Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, В. Д. Володин, Точные верхние и нижние границы для нестоэдров, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2011, том 75, выпуск 6, 17–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/im4732>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:53:54

УДК 515.164.8

В. М. Бухштабер, В. Д. Володин

Точные верхние и нижние границы для нестоэдров

Получены точные верхние и нижние границы для коэффициентов перечисляющих полиномов граней всех флаговых нестоэдров, а также их важных подклассов, в том числе граф-ассоциэдров. Доказательство опирается на предложенные в работе конструкции последовательностей многогранников.

Библиография: 42 наименования.

Ключевые слова: выпуклый многогранник, вектор граней, флаговый нестоэдр, граф-ассоциэдр, гипотеза Гала.

§ 1. Введение

Выпуклый многогранник размерности n называется *простым*, если каждая его вершина принадлежит n гиперграням. Такие многогранники естественно возникают и играют важную роль в современной алгебраической и симплектической геометрии, алгебраической топологии и теории особенностей. Они являются ключевыми объектами торической геометрии и торической топологии (см. [1], [2]).

Важным комбинаторным инвариантом выпуклого многогранника является f -вектор, i -я компонента которого равна числу его i -мерных граней. В случае простых многогранников важную роль играют также g -, h - и γ -векторы, которые получаются из f -вектора применением соответствующих невырожденных линейных операторов. В терминах этих векторов формулируются комбинаторные свойства как всех простых многогранников, так и их специальных классов.

Задача нахождения верхних и нижних границ для f -векторов простых многогранников с *фиксированным числом гиперграней* решена в [3]–[5]. Фундаментальная задача описания условий для целочисленного вектора, необходимых и достаточных, чтобы он был f -вектором некоторого простого многогранника, была решена в [6], [7]. Ответ в этой задаче был сформулирован П. МакМюленом (см. [8]) в виде гипотезы в терминах g -векторов. Первым необходимость условий МакМюлена доказал Р. Стенли [7], используя то, что h -вектор простого многогранника совпадает с вектором четных чисел Бетти соответствующего торического многообразия (возможно, особого). Этот факт позволил свести задачу описания условия для целочисленных векторов к задаче описания размерностей градуированных компонент коммутативных градуированных конечномерных алгебр, порожденных элементами степени 2, и применить фундаментальные результаты из алгебраической геометрии. Итоговый результат

Работа выполнена при финансовой поддержке Научной программы ОМ РАН “Комбинаторные методы математической кибернетики”.

получил название *g-теоремы*. В настоящее время имеется ряд доказательств *g-теоремы*, основанных на связях теории выпуклых многогранников с другими разделами математики (см. [9]–[11]). Общая проблема описания *f*-векторов выпуклых многогранников до сих пор является открытой (см. [12]).

Множество выпуклых многогранников в $\mathbb{R}^n$ является коммутативной полугруппой относительно суммы Минковского. Классическими являются задачи о многогранниках, представляющих собой сумму Минковского интервалов в $\mathbb{R}^n$ (задачи о зонотопах). Обобщением этих задач являются известные в выпуклой геометрии задачи о многогранниках в $\mathbb{R}^n$, которые разлагаются в сумму Минковского некоторого множества симплексов. В работах [13], [14] было введено понятие *производящего множества* (building set) на множестве $[n + 1] = \{1, \dots, n + 1\}$ (далее просто производящего множества на $[n + 1]$). Каждому подмножеству из этой системы канонически сопоставлен симплекс в $\mathbb{R}^{n+1}$, кроме того, доказано, что сумма Минковского всех таких симплексов является простым многогранником, позже названным *нестоедром* в работе [15]. Термины “building set” и “nested set” восходят к известной задаче о топологии дополнения конфигурации подпространств в $\mathbb{R}^n$. Впервые они появляются в работах [16]–[18].

Благодаря развитию симплектической геометрии появились простые многогранники Дельзанта. Каждому такому многограннику P^n соответствует гамильтоново торическое многообразие M^{2n} , для которого P^n является образом отображения моментов. Классический результат торической геометрии (см. [19]) утверждает, что нечетные числа Бетти $b_{2i-1}(M^{2n})$ равны нулю, а четные $b_{2i}(M^{2n})$ равны i -м компонентам h -вектора многогранника P^n . Существует взаимно однозначное соответствие между многогранниками Дельзанта и гамильтоновыми торическими многообразиями (см. [20], [21]). Таким образом, задача о верхних и нижних границах для h -векторов многогранников Дельзанта эквивалентна важной задаче о верхних и нижних границах для векторов чисел Бетти гамильтоновых торических многообразий.

Хорошо известно, что каждый нестоедр является многогранником Дельзанта (непосредственное доказательство следует из результатов работы [13]). Таким образом, мы имеем широкий класс многогранников Дельзанта. Кроме того, известно, что каждому графу на множестве, состоящем из $n + 1$ вершин, соответствует производящее множество на $[n + 1]$, составленное из множеств вершин связных подграфов данного графа. Таким образом, множество нестоедров включает в себя большой подкласс простых многогранников, названных в работе [22] *граф-ассоциэдрами*.

Граф-ассоциэдры исследуются многими авторами, так как они являются обобщением таких важных в топологии, алгебре и комбинаторике, а также математической и статистической физике (см. [23]) многогранников, как ассоциэдры As^n (многогранники Шашефа), циклоэдры Cy^n (многогранники Ботта–Таубса), пермутоэдры Pe^n и стеллоэдры St^n . С другой стороны, соответствие граф $\rightarrow$ нестоедр устанавливает связь классической теории графов с теорией простых многогранников и позволяет строить инварианты графов в терминах комбинаторной структуры нестоедров и, наоборот, выделять важные классы граф-ассоциэдров, вводить конструкции граф-ассоциэдров при

использовании понятий и результатов классической теории графов. Например, в настоящей работе изучаются нестоэдры, отвечающие гамильтоновым графам и деревьям.

Выпуклый многогранник называется *флаговым*, если любой набор его попарно пересекающихся граней имеет непустое пересечение. Среди нестоэдров много флаговых многогранников; например, каждый граф-ассоциэдр является флаговым многогранником. С флаговыми простыми многогранниками связана известная гипотеза Черни–Дэвиса (см. [2], [24]), которая формулируется в терминах h -векторов. Эта гипотеза подсказана САТ(0)-неравенствами Громова. Плодотворное обобщение этой гипотезы нашел С. Гал [25]: *компоненты γ -вектора простого флагового многогранника неотрицательны*. Данная гипотеза доказана для многогранников, размерность которых не превосходит пяти. В работе [15] показано, что для класса так называемых хордовых производящих множеств нестоэдры удовлетворяют гипотезе Гала. В работах [26] и [27] эта гипотеза разными способами доказана для нестоэдров, отвечающих полным двудольным графам. Соответствующие производящие множества в этом случае не являются хордовыми.

В работе [15] сформулирована следующая гипотеза: *если K и K' – флаговые симплициальные комплексы, являющиеся границами симплициальных многогранников, и K' является геометрическим подразделением K , то $\gamma_i(K) \leq \gamma_i(K')$* .

В настоящей работе эта гипотеза доказана для флаговых нестоэдров в следующем виде.

ТЕОРЕМА 1.1. *Пусть B_1 и B_2 – связные производящие множества на $[n+1]$, отвечающие флаговым нестоэдрам, и $B_1 \subset B_2$. Тогда $\gamma_i(P_{B_1}) \leq \gamma_i(P_{B_2})$.*

Из [28] следует, что, f -, h - и g -векторы простого многогранника получаются из его γ -вектора умножением на соответствующую матрицу с неотрицательными элементами. Таким образом, покомпонентное неравенство $\gamma(P_1) \leq \gamma(P_2)$ для простых многогранников P_1 и P_2 влечет покомпонентные неравенства $g(P_1) \leq g(P_2)$, $h(P_1) \leq h(P_2)$, $f(P_1) \leq f(P_2)$, и, следовательно, имеет место аналог теоремы 1.1 для f -, h - и g -векторов.

В настоящей работе получены точные верхние и нижние границы для f -, h -, g - и γ -векторов флаговых нестоэдров данной размерности и условия, необходимые и достаточные для их достижения (см. теоремы 9.1–9.4). Приведем эти границы для γ -векторов.

ТЕОРЕМА 1.2. *Справедливы следующие оценки:*

- 1) $\gamma_i(I^n) \leq \gamma_i(P_B) \leq \gamma_i(\text{Pe}^n)$ для любого флагового n -мерного нестоэдра P_B ;
- 2) $\gamma_i(\text{As}^n) \leq \gamma_i(\Gamma_{n+1}) \leq \gamma_i(\text{Pe}^n)$ для любого связного графа Γ_{n+1} , имеющего $n+1$ вершин;
- 3) $\gamma_i(\text{Cy}^n) \leq \gamma_i(\Gamma_{n+1}) \leq \gamma_i(\text{Pe}^n)$ для любого гамильтонова графа Γ_{n+1} , имеющего $n+1$ вершин;
- 4) $\gamma_i(\text{As}^n) \leq \gamma_i(\Gamma_{n+1}) \leq \gamma_i(\text{St}^n)$ для любого дерева Γ_{n+1} , имеющего $n+1$ вершин.

Значения γ -векторов семейств многогранников, дающие указанные оценки, можно найти, используя результаты работ [28], [15] или специальные конструкции этих семейств и соответствующие индуктивные формулы (см. § 8).

Из утверждения 1) теоремы 1.2 и того факта, что $\gamma(I^n) = (1, 0, \dots, 0)$, вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Гипотеза Гала верна для всех флаговых нестоэдров, в том числе для всех граф-ассоциэдров.*

В основе доказательства сформулированных результатов лежат геометрические конструкции на множестве простых многогранников. Используется операция срезки многогранника по его грани коразмерности 2. Важным является следующее: эта операция переводит флаговые многогранники во флаговые; если грань коразмерности 2 данного многогранника имеет неотрицательный γ -вектор, то при срезке по этой грани получается многогранник, γ -вектор которого больше исходного. В настоящей работе показывается, что для любого флагового нестоэдра существует такая последовательность операций срезки граней коразмерности 2, которая переводит куб в данный флаговый нестоэдр. Именно этот факт лежит в основе теоремы о верхних и нижних границах для флаговых нестоэдров.

Операция срезки грани коразмерности 2 является геометрической операцией на множестве простых n -мерных многогранников в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, для данного комбинаторного флагового нестоэдра, используя стандартный n -мерный куб, мы получаем его геометрические реализации, называемые *кубическими*. При этом получается множество кубических реализаций данного флагового нестоэдра, зависящих от процедуры срезки. Различные геометрические реализации ассоциэдров обсуждаются в работах [29]–[35]. Далее (см. § 7) мы приводим кубические реализации ассоциэдров, которые аффинно неэквивалентны реализациям из работ [29]–[35].

В настоящей работе рассматриваются также конструкции, которые позволяют перейти от $(n - 1)$ -мерного граф-ассоциэдра P_{Γ_n} к n -мерному граф-ассоциэдру $P_{\Gamma_{n+1}}$, полученному из цилиндра $P_{\Gamma_n} \times I$ срезками некоторых гиперграней его оснований. С помощью этих конструкций реализованы известные семейства ассоциэдров, циклоэдров, пермutoэдров и стеллоэдров, а для их перечисляющих полиномов получены индуктивные формулы. Эти результаты лежат в основе теорем о верхних и нижних границах для граф-ассоциэдров (см. теорему 9.2), а также в основе вычисления значений этих границ. В теоремах 9.3, 9.4 описаны аналогичные результаты для нестоэдров, соответствующих гамильтоновым графам и деревьям. Обратим внимание на интересную гипотезу из [15]: *на множестве деревьев существует частичный порядок, относительно которого компоненты γ_i являются неубывающими функциями с максимальным и минимальным значениями, равными $\gamma_i(\text{St}^n)$ и $\gamma_i(\text{As}^n)$ соответственно.* Теорему 9.4 можно рассматривать как частичное доказательство этой гипотезы.

Мы выражаем благодарность Т. Е. Панову и Н. Ю. Ероховцу за полезные обсуждения результатов настоящей работы.

