Общероссийский математический портал

Р. Р. Гонцов, Уточненные неравенства Фукса для систем линейных дифференциальных уравнений, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 2, 39–52

DOI: <https://doi.org/10.4213/im474>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:24:22

УДК 517.531.57

Р. Р. Гонцов

Уточненные неравенства Фукса для систем линейных дифференциальных уравнений

Уточняются полученные Э. Корелем неравенства Фукса для системы линейных мероморфных дифференциальных уравнений, заданной на сфере Римана. Неравенства Фукса позволяют оценивать сумму показателей системы по всем ее особым точкам. Уточнение известных неравенств достигается за счет рассмотрения жордановой структуры старшего коэффициента ряда Лорана для матрицы правой части системы в окрестности ее особой точки.

Библиография: 7 наименований.

Введение

Рассмотрим систему вида

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y, \quad B(z) = \frac{B_{-r-1}}{z^{r+1}} + \dots + \frac{B_{-1}}{z} + B_0 + \dots, \quad B_{-r-1} \neq 0, \quad (1)$$

из p линейных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки 0 комплексной плоскости (число r называется *рангом Пуанкаре* системы в особой точке 0).

Особая точка 0 называется *регулярной*, если любое решение системы имеет не более чем степенной рост, когда аргумент z стремится к нулю, оставаясь внутри секторов с вершиной в нуле и раствора меньше 2π . В противном случае особая точка называется *иррегулярной*.

Если особая точка регулярна, то в пространстве решений существует базис (называемый *левелевским*), элементы которого образуют фундаментальную матрицу $Y(z)$ системы, представимую в виде

$$Y(z) = U(z)z^A z^E, \quad (2)$$

где матрица $U(z)$ голоморфна в нуле (голоморфно обратима тогда и только тогда, когда система фуксова в нуле, т.е. когда $r = 0$), $A = \text{diag}(\varphi^1, \dots, \varphi^p)$ – целочисленная матрица нормирований с условием $\varphi^1 \geq \dots \geq \varphi^p$, $E = \frac{1}{2\pi i} \ln G$, G – верхнетреугольная матрица монодромии системы в нуле и собственные значения ρ^j матрицы E удовлетворяют условию

$$0 \leq \text{Re } \rho^j < 1, \quad j = 1, \dots, p \quad (3)$$

Работа выполнена при поддержке гранта Минпромнауки (№ НШ-457.2003.01).

(подробнее описание нормирований, монодромии и левелевского базиса см. в [3]). Собственные значения $\beta^j = \varphi^j + \rho^j$ матрицы $A + E$ называются *левелевскими показателями* системы в нуле и характеризуют скорость роста решений в регулярной особой точке.

Случай иррегулярной особой точки сложнее, и подобное разложение справедливо для формальной фундаментальной матрицы $\hat{Y}(z)$ системы (см. [2]):

$$\hat{Y}(z) = \hat{H}(z) G(z),$$

где $\hat{H}(z)$ – обратимый формальный ряд Лорана в нуле с конечной главной частью и матрица $G(z)$ имеет вид

$$G(z) = z^J U e^{\Theta(z)}.$$

При этом матрицы, входящие в разложение $G(z)$, представляются одновременно в виде прямой суммы блоков (обозначаемых теми же буквами) и каждый блок имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta(z) &= \text{diag}(q(z)I_m, q(ze^{2\pi i})I_m, \dots, q(ze^{2\pi i(s-1)})I_m), \\ U &= [\varepsilon^{(j-1)(k-1)}I_m], \quad 1 \leq j, k \leq s, \quad \varepsilon = e^{2\pi i/s}, \\ J &= \text{diag}\left(J_m, J_m + \frac{1}{s}I_m, \dots, J_m + \frac{s-1}{s}I_m\right), \end{aligned}$$

где $q(z) = \tilde{q}(z^{-1/s})$, $\tilde{q}(z)$ – многочлен без свободного члена степени не больше rs , s – наименьшее натуральное число, для которого q может быть представлен в таком виде, I_m – единичная матрица размера m и J_m – матрица размера m в жордановой форме, ее собственные значения λ^j удовлетворяют условию

$$0 \leq \text{Re } \lambda^j < \frac{1}{s}, \quad j = 1, \dots, m.$$

Тогда для переменной $t = z^{1/s}$ (с наименьшим натуральным s , для которого $\Theta(t^s)$ не содержит дробных степеней t) формальная фундаментальная матрица системы может быть представлена в виде

$$\hat{Y}(t) = \hat{F}(t) t^\Lambda e^{Q(t)}, \quad (4)$$

где $\hat{F}(t)$ – обратимый формальный ряд Лорана в нуле, $Q(t) = \text{diag}(q_1(1/t)I_{l_1}, \dots, q_l(1/t)I_{l_l})$, q_i – многочлен без свободного члена степени не больше rs , I_{l_i} – единичная матрица размера m_i , $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_l)$, Λ_i – блок размера m_i в жордановой форме.

Хотя разложение (4) описывает формальное решение, тем не менее, для любого сектора S (в плоскости переменной t) с вершиной в нуле и раствора меньше $\pi/(rs)$ найдется настоящее решение Y_S такое, что формальный ряд $\hat{F}(t)$ является асимптотическим в S для функции $Y_S(t)e^{-Q(t)}t^{-\Lambda}$ (т.е. тейлоровская часть $\hat{F}(t)$ является асимптотическим рядом в S для разности $Y_S(t)e^{-Q(t)}t^{-\Lambda}$ и главной части $\hat{F}(t)$).

