неоднородного условия Дирихле $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ предполагаем, что функция φ достаточно гладкая, и при сведении краевого условия к однородному для преобразованной задачи выполняются условия вида а)–в). Условие (5) определяет *сильно нелинейные* члены $b(x, u, u_x)$ системы (1). Проблема разрешимости задачи (1) при условии (5) для недиагональных систем остается открытой до настоящего времени. Известны лишь результаты о разрешимости двумерной задачи [1], [2]. В то же время доказана частичная регулярность *ограниченных* обобщенных решений задачи (1) при условии

$$2a\|u\|_{\infty, \Omega} < \nu \quad (6)$$

(см. работы [3]–[5]).

В локальной постановке проблемы работы [3]–[5] гарантируют, что если $u \in W_2^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ – решение системы (1) и в некотором шаре $B_R(x^0) \subset \Omega$

$$a \operatorname{osc}_{B_R(x^0)} u < \nu, \quad (7)$$

то u – непрерывная по Гёльдеру функция в $B_{R/2}(x^0) \setminus \sigma$ и мера Хаусдорфа $H_{n-2-\varepsilon}(\sigma)$ равна нулю при некотором $\varepsilon > 0$. Из работы [5] аналогичный результат следует для приграничных шаров ($B_R(x^0) \cap \Omega \neq B_R(x^0)$) при краевых условиях Дирихле и Неймана.

Напомним, что при исследовании регулярности ограниченных обобщенных решений в рамках прямого метода условие (7) использовалось только для того, чтобы доказать повышение степени интегрируемости решения u , точнее, чтобы установить оценку вида

$$\|u_x\|_{p, B_{R_1}(x^0)} \leq c(1 + \|u_x\|_{2, B_R(x^0)}) \quad (8)$$

с некоторым $p > 2$ при $R_1 < R$; $c = c(\nu, \mu, a, (R - R_1)^{-1})$.

Для доказательства непрерывности по Гёльдеру решения в окрестности точки x^0 дополнительно к (7) предполагалось, что для некоторых чисел $\varepsilon_0 > 0$ и $R_0 < R_1$ справедлива оценка

$$\oint_{B_{R_0}(x^0)} |u_x|^2 dx \equiv \frac{1}{R_0^{n-2}} \int_{B_{R_0}(x^0)} |u_x|^2 dx < \varepsilon_0, \quad (9)$$

где число ε_0 определяется только данными задачи.

Таким образом, достаточными условиями, гарантирующими непрерывность по Гёльдеру решения в окрестности точки x^0 , являлись предположения (7) и (9). Заметим, что из интегрального тождества для системы (1) следует оценка

$$\oint_{B_R(x^0)} |u_x|^2 dx \leq \frac{c(\nu, \mu) M_R^2}{\nu - a M_R}, \quad M_R = \operatorname{osc}_{B_{2R}(x^0)} u.$$

Таким образом, если полагать, что для M_R справедлива оценка

$$\frac{c(\nu, \mu) M_R^2}{\nu - a M_R} < \varepsilon_0, \quad (9')$$

то в окрестности точки x_0 может быть оценена норма Гёльдера функции u .

К сожалению, отсутствие принципа максимума для недиагональных эллиптических систем уравнений не позволяет получить априорную оценку L_∞ нормы решения и, следовательно, проследить случаи, когда условия (6), (7) или (9') имеют место. Кроме того, согласно указанному описанию точек гёльдеровости решения, точки, для которых не выполнено (7), (9) или (7), (9'), следует отнести к сингулярным точкам решения. Представляется сомнительной возможность оценить в терминах хаусдорфовой размерности все точки x^0 , не удовлетворяющие условию (7). Поэтому мы вынуждены искать другое, более точное описание точек гладкости решения u задачи (1).

В работе автора [6] показано, что условие (7) можно заменить на условие малости полунормы $[u]_{2,n;B_R(x^0)}$ в пространстве функций ограниченной вариации (ВМО). Точнее, в [6] показано, что существует число $\Theta = \Theta(\nu, \mu) > 0$ такое, что если

$$[u]_{2,n;B_R(x^0)} < \Theta \min \left\{ \frac{\nu}{a}, 1 \right\}, \quad (10)$$

то для некоторых $p = p(\nu, \mu) > 2$ и $R_1 = R_1(R) < R$ справедлива оценка (8) с постоянной c , зависящей дополнительно от Θ .

Кроме того, в [6] доказано, что если вместо (10) предположить более сильное условие

$$\|u_x\|_{L^{2,n-2}(B_R(x^0))} < \Theta_1 \quad (11)$$

для некоторого $\Theta_1 > 0$, то верна не только оценка (8), но и априорная оценка

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{B_{R_2}(x^0)})} \leq c(1 + \|u_x\|_{2,B_{R_0}(x^0)}) \quad \forall \alpha \in (0, 1), \quad R_2 < R_0. \quad (12)$$

(Определение нормы в пространстве Морри $L^{2,n-2}(B_R)$ и полунормы $[\cdot]_{2,n;B_R}$ в пространстве $\mathcal{L}^{2,n}(B_R)$ см. ниже в этом параграфе.)

В работе [6] все рассуждения проведены для шаров $B_R(x^0)$, лежащих строго внутри области Ω . В то же время, чтобы использовать априорные оценки для доказательства существования решения, необходимо иметь оценки не только внутренние, но и приграничные. Для сильно нелинейных систем получение таких оценок связано с определенными техническими трудностями.

Настоящая работа посвящена получению оценки вида (12) в окрестности точки $x^0 \in \partial\Omega$.

Обобщенным решением задачи (1) называем функцию $u \in \mathring{W}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющую тождеству

$$\int_{\Omega} [A_{kl}^{\alpha\beta}(x, u) u_{x_\beta}^l h_{x_\alpha}^k + b^k(x, u, u_x) h^k] dx = 0 \quad \forall h \in \mathring{C}^1(\overline{\Omega}). \quad (13)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Получаемые в настоящей работе *априорные* оценки предполагается использовать для доказательства существования обобщенного решения задачи (1), при этом мы будем рассматривать некоторые регуляризации задачи, и предположение о дополнительной гладкости решения в окрестности исследуемой точки не является для нас обременительным.

Основным результатом работы является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия а)–г) и $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ – обобщенное решение задачи (1). Существует такое число $\Theta = \Theta(\nu, \mu, n) > 0$, что если для некоторой точки $x^0 \in \bar{\Omega}$ найдется $R_0 > 0$ такое, что $u \in C^1(\bar{\Omega}_{R_0}(x^0))$ и

$$\|u_x\|_{L^{2,n-2}(\Omega_{R_0}(x^0))} < \Theta \min \left\{ \frac{\nu}{a}, 1 \right\}, \quad (14)$$

то имеет место оценка

$$\|u\|_{C^\alpha(\bar{\Omega}_{R_*}(x^0))} \leq c(1 + \|u\|_{W_2^1(\Omega_{R_0}(x^0))}) \quad \forall \alpha \in (0, 1) \quad (15)$$

при некотором $R_* < R_0$.

