Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Я. Казарновский, “Многогранники Ньютона” обобщенных функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 2, 53–70

DOI: <https://doi.org/10.4213/im475>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:02:49

УДК 512.7+514.172

Б. Я. Казарновский

“Многогранники Ньютона” обобщенных функций

Показано, что усредненная асимптотическая плотность корней систем уравнений вида $f_i(x) = 0$, где $f_i(x)$ – преобразования Фурье обобщенных функций с фиксированными компактными носителями, выражается в терминах геометрии выпуклых оболочек носителей обобщенных функций как их произведение в кольце выпуклых тел.

Библиография: 23 наименования.

§ 1. Введение

Плотность множества корней типичной системы экспоненциальных сумм (э.с.) вычисляется по их многогранникам Ньютона [2]–[5]. Как показано далее, эта плотность равна произведению многогранников Ньютона в некотором порожденном выпуклыми телами кольце. Экспоненциальная сумма – это функция на $\mathbb{C}^n$ вида

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda \exp\langle z, \lambda \rangle,$$

где $c_\lambda \in \mathbb{C}$, а Λ – конечное подмножество сопряженного пространства $\mathbb{C}^{n*}$, называемое *спектром экспоненциальной суммы*. Многогранник Ньютона э.с. – выпуклая оболочка ее спектра. Вопрос об описании плотности множества корней системы э.с. является продолжением вопроса о вычислении количества корней системы полиномов (замечание 1). Для систем э.с. получена формула асимптотической плотности, усредненной по множеству всех систем с фиксированными спектрами. Такое усреднение позволяет избежать трудностей, связанных с вырождением системы. Цель настоящей работы – вычислить усредненную асимптотическую плотность корней систем уравнений, составленных из функций, являющихся преобразованиями Фурье обобщенных функций с фиксированными компактными носителями. Оказывается, что в этом случае роль многогранников Ньютона берут на себя выпуклые оболочки носителей обобщенных функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если спектры системы n экспоненциальных сумм – подмножества целочисленной решетки подпространства $\operatorname{Re} \mathbb{C}^{n*}$, то множество корней системы – объединение конечного числа сдвигов n -мерной решетки $2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z}^n$, где $\mathbb{Z}^n$ – целочисленная решетка подпространства $\operatorname{Re} \mathbb{C}^n$. Такие э.с. являются прообразами полиномов Лорана на $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ при отображении $\exp: \mathbb{C}^n \rightarrow (\mathbb{C} \setminus 0)^n$.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов INTAS 00-259 и NWO 047.008.005, НШ-1972.2003.1.

Поэтому количество сдвинутых решеток равно количеству решений соответствующей системы полиномиальных уравнений, которое [1] равно смешанному объему многогранников Ньютона полиномов. Поэтому плотность множества корней такой системы э.с. (при подходящем определении плотности) равна смешанному объему многогранников Ньютона. Последнее остается верным для общих систем э.с. с вещественными спектрами. Случай произвольных (не обязательно вещественных) спектров рассматривался в [2] и [3].

Экспоненциальные суммы с чисто мнимыми (т.е. принадлежащими пространству $\text{Im } \mathbb{C}^{n*}$) спектрами – простейшие из функций экспоненциального роста. Они являются преобразованиями Фурье конечных линейных комбинаций дельта-функций. Будем далее называть *преобразованием Фурье* функции f и обозначать через $\hat{f}$ функцию $\hat{f}(\sqrt{-1}x)$, где $\hat{f}$ – обычное преобразование Фурье (точнее говоря, мы называем преобразованием Фурье целую функцию на $\mathbb{C}^n$, совпадающую с $\hat{f}$ на пространстве $\text{Re } \mathbb{C}^n$, т.е. аналитическое продолжение преобразования Фурье). Тогда преобразование Фурье линейной комбинации дельта-функций – это э.с. с вещественными спектрами. Согласно теореме Пэли–Винера функция экспоненциального роста с полиномиальным ростом по мнимым частям аргументов является преобразованием Фурье обобщенной функции с компактным носителем. Такая обобщенная функция определена однозначно, а выпуклая оболочка ее носителя выполняет роль многогранника Ньютона э.с. Отметим, что для произвольной функции экспоненциального роста невозможно подобным способом определить аналог многогранника Ньютона, – такая функция является преобразованием Фурье аналитического функционала, а носитель аналитического функционала однозначно не определен [20].

Рассмотрим при $1 \leq m \leq n$ системы $F = \{\tilde{\xi}_1 = \dots = \tilde{\xi}_m = 0\}$ функций на $\mathbb{C}^n$, составленные из преобразований Фурье обобщенных функций $\xi_1, \dots, \xi_m$ с носителями в фиксированных компактных подмножествах $K_1, \dots, K_m$ пространства вещественных частей $\text{Re } \mathbb{C}^{n*}$ сопряженного пространства $\mathbb{C}^{n*}$, и аналитические множества $X(F)$ корней этих систем. Предположим, что в пространстве обобщенных функций с носителями, принадлежащими K_i , выделено некоторое *регулярное подпространство* (см. определение 2). Систему уравнений, составленную из преобразований Фурье обобщенных функций, принадлежащих регулярным подпространствам, также назовем *регулярной*. Например, для любого компакта K пространства всех обобщенных функций и всех мер с носителями в K являются регулярными. В частности, регулярными являются пространство систем всех э.с. и пространство всех квазиполиномов (т.е. экспоненциальных сумм с полиномиальными коэффициентами) с фиксированными спектрами.

На пространстве регулярных систем естественным образом определено (см. п. 3.1) семейство связанных с некоторой шкалой пространств функций (подобно соболевской шкале) счетно-аддитивных гауссовских мер $\{\mu_S\}$, параметризованных наборами m вещественных чисел $S = \{s_1, \dots, s_m: s_i \geq 1\}$.

Рассмотрим аналитическое множество $X(F)$. Обозначим через X_S^m его усреднение по мере μ_S . Это усреднение является потоком, или, иначе говоря, дифференциальной формой с обобщенными коэффициентами на $\mathbb{C}^n$ бистепени (m, m) . Другими словами, интеграл финитной дифференциальной формы φ по аналитическому

множеству $X(F)$ – это функция на пространстве регулярных систем, а $X_S^m(\varphi)$ (по определению) – интеграл этой функции по мере μ_S . Назовем X_S^m *потоком усредненного распределения корней*. Для полных систем уравнений (при $m = n$) поток X_S^n является мерой. Значение этой меры на множестве $U \subset \mathbb{C}^n$ равно математическому ожиданию количества содержащихся в U корней случайной системы F .