Далее, для каждого $i = 1, \dots, l$ рассмотрим пространство $\widehat{X}_i$, порожденное столбцами матрицы $\widehat{F}(t)t^{\Lambda_i}$. В каждом из пространств $\widehat{X}_i$ по аналогии с регулярным случаем определяются понятия формальной монодромии и формальных показателей. Выделим в каждом $\widehat{X}_i$ формальный левелевский базис и обозначим через C_i матрицу перехода к этому базису. Матрица $C = \text{diag}(C_1, \dots, C_l)$ коммутирует с $Q(t)$. Поэтому, умножив разложение (4) справа на C , получим формальную фундаментальную матрицу системы, представимую в окрестности точки 0 плоскости переменной t в виде

$$\widehat{Y}(t) = \widehat{U}(t) t^{\widehat{A}} t^{\widehat{E}} e^{Q(t)}, \quad (5)$$

где $Q(t) = \text{diag}(q_1(1/t)I_1, \dots, q_l(1/t)I_l)$ – такая же, как в (4), $\widehat{U}(t)$ – формальный ряд Тейлора в нуле, $\widehat{A} = \text{diag}(\varphi^1, \dots, \varphi^p)$ – целочисленная матрица формальных нормирований, $\widehat{E} = \frac{1}{2\pi i} \ln \widehat{G}$, $\widehat{G}$ – верхнетреугольная матрица формальной монодромии (блочного-диагонального вида в соответствии с $Q(t)$), матрица $t^{\widehat{A}} \widehat{E} t^{-\widehat{A}}$ голоморфна в нуле и собственные значения ρ^j матрицы $\widehat{E}$ удовлетворяют условию (3).

Собственные значения $\beta^j = \varphi^j/s + \rho^j/s$ матрицы $\widehat{A}/s + \widehat{E}/s$ называются *формальными показателями* системы в нуле (в плоскости переменной z). Если два формальных решения имеют одинаковую экспоненциальную часть в иррегулярной особой точке, то показатели позволяют различать эти решения по степенному росту.

Если система линейных мероморфных дифференциальных уравнений задана на всей сфере Римана, то возникает вопрос об оценке суммы показателей

$$\Sigma = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \beta_i^j$$

по всем особым точкам (здесь $\beta_i^1, \dots, \beta_i^p$ – показатели системы в особой точке a_i). Эти оценки называются *неравенствами Фукса* и используются при исследовании некоторых вопросов из области аналитической теории дифференциальных уравнений (например, при нахождении кратностей нулей компонент решений системы с особыми точками; см. [4]). До недавнего времени было известно лишь то, что сумма показателей системы с регулярными особыми точками является целым числом, не превосходящим нуль (см. [3]), пока Э. Корелем [5], [6] не были получены следующие оценки для порядков функций $\det U(z)$ и $\det \widehat{U}(t)$ в особой точке (из разложений (2) и (5) соответственно):

$$\begin{aligned} r &\leq \text{ord}_0 \det U(z) \leq \frac{p(p-1)}{2} r, \\ rs - i_K(t) &\leq \text{ord}_0 \det \widehat{U}(t) \leq \frac{p(p-1)}{2} rs - \frac{1}{2} \text{Irr}_M(t), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$i_K(t) = \max_{1 \leq i \leq l} \deg q_i, \quad \text{Irr}_M(t) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq l} m_i m_j \deg(q_i - q_j)$$

– соответственно индексы Катца и Мальгранжа иррегулярной особенности системы в точке 0 плоскости переменной t . Индексы Катца и Мальгранжа иррегулярной особенности в точке $z = 0$ определяются как $i_K = i_K(t)/s$ и $\text{Irr}_M = \text{Irr}_M(t)/s$. Из оценок (6) следуют неравенства Фукса:

$$-\frac{p(p-1)}{2}R + \frac{1}{2}\text{IRR}_M \leq \Sigma \leq -R + I_K,$$

где R – сумма рангов Пуанкаре системы по всем особым точкам, а I_K и IRR_M – суммы по всем особым точкам индексов Катца и Мальгранжа соответственно.

В настоящей работе оценим порядки функций $\det U(z)$ и $\det \hat{U}(t)$ в нуле, принимая во внимание структуру жордановой формы матрицы B_{-r-1} , и получим уточненные неравенства Фукса (утверждение 5).

§ 1. Случай регулярной особой точки

Пусть нуль – регулярная особая точка системы (1) ранга Пуанкаре $r > 0$. С учетом ранга матрицы B_{-r-1} оценим порядок в этой точке функции $\det U(z)$ из разложения (2). Для оценки (как в регулярном, так и в иррегулярном случаях) будет использована следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Для любой голоморфной в окрестности нуля матрицы $U(z)$ существуют верхнетреугольный матричный многочлен $P(z)$ и голоморфно обратимая в окрестности нуля матрица $V(z)$ такие, что*

$$U(z) = V(z)P(z).$$

Если $U(z)$ – формальный ряд Тейлора в нуле, то утверждение леммы остается справедливым после замены голоморфно обратимой матрицы $V(z)$ на обратимый формальный ряд Тейлора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\det U(0) \neq 0$, то достаточно положить $V(z) = U(z)$ и $P(z) = I$. Если же $\text{ord}_0 \det U(z) = l > 0$, то $\det U(0) = 0$ и существует невырожденная верхнетреугольная матрица S_1 такая, что столбец с номером i матрицы $U(0)S_1$ равен нулю для некоторого i . Следовательно,