§ 2. Перечисляющие полиномы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Выпуклый n -многогранник называется *простым*, если каждая его вершина принадлежит n гиперграням.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Выпуклый многогранник называется *флаговым*, если любой набор его попарно пересекающихся граней (эквивалентно, гиперграней) имеет непустое пересечение.

Пусть f_i – количество i -мерных граней простого n -многогранника P . Набор чисел $(f_0, \dots, f_n)$ многогранника P называется его f -вектором; F -полином P определяется следующим образом:

$$F(P)(\alpha, t) = \alpha^n + f_{n-1}\alpha^{n-1}t + \dots + f_1\alpha t^{n-1} + f_0t^n;$$

h -вектор и H -полином многогранника P определяются из равенства

$$H(P)(\alpha, t) = h_0\alpha^n + h_1\alpha^{n-1}t + \dots + h_{n-1}\alpha t^{n-1} + h_nt^n = F(P)(\alpha - t, t);$$

g -вектором простого многогранника P называется набор чисел $(g_0, g_1, \dots, g_{[\frac{n}{2}]})$, где $g_0 = 1$, $g_i = h_i - h_{i-1}$, $i > 0$.

Из соотношений Дена–Соммервилля (см. [2] и [36]) следует, что полином $H(P)$ симметричен для простых многогранников, следовательно, может быть представлен как полином от элементарных симметрических полиномов $a = \alpha + t$ и $b = \alpha t$:

$$H(P) = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \gamma_i(\alpha t)^i (\alpha + t)^{n-2i};$$

γ -вектором простого многогранника P называется набор чисел $(\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{[\frac{n}{2}]})$, γ -полином многогранника P определяется следующим образом:

$$\gamma(P)(\tau) = \gamma_0 + \gamma_1\tau + \dots + \gamma_{[\frac{n}{2}]} \tau^{[\frac{n}{2}]}$$

ГИПОТЕЗА 2.3 [25]. Если P – простой флаговый n -многогранник, то $\gamma_i(P) \geq 0$, $i = 0, \dots, [\frac{n}{2}]$.

ЛЕММА 2.4. Пусть $\gamma_i(P_1) \leq \gamma_i(P_2)$, $i = 0, \dots, [\frac{n}{2}]$, где P_1 и P_2 – простые n -многогранники. Тогда $g_i(P_1) \leq g_i(P_2)$, $h_i(P_1) \leq h_i(P_2)$, $f_i(P_1) \leq f_i(P_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следующая формула для простых n -многогранников (см. [28]) доказывает покомпонентные неравенства для g -векторов:

$$g_i(P) = (n - 2i + 1) \sum_{j=0}^i \frac{1}{n - i - j + 1} \binom{n - 2j}{i - j} \gamma_j(P).$$

Следующие формулы, полученные из определений g - и h -векторов, доказывают покомпонентные неравенства для f - и h -векторов:

$$h_i(P) = \sum_{j=0}^i g_j(P), \quad f_i(P) = \sum_{j=i}^n \binom{j}{i} h_{n-j}(P).$$

Лемма доказана.

§ 3. Нестоедры и граф-ассоциэдри

В этом параграфе мы сформулируем необходимые факты о нестоедрах. Доказательства их можно найти в [13], [14], [37]. Обозначим через $[n]$ и $[i, j]$ множества $\{1, \dots, n\}$ и $\{i, \dots, j\}$.

3.1. Производящие множества. Введем необходимые определения для построения семейств нестоедров.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Система B непустых подмножеств множества $[n+1]$ называется *производящим множеством на $[n+1]$* , если выполнены следующие условия:

- 1) пусть $S_1, S_2 \in B$ и $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$; тогда $S_1 \cup S_2 \in B$;
- 2) $\{i\} \in B$ для всех $i \in [n+1]$.

Производящее множество B называется *связным*, если $[n+1] \in B$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. При изучении производящих множеств часто удобно рассматривать некоторое множество A , состоящее из $n+1$ элементов, вместо множества $[n+1]$. Производящие множества рассматриваются с точностью до следующей эквивалентности: производящие множества B_1 на A_1 и B_2 на A_2 эквивалентны, если существует биекция $\sigma: A_1 \rightarrow A_2$, которая индуцирует биекцию $B_1 \rightarrow B_2$. Если специально не оговаривается иное, мы считаем $A = [n+1]$.

Ограничением производящего множества B на $S \in B$ называется следующее производящее множество на $[|S|]$:

$$B|_S = \{S' \in B: S' \subseteq S\}.$$

Сжатием производящего множества B вдоль $S \in B$ называется следующее производящее множество на $[n+1-|S|]$:

$$B/S = \{S' \subseteq [n+1] \setminus S: S' \in B \text{ или } S' \cup S \in B\} = \{S' \setminus S, S' \in B\}.$$

Произведением $B_1 \cdot B_2 = B_1 \sqcup B_2$ производящих множеств B_1 и B_2 на $[n_1+1]$ и $[n_2+1]$ называется производящее множество на $[n_1+1] \sqcup [n_2+1] = [n_1+n_2+2]$, составленное из элементов множеств B_1, B_2 .

Напомним, что граф называется *простым*, если он не содержит петель и кратных ребер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Пусть Γ – простой граф на множестве вершин $[n+1]$. *Графическим производящим множеством $B(\Gamma)$* называется система всех непустых подмножеств $S \subseteq [n+1]$, для которых индуцированный подграф $\Gamma|_S$ на множестве вершин S является связным.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Производящее множество $B(\Gamma)$ связно тогда и только тогда, когда связан граф Γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Пусть Γ – простой граф на множестве вершин $[n+1]$ и $S \in B(\Gamma)$. Тогда $B(\Gamma)|_S$ и $B(\Gamma)/S$ являются графическими производящими множествами, соответствующими графам, обозначаемым $\Gamma|_S$ и Γ/S . Вершинами графа Γ/S является множество $[n+1] \setminus S$; вершины v и w смежны, если

либо они смежны в графе Γ , либо смежны некоторым вершинам из S . Если граф Γ связан, то для любого элемента $S \in B(\Gamma)$ граф Γ/S также связан.

3.2. Нестоэдры. Пусть M_1 и M_2 – подмножества в $\mathbb{R}^n$. Суммой Минковского множеств M_1 и M_2 называется следующее подмножество в $\mathbb{R}^n$:

$$M_1 + M_2 = \{x \in \mathbb{R}^n: x = x_1 + x_2, x_1 \in M_1, x_2 \in M_2\}.$$

Если M_1 и M_2 являются выпуклыми многогранниками, то $M_1 + M_2$ также является выпуклым многогранником.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.6. Пусть $e_i, i = 1, \dots, n+1$, – конечные точки базисных векторов в $\mathbb{R}^{n+1}$. Нестоэдр P_B , соответствующий производящему множеству B , определяется следующим образом:

$$P_B = \sum_{S \in B} \Delta^S, \quad \Delta^S = \text{conv}\{e_i, i \in S\}.$$

Если $B(\Gamma)$ – графическое производящее множество, то многогранник $P_\Gamma = P_{B(\Gamma)}$ называется *граф-ассоциэдром*.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Мы рассматриваем нестоэдр P_B как комбинаторный многогранник, т. е. многогранник с точностью до комбинаторной эквивалентности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.8. Назовем производящее множество B *флаговым*, если соответствующий нестоэдр P_B является флаговым многогранником.

ПРИМЕР 3.9. Следующие нестоэдры и граф-ассоциэдры будут играть важную роль в настоящей работе:

- 1) при $B = \{[n+1], \{i\}, i \in [n+1]\}$ нестоэдр P_B эквивалентен Δ^n ;
- 2) если L_{n+1} – граф пути на множестве $[n+1]$, то многогранник $P_{L_{n+1}}$ называется *ассоциэдром* (многогранником *Стайшефа*) и обозначается As^n ; в этом случае $B(L_{n+1}) = \{[i, j], i \leq j\}$ – множество всех интервалов, лежащих в $[n+1]$;
- 3) если C_{n+1} – циклический граф на $[n+1]$, то многогранник $P_{C_{n+1}}$ называется *циклоэдром* (многогранником *Ботта–Таубса*) и обозначается Cy^n ; в этом случае $B(C_{n+1}) = \{[i, j], i \leq j\} \cup \{[n+1] \setminus [i, j], 1 \leq i \leq j \leq n+1\}$;
- 4) если K_{n+1} – полный граф на $[n+1]$, то многогранник $P_{K_{n+1}}$ называется *пермутоэдром* и обозначается Pe^n ; в этом случае $B(K_{n+1}) = 2^{[n+1]} \setminus \emptyset$ – множество всех непустых подмножеств в $[n+1]$;
- 5) если $K_{1,n}$ – граф-звезда на $[n+1]$ с вершиной $\{1\} \in [n+1]$, то многогранник $P_{K_{1,n}}$ называется *стеллоэдром* и обозначается St^n , в этом случае $B(K_{1,n}) = \{\{i\}, S \subseteq [n+1]: 1 \in S\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.10. Простой n -многогранник $P \subset \mathbb{R}^n$ называется *многогранником Дельзанта*, если для каждой его вершины p существуют целочисленные векторы, параллельные ребрам, выходящим из p , и образующие $\mathbb{Z}$ -базис целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Эквивалентно, для каждой вершины p существуют целочисленные векторы, ортогональные гиперграням, содержащим p , и образующие $\mathbb{Z}$ -базис целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.11. Пусть B – связное производящее множество на $[n+1]$. Тогда:

- 1) указанная реализация P_B является пересечением гиперплоскости $H = \sum_{i=1}^{n+1} x_i = |B|$ с полупространствами $H_S = \sum_{i \in S} x_i \geq |B| \cdot |S|$, где $S \in B \setminus [n+1]$;
- 2) нестоэдр $P_B \subset H \simeq \mathbb{R}^n$ имеет размерность n и является многогранником Дельзанта;
- 3) каждая гипергрань многогранника P_B имеет вид $F_S = P_B \cap \partial H_S$, где $S \in B \setminus [n+1]$, и комбинаторно эквивалентна нестоэдру $P_{B|_S} \times P_{B/S}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.12. Если B не является производящим множеством, то предложение 3.11, вообще говоря, неверно: многогранник может не являться простым, а взаимно однозначного соответствия между его гипергранями и элементами $B \setminus [n+1]$ может не быть.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.13. Каждый граф-ассоциэдр является флаговым многогранником, или, эквивалентно, каждое графическое производящее множество является флаговым.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.14. Для каждого производящего множества B определен симплициальный комплекс (nested set complex) $\mathcal{N}(B)$, вершинами которого являются элементы $S \in B \setminus B_{\max}$, где $B_{\max}$ – множество максимальных по включению элементов B , а набор $\{S_1, \dots, S_k\}$ принадлежит $\mathcal{N}(B)$, т. е. задает симплекс, при выполнении следующих условий:

- 1) для любых S_i, S_j имеем $S_i \subset S_j$, или $S_i \supset S_j$, или $S_i \cap S_j = \emptyset$;
- 2) для любых $S_{i_1}, \dots, S_{i_p}$ таких, что $S_{i_j} \cap S_{i_l} = \emptyset$, имеем $S_{i_1} \sqcup \dots \sqcup S_{i_p} \notin B$.

Напомним, для любого многогранника P определен двойственный многогранник P^* , частично упорядоченное множество граней которого обращает частично упорядоченное множество граней многогранника P .

Следующее утверждение описывает комбинаторику многогранника P_B в терминах элементов производящего множества B .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.15. Симплициальные комплексы $\mathcal{N}(B)$ и ∂P_B^* изоморфны. А именно, гиперграни $F_{S_1}, \dots, F_{S_k}$ многогранника P_B имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда $\{S_1, \dots, S_k\} \in \mathcal{N}(B)$.

§ 4. Производящее множество как структура

Покажем, что каждый нестоэдр комбинаторно эквивалентен нестоэдру, отвечающему связному производящему множеству.

КОНСТРУКЦИЯ 4.1 (Н. Ю. Ероховец). Введем операцию подстановки. Пусть $B_1, \dots, B_{n+1}$ – связные производящие множества на $[k_1], \dots, [k_{n+1}]$. Тогда для любого связного производящего множества B на $[n+1]$ определено связное производящее множество $B(B_1, \dots, B_{n+1})$ на $[k_1] \sqcup \dots \sqcup [k_{n+1}] = [k_1 + \dots + k_{n+1}]$, состоящее из элементов $S^i \in B_i$ и $\bigsqcup_{i \in S} [k_i]$, где $S \in B$.