Постоянные c и R_* в оценке (15) определяются параметрами ν, μ, a, α , модулем непрерывности $\omega(\cdot, \cdot)$ из условия б), а также C^1 -характеристикой $\partial\Omega$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предположение теоремы 1 о принадлежности $u(x)$ пространству $C^1(\bar{\Omega}_{R_0}(x^0))$ можно ослабить и считать, что $u_x \in L^m(\Omega_{R_0}) \cap L^{2,n-2}(\Omega_{R_0})$ с каким либо $m > 2$ (см. замечание 1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Чтобы доказать теорему, достаточно проанализировать случай $x^0 \in \partial\Omega$. Далее, учитывая внутренние оценки, установленные в [6], и “сшивая” приграничные оценки с внутренними, получим справедливость теоремы 1 в общем случае.

В настоящей работе приняты следующие обозначения: $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$;

$$Q_r(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - x_i^0| < r, i = 1, \dots, n\}, \\ B_r(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < r\}, \quad S_r(x^0) = \partial B_r(x^0);$$

Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $\Omega_\rho(x^0) = \Omega \cap B_\rho(x^0)$; $|A| = \text{meas}_n A$ – мера Лебега множества $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\oint_A f(x) dx = \frac{1}{|A|} \int_A f(x) dx, \quad U_{\rho, x^0} = \oint_{\Omega_\rho(x^0)} U(x) dx; \\ \|V\|_{m, A} = \|V\|_{L^m(A)}, \quad m \in [1, \infty].$$

Напомним, что в пространствах Морри $L^{2,\alpha}(D)$, $\alpha \in (0, n]$, где D – ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, норма определяется следующим образом:

$$\|U\|_{L^{2,\alpha}(D)} = \left(\sup_{\substack{x^0 \in D \\ \rho \leq d}} \frac{1}{\rho^\alpha} \int_{D_\rho(x^0)} |U|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ D_\rho(x^0) = D \cap B_\rho(x^0), \quad d = \text{diam } D.$$

В пространствах Кампанато $\mathcal{L}^{2,\beta}(D)$, $\beta \in (0, n+2]$, норма определяется следующим образом:

$$\|U\|_{\mathcal{L}^{2,\beta}(D)}^2 = \|U\|_{2,D}^2 + [U]_{2,\beta;D}^2,$$

где

$$[U]_{2,\beta;D} = \left(\sup_{\substack{x^0 \in D \\ \rho \leq d}} \frac{1}{\rho^\beta} \int_{D_\rho(x^0)} |U - U_{\rho,x^0}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

– полунорма.

Если D – область *типа* (A), т. е. существует число $A > 0$ такое, что

$$|D_\rho(x)| \geq A\rho^n, \quad x \in D, \quad \forall \rho \leq d,$$

то пространства $\mathcal{L}^{2,\beta}(D)$ при $\beta = n + 2\gamma$, $\gamma \in (0, 1)$, изоморфны пространствам Гёльдера $C^\gamma(\overline{D})$.

Отметим также, что пространства $\mathcal{L}^{m,n}(Q)$, где Q – куб в $\mathbb{R}^n$, при различных $m \geq 1$ изоморфны между собой и определяют пространство $\text{ВМО}(Q)$, кроме того, эти пространства совпадают с пространством Йона–Ниренберга $\text{JN}(Q)$. (О свойствах пространств $L^{p,\beta}$, $\mathcal{L}^{p,\beta}$ и JN см. [7, гл. IV], [8, гл. I] и [9]). При доказательстве теоремы 1 будет существенно использоваться теорема о квазиобратных неравенствах Гёльдера, доказанная автором в [6]. Сформулируем ее.

ТЕОРЕМА 2 [6, теорема 1]. *Пусть фиксированы числа $q, l > 1$, $\omega > 0$ и число $m > ql$. Пусть $g \in L^m(Q_r(\hat{x}))$ удовлетворяет неравенствам*

$$\int_{B_{\frac{r}{2}}} g^q dx \leq c_0 \left[\left(\int_{B_r} g dx \right)^q + b\omega \left(\int_{B_r} g^{ql} dx \right)^{\frac{1}{l}} \right] \quad \forall B_r \subset Q_r(\hat{x}), \quad (16)$$

где c_0, b – положительные постоянные и b может зависеть от l .

Существует число $p_0 > q$, зависящее только от q и c_0 , такое, что для $p \in (q, \min\{p_0, m\})$

$$\left(\int_{Q_{\frac{r}{2}}} g^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c_* \left(\int_{Q_r} g^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall Q_r \subset Q_R(\hat{x}), \quad (17)$$

если в неравенствах (16) $l \in (1, p/q)$, $\omega < \kappa_0/b$, κ_0 – некоторое число, зависящее от p, q, l и c_0 .

В частности,

$$\|g\|_{p, Q_r(\hat{x})} \leq c_{**} \|g\|_{q, Q_R(\hat{x})}, \quad r < R. \quad (18)$$

Постоянные c_ и c_{**} зависят от $p, q, l, c_0, b(l)$ и ω , а c_{**} зависит также от $(R - r)^{-1}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Из анализа доказательства теоремы 1, проведенного в [6] (в частности, анализа доказательства леммы 1 из [6]), следует, что постоянные c_* и c_{**} в теореме 2 можно считать зависящими от κ_0 , а не от ω .

§ 2. Доказательство теоремы 1

Докажем сначала две леммы. В первой лемме при условии (14) устанавливается L^p -оценка градиента решения при некотором $p > 2$. Во второй лемме мы получаем оценку C^α -нормы решения в окрестности точки $x_0 \in \partial\Omega$ через W_2^1 -норму решения.

ЛЕММА 1. Пусть выполнены условия теоремы 1, причем $x^0 \in \partial\Omega$. Тогда существует такое число $s = s(\nu, \mu) > 2$, что

$$\|u_x\|_{s, \Omega_{\tilde{R}}(x^0)} \leq c_1 (1 + \|u_x\|_{2, \Omega_{R_0}(x^0)}) \quad (19)$$

при некотором $\tilde{R} < R_0$, число R_0 – из условия (14).