$$U(z)S_1 = U_1(z)z^{K_1},$$

где K_1 – матрица, у которой все элементы равны нулю, кроме элемента с индексом (i, i) , который равен единице; $U_1(z)$ – голоморфная в окрестности нуля матрица и $\text{ord}_0 \det U_1(z) = l - 1$. Поэтому

$$U(z) = U_1(z)z^{K_1}S_1^{-1} = U_1(z)P_1(z),$$

где $P_1(z) = z^{K_1}S_1^{-1}$ – верхнетреугольный многочлен. Повторяя аналогичные рассуждения для матрицы $U_1(z)$, получим разложение

$$U_1(z) = U_2(z)P_2(z),$$

где $P_2(z)$ – верхнетреугольный многочлен, $U_2(z)$ – голоморфная в окрестности нуля матрица и $\text{ord}_0 \det U_2(z) = l - 2$. Окончательно, после l шагов данной процедуры, будем иметь

$$U(z) = U_l(z)P_l(z) \dots P_1(z) = V(z)P(z),$$

где $V(z) = U_l(z)$ – голоморфно обратимая в окрестности нуля матрица, $P(z) = P_l(z) \dots P_1(z)$ – верхнетреугольный многочлен.

Из леммы 1 сразу же следует, что разложение (2) упрощается:

$$Y(z) = V(z)P(z)z^A z^E$$

(матрицы $V(z)$ и $P(z)$ – такие, как в лемме 1), и нам нужно оценить порядок функции $\det P(z)$ в нуле.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При голоморфно обратимом в окрестности нуля преобразовании $y = V(z)y'$ система (1) переходит в систему с матрицей коэффициентов

$$V^{-1}(z)B(z)V(z) - V^{-1}(z) \frac{dV(z)}{dz}. \quad (7)$$

Следовательно, при таком преобразовании ранг Пуанкаре не меняется, а место старшего коэффициента – матрицы B_{-r-1} – занимает матрица $V^{-1}(0)B_{-r-1}V(0)$, т. е. ранг старшего коэффициента также не меняется.

Ввиду этого замечания можно считать, что фундаментальная матрица имеет вид

$$Y(z) = P(z)z^A z^E, \quad (8)$$

и тогда матрица $B(z)$ коэффициентов системы (1) верхнетреугольна.

Более того, оказывается, что матрицы $B_{-r-1}, \dots, B_{-2}$ в ряде Лорана для $B(z)$ нильпотентны. Действительно,

$$B(z) = \frac{dY}{dz} Y^{-1} = \frac{dP}{dz} P^{-1} + P \frac{A}{z} P^{-1} + P z^A \frac{E}{z} z^{-A} P^{-1},$$

а так как $P(z)$ – верхнетреугольный многочлен, то диагональные элементы матрицы $\frac{dP}{dz} P^{-1}$ имеют в нуле не более чем простой полюс. Диагональные элементы остальных слагаемых также имеют полюс первого порядка в нуле, а следовательно, это справедливо и для диагональных элементов матрицы $B(z)$.

Рассмотрим преобразование вида $\tilde{y} = z^C y$ с целочисленной матрицей $C = \text{diag}(c_1, \dots, c_p)$ такой, что $c_1 > \dots > c_p \geq 0$. Вследствие (7) это преобразование переводит систему (1) в систему с матрицей коэффициентов

$$z^C B(z) z^{-C} + \frac{C}{z}.$$

Элементы первого слагаемого этой суммы имеют вид $b_{ij}(z) z^{c_i - c_j}$ ($b_{ij}(z)$ – элементы матрицы $B(z)$). Поскольку матрица $B(z)$ верхнетреугольна и ее диагональные элементы имеют простой полюс в нуле, то данное преобразование понижает

ранг Пуанкаре системы. Если разность соседних диагональных элементов матрицы C равна r , то ранг Пуанкаре понижается до нуля. Однако те элементы матрицы $B(z)$, которые имеют полюс порядка r в нуле, достаточно умножить на z^{r-1} (соответствующие им элементы матрицы B_{-r-1} равны нулю).

Пусть $\text{rank } B_{-r-1} = p - k$, $1 \leq k < p$. Положим

$$C = \text{diag}((p-1)r, (p-2)r, \dots, r, 0) + \text{diag}(0, \dots, k-1),$$

где i -й диагональный элемент во втором слагаемом равен числу

$$i - 1 - \text{rank} \langle \mathbf{b}_{-r-1}^1, \dots, \mathbf{b}_{-r-1}^i \rangle, \quad i = 1, \dots, p$$

($\mathbf{b}_{-r-1}^j$ — j -й столбец матрицы B_{-r-1}). Другими словами, диагональ второго слагаемого в матрице C начинается с нуля, и, далее, элемент с номером i на единицу больше предыдущего только в том случае, если присоединение столбца $\mathbf{b}_{-r-1}^i$ не увеличивает ранг системы векторов $\mathbf{b}_{-r-1}^1, \dots, \mathbf{b}_{-r-1}^{i-1}$. Если для некоторых $i < j$ выполнено равенство

$$c_i - c_j = (j - i)r - (j - i) \geq r - 1,$$

то это означает, что присоединение столбцов $\mathbf{b}_{-r-1}^{i+1}, \dots, \mathbf{b}_{-r-1}^j$ не увеличивает ранг системы векторов $\mathbf{b}_{-r-1}^1, \dots, \mathbf{b}_{-r-1}^i$, т.е. элемент с индексом (i, j) матрицы B_{-r-1} равен нулю (вследствие верхнетреугольности и нильпотентности этой матрицы), и функция $b_{ij}(z)z^{c_i-c_j}$ имеет простой полюс в нуле. В остальных случаях

$$c_i - c_j \geq (j - i)r - (j - i) + 1 \geq r$$

и соответствующие функции $b_{ij}(z)z^{c_i-c_j}$ так же имеют простой полюс в нуле.