В случае, когда производящие множества $B_1, \dots, B_n$ одноточечны, т. е. равны $\{1\}, \dots, \{n\}$, будем записывать $B(1, 2, \dots, n, B_{n+1})$ вместо $B(\{1\}, \{2\}, \dots, \{n\}, B_{n+1})$.

ЛЕММА 4.2 (Н. Ю. Ероховец). Пусть $B, B_1, \dots, B_{n+1}$ – связные производящие множества на $[n+1], [k_1], \dots, [k_{n+1}]$, а $B' = B(B_1, \dots, B_{n+1})$. Тогда многогранник $P_{B'}$ комбинаторно эквивалентен многограннику $P_B \times P_{B_1} \times \dots \times P_{B_{n+1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим производящее множество $B'' = B \sqcup B_1 \sqcup \dots \sqcup B_{n+1}$ и отображение $\varphi: B'' \rightarrow B'$, определяемое следующим образом:

$$\varphi(S) = \begin{cases} S, & \text{если } S \in B_i, \\ \bigsqcup_{i \in S} [k_i], & \text{если } S \in B. \end{cases}$$

Очевидно, φ определяет биекцию между множествами $B'' \setminus B''_{\max}$ и $B' \setminus [n+1]$. Пусть $S \subset B \setminus [n+1]$ и $S_i \subset B_i \setminus [k_i]$. Тогда легко проверить, что $\bigcup_{i=1}^{n+1} \varphi(S_i) \cup \varphi(S) \in \mathcal{N}(B')$, если и только если $S \in \mathcal{N}(B)$, а $S_i \in \mathcal{N}(B_i)$. Следовательно, $\mathcal{N}(B') \simeq \mathcal{N}(B'') \simeq \mathcal{N}(B) \star \mathcal{N}(B_1) \star \dots \star \mathcal{N}(B_{n+1})$, где $\star$ обозначает джойн комплексов. Поэтому $P_{B'} \sim P_{B''} \sim P_B \times P_{B_1} \times \dots \times P_{B_{n+1}}$.

ПРИМЕР 4.3. Пусть B, B_1, B_2 – экземпляры производящего множества $\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, отвечающего интервалу I . Опишем производящее множество $B(B_1, B_2)$. Мы “подставляем” $B_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ вместо a и $B_2 = \{\{3\}, \{4\}, \{3, 4\}\}$ вместо b в производящее множество $\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, в результате получаем производящее множество B' на $[4]$, состоящее из $\{i\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, [4]$.

Соответствие гиперграней многогранников $P_B \times P_{B_1} \times P_{B_2}$ и $P_{B'}$ определяется следующим отображением:

$$\begin{aligned} \{1\} \in B_1 &\mapsto \{1\} \in B', & \{2\} \in B_1 &\mapsto \{2\} \in B', \\ \{3\} \in B_2 &\mapsto \{3\} \in B', & \{4\} \in B_2 &\mapsto \{4\} \in B', \\ \{a\} \in B_2 &\mapsto \{1, 2\} \in B', & \{b\} \in B_2 &\mapsto \{3, 4\} \in B'. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 4.4. Пусть $B = \{\{i\}, [n+1]\}$ – производящее множество, отвечающее симплексу Δ^n , а $B_1, \dots, B_{n+1}$ – произвольные связные производящие множества на $[k_1], \dots, [k_{n+1}]$. Тогда $B' = B(B_1, \dots, B_{n+1}) = (B_1 \sqcup \dots \sqcup B_{n+1}) \cup \{[k_1 + \dots + k_{n+1}]\}$, а $P_{B'} \sim \Delta^n \times P_{B_1} \times \dots \times P_{B_{n+1}}$.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Каждый нестоэдр реализуется связным производящим множеством, т. е. для каждого нестоэдра P существует такое связное производящее множество B , что нестоэдры P_B и P комбинаторно эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, произвольное производящее множество B' имеет вид $B_1 \sqcup \dots \sqcup B_k$, где B_i – связные производящие множества на $[k_i + 1]$. Определим производящее множество $B'' = B_1(1, \dots, k_1, B_2) \sqcup B_3 \sqcup \dots \sqcup B_k$, дающее тот же нестоэдр, но имеющее меньше максимальных по включению элементов, чем B' . Далее опять применим конструкцию 4.1 к B'' и т. д. На некотором шаге мы получим производящее множество B с единственным максимальным по включению элементом, что равносильно связности B .

Далее без ограничения общности мы будем полагать, что каждый нестоэдр отвечает связному производящему множеству.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6. Пусть B – связное производящее множество на $[n+1]$. Многогранник P_B является флаговым тогда и только тогда, когда для каждого элемента $S \in B$, $|S| > 1$, существуют элементы $S_1, S_2 \in B$ такие, что $S_1 \sqcup S_2 = S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условия предложения доказана в работе [15].

Предположим, что P_B – флаговый многогранник. Рассмотрим элемент $S \in B$. Возьмем $S_1, \dots, S_k \in B \setminus \{S\}$ такие, что $S_1 \sqcup \dots \sqcup S_k = S$, а число k минимально среди таких дизъюнктивных представлений множества S . Заметим, что для любого $J \subset [k]$, $1 < |J| < k$, имеем $\bigsqcup_{j \in J} S_j \notin B$, иначе число k можно уменьшить. Следовательно, $k = 2$. Действительно, если $k > 2$, то гиперграни $F_{S_1}, \dots, F_{S_k}$ пересекаются попарно, но не пересекаются в совокупности.

Предположим, что для каждого элемента $S \in B$, $|S| > 1$, существуют такие элементы $S_1, S_2 \in B$, что $S_1 \sqcup S_2 = S$. Пусть $F_{S_1}, \dots, F_{S_k}$ – минимальный набор гиперграней, пересекающихся попарно, но не пересекающихся в совокупности. В силу предложения 3.15 имеем $S_1 \sqcup \dots \sqcup S_k = S \in B$. Найдем нетривиальный поднабор набора $F_{S_1}, \dots, F_{S_k}$ непересекающихся в совокупности гиперграней и получим противоречие. Для этого найдем множество $\tilde{S} \in B|_S$, пересекающее более одного S_i , но не пересекающее каждое S_i . Тогда набор гиперграней F_{S_i} , для которых $S_i \cap \tilde{S} \neq \emptyset$, будет искомым, поскольку $\bigsqcup_{S_i: S_i \cap \tilde{S} \neq \emptyset} S_i \in B$. По условию имеем $S = S' \sqcup S''$, где $S', S'' \in B$. Выберем в качестве S^1 множество из S' и S'' , пересекающее большее число множеств S_i . Если S^1 пересекает все множества S_i , то $S^1 = (S')^1 \sqcup (S'')^1$, где $(S')^1, (S'')^1 \in B$. Выберем в качестве S^2 множество из $(S')^1$ и $(S'')^1$, пересекающее большее число множеств S_i . Если множество S^2 пересекает все множества S_i , то аналогично построим S^3 и т. д. Полученная последовательность не может быть бесконечной, следовательно, на некотором шаге мы найдем искомое множество $\tilde{S} \in B$ как одно из множеств $(S')^i, (S'')^i$. Предложение доказано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Диаграммой Хассе частично упорядоченного множества $(X, \prec)$ называется ориентированный граф на множестве вершин X , в котором вершины $x \in X$ и $y \in X$ соединены ребром, направленным из x в y , если $x \prec y$ и не существует элемента $z \in X$ такого, что $x \prec z \prec y$.

Каждое производящее множество B частично упорядочено по включению, поэтому определена его диаграмма Хассе, называемая B -диаграммой Хассе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.8. Пусть B – связное производящее множество на $[n+1]$. Многогранник P_B комбинаторно эквивалентен произведению симплексов тогда и только тогда, когда B -диаграмма Хассе является деревом. В этом случае $P_B \sim \Delta^{k_1-1} \times \dots \times \Delta^{k_l-1}$, где $k_1, \dots, k_l$ – числа входящих ребер для всех внутренних вершин B -диаграммы Хассе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B -диаграмма Хассе является деревом, а $k_1, \dots, k_l$ – числа входящих ребер его внутренних вершин. Докажем, что $P_B \sim \Delta^{k_1-1} \times \dots \times \Delta^{k_l-1}$. При $n = 1$ утверждение верно. Предположим, что утверждение верно при $m < n$, и докажем его для $m = n$. Без ограничения общности считаем, что число входящих ребер для максимальной вершины $[n+1]$

равно k_l . Тогда вершина $[n+1]$ смежна вершинам $S_1, \dots, S_{k_l}$. Следовательно, $S_1 \sqcup \dots \sqcup S_{k_l} = [n+1]$. Действительно, из каждой вершины $\{q\}$ найдется ориентированный путь в вершину $[n+1]$, который обязательно проходит через некоторую вершину S_i , значит, $\{q\} \subset S_i$; если же $\{q\} \subset S_i \cap S_j \neq \emptyset$, то найдутся пути из вершины $\{q\}$ в вершины S_i и S_j , которые смежны вершине $[n+1]$, значит, дерево содержит цикл. Следовательно, $B = (B|_{S_1} \sqcup \dots \sqcup B|_{S_{k_l}}) \cup [n+1]$, диаграммы Хассе производящих множеств $B|_{S_i}$ являются деревьями, а $k_1, \dots, k_{l-1}$ – числа входящих ребер всех их внутренних вершин. Используя пример 4.4 и предположение индукции, получаем

$$P_B \sim \Delta^{k_l-1} \times P_{B|_{S_1}} \times \dots \times P_{B|_{S_{k_l}}} \sim \Delta^{k_1-1} \times \dots \times \Delta^{k_{l-1}-1}.$$

Пусть $P_B \sim \Delta^{k_1-1} \times \dots \times \Delta^{k_{l-1}-1}$. Докажем, что из каждой вершины S выходит не более одного ребра. Отсюда будет следовать, что B -диаграмма Хассе является деревом. Предположим, из вершины S выходят ребра, идущие в вершины $S', S'' \in B$. Тогда $S' \setminus S'' \neq \emptyset, S'' \setminus S' \neq \emptyset, S' \cap S'' \supset S$. Следовательно, $F_{S'} \cap F_{S''} = \emptyset$, и, значит, гиперграни $F_{S'}$ и $F_{S''}$ соответствуют противоположным точкам интервала $\Delta^1 = I$ в произведении симплексов, т. е. являются основаниями цилиндра P_B . Рассмотрим такой набор $S_1, \dots, S_k \in B$, что $S_1 \sqcup \dots \sqcup S_k = S' \setminus S''$, а число k минимально среди таких дизъюнктивных представлений множества $S' \setminus S''$. Тогда для любого $J \subset [k]$, $1 < |J| < k$, имеем $\bigsqcup_{j \in J} S_j \notin B$, иначе число k можно уменьшить. Таким образом, боковая грань $\bigcap_{i=1}^k F_{S_i}$ не пересекается с основанием $F_{S''}$. Противоречие. Предложение доказано.

Используя предложение 4.8, получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 4.9. Пусть B – связное производящее множество на $[n+1]$. Многогранник P_B комбинаторно эквивалентен кубу тогда и только тогда, когда B -диаграмма Хассе является бинарным деревом.

Достаточность условия следствия 4.9 была показана в работе [15].

§ 5. Срезки куба

Одной из операций, играющих ключевую роль в настоящей работе, является срезка многогранника вдоль его грани. Мы будем использовать комбинаторную конструкцию этой операции, а также ее геометрическую реализацию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Скажем, что простой многогранник Q получается из простого многогранника P срезкой грани $G \subset P$, если симплициальный комплекс ∂Q^* получается из симплициального комплекса ∂P^* звездным подразделением вдоль симплекса σ_G , соответствующего грани G . Многогранник Q имеет отмеченную гипергрань, соответствующую новой вершине $v_0 \in \partial Q^*$.