В частности, справедливы неравенства

$$\left(\int_{\Omega_\rho(y)} (1 + |u_x|)^s dx \right)^{\frac{2}{s}} \leq c_2 \int_{\Omega_{t\rho}(y)} (1 + |u_x|)^2 dx \quad \forall \Omega_{t\rho}(y) \subset \Omega_{R_0}(x^0), \quad (20)$$

где $t = t(n) > 2$. Постоянные c_1 и c_2 зависят от ν , μ , a и n , а c_1 , кроме того, зависит от $(R_0 - \tilde{R})^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольно $x^0 \in \partial\Omega$, положим $R_1 = R_0/\sqrt{n}$, где R_0 – из условия (14). Пусть сначала $y^0 \in \partial\Omega \cap B_{R_1}(x^0)$, $B_r(y^0) \subset B_{R_1}(x^0)$. Рассмотрим тождество (13) с $h = u\xi^2$, где ξ – срезающая для $B_r(y^0)$ функция, $h|_{\partial\Omega_r(y^0)} = 0$. Получаем неравенство

$$\int_{\Omega_{\frac{r}{2}}(y^0)} |u_x|^2 dx \leq \frac{4\mu}{\nu r^2} \int_{\Omega_r(y^0)} |u|^2 dx + \frac{2a}{\nu} \int_{\Omega_r(y^0)} |u_x|^2 |u| dx + \frac{2\mu}{\nu} |B_r|. \quad (21)$$

Заметим, что $u|_{\gamma_r(y^0)} = 0$, где $\gamma_r(y^0) = B_r(y^0) \cap \partial\Omega$. В силу теоремы вложения пространств $W_{2n/(n+2)}^1(\Omega_r) \hookrightarrow L^2(\Omega_r)$ верна оценка

$$\int_{\Omega_r} |u|^2 dx \leq c_3 \left(\int_{\Omega_r} |u_x|^{\frac{2n}{n+2}} dx \right)^{\frac{n+2}{n}}. \quad (22)$$

Нам предстоит оценить в (21) интеграл $J_r = \int_{\Omega_r(y^0)} |u_x|^2 |u| dx$. Пусть $\tilde{u}$ – продолженная нулем вне Ω функция u ; тогда $\tilde{u} \in W_2^1(B_r(y^0))$ и для любого $s > 1$

$$\left(\int_{\Omega_r(y^0)} |u - u_{r,y^0}|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(1 + \left(\frac{|B_r|}{|\Omega_r|} \right)^{1-\frac{1}{s}} \right) \left(\int_{B_r(y^0)} |\tilde{u} - \tilde{u}_{r,y^0}|^s dx \right)^{\frac{1}{s}}, \quad (23)$$

$$\tilde{u}_{r,y^0} = \int_{B_r(y^0)} \tilde{u} dx.$$

Поскольку $\partial\Omega \in C^1$, то величина $1 + (|B_r|/|\Omega_r|)^{1-1/s}$ оценивается в неравенстве (23) постоянной c_4 .

Для произвольно фиксированного $l > 1$ и $l' = l/(l-1)$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned}
J_r &\leq \left(\int_{\Omega_r(y^0)} |u_x|^{2l} dx \right)^{\frac{1}{l}} \left(\int_{\Omega_r(y^0)} |u|^{l'} dx \right)^{\frac{1}{l'}} |\Omega_r| \\
&\leq |\Omega_r| \left(\int_{\Omega_r(y^0)} |u_x|^{2l} dx \right)^{\frac{1}{l}} \left\{ |u_{r,y^0}| + \left(\int_{\Omega_r(y^0)} |u - u_{r,y^0}|^{l'} dx \right)^{\frac{1}{l'}} \right\} \\
&\leq |\Omega_r| \left(\int_{\Omega_r(y^0)} |u_x|^{2l} dx \right)^{\frac{1}{l}} \\
&\quad \times c_4 \left\{ \left(\int_{\Omega_r(y^0)} |u_x|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{B_r(y^0)} |\tilde{u} - \tilde{u}_{r,y^0}|^{l'} dx \right)^{\frac{1}{l'}} \right\} \\
&\stackrel{(14)}{\leq} |\Omega_r| \left(\int_{\Omega_r(y^0)} |u_x|^{2l} dx \right)^{\frac{1}{l}} \left\{ \Theta \min \left\{ \frac{\nu}{a}, 1 \right\} c_4 + c_4 [\tilde{u}]_{l',n;Q_{R_1}(x^0)} \right\} \\
&\leq |\Omega_r| \left(\int_{\Omega_r} |u_x|^{2l} dx \right)^{\frac{1}{l}} \left\{ \Theta \min \left\{ \frac{\nu}{a}, 1 \right\} c_4 + c_5(l) [\tilde{u}]_{2,n;Q_{R_1}(x^0)} \right\}. \quad (24)
\end{aligned}$$

В этой цепочке неравенств условие (14) использовано пока с произвольным Θ . Здесь и далее мы обозначаем

$$\oint_{\Omega_r} |u_x|^2 dx = \frac{1}{r^{n-2}} \int_{\Omega_r} |u_x|^2 dx.$$

Последнее неравенство в соотношениях (24) справедливо в силу изоморфизма пространств Кампанато $\mathcal{L}^{m,n}(Q_{R_1})$ при различных $m \geq 1$ и оценки

$$[v]_{m,n;Q_{R_1}} \leq c(m,n)[v]_{2,n;Q_{R_1}} \quad \forall v \in \mathcal{L}^{2,n}(Q_{R_1}).$$

Поскольку

$$[\tilde{u}]_{2,n;Q_{R_1}} \leq c \|\tilde{u}_x\|_{L^{2,n-2}(Q_{R_1})} \leq c \|u_x\|_{L^{2,n-2}(\Omega_{R_0})} \stackrel{(14)}{\leq} c_6 \Theta \min \left\{ \frac{\nu}{a}, 1 \right\},$$

то для J_r получаем оценку

$$J_r \leq c_7(l) |\Omega_r| \Theta \min \left\{ \frac{\nu}{a}, 1 \right\} \left(\int_{\Omega_r(y^0)} |u_x|^{2l} dx \right)^{\frac{1}{l}}. \quad (25)$$

Теперь из неравенства (21) с помощью оценок (22) и (25) выводим для $g(x) = (1 + |u_x|)^{2n/(n+2)}$ оценку (16) с заменой B_r на Ω_r , при этом $q = (n+2)/n$, $\omega = \Theta$, $R = R_1$, $\hat{x} = x^0$.