Таким образом, преобразование $\tilde{y} = z^C y$ переводит исходную систему (1) в фуксову систему с некоторой фундаментальной матрицей $\tilde{Y} = \tilde{U} z^{\tilde{A}} z^E$ такой, что матрица $\tilde{U}(z)$ голоморфно обратима в нуле (так как получившаяся система фуксова), $\tilde{A}$ — матрица нормирований этой системы и матрица $z^{\tilde{A}} E z^{-\tilde{A}}$ голоморфна в нуле. Тогда

$$Y(z) = z^{-C} \tilde{U} z^{\tilde{A}} z^E.$$

Сравнивая это разложение с разложением (8) для матрицы $Y(z)$ и приравнивая порядки определителей в нуле, получим соотношение

$$\text{tr } A + \text{ord}_0 \det P(z) = -\text{tr } C + \text{tr } \tilde{A},$$

поэтому

$$\text{ord}_0 \det P(z) = \text{tr } \tilde{A} - \text{tr } A - \text{tr } C.$$

И теперь, чтобы выяснить, как связаны между собой $\text{tr } A$ и $\text{tr } \tilde{A}$, воспользуемся следующей леммой (доказательство см. в [3]).

ЛЕММА 2. Пусть фундаментальная матрица $Y(z)$ системы (1) с регулярной особенностью в нуле имеет вид

$$Y(z) = U(z) z^L z^E,$$

где матрица $U(z)$ голоморфна в нуле, L – диагональная целочисленная матрица, E – верхнетреугольная матрица, собственные значения которой удовлетворяют условию (3).

Если матрица $z^L E z^{-L}$ голоморфна в нуле, то след матрицы L не превосходит суммы нормирований столбцов матрицы $Y(z)$ в нуле.

Применим эту лемму к системе с фундаментальной матрицей

$$Y' = z^{(p-1)r} Y = z^{(p-1)rI-C} \tilde{U} z^{\tilde{A}} z^E$$

и матрицей нормирований $A + (p-1)rI$. Поскольку матрицы $z^{(p-1)rI-C} \tilde{U}$ и $z^{\tilde{A}} E z^{-\tilde{A}}$ голоморфны в нуле, то

$$\operatorname{tr} \tilde{A} \leq \operatorname{tr} A + p(p-1)r,$$

т. е.

$$\operatorname{ord}_0 \det P(z) = \operatorname{tr} \tilde{A} - \operatorname{tr} A - \operatorname{tr} C \leq p(p-1)r - \operatorname{tr} C.$$

Так как $\operatorname{tr} C \geq p(p-1)r/2 + k(k-1)/2$, то окончательно получаем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для порядка функции $\det U(z)$ в нуле из разложения (2) фундаментальной матрицы системы вида (1) с регулярной особой точкой 0 ранга Пуанкаре $r > 0$ справедливо неравенство

$$\operatorname{ord}_0 \det U(z) \leq \frac{p(p-1)}{2} r - \frac{k(k-1)}{2},$$

где $k = p - \operatorname{rank} B_{-r-1}$.

Для получения нижней оценки воспользуемся леммой Соважа из [7], согласно которой для всякой голоморфной в окрестности нуля матрицы $U(z)$ найдется голоморфно обратимая в окрестности нуля матрица $\Gamma(z)$ такая, что

$$\Gamma(z)U(z) = z^D V(z),$$

где $D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_p)$ – диагональная целочисленная матрица с условием $d_1 \geq \dots \geq d_p \geq 0$ и матрица $V(z)$ голоморфно обратима в окрестности нуля. Ввиду замечания 1 преобразование $y' = \Gamma(z)y$ не меняет ни ранг Пуанкаре системы, ни ранг старшего коэффициента – матрицы B_{-r-1} , поэтому можно считать, что фундаментальная матрица $Y(z)$ системы (1) имеет вид

$$Y(z) = z^D V(z) z^A z^E.$$

Тогда для матрицы коэффициентов $B(z)$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} B(z) &= \frac{B_{-r-1}}{z^{r+1}} + \dots = \frac{dY}{dz} Y^{-1} \\ &= \frac{D}{z} + z^D \left(\frac{dV}{dz} V^{-1} + V \left(\frac{A}{z} + z^A \frac{E}{z} z^{-A} \right) V^{-1} \right) z^{-D} \\ &= \frac{D}{z} + z^D \frac{B_0(z)}{z} z^{-D}, \end{aligned}$$