В настоящей статье рассматривается асимптотика, или, иначе говоря, асимптотическая плотность, потока усредненного распределения корней X_S^m . Основным результатом состоит в том, что эта плотность не зависит от выбора меры μ_S и выражается в терминах геометрии выпуклых оболочек $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ компактов-носителей аналогично тому, как это происходит в случае экспоненциальных сумм с вещественными спектрами. Точнее говоря, при $\Phi^t: z \mapsto z/t$ верно, что:

- (i) в пространстве потоков существует предел $D^m = \lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi_*^t(X_S^m)/t^m)$;
- (ii) если H_i – опорная функция выпуклой оболочки Δ_i компакта-носителя K_i , то (об умножении потоков см. ниже замечание 2)

$$D^m = dd^c H_1 \wedge \dots \wedge dd^c H_m;$$

(iii) верна асимптотическая формула для математического ожидания числа содержащихся в области $tU + \text{Re } \mathbb{C}^n$ корней случайной относительно меры μ_S системы n уравнений:

$$X_S^n(tU + \text{Re } \mathbb{C}^n) = \frac{t^n S}{(2\pi)^n} n! V(\Delta_1, \dots, \Delta_n) + o(t^n),$$

где S – n -мерная площадь области $U \subset \text{Im } \mathbb{C}^n$, а $V(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ – n -мерный смешанный объем выпуклых оболочек компактов-носителей, или, иначе говоря,

$$D^n(U + \text{Re } \mathbb{C}^n) = \frac{S}{(2\pi)^n} n! V(\Delta_1, \dots, \Delta_n).$$

Напомним, что опорная функция $H_\Delta(z)$ ограниченного выпуклого тела $\Delta \subset \mathbb{C}^{n*}$ равна $\max_{w \in \Delta} \text{Re} \langle z, w \rangle$; H_Δ – выпуклая положительно однородная функция степени 1 (т.е. $H_\Delta(\lambda x) = \lambda H_\Delta(x)$ при $\lambda > 0$) на пространстве $\mathbb{C}^n$. Если $\Delta \subset \text{Re } \mathbb{C}^{n*}$, то

$$H_\Delta(x + \sqrt{-1}y) = H_\Delta(x).$$

Кольцо $\mathcal{D}$, порожденное 2-формами вида $dd^c H_\Delta$ (см. замечание 2) при Δ из множества выпуклых тел, расположенных в $\text{Re } \mathbb{C}^{n*}$, можно рассматривать как кольцо, порожденное выпуклыми телами пространства $\text{Re } \mathbb{C}^{n*}$. Для этого необходимо заданное с точностью до сдвига выпуклое тело Δ отождествить с 2-формой $dd^c H_\Delta$. Тогда сложению в кольце $\mathcal{D}$ соответствует сложение Минковского, т.е. сложение выпуклых тел по правилу

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}.$$

Переформулируя утверждение (ii), получаем, что $D^m = \Delta_1 \dots \Delta_m$, т.е. *асимптотическая плотность есть произведение выпуклых оболочек компактов-носителей*.

Можно проверить [16], что отображение $\Delta \rightarrow (dd^c H_\Delta)^k$ является валюацией, т. е. если $A, B, A \cup B$ – выпуклые тела в пространстве $\operatorname{Re} \mathbb{C}^{n*}$, то

$$(dd^c H_{A \cup B})^k = (dd^c H_A)^k + (dd^c H_B)^k - (dd^c H_{A \cap B})^k.$$

Отсюда сопоставление выпуклому телу $\Delta \subset \operatorname{Re} \mathbb{C}^{n*}$ потока $\exp(dd^c H_\Delta)$ задает отображение построенного в [10] кольца выпуклых тел в кольцо $\mathcal{D}$. Из результатов работ [11], [8] вытекает, что это отображение – изоморфизм колец (о других реализациях кольца выпуклых тел см. [8]–[13], о геометрических свойствах асимптотической плотности см. п. 3.4).

Для полных систем уравнений, т. е. при $m = n$, поток асимптотической плотности D^n является мерой. Эта мера сосредоточена на подпространстве $\operatorname{Im} \mathbb{C}^n$ и равна произведению n -мерной евклидовой меры на $\frac{n!}{(2\pi)^n} V(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$.

Если $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ – многогранники, то функции H_i кусочно линейны. В этом случае значение потока D^m на форме φ можно представить в виде интеграла формы φ по некоторому снабженному фиксированными плотностями $(2n - m)$ -мерному вееру конусов в $\mathbb{C}^n$, минимальный конус которого совпадает с $\operatorname{Im} \mathbb{C}^n$ (подобные объекты называются в [8] *с-веерами*). Интеграл формы φ по вееру – это, по определению, сумма интегралов по конусам старшей размерности форм $\varphi \wedge \omega_K$, где ω_K – плотность, приписанная $(2n - m)$ -мерному конусу K и представляющая собой нечетную внешнюю форму степени m на порожденном конусом $(2n - m)$ -мерном вещественном подпространстве $\mathbb{C}^n$. При $m = n$ такой веер состоит из единственного конуса $\operatorname{Im} \mathbb{C}^n$, снабженного описанной выше плотностью (эти вычисления см. в [8]).

При $z \in \mathbb{C}^n$, $\eta \in \mathbb{C}^{n*}$ оператор умножения на функцию $\exp\langle z, \eta \rangle$ определяет структуру бесконечномерного представления аддитивной группы $\mathbb{C}^n$ в пространстве обобщенных функций с носителями на компакте $K \subset \operatorname{Re} \mathbb{C}^{n*}$. Определенные выше системы можно рассматривать как системы матричных функций (т. е. линейных функционалов от операторов в пространстве представления, ограниченных на образ группы) таких представлений $\mathbb{C}^n$. Задачи о вычислении плотности распределения корней систем матричных функций конечномерных представлений других групп рассматривались в [7], [9], [18].

По сравнению со случаем э. с., основная трудность при выводе приведенных результатов связана с бесконечномерностью пространства систем уравнений. В конечномерном случае применяется некоторая формула (см. замечание 3), представляющая собой один из комплексных проективных вариантов интегрально-геометрической формулы Крофтона.

В § 2 приведены *бесконечномерная формула Крофтона* (теорема 1) и пример ее применения, в § 3 – построение мер μ_S , формулировка и доказательство теоремы об асимптотической плотности, в § 4 – доказательство бесконечномерной формулы Крофтона.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Корректность определения произведения форм вида $dd^c H$, где H – непрерывная выпуклая функция, основана на регуляризуемости комплексного оператора Монжа–Ампера (см., например, [6]). Известно, что $dd^c f_1 \wedge \dots \wedge dd^c f_k$ является корректно определенным потоком, если $f_1, \dots, f_k$ – непрерывные плюрисубгармонические (в частности, выпуклые) функции. Это означает,

что если последовательность наборов k гладких плюрисубгармонических функций сходится к $\{f_1, \dots, f_k\}$ локально равномерно, то соответствующая последовательность дифференциальных форм слабо сходится к не зависящему от выбора последовательности наборов потоку. Предельный поток, как известно, определен (как функционал) на финитных формах с непрерывными коэффициентами и принимает неотрицательные значения на положительных формах, т. е. является положительным потоком (см., например, [21]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3 [3]. Пусть $H_1, \dots, H_m$ – конечномерные эрмитовы пространства голоморфных функций на комплексном многообразии Y , $\mu_1, \dots, \mu_m$ – соответствующие выбранному эрмитовому метрикам гауссовские меры на этих пространствах, а $X(\varphi)$ – интеграл формы φ по аналитическому множеству корней системы уравнений $f_1 = \dots = f_m = 0$, $f_i \in H_i$, усредненный по мере $\mu_1 \oplus \dots \oplus \mu_m$ на пространстве всех таких систем (т. е. на пространстве $H_1 \oplus \dots \oplus H_m$). Тогда если в каждом из пространств H_i найдется функция, не равная нулю в любой заданной точке Y , то

$$X(\varphi) = \int_Y dd^c \log |\xi_1(y)|^2 \wedge \dots \wedge dd^c \log |\xi_m(y)|^2 \wedge \varphi,$$

где $\xi_i(y)$ – линейный функционал на H_i такой, что $\langle \xi_i(y), f \rangle = f(y)$.