Пусть $y^0 \in \Omega_r(x^0)$, $d = \text{dist}(y^0, \partial\Omega) > 0$. Зафиксируем произвольно $B_r(y^0) \subset \Omega_{R_1}(x^0)$, $r \leq d$, и рассмотрим тождество (13) с $h = (u - u_{r,y^0})\xi^2$, ξ — срезающая для $B_r(y^0)$ функция, $\xi = 1$ в $B_{r/2}(y^0)$. Из полученного соотношения выводим неравенство

$$\begin{aligned}
\int_{B_{\frac{r}{2}}(y^0)} |u_x|^2 dx &\leq \frac{4\mu}{\nu r^2} \int_{B_r(y^0)} |u - u_{r,y^0}|^2 dx \\
&\quad + \frac{2a}{\nu} \int_{B_r(y^0)} |u_x|^2 |u - u_{r,y^0}| dx + \frac{2\mu}{\nu} |B_r|.
\end{aligned}$$

Как и в предыдущем случае, из этого неравенства следует, что

$$\begin{aligned} \int_{B_{\frac{r}{2}}(y^0)} |u_x|^2 dx &\leq \frac{c_8}{r^2} \left(\int_{B_r(y^0)} |u_x|^{\frac{2n}{n+2}} dx \right)^{\frac{n+2}{n}} + \frac{2a}{\nu} J_r + \frac{2\mu}{\nu} |B_r|, \\ J_r &= \int_{B_r(y^0)} |u_x|^2 |u - u_{r,y^0}| dx. \end{aligned} \quad (26)$$

Рассуждая так же, как при выводе оценки (25), получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} J_r &\leq |B_r| \left(\int_{B_r} |u_x|^{2l} dx \right)^{\frac{1}{l}} \left(\int_{B_r} |u - u_{r,y^0}|^{l'} dx \right)^{\frac{1}{l'}} \\ &\leq c |B_r| [u]_{l',n;Q_{R_1}(x^0)} \left(\int_{B_r} |u_x|^{2l} dx \right)^{\frac{1}{l}} \\ &\leq c(l) |B_r| [u]_{2,n;Q_{R_1}(x^0)} \left(\int_{B_r} |u_x|^{2l} dx \right)^{\frac{1}{l}} \\ &\leq c(l) |B_r| \|u_x\|_{L^{2,n-2}(B_{R_0}(x^0))} \left(\int_{B_r} |u_x|^{2l} dx \right)^{\frac{1}{l}} \\ &\stackrel{(14)}{\leq} c(l) |B_r| \Theta \min \left\{ \frac{\nu}{a}, 1 \right\} \left(\int_{B_r} |u_x|^{2l} dx \right)^{\frac{1}{l}}. \end{aligned}$$

Из (26) и оценки для J_r следует неравенство

$$\begin{aligned} \int_{B_{\frac{r}{2}}} g^q dx &\leq c_9 \left[\left(\int_{B_r} g dx \right)^q + c_{10}(l) \Theta \left(\int_{B_r} g^{ql} dx \right)^{\frac{1}{l}} \right], \\ g &= (1 + |u_x|)^{\frac{2n}{n+2}}, \quad q = \frac{n+2}{n}. \end{aligned} \quad (27)$$

“Сшивая” теперь внутреннюю и приграничную оценки для функции g , получим неравенства вида (27) в $\Omega_r(y^0)$, $\Omega_{tr}(y^0)$ при любом расположении точек y^0 в $\bar{\Omega}_{R_1}(x^0)$ и при любом r таком, что $B_{tr}(y^0) \subset B_{R_1}(x^0)$, $t \geq 2$ – абсолютная постоянная.

Кроме того, полагая

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \Omega_{R_0}(x^0), \\ 0, & x \in B_{R_0}(x^0) \setminus \Omega_{R_0}(x^0), \end{cases}$$

нетрудно вывести неравенства

$$\int_{B_\rho} \tilde{g}^q dx \leq c_{11}(\nu, \mu) \left[\left(\int_{B_{t\rho}} \tilde{g} dx \right)^q + c_{12}(l) \Theta \left(\int_{B_{t\rho}} \tilde{g}^{ql} dx \right)^{\frac{1}{l}} \right] \quad \forall B_{t\rho} \subset B_{R_1}(x^0), \quad (28)$$

где $t \geq 2$ – некоторая абсолютная постоянная.

Неравенства (28) названы автором *квазиобратными неравенствами Гёльдера* (при $c_{12} = 0$ это хорошо известные обратные неравенства Гёльдера).

Согласно теореме 2 существует число $p_0 = p_0(c_{11}, q) > q$ такое, что для любого $p \in (q, p_0)$ верна оценка

$$\|\tilde{g}\|_{p, Q_R(x^0)} \leq c_{13} \|\tilde{g}\|_{q, Q_{\hat{R}}(x^0)}, \quad R < \hat{R} = \frac{R_1}{\sqrt{n}}, \quad (29)$$

если в неравенствах (28) фиксировать $l \in (1, p/q)$ и считать, что $c_{12}(l)\Theta < \kappa_0$, где κ_0 – некоторое число, зависящее от p, q, l, a и c_{11} . Если, например, зафиксировать $l = (q + p)/(2q)$, то нетрудно видеть, что κ_0 определяется только параметрами ν, μ, a и n . Параметр Θ в условии (14) можно фиксировать из условия $\Theta = \kappa_0/(2c_{12})$. Число Θ зависит от тех же величин, что и κ_0 , $\hat{R} = R_0/n$. Вместе с оценкой (29) выполняются неравенства

$$\left(\int_{Q_{\frac{r}{2}}} \tilde{g}^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c_{14} \left(\int_{Q_r} \tilde{g}^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall Q_r \subset Q_{\hat{R}}(x^0). \quad (30)$$

Постоянные c_{13} и c_{14} зависят от $q, c_{11}, p, l = (q + p)/(2q), \kappa_0$ и, следовательно, от ν, μ, a и n ; c_{13} зависит, кроме того, от $(\hat{R} - R)^{-1}$. Учитывая определения функций $\tilde{g}, g$ и переходя от интегрирования по кубам Q_ρ к интегрированию по шарам B_ρ , из (29) и (30) выводим неравенства (19) и (20).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Далее число Θ из условия (14), при котором имеют место оценки (19) и (20), будем обозначать Θ_1 .

ЛЕММА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $x^0 \in \partial\Omega$. Существует такое число $\Theta_2 = \Theta_2(\nu, \mu, n) > 0$, что если условие (14) выполнено при $\Theta = \Theta_2$, то

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega_{R_2}(x^0)})} \leq c_{15} (1 + \|u\|_{W_2^1(\Omega_{R_0}(x^0))}) \quad \forall \alpha \in (0, 1), \quad (31)$$

радиус $R_2 < R_0$ и постоянная c_{15} зависят от ν, μ, a, α, n , модуля непрерывности $\omega(\cdot, \cdot)$ из условия б) теоремы 1 и C^1 -характеристики $\partial\Omega$ (число R_0 – из условия (14)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем пока считать, что условие (14) выполнено с произвольным $\Theta_2 \leq \Theta_1$, где Θ_1 – параметр, для которого верна лемма 1. Таким образом, в $\Omega_{R_0}(x^0)$, где $x^0 \in \partial\Omega$, справедливы неравенства (20) с некоторым $s > 2$.