Мы будем следовать обозначениям, принятым в работе [38]. Звездное подразделение симплициального комплекса K вдоль симплекса $\sigma \in K$ обозначается $(v_0, \sigma)K$, где v_0 – новая вершина. Линк симплекса $\sigma \in K$ обозначается

$\text{lk}(\sigma, K)$. Джойн комплексов K и L обозначается через $K \star L$. В этих обозначениях условие определения 5.1 переписется следующим образом: $\partial Q^* = (v_0, \sigma_G) \partial P^*$.

Геометрически срезка грани реализуется следующим образом. Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ – простой многогранник, относительная внутренность которого содержит 0, а G – грань многогранника P . Пусть $l_G \in \mathbb{R}^{n*}$ – линейная функция такая, что $l_G(P) \leq 1$ и $\{x \in P: l_G x = 1\} = G$. Многогранник Q , полученный из P срезкой грани $G \subset P$, реализуется как $Q = \{x \in P: l_G x \leq 1 - \varepsilon\}$. Здесь $\varepsilon > 0$ настолько мало, что все вершины многогранника P , не принадлежащие грани G , удовлетворяют неравенству $l_G x \leq 1 - \varepsilon$, т. е. многогранник Q получается из P сдвигом гиперплоскости, опорной к грани G , внутрь многогранника P . Отмеченная гипергрань F_0 многогранника Q , отвечающая новой вершине $v_0 \in \partial Q^*$, лежит в плоскости сечения. Эту гипергрань будем называть *гипергранью сечения* F_0 .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Пусть P – простой многогранник и грань $G \subset P$ соответствует симплексу $\sigma_G \subset \partial P^*$. Тогда симплициальные комплексы ∂G^* и $\text{lk}(\sigma_G, \partial P^*)$ изоморфны.

Следующее утверждение хорошо известно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.3. Пусть многогранник Q получен из простого n -многогранника P срезкой грани G размерности k . Тогда гипергрань сечения F_0 комбинаторно эквивалентна $G \times \Delta^{n-k-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Срезка грани G соответствует звездному подразделению: $\partial Q^* = (v_0, \sigma_G) \partial P^*$. Из свойств звездных преобразований получаем $\text{lk}(v_0, \partial Q^*) = \text{lk}(\sigma_G, \partial P^*) \star \partial \Delta^{n-k-1}$. Предложение доказано, поскольку

$$\partial F_0^* \simeq \text{lk}(v_0, \partial Q^*) \simeq \partial G^* \star \partial \Delta^{n-k-1} = \partial(G \times \Delta^{n-k-1})^*.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. Пусть многогранник Q получен из простого n -многогранника P срезкой грани G размерности k . Тогда:

- 1) $H(Q) = H(P) + \alpha t H(G) H(\Delta^{n-k-2})$;
- 2) $\gamma(Q) = \gamma(P) + \tau \gamma(G) \gamma(\Delta^{n-k-2})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Срезка заменяет грань G на грань $G \times \Delta^{n-k-1}$; тогда

$$F(Q) = F(P) + t F(G) F(\Delta^{n-k-1}) - t^{n-k} F(G).$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} H(Q) &= H(P) + t H(G) H(\Delta^{n-k-1}) - t^{n-k} H(G) \\ &= H(P) + t H(G) \left(\sum_{i=0}^{n-k-1} \alpha^i t^{n-i} - t^{n-k-1} \right) \\ &= H(P) + \alpha t H(G) \left(\sum_{i=0}^{n-k-2} \alpha^i t^{n-i} \right) = H(P) + \alpha t H(G) H(\Delta^{n-k-2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \gamma_i(P)(\alpha t)^i (\alpha + t)^{n-2i} + \alpha t \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \gamma_i(G)(\alpha t)^i (\alpha + t)^{k-2i} \right) \\
&\quad \times \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-k-2}{2} \rfloor} \gamma_j(\Delta^{n-k-2})(\alpha t)^j (\alpha + t)^{n-k-2-2j} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \gamma_i(P)(\alpha t)^i (\alpha + t)^{n-2i} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-k-2}{2} \rfloor} \gamma_i(G) \gamma_j(\Delta^{n-k-2})(\alpha t)^{i+j+1} (\alpha + t)^{d-2(i+j+1)}.
\end{aligned}$$

Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. Пусть многогранник Q получен из простого многогранника P срезкой грани G коразмерности 2. Тогда:

- 1) $H(Q) = H(P) + \alpha t H(G)$;
- 2) $\gamma(Q) = \gamma(P) + \tau \gamma(G)$.

Рассмотрим семейство $\mathcal{P}^{\text{cube}}$ комбинаторных многогранников, полученных из куба последовательной срезкой граней коразмерности 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Пусть K – симплициальный комплекс и $K' = (v_0, A)K$ – его звездное подразделение для $A = \{v_1, \dots, v_k\} \in K$. Произвольный набор вершин V комплекса K' образует симплекс тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- а) $v_0 \notin V$ и $\{v_1, \dots, v_k\} \not\subseteq V$, а V – симплекс в K ;
- б) $v_0 \in V$ и $\{v_1, \dots, v_k\} \not\subseteq V$, а $V \cup \{v_1, \dots, v_k\}$ – симплекс в K .

ЛЕММА 5.7. Срезка грани коразмерности 2 переводит простой флаговый многогранник в простой флаговый многогранник.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Q получен из P срезкой грани $G = F_1 \cap F_2$. Тогда $\partial Q^* = (v_0, \sigma_G) \partial P^*$, где $\sigma_G = \{v_1, v_2\}$, а v_1, v_2 – вершины, соответствующие гиперграням F_1, F_2 . Допустим, вершины набора $V \subset \partial Q^*$ попарно инцидентны. Отметим, что вершины v_1, v_2 одновременно не содержатся в наборе V , поэтому вершины набора $V \setminus v_0$ попарно инцидентны в ∂P^* , следовательно, $V \setminus v_0 \in \partial P^*$. Если $v_0 \in V$, то $V \in \partial Q^*$ в силу условия б) замечания 5.6. Если $v_0 \notin V$, то $V \setminus v_0 \in \text{lk}(v_0, \partial Q^*) = \text{lk}(\{v_1, v_2\}, \partial P^*)$ и $V \in \partial Q^*$ в силу условия а) замечания 5.6.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.8. Если $P \in \mathcal{P}^{\text{cube}}$, то $\gamma_i(P) \geq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что если $P \in \mathcal{P}^{\text{cube}}$, то все гиперграни многогранника P принадлежат $\mathcal{P}^{\text{cube}}$. Проведем индукцию по числу срезанных граней. На начальном шаге мы имеем $\gamma(I^n) = (1, 0, \dots, 0)$. Пусть многогранник Q получен из многогранника $P \in \mathcal{P}^{\text{cube}}$ срезкой грани G коразмерности 2. Тогда гипергрань сечения имеет вид $F_0 = G \times I$ и принадлежит семейству

$\mathcal{P}^{\text{cube}}$ по предположению индукции. Любая другая гипергрань F' многогранника Q получена из некоторой гиперграны F'' многогранника P срезкой некоторой грани G' . Поскольку каждая грань флагового многогранника является флаговым многогранником, из предложения 5.3 и леммы 5.7 следует, что коразмерность G' равна 1 или 2.

С помощью индукции по размерности многогранника P , используя формулу $\gamma(Q) = \gamma(P) + \tau\gamma(G)$, получаем доказательство предложения.

§ 6. Реализация нестоэдров срезками

Далее мы построим последовательность производящих множеств $B_0 \subset \dots \subset B_N = B$, где B_0 соответствует кубу, а B_i , $i > 0$, получается из B_{i-1} добавлением одного элемента S_i . Из [39, теорема 4.2] следует, что для связанных производящих множеств $B' \subset B''$ многогранник $P_{B''}$ получается из $P_{B'}$ последовательной срезкой граней. Наша цель – показать, что если P_B флаговый, то производящие множества B_i можно выбрать так, что срезанные грани будут иметь коразмерность 2. В этом случае P_B будет иметь неотрицательный γ -вектор, поскольку $P_B \in \mathcal{P}^{\text{cube}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1 [15, предложение 7.1]. *Если B – связанное флаговое производящее множество на $[n+1]$, то существует такое связанное производящее множество $B_0 \subseteq B$, что P_{B_0} комбинаторно эквивалентен кубу I^n .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ предложение верно. Предположим, что предложение верно при $m < n$, и докажем его для $m = n$. В силу предложения 4.6 получаем $[n+1] = S_1 \sqcup S_2$, где $S_1, S_2 \in B$. По предположению индукции производящие множества $B|_{S_1}$ и $B|_{S_2}$ имеют подмножества B_1 и B_2 , соответствующие кубам. Производящее множество $B_0 = (B_1 \sqcup B_2) \cup \{[n+1]\}$ будет искомым (см. пример 4.4).

Теперь определим, какие грани нужно срезать, чтобы получить $P_{B''}$ из $P_{B'}$, где $B' \subset B''$ – связанные производящие множества.

КОНСТРУКЦИЯ 6.2 (разложение элемента $S \in B_1$ по элементам B_0). Пусть B_0 и B_1 – связанные производящие множества на $[n+1]$, $B_0 \subset B_1$, и $S \in B_1$. Назовем *разложением* элемента S по элементам B_0 следующее выражение: $S = S_1 \sqcup \dots \sqcup S_k$, $S_j \in B_0$, где число k минимально среди таких дизъюнктивных представлений множества S . Обозначим соответствующий набор $S_1, \dots, S_k$ через $B_0(S)$. Легко проверить, что разложение существует и единственно.

ЛЕММА 6.3. *Пусть симплициальные комплексы K и L являются границами некоторых симплициальных многогранников размерности n и $K \subseteq L$. Тогда $K = L$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $n = 1$ лемма верна. Предположим, что лемма верна для $m < n$, и докажем ее для $m = n$. Допустим, что $L \setminus K \neq \emptyset$; тогда возьмем симплекс $A \in L \setminus K$, содержащий вершину $v \in K$ (такой существует в силу связности L). Комплексы $\text{lk}(v, K)$ и $\text{lk}(v, L)$ являются границами

симплициальных многогранников размерности $n - 1$, и $\text{lk}(v, K) \subsetneq \text{lk}(v, L)$, поскольку $A \setminus \{v\} \in \text{lk}(v, L) \setminus \text{lk}(v, K)$. Последнее противоречит предположению индукции. Лемма доказана.

Следующая лемма в других терминах содержится в [39, теорема 4.2]. Для полноты изложения мы приведем ее доказательство, тем более, что в нашем случае оно упрощается.

ЛЕММА 6.4. Пусть B_0 и B_1 – связные производящие множества на $[n + 1]$ и $B_0 \subset B_1$. Тогда P_{B_1} получается из P_{B_0} срезками граней $G^i = \bigcap_{j=1}^{k_i} F_{S_j^i}$, соответствующих разложениям $S^i = S_1^i \sqcup \dots \sqcup S_{k_i}^i \in B_1 \setminus B_0$ элементов S^i , занумерованных в любом порядке, обратном включению (т.е. $S^i \supseteq S^{i'} \Rightarrow i \leq i'$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму индукцией по числу $N = |B_1| - |B_0|$.

Пусть $N = 1$; тогда $B_1 = B_0 \cup \{S^1\}$. Покажем, что $K \simeq \mathcal{N}(B_1)$, где $K = (S^1, B_0(S^1))\mathcal{N}(B_0)$. В силу леммы 6.3 достаточно показать, что $\mathcal{N}(B_1) \subseteq K$. Пусть $\mathcal{S} \in \mathcal{N}(B_1)$. Отметим, что $B_0(S^1) = \{S_1^1, \dots, S_{k_1}^1\} \notin \mathcal{S}$. Если $S^1 \notin \mathcal{S}$, то $\mathcal{S} \in \mathcal{N}(B_0)$, значит, $\mathcal{S} \in K$ в силу условия а) замечания 5.6. Если $S^1 \in \mathcal{S}$, то для каждого элемента $S \in \mathcal{S}$, пересекающего S^1 , либо $S^1 \subset S$, либо $S^1 \supset S$ (иначе $S \cup S^1 \in B_1$), в последнем случае существует j такое, что $S \subset S_j^1$ (иначе, объединив S_j^1 , пересекающие S , можно уменьшить число k_1 , что противоречит определению разложения S^1). Следовательно, $B_0(S^1) \cup (\mathcal{S} \setminus \{S^1\}) \in \mathcal{N}(B_0)$, значит, $\mathcal{S} \in K$ в силу условия б) замечания 5.6.