Приведенное выше равенство является одним из вариантов *формулы Крофтона*.

§ 2. Формула Крофтона (формулировка и пример)

Все используемые ниже понятия и факты о мерах в бесконечномерных пространствах изложены в [15]. В настоящем параграфе содержатся формулировка (теорема 1) и простой пример применения бесконечномерного аналога утверждения, приведенного в замечании 3.

В гильбертовом пространстве H определена гауссовская мера. Напомним, что гауссовская мера подмножества X n -мерного комплексного гильбертова пространства определяется следующим образом:

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_X \exp\left(-\frac{1}{2}\langle x, x \rangle\right) dx,$$

а в бесконечномерном случае конструируется как мера на алгебре цилиндрических множеств¹, или, для краткости, цилиндров. *Цилиндр* в векторном пространстве H – это прообраз подмножества (называемого *основанием цилиндра*) любого конечномерного пространства L при любом линейном отображении $H \rightarrow L$. При линейном отображении $h: H \rightarrow H_1$ прообраз цилиндра является цилиндром. Поэтому на мерах цилиндрических множеств определена операция прямого образа h_* .

Если пространство H гильбертово, то любой цилиндр – прообраз подмножества конечномерного подпространства H при отображении ортогональной проекции. В этом случае гауссовская мера цилиндра по определению равна гауссовской

¹Определение меры цилиндрических множеств введено А. Н. Колмогоровым [19].

мере его основания. Скажем, что непрерывное линейное отображение f пространства H в пространство Фреше E (в контексте статьи достаточно считать его счетно-гильбертовым) является отображением Гильберта–Шмидта, если его можно представить в виде $f = gh$, где $h: H \rightarrow H_1$ – отображение Гильберта–Шмидта в гильбертово пространство H_1 . Напомним, что линейное отображение h гильбертовых пространств называется *отображением Гильберта–Шмидта*, если образ единичного шара является эллипсоидом, сумма квадратов длин главных полуосей которого конечна.

Назовем меру цилиндрических множеств в пространстве E *правильной гауссовской мерой*, если она является прямым образом гауссовской меры в некотором гильбертовом пространстве H при отображении Гильберта–Шмидта $H \rightarrow E$. Стандартная гауссовская мера в бесконечномерном гильбертовом пространстве не является правильной. Известно (см., например, [15]), что правильная гауссовская мера счетно-аддитивна и, значит, определена на алгебре множеств, содержащей счетные объединения и пересечения цилиндров.

Два подпространства $H \subset E$ пространства голоморфных функций на комплексном многообразии Y будем называть *парой Крофтона на многообразии Y* , если:

- 1) вложение пространства Фреше E в пространство голоморфных функций на Y с топологией равномерной сходимости на компактах непрерывно;
- 2) H – гильбертово пространство и вложение $\tau: H \rightarrow E$ является оператором Гильберта–Шмидта;
- 3) при любом $y \in Y$ существует такое $h \in H$, что $h(y) \neq 0$.

Пусть $\dim Y = n$, $m \leq n$ и $H_1 \subset E_1, \dots, H_m \subset E_m$ – пары Крофтона на многообразии Y . На пространстве $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_m$ определим меру

$$\mu = \mu_1 \oplus \dots \oplus \mu_m,$$

где μ_i – прямой образ гауссовской меры на H_i при отображении $\tau_i: H_i \rightarrow E_i$. Сопоставим каждой точке $(e_1, \dots, e_m)$ пространства E систему уравнений

$$e_1(y) = \dots = e_m(y) = 0.$$

Для непрерывной финитной формы φ на Y обозначим через $\varphi(e)$ интеграл формы φ по объединению $(n - m)$ -мерных компонент аналитического множества корней системы, соответствующей элементу $e \in E$.

ТЕОРЕМА 1 (бесконечномерная формула Крофтона). *Имеем*

$$\int_E \varphi(e) \mu(e) = \int_Y dd^c \log |\xi_1(y)|^2 \wedge \dots \wedge dd^c \log |\xi_m(y)|^2 \wedge \varphi, \quad (1)$$

где $|\xi_i(y)|$ – норма функционала $\xi_i(y)$, определенного на пространстве H_i следующим образом: $\langle \xi_i(y), f \rangle = f(y)$.

При $m > 1$ формулировка теоремы подразумевает возможность умножения форм вида $dd^c \log |\xi_i(y)|^2$ из правой части равенства (1). Такое умножение будет возможно, если доказать, что функции $\log |\xi_i(y)|^2$ непрерывны и плюрисубгармоничны (см. замечание 2). Это доказательство (см. лемму 1) использует утверждение теоремы при $m = 1$ (в этом случае “подозрительное” умножение в формулировке отсутствует).

ЛЕММА 1. Пусть $H \subset E$ – пара Крофтона. Тогда $\log |\xi(y)|^2$ – непрерывная плюрисубгармоническая функция аргумента $y \in Y$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность функции $\log |\xi(y)|^2$ – следствие компактности оператора, сопряженного вложению $H \rightarrow E$. Плюрисубгармоничность функции $\log |\xi(y)|^2$ – следствие утверждения теоремы 1 при $m = 1$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть Y – связное аналитическое подмножество комплексного многообразия X . Утверждение теоремы 1 остается верным, если заменить пространство голоморфных функций на Y пространством, состоящим из ограничений на Y голоморфных функций, определенных на X .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. На проективизации (т.е. многообразии одномерных подпространств) гильбертова пространства L определена стандартная кэлерова метрика. Соответствующая кэлерова форма, поднятая на $L \setminus 0$, равна $dd^c \log(l, l)$. Каждая из участвующих в формулировке теоремы 1 форм $dd^c \log |\xi_i(y)|^2$ – прообраз такой формы на двойственном H_i гильбертовом пространстве H_i^* при отображении, переводящем y в функционал $\xi_i(y)$.