Прежде всего, мы “распрявим” часть поверхности $\partial\Omega$ в окрестности точки x^0 . Существует окрестность V точки x^0 , $V \subset B_{R_0}(x^0)$, на которой определен диффеоморфизм $y = y(x)$, переводящий множество $V \cap \Omega$ в $B_2^+(0)$ так, что $y(V \cap \partial\Omega) = \Gamma_2$, $\Gamma_r = B_r(0) \cap \{y_n = 0\}$. В новых переменных локально задача (1) примет вид

$$-\frac{d}{dy_\gamma} (\mathfrak{D}_{kl}^{\gamma\delta}(y, \tilde{u}) \hat{u}_{y_\delta}^l) + \mathbb{B}^k(y, \hat{u}, \hat{u}_y) = 0, \quad y \in B_2^+, \quad (32)$$

$$\hat{u}|_{\Gamma_2} = 0.$$

Здесь $\hat{u}(y) = u(x(y))$, $\mathfrak{D}_{kl}^{\gamma\delta}(y, \tilde{u}) = A_{kl}^{\alpha\beta}(x(y), u(x(y))) \frac{\partial y_\delta(x(y))}{\partial x_\beta} \cdot \frac{\partial y_\gamma(x(y))}{\partial x_\alpha} I(y)$, $\mathbb{B}^k(y, \hat{u}, \hat{u}_y) = b^k(x(y), \hat{u}(y), \hat{u}_y \frac{\partial y(x(y))}{\partial x}) I(y)$, $I(y) = |\det\{\frac{\partial x(y)}{\partial y}\}| > 0$, $y \in \overline{B_2^+}$.

Нетрудно видеть, что для задачи (32) выполнены условия вида а)–в) с другими постоянными $\widehat{\nu}$, $\widehat{\mu}$, $\widehat{a}$ и функцией $\widehat{\omega}(\cdot, \cdot)$, которые определяются параметрами ν, μ, a , функцией $\omega(\cdot, \cdot)$, а также величиной c_Γ . Здесь и далее через c_Γ обозначены различные постоянные, определяемые C^1 -нормами преобразований $y = y(x)$ и $x = x(y)$ на множествах $\overline{V \cap \Omega}$ и $\overline{B_2^+}$ соответственно. Из неравенства (14) для функции $\widehat{u}$ следует оценка

$$\|\widehat{u}_y\|_{L^{2,n-2}(B_2^+)} \leq c_{16}\Theta_2, \quad c_{16} = c_{16}(c_\Gamma), \quad (33)$$

а из неравенств (20) получаем соотношения

$$\left(\int_{\omega_\rho(y)} (1 + |\widehat{u}_y|)^s dy \right)^{\frac{2}{s}} \leq c_{17} \int_{\omega_{\lambda\rho}(y)} (1 + |\widehat{u}_y|)^2 dy \quad \forall y \in \overline{B_{\frac{3}{2}}^+}, \quad \lambda\rho \leq \frac{1}{2}. \quad (34)$$

Здесь $\omega_r(y) = B_r(y) \cap B_2^+$, постоянная c_{17} зависит от ν, μ, a, n и c_Γ , а $\lambda = \lambda(c_\Gamma, n) \geq 2$.

Зафиксируем произвольно точку $y^0 \in \overline{B_1^+(0)}$ и радиус $R \leq 1/(2\lambda)$. Пусть v – решение модельной задачи

$$\begin{aligned} \Delta_{kl}^{\gamma\delta}(y^0, \widehat{u}^0) v_{y_\delta y_\gamma}^l &= 0 \quad \text{в } \omega_R(y^0), \\ v|_{\Gamma_R(y^0)} &= 0, \quad v|_{S'_R(y^0)} = \widehat{u}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\Gamma_R(y^0) = B_R(y^0) \cap \Gamma_2, \quad S'_R(y^0) = \partial\omega_R(y^0) \setminus \Gamma_R(y^0), \quad \widehat{u}^0 = \int_{\omega_R(y^0)} \widehat{u} dy.$$

Для решения v задачи (35) справедлива оценка Кампанато

$$\int_{\omega_\rho(y^0)} |v_y|^2 dy \leq c_{18} \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \int_{\omega_R(y^0)} |v_y|^2 dy \quad \forall \rho \leq R \quad (36)$$

с постоянной $c_{18} = c_{18}(\widehat{\nu}, \widehat{\mu})$.

Из интегрального тождества для функции v следует, что

$$\|v_y\|_{2, \omega_R(y^0)} \leq c_{19}(\widehat{\nu}, \widehat{\mu}) \|\widehat{u}_y\|_{2, \omega_R(y^0)}. \quad (37)$$

Кроме того, нетрудно показать, что градиент функции v удовлетворяет в $\omega_R(y^0)$ обратным неравенствам Гёльдера, при этом функция $\widehat{u}$, определяющая условие Дирихле для v , принадлежит пространству $W_s^1(B_{3/2}^+)$, $s > 2$. Отсюда следует, что при некотором $p > 2$ для функции v в $\omega_R(y^0)$ справедлива *глобальная* оценка

$$\left(\int_{\omega_R(y^0)} |v_y|^p dy \right)^{\frac{2}{p}} \leq c_{20} \left\{ \int_{\omega_R(y^0)} |v_y|^2 dy + \left(\int_{\omega_R(y^0)} |\widehat{u}_y|^p dy \right)^{\frac{2}{p}} \right\}. \quad (38)$$

Предполагая, что $p \leq s$ ($s > 2$ – из оценки (34)), из неравенств (38), (34) и (37) выводим оценку

$$\left(\int_{\omega_R(y^0)} |v_y|^p dy \right)^{\frac{2}{p}} \leq c_{21} \int_{\omega_{\lambda R}(y^0)} (1 + |\widehat{u}_y|^2) dy \quad (39)$$

с постоянной c_{21} , зависящей от ν, μ, a, n и c_Γ .

Определим функцию $w = \hat{u} - v$, $w|_{\partial\omega_R(y^0)} = 0$. Для нее из интегральных тождеств, соответствующих задачам (32) и (35), выводим соотношение

$$\int_{\omega_R(y^0)} [\mathfrak{D}_{kl}^{\gamma\delta}(y^0, \hat{u}^0) w_{y_\delta}^l h_{y_\gamma}^k + \mathbb{B}^k(y, \hat{u}, \hat{u}_y) h^k + \Delta \mathfrak{D}_{kl}^{\gamma\delta} \hat{u}_{y_\delta}^l h_{y_\gamma}^k] dy = 0, \quad (40)$$

где $\Delta \mathfrak{D}_{kl}^{\gamma\delta} = \mathfrak{D}_{kl}^{\gamma\delta}(y, \hat{u}) - \mathfrak{D}_{kl}^{\gamma\delta}(y^0, \hat{u}^0)$.

Заметим, что в случае, когда $\omega_R(y^0) \neq B_R(y^0)$, мы не можем из тождества (40) оценить интеграл $\int_{\omega_R(y^0)} |w_y|^2 dy$ так, как это сделано в [6] при $\omega_R(y^0) = B_R(y^0)$. В данном случае мы имеем область с *негладкой* границей и не можем воспользоваться теорией регулярности решений линейных систем в пространствах Морри и Кампанато (см. вывод оценки (2.27) для задачи (2.24) в [6]). Тем не менее, мы покажем, как можно оценить сверху интеграл

$$\int_{\omega_{tR}(y^0)} |w_y|^2 dy, \quad t = \frac{3}{4\sqrt{n}},$$

подбором подходящей функции h в тождество (40).