Предположим, что предположение верно для $M < N$, и докажем его для $M = N$. Система множеств $B'_0 = B_0 \cup \{S^1\}$ является производящим множеством. По предположению индукции $P_{B'_0}$ получается из P_{B_0} срезкой грани, соответствующей разложению S^1 , а P_{B_1} получается из $P_{B'_0}$ последовательной срезкой граней, соответствующих разложениям S^i , $i = 2, \dots, N$. Отсюда получаем требуемое.

ТЕОРЕМА 6.5. Пусть B_1 и B_2 – связные флаговые производящие множества на $[n + 1]$ и $B_1 \subset B_2$. Тогда P_{B_2} получается из P_{B_1} последовательной срезкой граней коразмерности 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам потребуется следующее утверждение: пусть B_1 и B_3 – связные флаговые производящие множества на $[n + 1]$ и $B_1 \subsetneq B_3$; тогда существует флаговое производящее множество B_2 такое, что $B_1 \subsetneq B_2 \subseteq B_3$, а P_{B_2} получается из P_{B_1} последовательной срезкой граней коразмерности 2. Данное утверждение позволяет непосредственно доказать теорему.

Докажем требуемое утверждение. Положим $B_2 = \widehat{B_1 \cup \{S\}}$, т.е. B_2 – минимальное по включению производящее множество, содержащее $B_1 \cup \{S\}$, где S – минимальный по включению элемент из $B_3 \setminus B_1$. По предположению 4.6 найдутся $I, J \in B_3$ такие, что $I \sqcup J = S$. Из выбора S следует, что $I, J \in B_1$. Легко проверить, что система множеств $B_1 \cup \{S' = S_1 \sqcup S_2, S_i \in B_1, I \subset S_1, J \subset S_2\}$ является минимальным производящим множеством, содержащим $B_1 \cup \{S\}$. Тогда разложение любого элемента $B_2 \setminus B_1$ состоит из двух элементов. Следовательно, P_{B_2} получается из P_{B_1} срезками граней коразмерности 2. По лемме 5.7 многогранник P_{B_2} флаговый. Теорема доказана.

Таким образом, для каждого связного флагового производящего множества B можно найти последовательность производящих множеств $B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_N = B$, где P_{B_0} эквивалентно кубу, $B_i = B_{i-1} \cup \{S_i\}$, а многогранник P_{B_i} получается из многогранника $P_{B_{i-1}}$ срезкой грани $F_{S_{j_1}} \cap F_{S_{j_2}} \subset P_{B_{i-1}}$ коразмерности 2, где $S_i = S_{j_1} \sqcup S_{j_2}$, а $S_{j_1}, S_{j_2} \in B_{i-1}$.

Применяя результаты, полученные в настоящем параграфе и § 5, выводим следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 6.6. *Каждый n -мерный флаговый нестоэдр получается из куба I^n последовательной срезкой граней коразмерности 2.*

ТЕОРЕМА 6.7. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $\gamma_i(P_B) \geq 0$ для любого флагового нестоэдра P_B ;
- 2) $\gamma_i(P_{B_1}) \leq \gamma_i(P_{B_2})$ для связных флаговых производящих множеств B_1 и B_2 таких, что $B_1 \subset B_2$, причем если $B_1 \neq B_2$, то неравенство строгое для некоторого i .

Утверждение 1) теоремы 6.7 означает, что гипотеза Гала верна для нестоэдров.

§ 7. Кубические реализации флаговых нестоэдров

Применим результаты, полученные в § 6, для построения геометрических реализаций флаговых нестоэдров с помощью описанной выше комбинаторной конструкции. Следующее подмножество в $\mathbb{R}^n$ будем называть *стандартным кубом*: $\{x \in \mathbb{R}^n: |x_i| \leq 1\}$.

Пусть B – связное флаговое производящее множество и цепочка $B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_N = B$ выбрана так, что $P_{B_0} \sim I^n$, а $B_i \setminus B_{i-1} = S_i$. Для реализации многогранника P_B в пространстве $\mathbb{R}^n$ необходимо каждому элементу $S \in B \setminus [n+1]$ поставить в соответствие неравенство $l_S x \leq b_S$. Здесь $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n*}$ отождествляются с помощью скалярного произведения. Пусть элементы $S \in B_0 \setminus [n+1]$ отвечают неравенствам $l_S x \leq b_S$, где $l_S = \pm e_i$, $b_S = 1$. Определим остальные неравенства рекурсивно. Каждый элемент $S_i \in B_i \setminus B_{i-1}$ имеет разложение по элементам из B_{i-1} : $S_i = S_{i_1} \sqcup S_{i_2}$.

По определению положим

$$l_{S_i} = l_{S_{i_1}} + l_{S_{i_2}}, \quad (7.1)$$

$$b_{S_i} = b_{S_{i_1}} + b_{S_{i_2}} - \varepsilon_i. \quad (7.2)$$

Здесь $\varepsilon_i > 0$ достаточно малы, чтобы неравенства $l_{S_i} x \leq b_{S_i}$ определяли срезки граней $G^i = F_{S_{i_1}} \cap F_{S_{i_2}}$ многогранника $P_{B_{i-1}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Два выпуклых n -мерных многогранника P_1 и P_2 в $\mathbb{R}^n$ называются *аналогичными* (см., например, [11]), если между их гипергранями можно установить взаимно однозначное соответствие такое, что соответствующие гиперграни параллельны и аналогичны как $(n-1)$ -мерные многогранники в $\mathbb{R}^{n-1}$ при параллельном переносе в одну гиперплоскость. Любые два отрезка аналогичны по определению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Описанная выше геометрическая реализация флагового нестоэдра P_B однозначно определяется выбором производящего множества B_0 и геометрической реализацией нестоэдра P_{B_0} в виде стандартного куба, т.е. для данных B_0 и реализации многогранника P_{B_0} все реализации являются аналогичными многогранниками.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B_i \subset B_{i+1} \subset B_{i+2}$ – связные производящие множества и $S \in B_{i+2}$. Если $B_{i+1}(S) = \{S_1, \dots, S_k\}$, то легко проверить, что $B_i(S) = B_i(B_{i+1}(S)) = \{B_i(S_j), j = 1, \dots, k\}$. Отсюда получаем явную формулу для l_S , не зависящую от выбора цепочки $B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_N = B$:

$$l_S = \sum_{S' \in B_0(S)} l_{S'}.$$

Предложение доказано, поскольку нормали к гиперграням всех получаемых многогранников одинаковы, а гиперграни, соответствующие данному набору нормалей, одновременно пересекаются или не пересекаются для каждого полученного многогранника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3. Назовем описанную выше геометрическую реализацию кубической реализацией P_B , соответствующей производящему множеству B_0 и реализации куба P_{B_0} в виде стандартного куба в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $l \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\text{supp } l$ подмножество в $[n]$ индексов ненулевых координат вектора l .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.4. *Координаты векторов l_S кубической реализации принадлежат множеству $\{-1, 0, 1\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что если элементы $S', S'' \in B \setminus [n+1]$ удовлетворяют условию $S' \sqcup S'' \notin B$, то выполнено $\text{supp } l_{S'} \cap \text{supp } l_{S''} = \emptyset$ и результат будет следовать из (7.1). Проведем индукцию по номеру i производящего множества B_i . Для стандартной реализации куба P_{B_0} утверждение верно, так как грани $F_{S'}$ и $F_{S''}$ пересекаются при условии $S' \sqcup S'' \notin B$. Предположим, что утверждение верно для производящего множества B_{i-1} , и докажем его для производящего множества B_i . Требуемое свойство сохраняется для элементов из $B_{i-1} \subset B_i$. Проверим его для нового элемента S_i . Пусть $S_i = S_{i_1} \sqcup S_{i_2}$, где $S_{i_1}, S_{i_2} \in B_{i-1}$. Возьмем произвольный элемент $S \in B_{i-1} \subset B_i$ такой, что $\{S, S_i\} \in \mathcal{N}(B_i)$ (следовательно, $S \cap S_i = \emptyset$). Если $S_i \sqcup S \notin B_i$, то $S_{i_1} \sqcup S \notin B_{i-1}$ и $S_{i_2} \sqcup S \notin B_{i-1}$. Тогда по предположению индукции имеем

$$\begin{aligned} \text{supp } l_{S_i} \cap \text{supp } l_S &= (\text{supp } l_{S_{i_1}} \cup \text{supp } l_{S_{i_2}}) \cap \text{supp } l_S \\ &= (\text{supp } l_{S_{i_1}} \cap \text{supp } l_S) \cup (\text{supp } l_{S_{i_2}} \cap \text{supp } l_S) = \emptyset. \end{aligned}$$

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5. *Пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ – многогранник Дельзанта и $G = F_1 \cap \dots \cap F_k$ – его грань. Пусть многогранник Q получается из многогранника P срезкой грани G так, что внешняя нормаль к гиперграням сечения F_0 есть $v_0 = v_1 + \dots + v_k$, где v_i – целочисленные примитивные внешние нормали к гиперграням F_i . Тогда многогранник Q является многогранником Дельзанта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо лишь проверить, что для каждой новой вершины q многогранника Q (т. е. принадлежащей гипергранни F_0) внешние нормали, содержащие вершину q , образуют базис целочисленной решетки. В силу замечания 5.6 имеем

$$q = F_0 \cap F_1 \cap \dots \cap \widehat{F_i} \cap \dots \cap F_k \cap G',$$

где некоторое F_i пропущено, а пересечение $G \cap G'$ является вершиной в P (т. е. в выражении $F_1 \cap \dots \cap F_k \cap G'$ некоторый F_i заменяется на F_0). Без ограничения общности полагаем, что $i = 1$.

Пусть $v_1, \dots, v_k$ – внешние целочисленные примитивные нормали к F_i , а $v_{k+1}, \dots, v_n$ – внешние целочисленные примитивные нормали к гиперграням, содержащим G' . Тогда

$$\det(v_0, v_2, \dots, v_n) = \det(v_1 + \dots + v_k, v_2, \dots, v_n) = \det(v_1, v_2, \dots, v_n) = \pm 1.$$

Предложение доказано.

Хорошо известно, что стандартная реализация нестоэдра в виде суммы Минковского симплексов дает многогранник Дельзанта. Оказывается, то же самое верно и для кубических реализаций.

СЛЕДСТВИЕ 7.6. *Кубическая реализация P_B является дельзантовой.*

Как показано выше, для данного флагового нестоэдра P_B , где B – связное производящее множество на $[n + 1]$, мы получаем множество его кубических реализаций, зависящих от выбора B_0 и реализации стандартного куба P_{B_0} . Эти реализации можно индексировать парами (B_0, σ) , где производящее множество $B_0 \subset B$ отвечает кубу I^n , а σ – элемент группы симметрий стандартного куба.

ПРИМЕР 7.7. Покажем зависимость кубической реализации трехмерного ассоциэдра от выбора B_0 . Производящее множество для As^3 имеем следующий вид:

$$B = \{\{i\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Пусть B_0 состоит из $\{i\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, [4]$. Последуем построению из доказательства теоремы 6.5 и в результате получим многогранник, представленный на рис. 1. Выбираем $S = \{2, 3\} \in B \setminus B_0$ и сразу получаем производящее множество $B = B_0 \cup \widehat{\{2, 3\}} = B_0 \cup \{2, 3\} \cup \{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\}$. Таким образом, ассоциэдр P_B получается из $P_{B_0} = I^3$ срезкой граней $F_{\{1,2\}} \cap F_{\{3\}}, F_{\{2\}} \cap F_{\{3,4\}}, F_{\{2\}} \cap F_{\{3\}}$ в указанном порядке. На рис. 1 грани $F_{\{1,2\}}$ и $F_{\{3,4\}}$ являются верхней и нижней гипергранями, $F_{\{2\}}$ и $F_{\{3\}}$ – правой и фронтальной гипергранями.