ПРИМЕР 1. Пусть H – пространство голоморфных функций на ограниченной области $A \subset \mathbb{C}^n$ с интегрируемым квадратом модуля, являющееся полным гильбертовым пространством. Функционал, сопоставляющий функции ее значение в точке $z \in A$, – элемент пространства H^* . Квадрат нормы этого элемента обозначим через $K_A(z)$. Функция $K_A(z)$ называется *функцией Бергмана* [17], а заимствованная с проективизации пространства H^* кэлерова метрика (см. замечание 4) – *метрикой Бергмана* области A . Метрика Бергмана голоморфно инвариантна, т.е. сохраняется при биголморфных отображениях области A на себя. Пусть вложение H в пространство всех голоморфных функций на A является вложением Гильберта–Шмидта. Тогда, применяя теорему 1, получаем, что среднее количество корней случайной системы голоморфных функций в любой области $U \subset A$ равно ее бергмановой площади.

Для единичного круга D на комплексной плоскости имеем

$$K_A(z) = \frac{1}{\pi(1 - |z|^2)}.$$

Соответствующую гауссовскую меру в пространстве голоморфных функций на D обозначим μ_0 . В этом случае метрика Бергмана совпадает с метрикой геометрии Лобачевского в модели Пуанкаре. Вложение H в пространство голоморфных функций – отображение Гильберта–Шмидта (см. ниже). Применяя теорему 1, получаем, что среднее количество нулей случайной голоморфной функции в любой области $U \subset D$ равно ее площади Лобачевского.

Пусть L_2^s – пространство голоморфных на D функций, квадрат модуля которых интегрируем с весом $(1 - |z|^2)^s$. Легко проверить, что вложения $L_2^s \rightarrow L_2^{s+t}$ являются отображениями Гильберта–Шмидта при любом $t \geq 2$. Поэтому все соответствующие меры μ_s на пространстве голоморфных функций – правильные гауссовские меры. Применяя теорему 1, нетрудно показать, что среднее количество нулей случайной (относительно меры μ_s) голоморфной функции в области $U \subset D$ равно $(s + 1)v(U)$, где $v(U)$ – площадь Лобачевского области U .

§3. Асимптотическая плотность

3.1. Шкала гауссовских мер. Выбрав в $\mathbb{C}^n$ координаты (формула для асимптотической плотности из п. 3.3 не зависит от этого выбора), положим

$$k_s(z) = (1 + z_1 \bar{z}_1)^s \dots (1 + z_n \bar{z}_n)^s \exp(2H(z)),$$

где H – опорная функция выпуклой оболочки компакта $K \subset \operatorname{Re} \mathbb{C}^{n*}$. При $s \geq 1$ рассмотрим эрмитово скалярное произведение

$$\langle f, g \rangle_s = \int_{\mathbb{C}^n} f(z) \bar{g}(z) k_s^{-1}(z) dz.$$

Обозначим через H_s множество целых функций, норма которых конечна. Нетрудно проверить, что H_s полно относительно эрмитовой метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$. Таким образом, мы получаем шкалу возрастающих гильбертовых пространств H_s . Положим $\mathcal{H} = \bigcup_{s \geq 0} H_s$ и снабдим $\mathcal{H}$ топологией пространства-объединения.

При $s \geq 1$ определим меру μ_s на пространстве $\mathcal{H}$ как прямой образ гауссовской меры на гильбертовом пространстве H_s (необходимые определения теории меры приведены в начале § 2). Из предложения 1 (утверждения типа теоремы вложения) вытекает, что меры μ_s являются правильными гауссовскими мерами (правильная гауссовская мера – прямой образ стандартной гауссовской меры в гильбертовом пространстве при отображении Гильберта–Шмидта; см. начало § 2) и поэтому счетно-аддитивны.

ЛЕММА 2. *При любом s существует $U(s) > 0$ такое, что при любых $z \in \mathbb{C}^n$ и $f \in H_s$ имеем*

$$|f(z)|^2 < U(s) k_s(z) |f|_s^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$U(s) = \frac{1}{\pi^{2n}} \sup_{z \in \mathbb{C}^n, w \in P} \frac{k_s(z+w)}{k_s(z)},$$

где P – полицилиндр единичного радиуса с центром в нуле. Нетрудно проверить, что $U(s) < \infty$. Используя цепочку неравенств

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &\leq \frac{1}{\pi^{2n}} \int_P |f(z+w)|^2 dw \leq U(s) k_s(z) \int_P |f(z+w)|^2 k_s^{-1}(z+w) dw \\ &\leq U(s) k_s(z) |f|_s^2, \end{aligned}$$

получаем необходимую оценку.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *При $t > 1$ вложение $H_s \rightarrow H_{s+t}$ является отображением Гильберта–Шмидта.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $h_1, h_2, \dots$ – ортонормированный базис пространства H_s , то вложение $H_s \rightarrow H_{s+t}$ является отображением Гильберта–Шмидта тогда и только тогда, когда ряд $|h_1|_{s+t}^2 + |h_2|_{s+t}^2 + \dots$ сходится. Для доказательства сходимости этого ряда определим сначала линейный функционал $\xi(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, на пространстве $\mathcal{H}$ такой, что $\langle \xi(z), f \rangle = f(z)$. Теперь заметим, что

$$|\xi(z)|_s^2 = |h_1(z)|^2 + |h_2(z)|^2 + \dots$$

Отсюда имеем

$$|h_1|_{s+t}^2 + |h_2|_{s+t}^2 + \dots = \int_{\mathbb{C}^n} |\xi(z)|_s^2 k_{s+t}^{-1}(z) dz.$$

Ранее (лемма 2) доказано, что подынтегральная функция правой части последнего равенства не превосходит $U(s)(1+z_1\bar{z}_1)^{-t} \dots (1+z_n\bar{z}_n)^{-t}$ и, значит, при $t > 1$ интегрируема. Поэтому нужный ряд сходится.

Согласно теореме Пэли–Винера пространство целых функций $\mathcal{H}^K$, состоящее из преобразований Фурье обобщенных функций с носителями, принадлежащими компактному K , содержится в пространстве $\mathcal{H}$. Подпространство $\mathcal{H}^K \cap H_s$ замкнуто в пространстве H_s (это вытекает из стандартных свойств преобразования Фурье). Отсюда если E – замкнутое подпространство пространства $\mathcal{H}^K$, то вложения $E \cap H_s \rightarrow E$ также являются операторами Гильберта–Шмидта. Поэтому рассмотренная конструкция приводит к шкале правильных гауссовских мер μ_s на любом замкнутом подпространстве пространства $\mathcal{H}^K$.

3.2. Усредненное распределение корней. Пусть $K_1, \dots, K_m$ – компактные множества в $\operatorname{Re} \mathbb{C}^{n*}$; $\mathcal{H}^{K_i}$ – пространства целых функций на $\mathbb{C}^n$, состоящие из преобразований Фурье обобщенных функций с носителями, принадлежащими K_i ; E_i – замкнутые подпространства $\mathcal{H}^{K_i}$; $S = \{s_1, \dots, s_m : s_i \geq 1\}$; μ_{s_i} – определенные выше меры на пространствах E_i и $\mu_S = \mu_{s_1} \oplus \dots \oplus \mu_{s_m}$ – мера на пространстве $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_m$.