где $B_0(z)$ – голоморфная в окрестности нуля матрица. Из этой формулы следует, что полюс порядка $r + 1$ в нуле могут иметь только те элементы матрицы $B(z)$, которые расположены ниже главной диагонали, т. е. B_{-r-1} – нижнетреугольная нильпотентная матрица. Обозначим ее элементы через b_{ij} . Если $b_{ij} \neq 0$ для некоторых $i > j$, то $d_i - d_j \leq -r$ и $d_j \geq r$. Так как существует по меньшей мере $\text{rank } B_{-r-1}$ ненулевых столбцов матрицы B_{-r-1} , то существует и $\text{rank } B_{-r-1}$ ненулевых элементов b_{ij} (при $i > j$), расположенных в разных столбцах. Следовательно, по меньшей мере для $\text{rank } B_{-r-1}$ чисел d_j справедлива оценка $d_j \geq r$, и тогда $\text{tr } D \geq \text{rank } B_{-r-1} r$. Поскольку $\text{ord}_0 \det U(z) = \text{tr } D$ (матрицы $\Gamma(z)$ и $V(z)$ голоморфно обратимы в нуле), то получаем следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для порядка функции $\det U(z)$ в нуле из разложения (2) фундаментальной матрицы системы вида (1) с регулярной особой точкой 0 ранга Пуанкаре $r > 0$ справедливо неравенство

$$\text{ord}_0 \det U(z) \geq \text{rank } B_{-r-1} r.$$

§ 2. Случай иррегулярной особой точки

Пусть теперь нуль – иррегулярная особая точка системы (1) и собственные значения матрицы B_{-r-1} суть $\lambda^1, \dots, \lambda^h$.

Сформулируем следующее утверждение о порядке формального ряда Тейлора $\det \hat{U}(t)$ в нуле из разложения (5) формальной фундаментальной матрицы системы.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для величины $\text{ord}_0 \det \hat{U}(t)$ справедлива следующая оценка:

$$\text{ord}_0 \det \hat{U}(t) \leq \frac{p(p-1)}{2} rs - \frac{1}{2} \text{Irr}_M(t) - \sum_{j=1}^h \frac{k_j(k_j-1)}{2} s, \quad (9)$$

где $k_j = \dim \ker(B_{-r-1} - \lambda^j I)$, $j = 1, \dots, h$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по p – размеру системы.

В случае $p = 1$ неравенство преобразуется в равенство нулю, что верно. Действительно, тогда все коэффициенты B_i – числа и фундаментальное решение записывается в виде

$$y(z) = e^{-B_{-r-1}/(rz^r) - \dots - B_{-2}/z} z^{B_{-1}} e^{B_0 z + \dots} = u(z) z^{B_{-1}} e^{Q(1/z)},$$

где Q – многочлен степени r , а $u(z)$ – голоморфно обратимая в окрестности нуля функция, т. е. $\text{ord}_0 u(z) = 0$.

Предположив, что утверждение справедливо для систем размера меньше p , докажем его для системы размера p . Возможны два варианта относительно матрицы B_{-r-1} :

- 1) матрица B_{-r-1} имеет по меньшей мере два различных собственных значения;
- 2) собственное значение λ – единственное собственное значение матрицы B_{-r-1} .

Рассмотрим эти случаи.

Случай 1). В этом случае существует постоянная невырожденная матрица S такая, что матрица $S^{-1}B_{-r-1}S$ является прямой суммой двух блоков размеров m и $p-m$ с различными собственными значениями (в количестве h_1 и $h-h_1$ соответственно), что позволяет воспользоваться следующей леммой (доказательство см. в [1]).

ЛЕММА 3 (о расщеплении). *Пусть старший коэффициент B_{-r-1} системы (1) имеет блочно-диагональный вид $B_{-r-1} = \text{diag}(B_{-r-1}^{11}, B_{-r-1}^{22})$ и блоки B_{-r-1}^{11} , B_{-r-1}^{22} не имеют общих собственных значений.*

Тогда существует обратимое формальное аналитическое преобразование $y = \hat{T}(z)y'$, $\hat{T}(0) = I$, переводящее систему (1) в систему с (вообще говоря, формальной) матрицей коэффициентов $B'(z) = \text{diag}(B^{11}(z), B^{22}(z))$ блочно-диагонального вида (в соответствии с B_{-r-1}).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Поскольку $\hat{T}(0) = I$, то преобразование $\hat{T}(z)$ не меняет ни старший коэффициент системы, ни порядок формального определителя матрицы $\hat{U}(t)$ из разложения (5).

Считаем, что матрица B_{-r-1} уже блочно-диагональна (этого можно добиться преобразованием $y = Sy'$). Применив лемму о расщеплении (и учитывая замечание 2), приведем систему (1) к блочно-диагональному виду с двумя блоками размеров m и $p-m$. Матрица $\hat{U}(t)$ из разложения (5) формальной фундаментальной матрицы получившейся системы имеет соответствующий блочно-диагональный вид

$$\hat{U}(t) = \text{diag}(\hat{U}_1(t), \hat{U}_2(t)).$$

Пусть формальные фундаментальные матрицы систем, отвечающих этим двум блокам, содержат соответственно l_1 и $l-l_1$ многочленов матрицы $Q(t)$ из разложения (5) (разным собственным значениям соответствуют разные многочлены). Применяя предположение индукции к этим системам размеров m и $p-m$, получим