Пусть B_0 состоит из $\{i\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, [4]$. Последуем построению из доказательства теоремы 6.5 и в результате получим многогранник, представленный на рис. 2. Выбираем $S = \{2, 3\} \in B \setminus B_0$ и получаем производящее множество $B_1 = B_0 \cup \widehat{\{2, 3\}} = B_0 \cup \{2, 3\}$. Добавление элемента $\{2, 3\}$ соответствует срезке грани $F_{\{2\}} \cap F_{\{3\}}$. (В результате получаем гипергрань сечения $F_{\{2,3\}}$.) Далее выбираем $S = \{3, 4\} \in B \setminus B_1$ и получаем производящее множество

$$B = B_1 \cup \widehat{\{3, 4\}} = B_1 \cup \{3, 4\} \cup \{2, 3, 4\}.$$

Рис. 1

Добавление элементов $\{3, 4\}$ и $\{2, 3, 4\}$ соответствует срезке граней $F_{\{2,3\}} \cap F_{\{4\}}$ и $F_{\{3\}} \cap F_{\{4\}}$. На рис. 2 грани $F_{\{2\}}$, $F_{\{3\}}$ и $F_{\{4\}}$ являются фронтальной, правой и верхней гипергранями соответственно.

Рис. 2

Для наглядности производящие множества B_0 представлены в виде диаграмм Хассе. В работе [31] показано, что геометрические реализации ассоциэдров из работ [30], [33] и [15] являются аффинно неэквивалентными. Легко видеть, что ни одна из приведенных реализаций также не является аффинно эквивалентной реализациям из данных работ.

§ 8. Семейства граф-ассоциэдров

В этом параграфе мы опишем конструкции, позволяющие строить семейства граф-ассоциэдров. Покажем, как эти конструкции дают семейства ассоциэдров, циклоэдров, пермutoэдров и стеллоэдров. Главной спецификой предло-

женных конструкций является то, что они дают индуктивные формулы для H - и γ -полиномов получаемых многогранников. В качестве приложения мы получим новые вычисления производящих функций H - и γ -полиномов семейств ассоциэдров, циклоэдров, пермutoэдров и стеллоэдров, а также покажем, что γ -векторы этих семейств являются границами γ -векторов для важных классов граф-ассоциэдров.

Обозначим через J производящее множество $\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, соответствующее отрезку $P_J = I$. Напомним, что подмножество V вершин графа Γ называется *кликой*, если граф $\Gamma|_V$ является полным.

КОНСТРУКЦИЯ 8.1. Пусть Γ_{n+1} – связный граф на $[n+1]$, а множество $V \subseteq [n]$ вершин, смежных с вершиной $\{n+1\}$, образует клику. Положим $\Gamma_n = \Gamma_{n+1} \setminus \{n+1\}$, т.е. Γ_n – *граф, полученный удалением вершины $\{n+1\}$ и инцидентных ей ребер* из графа Γ_{n+1} .

В силу леммы 4.2 производящее множество

$$B_1 = J(B(\Gamma_n), n+1) = B(\Gamma_n) \cup \{n+1\} \cup [n+1]$$

соответствует нестоэдру $P_{B_1} = P_{\Gamma_n} \times I$: нижнее и верхнее основания цилиндра $P_{\Gamma_n} \times I$ отвечают $[n]$, $\{n+1\} \in B_1$; боковые грани отвечают $S \in B(\Gamma_n) \setminus [n] \subset B_1$. Таким образом, боковые гиперграни F_S , $S \in B_1$, цилиндра $P_{\Gamma_n} \times I$ естественным способом отождествляются с гипергранями F_S , $S \in B(\Gamma_n)$, основания P_{Γ_n} .

Имеем

$$B(\Gamma_{n+1}) \setminus B_1 = \{S \sqcup \{n+1\}, S \in \mathcal{S}\},$$

где

$$\mathcal{S} = \{S \in B(\Gamma_n) \setminus [n] : S \cap V \neq \emptyset\}.$$

По лемме 6.4 многогранник $P_{\Gamma_{n+1}}$ получается из многогранника $P_{\Gamma_n} \times I$ срезкой пересечений верхнего основания $F_{\{n+1\}}$ с боковыми гранями F_S , для которых $S \in \mathcal{S}$. Поскольку при таких срезах комбинаторный тип основания не меняется, срезанные грани будут иметь вид $P_{\Gamma_n|_S} \times P_{\Gamma_n/S}$, $S \in \mathcal{S}$ (см. предложение 3.11). Согласно следствию 5.5 получаем

$$\gamma(P_{\Gamma_{n+1}}) = \gamma(P_{\Gamma_n}) + \tau \sum_{S \in \mathcal{S}} \gamma(P_{\Gamma_n|_S}) \gamma(P_{\Gamma_n/S}), \quad (8.1)$$

$$H(P_{\Gamma_{n+1}}) = (\alpha + t)H(P_{\Gamma_n}) + \alpha t \sum_{S \in \mathcal{S}} H(P_{\Gamma_n|_S}) H(P_{\Gamma_n/S}). \quad (8.2)$$

Для того чтобы разложение каждого элемента $B(\Gamma_{n+1}) \setminus B_1$ состояло ровно из двух элементов: $S \sqcup \{n+1\}$, где $S, \{n+1\} \in B_1$, необходимо, чтобы множество V было кликой графа Γ_{n+1} . Благодаря этому мы знаем комбинаторный тип срезаемых граней.

8.1. Ассоциэдр. Применим конструкцию 8.1 к графу пути L_{n+1} . Здесь $V = \{n\}$, а $\mathcal{S} = \{[i, n], i = 2, \dots, n\}$. В результате удаления вершины $\{n+1\}$ получим граф L_n . В этом случае $P_{L_n} = \text{As}^{n-1}$ и срезанные грани будут в точности $\text{As}^{i-1} \times \text{As}^{n-i-1}$, $i = 1, \dots, n-1$. Формулы (8.1) и (8.2) дают индуктивные

формулы семейства ассоциэдров:

$$\gamma(\text{As}^n) = \gamma(\text{As}^{n-1}) + \tau \sum_{i=1}^{n-1} \gamma(\text{As}^{i-1}) \gamma(\text{As}^{n-i-1}), \quad (8.3)$$

$$H(\text{As}^n) = (\alpha + t)H(\text{As}^{n-1}) + \alpha t \sum_{i=1}^{n-1} H(\text{As}^{i-1})H(\text{As}^{n-i-1}), \quad (8.4)$$

которые, в свою очередь, дают уравнения для производящих рядов:

$$\gamma_{\text{As}}(x) = 1 + x\gamma_{\text{As}}(x) + \tau x^2 \gamma_{\text{As}}^2(x), \quad \text{где } \gamma_{\text{As}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma(\text{As}^n) x^n,$$

$$H_{\text{As}}(x) = (1 + \alpha x H_{\text{As}}(x))(1 + tx H_{\text{As}}(x)), \quad \text{где } H_{\text{As}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} H(\text{As}^n) x^n.$$

Последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{x H_{\text{As}}(x)}{(1 + \alpha x H_{\text{As}}(x))(1 + tx H_{\text{As}}(x))} = x.$$

Положим $U(x) = x H_{\text{As}}(x)$. Тогда $U(0) = 0$, $U'(0) = 1$ и

$$\frac{U}{(1 + \alpha U)(1 + tU)} = x.$$

Применяя классическую теорему Лагранжа об обращении рядов, получаем

$$\begin{aligned} U(x) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\varepsilon} \ln \left[1 - \frac{x}{z} (1 + \alpha z)(1 + tz) \right] dz \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=\varepsilon} \left[\frac{(1 + \alpha z)^n (1 + tz)^n}{z^n} \right] dz \right) \frac{x^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i+j=n-1} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \alpha^i t^j \right) \frac{x^n}{n}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$H(\text{As}^n) = \frac{1}{n+1} \sum_{i+j=n} \binom{n+1}{i} \binom{n+1}{j} \alpha^i t^j = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} \binom{n+1}{i+1} \alpha^{n-i} t^i.$$

ЛЕММА 8.2. Для любого связного графа Γ_{n+1} на множестве $[n+1]$ выполнено неравенство $\gamma_i(P_{\Gamma_{n+1}}) \geq \gamma_i(\text{As}^n)$, причем равенство для всех i достигается только тогда, когда Γ_{n+1} – линейный граф.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого связного графа Γ существует остовное дерево $T \subseteq \Gamma$. Имеем $B(T) \subseteq B(\Gamma)$ и $\gamma_i(P_T) \leq \gamma_i(P_\Gamma)$ согласно утверждению 2) теоремы 6.7. Таким образом, достаточно доказать лемму для деревьев.

Случай $n = 1$ тривиальный.

Предположим, что лемма верна для $m \leq n$. Пусть Γ_{n+1} – дерево на $[n+1]$. Без ограничения общности считаем, что вершина $\{n+1\}$ смежна только вершине $\{n\}$. Тогда мы можем применить конструкцию 8.1, полагая $\Gamma_n = \Gamma_{n+1} \setminus \{n+1\}$ и $V = \{n\}$. Для любого целого числа $i \in [1, n-1]$ найдется связный подграф графа Γ_n , содержащий $\{n\}$, на i вершинах, т.е. существует $S \in \mathcal{S}$ такое, что $|S| = i$. Следовательно, сопоставляя формулы (8.1) и (8.3), используя предположение индукции, а также замечание 3.5, завершаем доказательство неравенства из формулировки леммы.

Остается заметить, что если Γ_{n+1} не является линейным графом, то либо Γ_n также не является линейным графом, либо для некоторого $i \in [1, n-1]$ найдется более одного элемента $S \in \mathcal{S}$ такого, что $|S| = i$. В этих двух случаях неравенство будет строгим для некоторого i . Лемма доказана.

8.2. Циклоэдр. Пусть C_{n+1} – циклический граф на $[n+1]$. Применим конструкцию, отличную от конструкции 8.1.

В силу леммы 4.2 производящее множество $B_1 = B(C_n)(1, \dots, n-1, J(n, n+1))$ соответствует нестоэдру $P_{B_1} = \text{Cy}^{n-1} \times I$: нижнее и верхнее основания цилиндра $\text{Cy}^{n-1} \times I$ отвечают $\{n\}, \{n+1\} \in B_1$; боковые грани отвечают элементам $S \in B_1 \setminus [n+1]$, которые либо не пересекают, либо полностью содержат $\{n, n+1\}$. Путем сжатия множества $\{n, n+1\}$ в точку $\{n\}$ боковые гиперграни F_S , $S \in B_1$, цилиндра $\text{Cy}^{n-1} \times I$ отождествляются с гипергранями $F_{S \setminus \{n+1\}}, S \setminus \{n+1\} \in B(C_n)$, основания Cy^{n-1} .

Имеем

$$B(C_{n+1}) \setminus B_1 = \{S \sqcup \{n\}, S \in \mathcal{S}_n\} \cup \{S \sqcup \{n+1\}, S \in \mathcal{S}_{n+1}\},$$

где

$$\mathcal{S}_n = \{[i, n-1], i = 2, \dots, n-1\}, \quad \mathcal{S}_{n+1} = \{[1, i], i = 1, \dots, n-2\}.$$

По лемме 6.4 циклоэдр Cy^n получается из многогранника $\text{Cy}^{n-1} \times I$ срезкой пересечений нижнего основания $F_{\{n\}}$ с боковыми гипергранями F_S , для которых $S \in \mathcal{S}_n$, и пересечений верхнего основания $F_{\{n+1\}}$ с боковыми гипергранями F_S , для которых $S \in \mathcal{S}_{n+1}$. Поскольку при таких срезах комбинаторный тип оснований не меняется, срезанные грани нижнего основания будут иметь вид

$$\text{As}^{i-1} \times \text{Cy}^{n-i-1}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

($P_{C_n|S} \times P_{C_n/S}$, $S \in \mathcal{S}_n$, нижнего основания и $P_{C_n|S} \times P_{C_n/S}$, $S \in \mathcal{S}_{n+1}$, верхнего основания). В силу следствия 5.5 получаем индуктивные формулы семейства циклоэдров:

$$\gamma(\text{Cy}^n) = \gamma(\text{Cy}^{n-1}) + 2\tau \sum_{i=1}^{n-1} \gamma(\text{As}^{i-1})\gamma(\text{Cy}^{n-i-1}), \quad (8.5)$$

$$H(\text{Cy}^n) = (\alpha + t)H(\text{Cy}^{n-1}) + 2\alpha t \sum_{i=1}^{n-1} H(\text{As}^{i-1})H(\text{Cy}^{n-i-1}), \quad (8.6)$$

которые, в свою очередь, дают уравнения для производящих рядов

$$\gamma_{Cy}(x) = 1 + x\gamma_{Cy}(x) + 2\tau x^2 \gamma_{As}(x) \gamma_{Cy}(x), \quad \text{где } \gamma_{Cy}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma(Cy^n) x^n,$$

$$H_{Cy}(x) = 1 + (\alpha + t)xH_{Cy}(x) + 2\alpha t x^2 H_{As}(x) H_{Cy}(x),$$

$$H_{Cy}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} H(Cy^n) x^n.$$

Положим $V(x) = xH_{Cy}(x)$. Тогда имеем

$$\frac{V}{1 + (\alpha + t)V + 2\alpha t UV} = x.$$

Следовательно,

$$\frac{U}{(1 + \alpha U)(1 + tU)} = \frac{V}{1 + (\alpha + t)V + 2\alpha t UV}.$$

Таким образом,

$$V = \frac{U}{1 - \alpha t U^2}. \quad (8.7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.3. Граф Γ называется *гамильтоновым*, если он содержит гамильтонов цикл, т. е. цикл, проходящий каждую вершину графа Γ ровно один раз.