Точке $e = (e_1, \dots, e_m)$ пространства E сопоставим систему уравнений

$$e_1(z) = \dots = e_m(z) = 0.$$

Для непрерывной финитной формы φ на $\mathbb{C}^n$ обозначим через $\varphi(e)$ интеграл формы φ по объединению $(n-m)$ -мерных компонент аналитического множества корней этой системы, соответствующей элементу $e \in E$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Поток усредненного распределения корней систем уравнений, задаваемых функциями из пространств $E_1, \dots, E_m$, – это *интеграл функции $\varphi(e)$ по мере μ_S* , т. е.

$$X_{E,S}(\varphi) = \int_E \varphi(e) \mu_S(e).$$

Пусть E_i^* – пространство, сопряженное пространству E_i , и пусть $\xi_i : \mathbb{C}^n \rightarrow E_i^*$ – отображение такое, что $\langle e_i, \xi_i(z) \rangle = e_i(z)$. Обозначим через $|\xi_i(z)|_{s_i}$ норму ограничения функционала $\xi_i(z)$ на определенном в п. 3.1 пространстве $H_{s_i} \cap E_i$. Если все функции пространства $H_{s_i} \cap E_i$ в точке z обращаются в нуль, то $|\xi_i(z)|_{s_i} = 0$, иначе $|\xi_i(z)|_{s_i} > 0$.

Применяя формулу Крофтона (см. теорему 1) в описанной выше ситуации, получаем следующее утверждение о потоке усредненного распределения $X_{E,S}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть функции $|\xi_i(z)|_{s_i}$ строго положительны. Тогда

$$X_{E,S}(\varphi) = \int_{\mathbb{C}^n} dd^c \log |\xi_1(z)|_{s_1}^2 \wedge \cdots \wedge dd^c \log |\xi_m(z)|_{s_m}^2 \wedge \varphi.$$

3.3. Формула асимптотической плотности. Пусть K – компактное подмножество $\operatorname{Re} \mathbb{C}^{n*}$, E – замкнутое подпространство пространства $\mathcal{H}^K$ и $\xi(z)$ – линейный функционал такой, что $\langle \xi(z), f \rangle = f(z)$. Через $|\xi(z)|_s$ обозначим норму ограничения функционала на пространстве $H_s \cap E$. Следующее утверждение является следствием леммы 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Функция $\log |\xi(z)|_s^2$ является непрерывной плюрисубгармонической функцией аргумента $z \in \mathbb{C}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Подпространство E назовем *регулярным*, если при любом $s \geq 1$ существует такое положительное $L(s)$, что $|\xi(z)|_s \geq L(s) \exp(H_K(z))$ при любом $z \in \mathbb{C}^n$.

Сравнивая утверждение леммы 2 с определением регулярности, получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть подпространство E регулярно. Тогда при любом $s \geq 1$ однопараметрическое семейство функций $\frac{1}{t} \log |\xi(tz)|_s^2$ аргумента z локально равномерно сходится к функции $2H_K(z)$ при $t \rightarrow \infty$.

ЛЕММА 3. Подпространство, которое при любом $z \notin \operatorname{Im} \mathbb{C}^n$ содержит преобразование Фурье дельта-функции с носителем в точке компакта, являющейся крайней в направлении $\operatorname{Re} z$, регулярно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если x – крайняя точка компакта в направлении $\operatorname{Re} z$, то, применяя неравенство $|\xi(z)|_s \geq |f|_s^{-1} |f(z)|$ к преобразованию Фурье дельта-функции с носителем в точке x , получаем

$$|\xi(z)|_s \geq \left(\int_{\mathbb{C}^n} \exp(2H_K(w)) k_s^{-1}(w) dw \right)^{-1/2} \exp(H_K(z)).$$

СЛЕДСТВИЕ 3. 1) Пространство $\mathcal{H}^K$ регулярно.

2) Пространство функций, являющихся преобразованиями Фурье мер, сосредоточенных на компакте K , регулярно. В частности, пространство э. с. с фиксированным спектром регулярно.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $S = \{s_1, \dots, s_m : s_i \geq 1\}$, $X_{E,S}$ – поток усредненного распределения корней систем m уравнений, составленных из функций регулярных подпространств $E_1 \subset \mathcal{H}^{K_1}, \dots, E_m \subset \mathcal{H}^{K_m}$, а однопараметрическое семейство отображений $\Phi^t : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ определено как $\Phi^t : z \mapsto z/t$. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Phi_*^t(X_{E,S})}{(2t)^m} = dd^c H_{K_1} \wedge \cdots \wedge dd^c H_{K_m}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 2 поток $\frac{1}{(2t)^m} \Phi_*^t(X_{E,S})$ представляется дифференциальной формой

$$dd^c \frac{\log |\xi_1(tz)|_{s_1}^2}{2t} \wedge \dots \wedge dd^c \frac{\log |\xi_m(tz)|_{s_m}^2}{2t}.$$

При $t \rightarrow \infty$ плюрисубгармоническая функция $\log |\xi_m(tz)|_{s_m}^2 / (2t)$ (лемма 1) сходится к функции $H_{K_i}(z)$ (следствие 2). Поэтому утверждение теоремы вытекает из регуляризуемости комплексного оператора Монжа–Ампера (см. замечание 2).

3.4. Асимптотическая плотность и геометрия выпуклых тел. Приведем два утверждения о геометрическом смысле выражения $dd^c H_1 \wedge \dots \wedge dd^c H_m$, где $H_1, \dots, H_m$ – опорные функции выпуклых тел $\Delta_1, \dots, \Delta_m$, расположенных в пространстве $\text{Re } \mathbb{C}^{n*}$. Предположим, что на пространстве $\mathbb{C}^n$ выбрана эрмитова метрика, и обозначим через Φ кэлерову форму этой метрики (т.е. $\Phi = dz_1 \wedge d\bar{z}_1 + \dots + dz_n \wedge d\bar{z}_n$).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $|dy|$ – евклидова мера на пространстве $\text{Im } \mathbb{C}^n$. Тогда

$$dd^c H_1 \wedge \dots \wedge dd^c H_n(\varphi) = \frac{1}{\pi^n} n! V_n(\Delta_1, \dots, \Delta_n) \int_{\text{Im } \mathbb{C}^n} \varphi |dy|,$$

где V_n – n -мерный смешанный объем выпуклых тел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для многогранников утверждение теоремы доказано в [8]. Обе части формулы теоремы непрерывно зависят от выпуклых тел $\Delta_1, \dots, \Delta_m$. Приближая тела многогранниками, получаем нужное утверждение.