$$\begin{aligned} \text{ord}_0 \det \hat{U}(t) &= \text{ord}_0 \det \hat{U}_1(t) + \text{ord}_0 \det \hat{U}_2(t) \\ &\leq \frac{m(m-1)}{2} rs - \frac{1}{2} \text{Irr}_M^1(t) - \sum_{j=1}^{h_1} \frac{k_j(k_j-1)}{2} s \\ &\quad + \frac{(p-m)(p-m-1)}{2} rs - \frac{1}{2} \text{Irr}_M^2(t) - \sum_{j=h_1+1}^h \frac{k_j(k_j-1)}{2} s. \end{aligned} \quad (10)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Irr}_M(t) - \frac{1}{2} \text{Irr}_M^1(t) - \frac{1}{2} \text{Irr}_M^2(t) &= \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{j=l_1+1}^l m_i m_j \deg(q_i - q_j) \\ &\leq \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{j=l_1+1}^l m_i m_j r s = m(p-m)rs \end{aligned}$$

(напомним, что m_i – кратность, с которой многочлен q_i входит в матрицу $Q(t)$, и степень многочлена q_i не превышает rs). Поскольку

$$\frac{m(m-1)}{2} rs + \frac{(p-m)(p-m-1)}{2} rs + m(p-m)rs = \frac{p(p-1)}{2} rs$$

и

$$\sum_{j=1}^{h_1} \frac{k_j(k_j-1)}{2} s + \sum_{j=h_1+1}^h \frac{k_j(k_j-1)}{2} s = \sum_{j=1}^h \frac{k_j(k_j-1)}{2} s,$$

то из соотношений (10) следует неравенство (9).

Случай 2). Вследствие леммы 1 (и замечания 1) можно считать систему верхнетреугольной и записанной в координате t :

$$\frac{dy}{dt} = B_0(t)y, \quad B_0(t) = st^{s-1}B(t^s) = s \left(\frac{B_{-r-1}}{t^{rs+1}} + \frac{B_{-r}t^s}{t^{rs+1}} + \dots \right). \quad (11)$$

В силу (7) скалярное преобразование $y = e^{q(t)}y'$ при $q(t) = (-\lambda/r)t^{-rs}$ переводит систему (11) в систему с матрицей коэффициентов

$$B'(t) = B_0(t) - \frac{dq}{dt}I = s \left(\frac{B_{-r-1} - \lambda I}{t^{rs+1}} + \frac{B_{-r}t^s}{t^{rs+1}} + \dots \right)$$

и не меняет индекса Мальгранжа. При этом $B_{-r-1} - \lambda I$ – верхнетреугольная нильпотентная матрица.

Пусть $\text{rank}(B_{-r-1} - \lambda I) = p - k$. По аналогии с регулярным случаем положим

$$C = \text{diag}((p-1)s, (p-2)s, \dots, s, 0) + \text{diag}(0, \dots, k-1)s,$$

где i -й диагональный элемент во втором слагаемом равен числу

$$s(i-1 - \text{rank}(\tilde{\mathbf{b}}_{-r-1}^1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_{-r-1}^i)), \quad i = 1, \dots, p$$

($\tilde{\mathbf{b}}_{-r-1}^j$ – j -й столбец матрицы $B_{-r-1} - \lambda I$).

Тогда замена $\tilde{y} = t^C y'$ переводит систему с матрицей коэффициентов $B'(t)$ в систему ранга Пуанкаре $rs - s$ в нуле (по тем же соображениям, что и в регулярном случае). Формальная фундаментальная матрица этой системы, соответствующая разложению (5), имеет вид

$$\tilde{Y}(t) = \tilde{U}(t) t^{\tilde{A}} t^{\tilde{E}} e^{Q(t) - q(t)I},$$

где $\tilde{U}(t)$ – формальный ряд Тейлора в нуле, $\tilde{A}$ – матрица формальных нормирований полученной системы и матрица $t^{\tilde{A}}\tilde{E}t^{-\tilde{A}}$ голоморфна в нуле. При этом вследствие известных оценок (6) имеем

$$\text{ord}_0 \det \tilde{U}(t) \leq \frac{p(p-1)}{2} (rs - s) - \frac{1}{2} \text{Irr}_M(t). \quad (12)$$

Формальная фундаментальная матрица $\hat{Y}'(t)$ помимо разложения

$$\hat{Y}'(t) = \hat{U}(t) t^{\hat{A}} t^{\hat{E}} e^{Q(t)-q(t)I}$$

представляется в виде

$$\hat{Y}'(t) = t^{-C} \tilde{U}(t) t^{\tilde{A}} t^{\tilde{E}} e^{Q(t)-q(t)I},$$

откуда следует соотношение

$$\text{ord}_0 \det \hat{U}(t) + \text{tr } \hat{A} = -\text{tr } C + \text{ord}_0 \det \tilde{U}(t) + \text{tr } \tilde{A}. \quad (13)$$

Применим лемму 2 (которая допускает естественное обобщение на иррегулярный случай) к системе с формальной фундаментальной матрицей

$$\hat{Y}''(t) = t^{(p-1)s} \hat{Y}'(t) = t^{(p-1)sI-C} \tilde{U}(t) t^{\tilde{A}} t^{\tilde{E}} e^{Q(t)-q(t)I}$$