ЛЕММА 8.4. Для любого гамильтонова графа Γ_{n+1} на множестве $[n+1]$ выполнено неравенство $\gamma_i(P_{\Gamma_{n+1}}) \geq \gamma_i(Cy^n)$, причем равенство для всех i достигается только тогда, когда Γ_{n+1} — циклический граф.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку Γ_{n+1} гамильтонов граф, существует циклический подграф $C_{n+1} \subseteq \Gamma_{n+1}$. Следовательно, $B(C_{n+1}) \subseteq B(\Gamma_{n+1})$, и теорема 6.7 позволяет завершить доказательство.

8.3. Пермutoэдp. Применим конструкцию 8.1 к полному графу K_{n+1} . Здесь $V = [n]$, а $\mathcal{S} = 2^{[n]} \setminus \{\emptyset, [n]\}$. В результате удаления вершины $\{n+1\}$ получим граф K_n . В этом случае $P_{K_n} = Pe^{n-1}$ и мы срезаем в точности $\binom{n}{i}$ граней типа $Pe^{i-1} \times Pe^{n-i-1}$ для каждого $i = 1, \dots, n-1$. Формулы (8.1) и (8.2) дают индуктивные формулы семейства пермutoэдpов

$$\gamma(Pe^n) = \gamma(Pe^{n-1}) + \tau \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} \gamma(Pe^{i-1}) \gamma(Pe^{n-i-1}), \quad (8.8)$$

$$H(Pe^n) = (\alpha + t)H(Pe^{n-1}) + \alpha t \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} H(Pe^{i-1}) H(Pe^{n-i-1}), \quad (8.9)$$

которые, в свою очередь, дают уравнения для производящих рядов

$$\frac{d\gamma_{Pe}(x)}{dx} = 1 + \gamma_{Pe}(x) + \tau \gamma_{Pe}^2(x), \quad \text{где } \gamma_{Pe}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma(Pe^n) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\frac{dH_{Pe}(x)}{dx} = (1 + \alpha H_{Pe}(x))(1 + tH_{Pe}(x)), \quad \text{где } H_{Pe}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} H(Pe^n) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Данные уравнения можно решить явно. Решение последнего уравнения имеет вид

$$H_{\text{Pe}}(x) = \frac{e^{\alpha x} - e^{tx}}{\alpha e^{tx} - t e^{\alpha x}}. \quad (8.10)$$

Говорят, что в перестановке $i_1, \dots, i_n$ чисел $1, \dots, n$ пара чисел i_k, i_{k+1} дает *убывание*, если $i_k > i_{k+1}$. Обозначим через $A(n, k)$ число перестановок степени n , имеющих k убываний. Тогда известно (см. [40]), что

$$\frac{e^{\alpha x} - e^{tx}}{\alpha e^{tx} - t e^{\alpha x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n A(n+1, i) \alpha^i t^{n-i} \right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

8.4. Стеллоэдр. Применим конструкцию 8.1 к графу-звезде $K_{1,n}$ с вершиной $\{1\}$. Здесь $V = \{1\}$, а $\mathcal{S} = \{\{1\} \cup S, S \subsetneq [2, n]\}$. В результате удаления вершины $\{n+1\}$ получим граф $K_{1,n-1}$. В этом случае $P_{K_{1,n-1}} = \text{St}^{n-1}$ и мы срезаем в точности $\binom{n-1}{i-1}$ граней типа $\text{St}^{i-1} \times \text{Pe}^{n-i-1}$ для каждого $i = 1, \dots, n-1$. Формулы (8.1) и (8.2) дают индуктивные формулы семейства стеллоэдров

$$\gamma(\text{St}^n) = \gamma(\text{St}^{n-1}) + \tau \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} \gamma(\text{St}^{i-1}) \gamma(\text{Pe}^{n-i-1}), \quad (8.11)$$

$$H(\text{St}^n) = (\alpha + t)H(\text{St}^{n-1}) + \alpha t \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i-1} H(\text{St}^{i-1}) H(\text{Pe}^{n-i-1}), \quad (8.12)$$

которые, в свою очередь, дают уравнения для производящих рядов:

$$\frac{d\gamma_{\text{St}}(x)}{dx} = \gamma_{\text{St}}(x)(1 + \tau \gamma_{\text{Pe}}(x)), \quad \text{где} \quad \gamma_{\text{St}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma(\text{St}^n) \frac{x^n}{n!},$$

$$\frac{dH_{\text{St}}(x)}{dx} = H_{\text{St}}(x)(\alpha + t + \alpha t H_{\text{Pe}}(x)), \quad \text{где} \quad H_{\text{St}}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} H(\text{St}^n) \frac{x^n}{n!}.$$

Согласно (8.10) имеем

$$\alpha t H_{\text{Pe}}(x) = -\frac{d}{dx} \ln(\alpha e^{tx} - t e^{\alpha x}).$$

Следовательно,

$$H_{\text{St}}(x) = \frac{(\alpha - t)e^{(\alpha+t)x}}{\alpha e^{tx} - t e^{\alpha x}}.$$

ЛЕММА 8.5. Для любого дерева Γ_{n+1} на множестве $[n+1]$ выполнено неравенство $\gamma_i(P_{\Gamma_{n+1}}) \leq \gamma_i(\text{St}^n)$, причем равенство для всех i достигается только тогда, когда Γ_{n+1} – граф-звезда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $n = 1$ тривиальный.

Предположим, что лемма верна для $m \leq n$. Пусть Γ_{n+1} – дерево на $[n+1]$. Без ограничения общности считаем, что вершина $\{n+1\}$ смежна только вершине $\{n\}$. Тогда мы можем применить конструкцию 8.1, полагая $\Gamma_n = \Gamma_{n+1} \setminus \{n+1\}$ и $V = \{n\}$. Для любого целого числа $i \in [1, n-1]$ найдется не

более чем $\binom{n-1}{i-1}$ элементов $S \in \mathcal{S}$ таких, что $|S| = i$, и для каждого такого S верно

$$\gamma(P_{\Gamma_n|S})\gamma(P_{\Gamma_n/S}) \leq \gamma(\text{St}^{i-1})\gamma(\text{Pe}^{n-i-1}).$$

Следовательно, сопоставляя (8.1) с (8.11) и используя предположение индукции, завершаем доказательство неравенства из формулировки леммы.

Остается заметить, что если Γ_{n+1} не является графом-звездой, то либо Γ_n также не является графом-звездой, либо для некоторого $i \in [1, n-1]$ число элементов $S \in \mathcal{S}$ таких, что $|S| = i$, будет строго меньше $\binom{n-1}{i-1}$. В этих двух случаях неравенство будет строгим для некоторого i .

§ 9. Границы f -, h -, g - и γ -полиномов

Объединяя леммы 2.4, 8.2, 8.5 и теорему 6.7, получаем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 9.1. Для любого флагового n -мерного нестоэдра P_B верно:

- 1) $\gamma_i(I^n) \leq \gamma_i(P_B) \leq \gamma_i(\text{Pe}^n)$;
- 2) $g_i(I^n) \leq g_i(P_B) \leq g_i(\text{Pe}^n)$;
- 3) $h_i(I^n) \leq h_i(P_B) \leq h_i(\text{Pe}^n)$;
- 4) $f_i(I^n) \leq f_i(P_B) \leq f_i(\text{Pe}^n)$.

Более того, нижняя граница достигается только при $P_B = I^n$, а верхняя граница – только при $P_B = \text{Pe}^n$.

ТЕОРЕМА 9.2. Для любого связного графа Γ_{n+1} на множестве $[n+1]$ верно:

- 1) $\gamma_i(\text{As}^n) \leq \gamma_i(P_{\Gamma_{n+1}}) \leq \gamma_i(\text{Pe}^n)$;
- 2) $g_i(\text{As}^n) \leq g_i(P_{\Gamma_{n+1}}) \leq g_i(\text{Pe}^n)$;
- 3) $h_i(\text{As}^n) \leq h_i(P_{\Gamma_{n+1}}) \leq h_i(\text{Pe}^n)$;
- 4) $f_i(\text{As}^n) \leq f_i(P_{\Gamma_{n+1}}) \leq f_i(\text{Pe}^n)$.

Более того, нижняя граница достигается только при $P_{\Gamma_{n+1}} = \text{As}^n$, а верхняя граница – только при $P_{\Gamma_{n+1}} = \text{Pe}^n$.

ТЕОРЕМА 9.3. Для любого гамильтонова графа Γ_{n+1} на множестве $[n+1]$ верно:

- 1) $\gamma_i(\text{Cy}^n) \leq \gamma_i(P_{\Gamma_{n+1}}) \leq \gamma_i(\text{Pe}^n)$;
- 2) $g_i(\text{Cy}^n) \leq g_i(P_{\Gamma_{n+1}}) \leq g_i(\text{Pe}^n)$;
- 3) $h_i(\text{Cy}^n) \leq h_i(P_{\Gamma_{n+1}}) \leq h_i(\text{Pe}^n)$;
- 4) $f_i(\text{Cy}^n) \leq f_i(P_{\Gamma_{n+1}}) \leq f_i(\text{Pe}^n)$.

Более того, нижняя граница достигается только при $P_{\Gamma_{n+1}} = \text{Cy}^n$, а верхняя граница – только при $P_{\Gamma_{n+1}} = \text{Pe}^n$.

ТЕОРЕМА 9.4. Для любого дерева Γ_{n+1} на множестве $[n+1]$ верно:

- 1) $\gamma_i(\text{As}^n) \leq \gamma_i(P_{\Gamma_{n+1}}) \leq \gamma_i(\text{St}^n)$;
- 2) $g_i(\text{As}^n) \leq g_i(P_{\Gamma_{n+1}}) \leq g_i(\text{St}^n)$;
- 3) $h_i(\text{As}^n) \leq h_i(P_{\Gamma_{n+1}}) \leq h_i(\text{St}^n)$;
- 4) $f_i(\text{As}^n) \leq f_i(P_{\Gamma_{n+1}}) \leq f_i(\text{St}^n)$.

Более того, нижняя граница достигается только при $P_{\Gamma_{n+1}} = \text{As}^n$, а верхняя граница – только при $P_{\Gamma_{n+1}} = \text{St}^n$.

ЗАМЕЧАНИЕ 9.5. Среди флаговых нестоэдров существуют комбинаторно не эквивалентные многогранники с одинаковыми f -векторами, например многогранники, соответствующие производящим множествам

$$B_1 = \{\{i\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3\}\}, \\ B_2 = \{\{i\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}\}.$$

Приведенные выше теоремы 9.1–9.4 описывают случаи, когда комбинаторный тип многогранника однозначно восстанавливается по его f -вектору.