Для выпуклых многогранников геометрия потока $dd^c H_1 \wedge \dots \wedge dd^c H_m$ при всех значениях m подробно описана в [8]. Для гладких выпуклых тел при $m < n$ верно следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Имеем

$$dd^c H_\Delta^m \wedge \Phi^{n-m} = \frac{C(m, n) \mathcal{R}(\delta(z))}{|\text{Re } z|^m} \Phi^n,$$

где $\mathcal{R}(\delta)$ – функция на поверхности тела Δ , равная m -ой элементарной симметрической функции главных радиусов кривизны поверхности в точке $\delta(z) \in \partial\Delta$, а $\delta(z)$ – крайняя в направлении $\text{Re } z$ точка выпуклого тела Δ .

Для выпуклых тел $\Delta_1, \dots, \Delta_m$ можно аналогично выразить

$$dd^c H_1 \wedge \dots \wedge dd^c H_m \wedge \Phi^{n-m}$$

через их кривизны. Для этого необходимо в правой части формулы теоремы 4 симметрический многочлен $\mathcal{R}$ степени m от $n - 1$ переменных заменить на соответствующую смешанную симметрическую функцию (т.е. полилинейную симметрическую форму степени m , совпадающую с $\mathcal{R}$ на диагонали), а $n - 1$ главных радиусов кривизны в точке $\delta(z)$ – на m наборов по $n - 1$ главных радиусов кривизны поверхностей $\partial\Delta_1, \dots, \partial\Delta_m$ в точках выпуклых тел $\Delta_1, \dots, \Delta_m$, крайних в направлении $\text{Re } z$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $N_m^S(R)$ – $(2n - 2m)$ -мерная площадь лежащей в шаре радиуса R части многообразия корней систем m уравнений, составленных из функций, являющихся преобразованиями Фурье обобщенных функций с носителями, принадлежащими компактам $K_1, \dots, K_m$ с выпуклыми оболочками $\Delta_1, \dots, \Delta_m$, усредненная по мере μ_S . Тогда

$$N_m^S(R) = C(m, n)R^{n-m}V_n(\Delta_1, \dots, \Delta_m, B, \dots, B) + o(R^{n-m}),$$

где B – $(2n)$ -мерный шар единичного радиуса.

Отметим, что $V_n(\Delta, \dots, \Delta, B)$ – площадь поверхности, а $V_n(\Delta, B, \dots, B)$ – периметр (т.е. средняя ширина) выпуклого тела Δ . Доказательство теоремы 4 и вывод следствия 4 проводятся прямым вычислением с использованием стандартных свойств (см., например, [22]) опорных функций.

§ 4. Формула Крофтона (доказательство)

4.1. Сведение доказательства к одномерному случаю. Доказательство теоремы 1 сводится к одномерному случаю (т.е. случаю $m = n = 1$). При этом фактически используется только счетная аддитивность правильной гауссовской меры (а не ее конструкция). Сначала докажем, что функция $\varphi(e)$ определена на множестве полной меры и суммируема. Затем запишем левую часть формулы (1) в виде повторного интеграла. Корректность перехода к повторному интегралу основана на суммируемости функции $\varphi(e)$ и на утверждении следствия 1 для меньших размерностей. Применение повторного интегрирования сводит доказательство формулы (1) к случаю $m = 1$, т.е. к случаю усреднения аналитических гиперповерхностей, а затем – к случаю одномерного Y . И наконец, в п. 4.2 мы выводим формулу Крофтона при $\dim Y = 1$ (см. предложение 5).

В процессе доказательства будем предполагать, что:

- 1) H_j всюду плотно в пространстве E_j ;
- 2) Y – ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ удобного для нас вида, а функции пространств E_j определены в некоторой (общей для всех функций) окрестности P области Y (в этом случае будем говорить что имеется пара Крофтона (см. § 3) на замыкании Y);
- 3) форма φ является формой вида

$$\varphi = \psi(z) dz_{n-m+1} \wedge d\bar{z}_{n-m+1} \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n,$$

где $\psi(z)$ – непрерывная неотрицательная функция с компактным, лежащим в поликруге Y носителем (для таких форм функции $\varphi(e)$ неотрицательны).

Корректность первого предположения основана на том, что гауссовская мера дополнения до замыкания H_j в пространстве E_j равна нулю, второго – на счетной аддитивности обеих частей формулы (1) по Y и φ . Третье предположение обосновывается следующим образом. Положительные формы степени $(n-m, n-m)$ образуют в пространстве всех непрерывных финитных форм степени $(n-m, n-m)$ на Y конус с непустой внутренностью [21]. Отсюда можно полагать, что φ – форма указанного вида в области определения некоторой локальной системы голоморфных координат. Затем область определения координат $z_1, \dots, z_n$ можно представить в виде объединения счетного множества областей, являющихся в этих координатах поликругами, а форму φ – в виде суммы форм указанного вида на этих поликругах.

ЛЕММА 4. Если $E_j(y)$ – множество функций пространства E_j , равных нулю в точке $y \in Y$, то $\mu_j(E_j(y)) = 0$.

Утверждение леммы вытекает из условия существования в пространстве H_j функции, не равной нулю в точке y .

ЛЕММА 5. Элементы $e \in E$, для которых многообразие решений соответствующей системы содержит компоненты размерности, большей $n - m$, образуют множество нулевой меры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $m = 1$ утверждение очевидно. Используя индукцию по m , предположим что мера множества систем уравнений $e_1 = \dots = e_{m-1} = 0$, многообразие решений которых $(n - m + 1)$ -мерно, равна единице.

Рассмотрим одну из таких систем и выберем по точке в каждой неприводимой компоненте ее нулевого множества. Пусть при некотором $e_m \in E_m$ множество решений системы $e_1 = \dots = e_{m-1} = e_m = 0$ содержит компоненты размерности, большей $n - m$. Тогда e_m равна нулю в одной из выбранных точек. Отсюда (лемма 4) μ_m -мера множества таких e_m равна нулю.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. 1) Функция $\varphi(e)$ суммируема по мере $\mu(e)$.

2) Интеграл функции $\varphi(e)$ по мере $\mu(e)$ не превосходит правой части формулы (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Y – полукруг с центром в нуле, E_j^k – подпространство E_j , состоящее из функций, все производные которых в точке $y = 0$ до порядка k равны нулю. Положим $H_j^k = H_j \cap E_j^k$ и обозначим через G_j^k ортогональное дополнение H_j^k в пространстве H_j . Поскольку пространство G_j^k конечномерно, то при любом $e_j \in E_j$ пересечение $(e_j + E_j^k) \cap G_j^k$ – точка, которую мы обозначим через $g_k(e_j)$. Положим $\varphi_k(e) = \varphi(g_k(e))$, где $e = (e_1, \dots, e_m)$, $g_k(e) = (g_k(e_1), \dots, g_k(e_m))$.

Заменим в левой части формулы (1) $\varphi(e)$ на $\varphi_k(e)$, а в правой – функционал $\xi_i(y)$ на пространстве H_j ограничим на подпространство G_j^k :

$$\int_{E^k} \varphi_k(e) \mu(e) = \int_Y dd^c \log |\xi_1(y)|^2 \wedge \dots \wedge dd^c \log |\xi_m(y)|^2 \wedge \varphi, \quad (2)$$

где $E^k = E_1^k + \dots + E_m^k$.