и матрицей формальных нормирований $\hat{A} + (p-1)sI$. Матрица $t^{\tilde{A}}\tilde{E}t^{-\tilde{A}}$ голоморфна в нуле, а $t^{(p-1)sI-C} \tilde{U}(t)$ является формальным рядом Тейлора в нуле, поэтому

$$\text{tr } \tilde{A} \leq \text{tr } \hat{A} + p(p-1)s. \quad (14)$$

Поскольку $\text{tr } C \geq p(p-1)s/2 + k(k-1)s/2$, то окончательно из (13), с учетом неравенств (12) и (14), получаем

$$\begin{aligned} \text{ord}_0 \det \hat{U}(t) &= \text{ord}_0 \det \tilde{U}(t) + \text{tr } \tilde{A} - \text{tr } \hat{A} - \text{tr } C \\ &\leq \frac{p(p-1)}{2} (rs - s) - \frac{1}{2} \text{Irr}_M(t) + p(p-1)s - \frac{p(p-1)}{2} s - \frac{k(k-1)}{2} s \\ &= \frac{p(p-1)}{2} rs - \frac{1}{2} \text{Irr}_M(t) - \frac{k(k-1)}{2} s. \end{aligned}$$

Таким образом, доказательство утверждения 3 завершено.

Нижняя оценка для $\text{ord}_0 \det \hat{U}(t)$ в случае иррегулярной особой точки может быть получена аналогично тому, как это было получено в случае регулярной особенности.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Для порядка формального ряда $\det \hat{U}(t)$ в нуле из разложения (5) формальной фундаментальной матрицы системы вида (1) с иррегулярной особой точкой 0 ранга Пуанкаре $r > 0$ справедливо неравенство

$$\text{ord}_0 \det \hat{U}(t) \geq \text{rank } B_{-r-1}(rs - i_K(t)). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно показать, что функции $q_j(1/t)$, составляющие матрицу $Q(t)$ из разложения (5), имеют вид $q_j(1/t) = (-\lambda_i/(rs))t^{-rs} + \dots$ (λ_i – собственные значения матрицы B_{-r-1} , $i = i(j)$ сюръективно). Поэтому неравенство $i_K(t) < rs$ выполняется только в том случае, если матрица B_{-r-1} нильпотентна, в противном случае $i_K(t) = rs$ и доказываемая оценка (15) верна.

Итак, будем считать, что матрица B_{-r-1} нильпотентна, а формальная фундаментальная матрица $\hat{Y}(t)$ системы вследствие формального аналога леммы Соважа и замечания 1 имеет вид

$$\hat{Y}(t) = t^D \hat{V}(t) t^{\hat{A}} t^{\hat{E}} e^{Q(t)},$$

где $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_p)$ – целочисленная матрица, $d_1 \geq \dots \geq d_p \geq 0$, $\hat{V}(t)$ – обратимый в нуле формальный ряд Тейлора.

Для матрицы коэффициентов системы (в координате t) выполнено соотношение

$$\begin{aligned} st^{s-1}B(t^s) &= \frac{sB_{-r-1}}{t^{rs+1}} + \dots = \frac{d\hat{Y}}{dt} \hat{Y}^{-1} \\ &= \frac{D}{t} + t^D \left(\frac{d\hat{V}}{dt} \hat{V}^{-1} + \hat{V} \left(\frac{\hat{A}}{t} + t^{\hat{A}} \frac{\hat{E}}{t} t^{-\hat{A}} + \frac{dQ}{dt} \right) \hat{V}^{-1} \right) t^{-D} \\ &= \frac{D}{t} + t^D \frac{B_0(t)}{t^{i_K(t)+1}} t^{-D}, \end{aligned}$$

где $B_0(t)$ – голоморфная в окрестности нуля матрица.

Поскольку $i_K(t) + 1 < rs + 1$, то B_{-r-1} – нильпотентная нижнетреугольная матрица и неравенство (15) вытекает из тех же соображений, что и в регулярном случае (с той лишь разницей, что $B_0(t)$ делится не на t , а на $t^{i_K(t)+1}$).

§3. Неравенства Фукса

Рассмотрим теперь систему

$$\frac{dy}{dz} = B(z)y \tag{16}$$

из r линейных мероморфных дифференциальных уравнений, заданную на всей сфере Римана и имеющую особенности в точках $a_1, \dots, a_n$ и ранги Пуанкаре $r_1, \dots, r_n$ в этих точках соответственно. Разложение в ряд Лорана матрицы $B(z)$ в окрестности точки a_i имеет вид

$$B(z) = \frac{B_{-r_i-1}^i}{(z - a_i)^{r_i+1}} + \dots + \frac{B_{-1}^i}{z - a_i} + B_0^i + \dots, \quad B_{-r_i-1}^i \neq 0.$$

Для определенности будем считать, что особенности системы – иррегулярные и каждой точке a_i соответствует матрица $\hat{A}_i/s_i + \hat{E}_i/s_i$, собственные значения которой являются формальными показателями системы в этой точке (матрицы $\hat{A}_i$ и $\hat{E}_i$ взяты из разложения вида (5))

$$\hat{Y}_i(t) = \hat{U}_i(t) t^{\hat{A}_i} t^{\hat{E}_i} e^{Q_i(t)}$$

некоторой формальной фундаментальной матрицы $\widehat{Y}_i(t)$ системы в окрестности точки 0 плоскости переменной $t = (z - a_i)^{1/s_i}$; в случае регулярной особенности показателями будут классические показатели Левеля.