Указанные границы могут быть выписаны явно при использовании результатов об f -, h -, g - и γ -векторах рассматриваемых семейств (см. [15] и [28]):

$$h_i(I^n) = \binom{n}{i}, \quad h_i(\text{As}^n) = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{i} \binom{n+1}{i+1}, \quad h_i(\text{Cy}^n) = \binom{n}{i}^2, \\ h_i(\text{Pe}^n) = A(n+1, i), \quad h_i(\text{St}^n) = \sum_{k=i}^n \binom{n}{k} A(k, i-1), \quad i > 0, \\ \gamma_i(I^n) = 0, \quad i > 0, \quad \gamma_i(\text{As}^n) = \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i} \binom{n}{2i}, \quad \gamma_i(\text{Cy}^n) = \binom{n}{i, i, n-2i}.$$

Из совместного применения результатов работы [15, предложение 7.1] (см. предложение 6.1) и работы [39, теорема 4.2] (см. лемму 6.4) вытекает, что любой флаговый n -мерный нестоэдр получается из куба I^n последовательной срезкой граней (не обязательно коразмерности 2). Поэтому утверждения 3), 4) теоремы 9.1 можно рассматривать как следствие результатов указанных работ. Отметим, что утверждения 3), 4) теоремы 9.1 (насколько нам известно) являются новыми.

§ 10. Приложение. Простые многогранники без треугольников

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. Будем называть многогранник, не имеющий симплекса Δ^2 среди двумерных граней, *многогранником без треугольников*.

В работе [41] получена следующая оценка для f -векторов n -многогранников (не обязательно простых) без треугольников:

$$f_i(P^n) \geq f_i(I^n),$$

в частности $f_{n-1}(P^n) \geq 2n$. Любой флаговый нестоэдр является многогранником без треугольников, поэтому оценка снизу из утверждения 4) теоремы 9.1 вытекает из указанного результата.

Из результата работы [42] вытекает следующая классификация простых многогранников без треугольников с не более чем $2n + 2$ гипергранями:

- 1) если $f_{n-1}(P^n) = 2n$, то $P^n \sim I^n$;
- 2) если $f_{n-1}(P^n) = 2n + 1$, то $P^n \sim P_5 \times I^{n-2}$, где P_5 – пятиугольник;

3) если $f_{n-1}(P^n) = 2n + 2$, то либо $P^n \sim P_6 \times I^n$, либо $P^n \sim Q \times I^{n-3}$, либо $P^n \sim P_5 \times P_5 \times I^{n-4}$, где P_5 – пятиугольник и P_6 – шестиугольник, а Q – трехмерный простой многогранник, полученный из пятиугольной призмы срезкой ребра ее основания.

Как следствие, получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.2. *Все простые многогранники без треугольников с не более чем $2n+2$ гипергранями являются флаговыми и, более того, получаются из куба срезками граней коразмерности 2.*

Заметим, что результат предложения 10.2 не улучшаем; например, многогранник $(I^3 \# I^3) \times I^{n-3}$ имеет $2n + 3$ гиперграней, не содержит симплекс Δ^2 среди двумерных граней, но не является флаговым, следовательно, он не может быть получен из куба срезками граней коразмерности 2 (см. лемму 5.7). Здесь символ $\#$ означает связную сумму простых многогранников по вершине (см. [2]). Таким образом, отсутствие симплекса Δ^2 среди двумерных граней не обеспечивает условие флаговости в общем случае.

Покажем, что в общем случае отсутствие симплекса Δ^2 среди двумерных граней не обеспечивает также условие $\gamma_i \geq 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10.3. *Существует простой n -многогранник P^n без треугольников, не являющийся флаговым, такой, что $\gamma_i(P^n) < 0$ при некотором i .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Связная сумма по вершине двух n -мерных кубов I^n дает пример нефлагового простого многогранника без треугольников с $3n$ гипергранями.

Имеет место общая формула

$$H(I^n \# I^n) = (\alpha + t)^n - n \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i}{n-i} \binom{n-i}{i} (\alpha + t)^{n-2i} (\alpha t)^i.$$

Следовательно,

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_i = (-1)^{i+1} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i}, \quad i = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

в частности $\gamma_1 = n$.

В случае $n = 4$ имеем $\gamma_1 = 4$, $\gamma_2 = -2$. Таким образом, многогранник $P^4 = I^4 \# I^4$ дает пример нефлагового простого многогранника без треугольников, для которого $\gamma_2(P^4) < 0$. Предложение доказано.

Флаговый многогранник является многогранником без треугольников, так как любая его грань является флаговым многогранником. Следовательно, $f_i(P^n) \geq f_i(I^n)$ для любого флагового многогранника P^n . Поскольку $\gamma(I^n) = (1, 0, \dots, 0)$, последнее неравенство, в частности, дает дополнительные аргументы в поддержку гипотезы Гала для простых флаговых многогранников (см. лемму 2.4).

Рис. 3

На рис. 3 показаны взаимосвязи условий для простого n -многогранника P^n . Заметим, что ни одну стрелку нельзя обратить. Более того, условие отсутствия симплекса Δ^2 среди двумерных граней P^n и условие $\gamma_i(P^n) \geq \gamma_i(I^n)$ не обеспечивают условие флаговости.

Список литературы

1. V. M. Buchstaber, N. Ray, “An invitation to toric topology: vertex four of a remarkable tetrahedron”, *Toric topology* (Osaka, Japan, 2006), *Contemp. Math.*, **460**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 1–27.
2. В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*, МЦНМО, М., 2004; пер. с англ.: V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, Univ. Lecture Ser., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
3. D. W. Barnette, “The minimum number of vertices of a simple polytope”, *Israel J. Math.*, **10**:1 (1971), 121–125.
4. D. Barnette, “A proof of the lower bound conjecture for convex polytopes”, *Pacific J. Math.*, **46**:2 (1973), 349–354.
5. P. McMullen, “The maximum numbers of faces of a convex polytope”, *Mathematika*, **17**:2 (1970), 179–184.
6. L. J. Billera, C. W. Lee, “A proof of the sufficiency of McMullen’s conditions for f -vectors of simplicial convex polytopes”, *J. Combin. Theory Ser. A*, **31**:3 (1981), 237–255.
7. R. P. Stanley, “The number of faces of a simplicial convex polytope”, *Adv. in Math.*, **35**:3 (1980), 236–238.
8. P. McMullen, “The numbers of faces of simplicial polytopes”, *Israel J. Math.*, **9**:4 (1971), 559–570.
9. P. McMullen, “On simple polytopes”, *Invent. Math.*, **113**:1 (1993), 419–444.
10. P. McMullen, “Weights on polytopes”, *Discrete Comput. Geom.*, **15**:4 (1996), 363–388.
11. В. А. Тиморин, “Аналог соотношений Ходжа–Римана для простых выпуклых многогранников”, *УМН*, **54**:2 (1999), 113–162; англ. пер.: V. A. Timorin, “An analogue of the Hodge–Riemann relations for simple convex polytopes”, *Russian Math. Surveys*, **54**:2 (1999), 381–426.
12. G. M. Ziegler, “Face numbers of 4-polytopes and 3-spheres”, *Proceedings of the international congress of mathematicians. III: Invited lectures* (Beijing, China, 2002), Higher Education Press, Beijing, 2002, 625–634.

13. E. M. Feichtner, B. Sturmfels, “Matroid polytopes, nested sets and Bergman fans”, *Port. Math. (N.S.)*, **62**:4 (2005), 437–468.
14. A. Postnikov, “Permutohedra, associahedra, and beyond”, *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2009, № 6, 1026–1106.
15. A. Postnikov, V. Reiner, L. Williams, “Faces of generalized permutohedra”, *Doc. Math.*, **13** (2008), 207–273.
16. C. De Concini, C. Procesi, “Wonderful models of subspace arrangements”, *Selecta Math. (N.S.)*, **1**:3 (1995), 459–494.
17. W. Fulton, R. MacPherson, “A compactification of configuration spaces”, *Ann. of Math. (2)*, **139**:1 (1994), 183–225.
18. E. M. Feichtner, D. Kozlov, “Incidence combinatorics of resolutions”, *Selecta Math. (N.S.)*, **10**:1 (2004), 37–60.
19. В. И. Данилов, “Геометрия торических многообразий”, *УМН*, **33**:2 (1978), 85–134; англ. пер.: V. I. Danilov, “The geometry of toric varieties”, *Russian Math. Surveys*, **33**:2 (1978), 97–154.
20. T. Delzant, “Hamiltoniens périodiques et images convexes de l’application moment”, *Bull. Soc. Math. France*, **116**:3 (1988), 315–339.
21. A. Cannas da Silva, *Lectures on symplectic geometry*, Lecture Notes in Math., **1764**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
22. M. Carr, S. L. Devadoss, “Coxeter complexes and graph-associahedra”, *Topology Appl.*, **153**:12 (2006), 2155–2168.
23. M. Markl, S. Shnider, J. Stasheff, *Operads in algebra, topology and physics*, Math. Surveys Monogr., **96**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
24. R. Charney, M. Davis, “The Euler characteristic of a nonpositively curved, piecewise Euclidean manifold”, *Pacific J. Math.*, **171**:1 (1995), 117–137.
25. S. R. Gal, “Real root conjecture fails for five- and higher-dimensional spheres”, *Discrete Comput. Geom.*, **34**:2 (2005), 269–284.
26. Н. Ю. Ероховец, “Гипотеза Гала для нестоэдров, отвечающих полным двудольным графам”, *Геометрия, топология и математическая физика. II*, Тр. МИАН, **266**, МАИК, М., 2009, 127–139; англ. пер.: N. Yu. Erokhovets, “Gal’s conjecture for nestohedra corresponding to complete bipartite graphs”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **266** (2009), 120–132.
27. A. G. Fenn, *Generating functions of nestohedra and applications*, arXiv: abs/0908.0605.
28. В. М. Бухштабер, “Кольцо простых многогранников и дифференциальные уравнения”, *Геометрия, топология и математическая физика. I*, Тр. МИАН, **263**, МАИК, М., 2008, 18–43; англ. пер.: V. M. Buchstaber, “Ring of simple polytopes and differential equations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **263** (2008), 13–37.
29. V. M. Buchstaber, “Lectures on toric topology”, *Trends in Mathematics*, **11**:1 (2008), 1–55.
30. F. Chapoton, S. Fomin, A. Zelevinsky, “Polytopal realizations of generalized associahedra”, *Canad. Math. Bull.*, **45**:4 (2002), 537–566.
31. C. Ceballos, G. M. Ziegler, *Three non-equivalent realizations of the associahedron*, arXiv: abs/1006.3487v1.
32. S. L. Devadoss, “A realization of graph associahedra”, *Discrete Math.*, **309**:1 (2009), 271–276.
33. I. M. Gel’fand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Math. Theory Appl., Birkhäuser, Boston, MA, 1994.
34. C. Hohlweg, C. E. M. C. Lange, “Realizations of the associahedron and cyclohedron”, *Discrete Comput. Geom.*, **37**:4 (2007), 517–543.
35. J.-L. Loday, “Realization of the Stasheff polytope”, *Arch. Math. (Basel)*, **83**:3 (2004), 267–278.

- 36. G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Grad. Texts in Math., **152**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- 37. A. Zelevinsky, “Nested complexes and their polyhedral realizations”, *Pure Appl. Math. Q.*, **2**:3 (2006), 655–671.
- 38. W. B. R. Lickorish, “Simplicial moves on complexes and manifolds”, *Proceedings of the Kirbyfest* (Berkeley, CA, USA, 1998), Geom. Topol. Monogr., **2**, Geom. Topol. Publ., Coventry, 1999, 299–320.
- 39. E. M. Feichtner, I. Müller, “On the topology of nested set complexes”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133**:4 (2005), 999–1006.
- 40. В. Н. Сачков, *Введение в комбинаторные методы дискретной математики*, МЦНМО, М., 2004.
- 41. G. Blind, R. Blind, “Convex polytopes without triangular faces”, *Israel J. Math.*, **71**:2 (1990), 129–134.
- 42. G. Blind, R. Blind, “Triangle-free polytopes with few facets”, *Arch. Math. (Basel)*, **58**:6 (1992), 599–605.

В. М. БУХШТАБЕР (V. M. BUCHSTABER)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: buchstab@mi.ras.ru

Поступило в редакцию
17.08.2010
09.03.2011

В. Д. ВОЛОДИН (V. D. VOLODIN)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: volodinvadim@gmail.com