Зафиксируем пока произвольно числа $0 < s \ll 1$ и $T \gg 1$, положим в тождестве (40) $h = w((2T)^s - |w|^s)_+ = w \max\{(2T)^s - |w|^s, 0\}$. Функция h ограничена на $\omega_R(y^0)$, $|h| \leq (2T)^{s+1}$, $h|_{\partial\omega_R(y^0)} = 0$. Из полученного соотношения следует неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\nu}}{2} \int_{\omega_R(y^0)} |w_y|^2 ((2T)^s - |w|^s)_+ dy &\leq c_{22} \left[s \int_{\omega_R(y^0)} |w_y|^2 |w|^s \chi_+ dy \right. \\ &\quad + \int_{\omega_R(y^0)} (1 + |\hat{u}_y|)^2 |w| ((2T)^s - |w|^s)_+ dy \\ &\quad \left. + T^s \int_{\omega_R(y^0)} |\Delta \mathfrak{D}|^2 |\hat{u}_y|^2 dy \right], \end{aligned} \quad (41)$$

где χ_+ – характеристическая функция множества $\{y \in \omega_R(y^0) : |w(y)| \leq 2T\}$.

Зафиксируем числа $\tau = T/2^{1/s}$, $t = 3/(4\sqrt{n})$, где $n = \dim \Omega$, и заметим, что интеграл $\mathcal{K}_R = \int_{\omega_R(y^0)} |w_y|^2 ((2T)^s - |w|^s)_+ dy$ допускает оценку

$$\mathcal{K}_R \geq \int_{\omega_{tR}^+(y^0)} |w_y|^2 (\dots)_+ dy + \int_{\omega_{tR}^-(y^0)} |w_y|^2 (\dots)_+ dy = \mathcal{K}_R^{(1)} + \mathcal{K}_R^{(2)} \geq \mathcal{K}_R^{(2)}.$$

Здесь через $(\dots)_+$ мы обозначили выражение $((2T)^s - |w|^s)_+$,

$$\omega_{tR}^-(y^0) = \{y \in \omega_{tR}(y^0) : |w(y) - w_{tR, y^0}| \leq \tau\},$$

$$\omega_{tR}^+(y^0) = \{y \in \omega_{tR}(y^0) : |w(y) - w_{tR, y^0}| > \tau\}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} |w_{tR, y^0}| &\leq \frac{c}{R^{\frac{n-2}{2}}} \left(\int_{\omega_R(y^0)} |w_y|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \stackrel{(37)}{\leq} c \left(\int_{\omega_R(y^0)} |\hat{u}_y|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{(33)}{\leq} c \|\hat{u}_y\|_{L^{2, n-2}(B_2^+)} \leq c \Theta_2 \leq c_{23}. \end{aligned}$$

Не умаляя общности, можно считать, что $\Theta_2 \leq 1$ и постоянная c_{23} зависит от ν, μ, a и σ .

На множестве $\omega_{tR}^-(y^0)$ справедлива оценка

$$|w(y)| \leq \tau + |w_{tR, y^0}| \leq \frac{T}{2^{\frac{1}{s}}} + c_{23}.$$

Далее предположим, что $T > 1$ и $s < 1$ фиксированы так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{T}{2^{\frac{1}{s}}} \geq c_{23}. \quad (42)$$

Тогда $|w(y)| \leq 2T/2^{1/s}$ и $(2T)^s - |w|^s \geq (1/2)T^s$ на $\omega_{tR}^-(y^0)$. Отсюда следует, что

$$\mathcal{K}_R^{(2)} \geq \frac{T^s}{2} \int_{\omega_{tR}^-(y^0)} |w_y|^2 dy. \quad (43)$$

Учитывая оценку (43), после сокращения неравенства (40) на T^s получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{tR}^-(y^0)} |w_y|^2 dy &\leq c_{24} \left(s \int_{\omega_R(y^0)} |w_y|^2 dy + \int_{\omega_R(y^0)} |w| \chi_+ (1 + |\widehat{u}_y|^2) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\omega_R(y^0)} \widehat{\omega}^2(R^2, |\widehat{u} - \widehat{u}^0|^2) |\widehat{u}_y|^2 dy \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Здесь $\widehat{\omega}(\cdot, \cdot)$ – ограниченная непрерывная функция, обладающая свойствами функции ω из условия б) теоремы 1.

Интеграл $I_R = \int_{\omega_R(y^0)} |w| \chi_+ (1 + |\widehat{u}_y|^2) dy$ оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} I_R &\leq \left(\int_{\omega_R(y^0)} (1 + |\widehat{u}_y|)^p dy \right)^{\frac{2}{p}} \left(\int_{\omega_R(y^0)} (|w| \chi_+)^{\frac{p}{p-2}} dy \right)^{\frac{p-2}{p}} |\omega_R| \\ &\stackrel{(34)}{\leq} cT^{\frac{4-p}{p}} \int_{\omega_{\lambda R}(y^0)} (1 + |\widehat{u}_y|)^2 dy \left(\int_{\omega_R(y^0)} |w|^2 dy \right)^{\frac{p-2}{p}} \\ &\stackrel{(37)}{\leq} cT^{\frac{4-p}{p}} \int_{\omega_{\lambda R}(y^0)} (1 + |\widehat{u}_y|)^2 dy \left(\int_{\omega_R(y^0)} |\widehat{u}_y|^2 dy \right)^{\frac{p-2}{p}} \\ &\stackrel{(33)}{\leq} cT^{\frac{4-p}{p}} \Theta_2^{\frac{2(p-2)}{p}} \int_{\omega_{\lambda R}(y^0)} (1 + |\widehat{u}_y|)^2 dy. \end{aligned}$$

В первом неравенстве число $p \leq s$ фиксировано согласно неравенству (39), $s > 2$ – из оценки (34).

Оценим теперь интеграл $L_R = \int_{\omega_R(y^0)} \widehat{\omega}^2(R^2, |\widehat{u} - \widehat{u}^0|^2) |\widehat{u}_y|^2 dy$ из неравенства (44):

$$\begin{aligned} L_R &\leq \left(\int_{\omega_R(y^0)} |\widehat{u}_y|^p dy \right)^{\frac{2}{p}} |\omega_R| \left(\int_{\omega_R(y^0)} \widehat{\omega}^{\frac{2p}{p-2}}(R^2, |\widehat{u} - \widehat{u}^0|^2) dy \right)^{\frac{p-2}{p}} \\ &\stackrel{(34)}{\leq} c \int_{\omega_{\lambda R}(y^0)} (1 + |\widehat{u}_y|)^2 dy \widehat{\omega}^{\frac{p-2}{p}} \left(R^2, \int_{\omega_R(y^0)} |\widehat{u} - \widehat{u}^0|^2 dy \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c\hat{\omega}^{\frac{p-2}{p}} \left(R^2, c \int_{\omega_R(y^0)} |\hat{u}_y|^2 dy \right) \int_{\omega_{\lambda R}(y^0)} (1 + |\hat{u}_y|)^2 dy \\
&\stackrel{(33)}{\leq} c\hat{\omega}^{\frac{p-2}{p}} (R^2, c\Theta_2^2) \int_{\omega_{\lambda R}(y^0)} (1 + |\hat{u}_y|)^2 dy.
\end{aligned}$$

Второе неравенство в этой цепочке неравенств справедливо в силу выпуклости функции $\hat{\omega}(\cdot, \cdot)$ по второму аргументу.