Формальная фундаментальная матрица $\widehat{Y}_i(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\widehat{Y}_i}{dt} = s_i t^{s_i-1} B(a_i + t^{s_i}) \widehat{Y}_i,$$

поэтому вследствие формулы Лиувилля для однозначной мероморфной формы $d \ln \det \widehat{Y}_i(t)$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} d \ln \det \widehat{Y}_i(t) &= \operatorname{tr} s_i t^{s_i-1} B(a_i + t^{s_i}) dt \\ &= \operatorname{tr} \left(\frac{s_i B_{-r_i-1}^i}{t^{r_i s_i + 1}} + \dots + \frac{s_i B_{-1}^i}{t} + s_i B_0^i t^{s_i-1} + \dots \right) dt, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\operatorname{res}_0 d \ln \det \widehat{Y}_i(t) = s_i \operatorname{tr} B_{-1}^i = s_i \operatorname{res}_{a_i} \operatorname{tr} B(z) dz.$$

Однако

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_0 d \ln \det \widehat{Y}_i(t) &= \operatorname{res}_0 d \ln \det \widehat{U}_i(t) + \operatorname{res}_0 d \ln t^{\operatorname{tr}(\widehat{A}_i + \widehat{E}_i)} \\ &= \operatorname{ord}_0 \det \widehat{U}_i(t) + \operatorname{tr}(\widehat{A}_i + \widehat{E}_i), \end{aligned}$$

поэтому

$$\operatorname{res}_{a_i} \operatorname{tr} B(z) dz = \frac{1}{s_i} \operatorname{ord}_0 \det \widehat{U}_i(t) + \operatorname{tr} \left(\frac{\widehat{A}_i}{s_i} + \frac{\widehat{E}_i}{s_i} \right).$$

Из теоремы о сумме вычетов, примененной к форме $\operatorname{tr} B(z) dz$, получаем соотношение для суммы $\Sigma = \sum_{i=1}^n \operatorname{tr}(\widehat{A}_i/s_i + \widehat{E}_i/s_i)$ показателей системы по всем особым точкам:

$$\Sigma = - \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i} \operatorname{ord}_0 \det \widehat{U}_i(t).$$

Пусть для каждого $i = 1, \dots, n$ собственные значения матрицы $B_{-r_i-1}^i$ суть $\lambda_i^1, \dots, \lambda_i^{h_i}$ и

$$k_{i,j} = \dim \ker (B_{-r_i-1}^i - \lambda_i^j I), \quad j = 1, \dots, h_i.$$

Обозначим через K_i сумму $\sum_{j=1}^{h_i} k_{i,j}(k_{i,j} - 1)/2$. Тогда из утверждений 3 и 4 вытекает следующая оценка.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. *Для суммы показателей Σ системы (16) справедливы неравенства*

$$-\frac{p(p-1)}{2} \sum_{i=1}^n r_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \operatorname{Irr}_{M,i} + \sum_{i=1}^n K_i \leq \Sigma \leq - \sum_{i=1}^n \operatorname{rank} B_{-r_i-1}^i (r_i - i_{K,i}), \quad (17)$$

где $\text{Irr}_{M,i}$ и $i_{K,i}$ — соответственно индексы Мальгранжа и Катца в особой точке a_i .

Таким образом, уточнение неравенств Фукса, полученных Э. Корелем, происходит за счет добавления к нижней оценке слагаемого $\sum_{i=1}^n K_i$ и умножения на $\text{rank } B_{-r_i-1}^i$ каждого слагаемого $-r_i + i_{K,i}$ из верхней оценки.

С учетом утверждений 1 и 2 неравенства (17) справедливы и для системы с регулярными особыми точками. При этом $\text{Irr}_{M,i} = i_{K,i} = 0$ для каждой особой точки (фундаментальная матрица не имеет экспоненциальную часть) и матрицы $B_{-r_i-1}^i$ нильпотентны, т.е. $K_i = k_i(k_i - 1)/2$, где $k_i = p - \text{rank } B_{-r_i-1}^i$. Следовательно,

$$-\frac{p(p-1)}{2} \sum_{i=1}^n r_i + \sum_{i=1}^n K_i \leq \Sigma \leq - \sum_{i=1}^n \text{rank } B_{-r_i-1}^i r_i$$

для системы (16) с регулярными особенностями.

В завершение автор выражает особую благодарность А. А. Болибруху за ключевые советы по уточнению неравенств Фукса и помощь в написании работы, а также за предоставление аналитических методов, разработанных во время участия Андрея Андреевича в школе по асимптотическим рядам, проходившей несколько лет назад в Монреале.

Список литературы

1. Balser W. Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations. N.Y.: Springer-Verlag, 2000.
2. Balser W., Jurkat W.B., Lutz D.A. A general theory of invariants for meromorphic differential equations. I. Formal invariants // Funk. Evac. 1979. V. 22. P. 197–221.
3. Болибрух А. А. 21-я проблема Гильберта для линейных фуксовых систем // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1994. Т. 206.
4. Болибрух А. А. Кратности нулей компонент решений системы с регулярными особыми точками // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2002. Т. 236. С. 61–65.
5. Corel E. Inégalités de Fuchs pour les systèmes différentiels réguliers // C. R. Acad. Sci. Paris. 1999. V. 328. Sér. I. P. 983–986.
6. Corel E. Relations de Fuchs pour les systèmes différentiels irréguliers // C. R. Acad. Sci. Paris. 2001. V. 333. Sér. I. P. 297–300.
7. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Поступило в редакцию
11.09.2003