Нужное утверждение вытекает (см., например, [23]) из следующих трех простых фактов, подробный вывод которых мы не приводим.

1. Функции $\varphi_k(e)$ измеримы и при $k \rightarrow \infty$ сходятся к функции $\varphi(e)$ почти всюду (здесь используется лемма 5).

2. Формула (2) верна, так как она совпадает с конечномерной формулой Крофтона для пространств функций $G_1^k, \dots, G_m^k$.

3. При $k \rightarrow \infty$ правые части формулы (2) сходятся к правой части (1).

Переход к повторному интегрированию в левой части формулы (1) (корректность такого перехода – следствие предложения 4) сводит утверждение 1 к случаю

одного уравнения ($m = 1$). Теперь покажем, как утверждение теоремы 1 для одного уравнения сводится к случаю $\dim Y = 1$.

При этом мы вправе предполагать (см. выше), что:

- 1) φ – форма вида $\varphi = \psi(z) dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$, где ψ – неотрицательная функция с компактным, принадлежащим Y носителем;
- 2) Y – открытый поликруг единичного радиуса в пространстве $\mathbb{C}^n$ с координатами $\{z_i\}$, а все функции пространства E с гауссовской мерой μ определены в поликруге P радиуса, большего единицы;
- 3) гильбертово пространство H всюду плотно в E .

Пусть $e(z)$ – функция, голоморфная в поликруге P . Для любых фиксированных значений $\{w_2, \dots, w_n: |w_i| < 1\}$ определим меру $u(w_2, \dots, w_n)$ на единичном круге плоскости $(\mathbb{C}, z_1)$ как сумму дельта-функций, сосредоточенных в дискретных (взятых с учетом кратности) нулях функции $e(z_1, w_2, \dots, w_n)$. Тогда интеграл формы φ по нулевой гиперповерхности функции $e(z)$ (или $\varphi(e)$ в обозначениях теоремы 1) равен

$$\int_{\{|z_i| < 1, i=2, \dots, n\}} dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n \int_{|z_1| < 1} \psi(z) u(z_2, \dots, z_n).$$

Усреднение по мере μ в левой части формулы Крофтона происходит только во внутреннем интеграле. Теперь, формально применяя к внутреннему интегралу формулу Крофтона (в этом случае Y – единичный круг на плоскости $(\mathbb{C}, z)$, а голоморфные функции на Y – функции вида $e(z, z_2, \dots, z_n)$), приходим к нужному выражению.

Это рассуждение корректно, если отображение ограничения функций пространства E на любой единичный круг семейства $\{z, z_2, \dots, z_n: |z_i| < 1\}$ не имеет ядра. Если при ограничении на некоторый круг такое ядро нетривиально, то перед применением формулы Крофтона следует перейти к соответствующим факторпространствам пространств H, E и прямому образу гауссовской меры μ .

Таким образом, доказательство формулы Крофтона сведено к одномерному случаю.

4.2. Одномерный случай. Как объяснено в п. 4.1, одномерная формула Крофтона сводится к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $Y \subset \mathbb{C}$ – замкнутый квадрат, пространство E со всюду плотным подпространством H образует пару Крофтона на Y , μ – соответствующая гауссовская мера на пространстве E . Тогда для любой непрерывной функции φ на Y

$$\int_E \varphi(e) \mu(e) = \int_Y \varphi dd^c \log(|\xi(z)|_H)^2,$$

где $\varphi(e)$ – сумма значений функции φ по множеству нулей голоморфной функции e , а $|\xi(z)|_H$ – норма ограничения на H линейного функционала, заданного на E , такого, что $\langle \xi(z), e \rangle = e(z)$.

Следующее простое утверждение сводит доказательство к случаю, когда пространство E – гильбертово, а отображение $z \mapsto \xi(z)$ – голоморфное отображение Y в сопряженное гильбертово пространство E^* (вполне непрерывный оператор переводит объекты слабой топологии прообраза, т.е. непрерывные отображения и производные гладких отображений, в соответствующие объекты сильной топологии образа отображения [23]).

ЛЕММА 6. *Любое отображение Гильберта–Шмидта $H_1 \rightarrow H_2$ гильбертовых пространств можно разложить в произведение $\nu\tau$, где $\tau: H_1 \rightarrow H_2$ – отображение Гильберта–Шмидта, а оператор $\nu: H_2 \rightarrow H_2$ вполне непрерывен.*

Кроме того, используя счетную аддитивность по Y и φ , легко свести доказываемое утверждение к случаю $\varphi = 1$. Поэтому бесконечномерная формула Крофтона сведена к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Пусть в условиях предложения 5 пространство E является гильбертовым, а $\xi: Y \rightarrow E^*$ – голоморфное отображение в сопряженное гильбертово пространство. Тогда*

$$\int_E N(e) \mu(e) = \int_Y dd^c \log(|\xi(z)|_H)^2, \quad (3)$$

где $N(e)$ – количество нулей функции e .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Схема доказательства предложения такова. Пусть квадрат Y покрыт сеткой квадратов со стороной h . Покажем, что при $h \rightarrow 0$ максимум модуля разности правой и левой частей формулы (3), применяемой к каждому из квадратов сетки, является величиной порядка $o(h^2)$. Для доказательства этого потребуется оценка гауссовской меры некоторых связанных с “эллипсоидом Гильберта–Шмидта” областей.

Для любого $X \subset E^*$ обозначим через $\mathcal{H}_{X,\varepsilon}$ множество элементов $z \in E$ (рассматриваемых как функционалы на пространстве E^*), для которых в ε -окрестности X найдется такое y , что $\langle z, y \rangle = 0$ (иначе говоря, $\mathcal{H}_{X,\varepsilon}$ состоит из функционалов, нулевая гиперплоскость которых пересекает ε -окрестность X). Для пары точек x, y пространства E^* обозначим через $[x, y]$ отрезок с концами в этих точках.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Существует такое C , что при достаточно малом ε для любой пары точек x, y пространства E^* справедлива оценка гауссовской меры*

$$\mu(\mathcal{H}_{[x,y],\varepsilon}) \leq C \frac{|y-x|}{\min_{z \in [x,y]} |z|} \varepsilon.$$

Эта оценка используется для доказательства формулы Крофтона следующим образом (доказательство предложения 7 приведено ниже). Обозначим через K один из квадратов сетки, а через k – одну из его вершин. Пусть K_ξ – образ квадрата K при отображении $k + x \mapsto \xi(k) + d\xi(x)$, где $d\xi$ – дифференциал отображения

$\xi: Y \rightarrow E^*$ в точке k . Проективная площадь (см. замечание 4) параллелограмма K_ξ отличается от значения правой части формулы (3), примененной к K , на величину порядка $o(h^2)$. Сумма проективных площадей всех параллелограммов K_ξ при измельчении сетки стремится к правой части формулы (3).