Теперь из неравенства (44) следует оценка

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_{tR}(y^0)} |w_y|^2 dy &\leq c_{25} \left(s + T^{\frac{4-p}{p}} \Theta_2^{\frac{2(p-2)}{p}} + \hat{\omega}^{\frac{p-2}{p}} (R^2, c_{26}\Theta_2^2) \right) \\
&\quad \times \int_{\omega_{\lambda R}(y^0)} (1 + |\hat{u}_y|)^2 dy + \int_{\omega_{tR}^+(y^0)} |w_y|^2 dy, \quad (45)
\end{aligned}$$

где c_{25} зависит от ν , μ , a , c_Γ и n , а $c_{26} = c_{26}(c_\Gamma, n)$.

Чтобы оценить интеграл $M_R = \int_{\omega_{tR}^+(y^0)} |w_y|^2 dy$ из неравенства (45), нам потребуется оценка

$$\|w_y\|_{L^{2,n-2}(\omega_{\frac{3}{4}R}(y^0))} \leq c_{27}\Theta_2. \quad (46)$$

Заметим, что для любой точки $y \in \omega_{\frac{3}{4}R}(y^0)$ решение v задачи (35) удовлетворяет неравенствам

$$\begin{aligned}
\int_{\omega_\rho(y)} |v_y|^2 dy &\leq c \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \int_{\omega_{\frac{R}{4}}(y)} |v_y|^2 dy \leq c \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \int_{\omega_R(y^0)} |v_y|^2 dy \\
&\stackrel{(37)}{\leq} c \left(\frac{\rho}{R} \right)^n \int_{\omega_R(y^0)} |\hat{u}_y|^2 dy \quad \forall \rho \leq \frac{R}{4}.
\end{aligned}$$

Первое неравенство представляет собой оценку Кампанато для решения линейной задачи с постоянными коэффициентами при нулевом условии Дирихле.

Из полученного соотношения следует, что

$$\int_{\omega_\rho(y)} |v_y|^2 dy \leq c \int_{\omega_R(y^0)} |\hat{u}_y|^2 dy \leq c \|\hat{u}_y\|_{L^{2,n-2}(B_2^+)}^2 \stackrel{(33)}{\leq} c\Theta_2^2,$$

т. е.

$$\|v_y\|_{L^{2,n-2}(\omega_{\frac{3}{4}R}(y^0))} \leq c_{28}\Theta_2. \quad (47)$$

Неравенства (33) и (47) гарантируют справедливость оценки (46).

Продолжим функцию w нулем в $B_R(y^0) \setminus \omega_R(y^0)$ и обозначим продолженную функцию $\tilde{w}$ ($w|_{\Gamma_R(y^0)} = 0$). Покажем, что

$$\omega_{tR}^+ \subset \left\{ y \in Q_{tR}(y^0) : |\tilde{w}(y) - \tilde{w}_{tR,y^0}| > \frac{\tau}{2} \right\} \equiv Q_{tR}^{(\tau)}, \quad (48)$$

где $\tilde{w}_{tR,y^0} = \int_{Q_{tR}(y^0)} \tilde{w} dy$, $\tau = T/2^{1/s}$.

Действительно, пусть $y \in \omega_{tR}(y^0)$ и $|w(y) - w_{tR,y^0}| > \tau$. Тогда

$$\begin{aligned} |\tilde{w}(y) - \tilde{w}_{tR,y^0}| &= |(w(y) - w_{tR,y^0}) + (w_{tR,y^0} - \tilde{w}_{tR,y^0})| \\ &\geq ||w(y) - w_{tR,y^0}| - |w_{tR,y^0} - \tilde{w}_{tR,y^0}|| = l. \end{aligned} \quad (48')$$

Нетрудно видеть, что $|\tilde{w}_{tR,y^0}| \leq c_{29}\Theta_2 \leq c_{29}$.

Усилим условие (42) и потребуем, чтобы

$$4 \max\{c_{23}, c_{29}\} \leq \tau. \quad (49)$$

Тогда $|w_{tR,y^0} - \tilde{w}_{tR,y^0}| \leq \tau/2$, и неравенство (48') можно продолжить:

$$l \geq \tau - \frac{\tau}{2} = \frac{\tau}{2},$$

т. е. вложение (48) верно.

Интеграл M_R оценим следующим образом:

$$\begin{aligned} M_R &\leq \left(\int_{\omega_{tR}^+(y^0)} |w_y|^p dy \right)^{\frac{2}{p}} |\omega_{tR}^+|^{\frac{(34),(39)}{p}} c \int_{\omega_{\lambda R}(y^0)} (1 + |\hat{u}_y|)^2 dy \left(\frac{|\omega_{tR}^+|}{|\omega_{\lambda R}|} \right)^{1-\frac{2}{p}} \\ &\stackrel{(48)}{\leq} c \left(\frac{|Q_{tR}^{(\tau)}|}{|\omega_{\lambda R}|} \right)^{1-\frac{2}{p}} \int_{\omega_{\lambda R}(y^0)} (1 + |\hat{u}_y|)^2 dy. \end{aligned}$$

Как было показано Ф. Йоном и Л. Ниренбергом в работе [9], функция $\tilde{w}$ из $\mathcal{L}^{2,n}(Q_{tR}(y^0))$ обладает следующим свойством: существуют постоянные H_0 и $\beta > 0$, зависящие только от размерности n , такие, что

$$\frac{|Q_{tR}^{(\tau)}|}{|Q_{tR}|} \leq H \exp\left(-\frac{\beta\tau}{2[\tilde{w}]_{2,n;Q_{tR}}}\right). \quad (50)$$

Заметим, что $Q_{tR}(y^0) \subset B_{\frac{3}{4}R}(y^0)$ и

$$[\tilde{w}]_{2,n;Q_{tR}} \leq c \|\tilde{w}_y\|_{L^{2,n-2}(Q_{tR})} \leq c \|w_y\|_{L^{2,n-2}(\omega_{\frac{3}{4}R}(y^0))} \stackrel{(46)}{\leq} c_{30}\Theta_2.$$

Теперь из неравенства (50) следует, что

$$M_R \leq c_{31} \exp\left(-\frac{c_{32}\tau}{\Theta_2}\right) \int_{\omega_{\lambda R}(y^0)} (1 + |\hat{u}_y|)^2 dy. \quad (51)$$

Учитывая оценку (51), из (45) выводим неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\omega_{tR}} |w_y|^2 dy &\leq c_{33} \left[s + T^{\frac{4-p}{p}} \Theta_2^{\frac{2(p-2)}{p}} + \hat{\omega}^{\frac{p-2}{p}} (R^2, c_{26}\Theta_2^2) + \exp\left(-\frac{c_{32}\tau}{\Theta_2}\right) \right] \\ &\quad \times \int_{\omega_{\lambda R}(y^0)} (1 + |\hat{u}_y|)^2 dy. \end{aligned} \quad (52)$$

Для функции $\psi(\rho, y^0) = \int_{\omega_\rho(y^0)} (1 + |\widehat{u}_y|)^2 dy$ из (36) и (52) следует оценка

$$\begin{aligned} \psi(\rho, y^0) \leq c_{34} \left\{ \left(\frac{\rho}{R} \right)^n + \left[s + T^{\frac{4-p}{p}} \Theta_2^{\frac{2(p-2)}{p}} \right. \right. \\ \left. \left. + \widehat{\omega}^{\frac{p-2}{p}}(R^2, c_{26}\Theta_2^2) + \exp\left(-\frac{c_{32}\tau}{\Theta_2}\right) \right] \right\} \psi(\lambda R, y^0) \quad \forall \rho \leq R. \end{aligned} \quad (53)$$

Очевидно, что неравенства вида (53) справедливы и при $\rho \in (R, \lambda R)$. Далее мы заменим обозначение λR на R , считая $R \leq 1/2$. Таким образом, для всех $\rho \leq R$ верны неравенства

$$\psi(\rho, y^0) \leq c_{35} \left\{ \left(\frac{\rho}{R} \right)^n + [\dots] \right\} \psi(\rho, y^0), \quad (54)$$

где через $[\dots]$ обозначено выражение, стоящее в квадратных скобках неравенства (53).

Согласно известной лемме Кампанато (см., например, [10, гл. II, лемма 2.1]) для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_0 = \delta_0(c_{35}, n, \varepsilon)$ такое, что если в неравенстве (54)

$$[\dots] < \delta_0, \quad (55)$$

то

$$\psi(\rho, y^0) \leq c_{36} \left(\frac{\rho}{R} \right)^{n-\varepsilon} \psi(R, y^0) \quad (56)$$

с постоянной c_{36} , зависящей от c_{35} , n и ε .

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано произвольно. Зафиксируем теперь $s < 1$ из условия

$$s < \frac{\delta_0}{4}. \quad (57)$$

Поскольку $\Theta_2 \leq 1$, то

$$\exp\left(-\frac{c_{32}\tau}{\Theta_2}\right) \leq \exp(-c_{32}\tau) = \exp\left(-\frac{c_{32}T}{2^{1/s}}\right).$$

Выберем теперь $T > 1$ так, чтобы кроме неравенства (49) выполнялось условие

$$\exp\left(\frac{c_{32}T}{2^{1/s}}\right) < \frac{\delta_0}{4}. \quad (58)$$

Осталось зафиксировать числа $\Theta_2 \leq \Theta_1$ и $R_1 \leq 1/2$ так, чтобы для $R \leq R_1$ было верно неравенство

$$T^{\frac{4-p}{p}} \Theta_2^{\frac{2(p-2)}{p}} + \widehat{\omega}^{\frac{p-2}{p}}(R^2, c_{26}\Theta_2^2) < \frac{\delta_0}{2}. \quad (59)$$

Условия (57)–(59) гарантируют справедливость неравенства (55), а следовательно, и оценки (56).

Поскольку точка $y^0 \in \overline{B_1^+}(0)$ была фиксирована произвольно, то из оценки (56) при $R = R_1 \leq 1/2$ следует, что

$$\|\widehat{u}_y\|_{L^{2,n-\varepsilon}(B_1^+)} \leq c_{37}(1 + \|\widehat{u}_y\|_{2,B_2^+}), \quad (60)$$

где постоянная c_{37} зависит от ν , μ , a , n , c_Γ , ε , модуля непрерывности функций $\mathfrak{D}_{kl}^{\gamma\delta}$ и R_1^{-1} .

Из (60) следует, что

$$\|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}^{2,n+2-\varepsilon}(B_1^+)} \leq c_{38}(1 + \|\widehat{u}\|_{W_2^1(B_2^+)}), \quad (61)$$

и, согласно изоморфизму пространств $\mathcal{L}^{2,n+2-\varepsilon}(\cdot)$ и $C^\alpha(\cdot)$ при $\alpha = 1 - \varepsilon/2$, получаем оценку

$$\|\widehat{u}\|_{C^\alpha(\overline{B_1^+})} \leq c_{39}(1 + \|\widehat{u}\|_{W_2^1(B_2^+)}). \quad (62)$$

Постоянные c_{38} и c_{39} зависят от тех же величин, что и c_{37} .

Из оценки (62) следует справедливость утверждения леммы 2 для функции $u(x) = \widehat{u}(y(x))$.

Согласно замечанию 3 из лемм 1 и 2 следует справедливость утверждения теоремы 1.

Список литературы

1. *Frehse J.* On two-dimensional quasi-linear elliptic systems // Manuscripta Math. 1979. V. 28. P. 21–50.
2. *Архипова А. А.* Проблема разрешимости для недиагональных эллиптических систем с квадратичной нелинейностью по градиенту (двумерных случаев) // Зап. научн. семин. ПОМИ. 2003. Т. 295. С. 4–17.
3. *Giaquinta M., Giusti E.* Non linear elliptic systems with quadratic growth // Manuscripta Math. 1978. V. 24. P. 323–349.
4. *Hamburger C.* A new partial regularity proof for solutions of nonlinear elliptic systems // Manuscripta Math. 1998. V. 95. № 1. P. 11–31.
5. *Архипова А. А.* О регулярности решений краевых задач для квазилинейных эллиптических систем с квадратичной нелинейностью // Сб. “Проблемы математического анализа”. Вып. 15. С.-Пб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 1995. С. 47–69.
6. *Arkhipova A. A.* Quasireverse Holder inequalities and a priori estimates for quasilinear elliptic systems // Rendic. Mat. Acc. Lincei. 2003. V. 14. P. 9.
7. *Kufner A., John O., Fucik S.* Functional Spaces. Prague: Academia Prague, 1977.
8. *Troiniello G. M.* Elliptic Differential Equations and Obstacle Problems. N.Y.: Plenum Press, 1987.
9. *John F., Nirenberg L.* On functions of bounded mean oscillation // Comm. Pure Appl. Math. 1961. V. 17. № 3. P. 415–426.
10. *Giaquinta M.* Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems. Princeton: Princeton Univ. Press, 1983.

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступило в редакцию
25.09.2003