С другой стороны, проективная площадь K_ξ по конечномерной формуле Крофтона равна гауссовской мере множества элементов E , нулевые гиперплоскости которых в пространстве E^* пересекают K_ξ . Если нулевая гиперплоскость элемента $e \in E$ пересекает параллелограмм K_ξ и не пересекает $\xi(K)$, то она проходит на расстоянии ε от границы параллелограмма, где ε – бесконечно малая величина порядка $o(h)$. Для вывода формулы (3) достаточно доказать (это следует из второго утверждения предложения 4), что гауссовская мера множества таких элементов E убывает как $o(h^2)$. Для получения оценки гауссовской меры применим предложение 7.

Итак, пусть отрезок $[x, y]$ – образ стороны параллелограмма K_ξ в пространстве E^* . Применяя предложение 7, получаем нужную для окончания доказательства оценку, если при достаточно малом h для любого квадрата сетки K и любой его стороны:

- 1) $\langle z, z \rangle \geq \delta > 0$ для любой точки отрезка $[x, y]$;
- 2) $|y - x|_k \leq Bh$, где B – постоянная, не зависящая от h .

Множество $\xi(Y)$ компактно и не содержит нуль. Отсюда вытекает первое неравенство. Второе неравенство также вытекает из компактности множества $\xi(Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7. Пусть отрезок $[x, y] \subset E^*$ покрыт сдвигами шара радиуса ε таким образом, что объединение этих сдвигов содержит $(\varepsilon/2)$ -окрестность отрезка. Количество необходимых для этого сдвигов шара не превосходит числа $A|x - y|$, где A – постоянная, не зависящая от выбора отрезка $[x, y]$. Отсюда, очевидно, доказательство сводится к случаю $x = y$, $|x| = 1$, т. е. к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. При $|x| = 1$ гауссовская мера области $\mathcal{H}_{x,\varepsilon}$ не превосходит $B\varepsilon^2$.

Пусть $E_1^* \subset E_2^* \subset \dots$ – последовательность содержащих x конечномерных подпространств пространства E^* такая, что $\cup E_i^* = E^*$. Обозначим через $\mathcal{H}_{x,\varepsilon}^i$ подмножество $\mathcal{H}_{x,\varepsilon}$, состоящее из функционалов, нулевая гиперплоскость которых пересекается с ε -окрестностью вектора x в точках пространства E_i^* . Каждое из множеств $\mathcal{H}_{x,\varepsilon}^i$ является цилиндром, $\mathcal{H}_{x,\varepsilon}^i \subset \mathcal{H}_{x,\varepsilon}^{i+1}$ и $\bigcup_i \mathcal{H}_{x,\varepsilon}^i = \mathcal{H}_{x,\varepsilon}$. Поэтому доказательство сводится к следующей оценке гауссовской меры областей $\mathcal{H}_{x,\varepsilon}$ в конечномерном пространстве.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть эллипсоид $\mathcal{E}$ – образ сферы единичного радиуса при действии некоторого невырожденного комплексно-линейного оператора в n -мерном векторном пространстве $\mathbb{C}^n$. Тогда при $|x| = 1$ гауссовская мера области $\mathcal{H}_{x,\varepsilon}$ не превосходит $D\sigma_2\varepsilon^2$, где σ_2 – сумма квадратов длин полуосей эллипсоида $\mathcal{E}$, а константа D не зависит от размерности пространства.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – подпространство $\mathbb{C}^n$, ортогональное вектору x . Легко проверить, что $\mathcal{H}_{x,\varepsilon}$ содержится во множестве векторов вида

$$\{r + \lambda x : r \in R, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < \varepsilon h(r)\},$$

где $h(r)$ – значение опорной функции эллипсоида $\mathcal{E}$ на векторе r (т. е., иначе говоря, $h(r) = \sup_{z \in \mathcal{E}} \operatorname{Re}\langle z, r \rangle$). Теперь нужная оценка гауссовской меры множества $\mathcal{H}_{x,\varepsilon}$ вытекает из двух следующих простых (и общеизвестных) утверждений.

ЛЕММА 7. Пусть h – опорная функция эллипсоида в $\mathbb{R}^n$, заданного уравнением

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1.$$

Тогда среднее значение функции h^2 по сфере единичного радиуса равно

$$\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}.$$

ЛЕММА 8. Пусть s_n – площадь сферы единичного радиуса в пространстве $\mathbb{C}^n$. Тогда

$$\frac{s_n}{s_{n+1}} = \frac{n}{\pi}.$$

Список литературы

1. Бернштейн Д. Н. Число корней системы уравнений // Функцион. анализ и его прилож. 1975. Т. 9. №3. С. 1–4.
2. Казарновский Б. Я. О нулях экспоненциальных сумм // ДАН СССР. 1981. Т. 257. №4. С. 804–808.
3. Казарновский Б. Я. Многогранники Ньютона и корни систем экспоненциальных сумм // Функцион. анализ и его прилож. 1984. Т. 18. №4. С. 40–49.
4. Гельфонд О. А. О среднем числе корней систем голоморфных почти периодических уравнений // УМН. 1984. Т. 39. №1. С. 123–124.
5. Хованский А. Г. Малочлены. М.: Фазис, 1997.
6. Bedford E., Taylor B. A. The Dirichlet problem for a complex Monge–Ampere equations // Invent. Math. 1976. V. 37. № 2. P. 1–44.
7. Казарновский Б. Я. Многогранники Ньютона и формула Безу для матричных функций конечномерных представлений // Функцион. анализ и его прилож. 1987. Т. 21. №4. С. 73–74.
8. Казарновский Б. Я. s -верры и многогранники Ньютона алгебраических многообразий // Изв. РАН. Сер. матем. 2003. Т. 67. №3. С. 23–44.
9. Brion M. Piecewise polynomial functions, convex polytopes and enumerative geometry // Banach center publ. 1996. V. 36. P. 23–44.
10. McMullen P. The polytope algebra // Adv. Math. 1989. V. 78. P. 76–130.
11. McMullen P. On simple polytopes // Invent. Math. 1993. V. 113. P. 419–444.
12. Пухликов А. В., Хованский А. Г. Конечно аддитивные меры виртуальных многогранников // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. №2. С. 161–185.
13. Пухликов А. В., Хованский А. Г. Теорема Римана–Роха для интегралов и сумм квазиполиномов по виртуальным многогранникам // Алгебра и анализ. 1992. Т. 4. №4. С. 188–216.
14. Fulton W., Sturmfels B. Intersection theory on toric varieties. <http://arxiv.org/abs/math/9403002>.
15. Гельфонд И. М., Виленькин Н. Я. Обобщенные функции. 4. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. М.: Наука, 1961.

16. *Alesker S.* Hard Lefschets theorem for valuations, complex integral geometry, and unitarily invariant valuations // J. Diff. Geom. 2003. V. 63. № 1. P. 63–95.
17. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1976.
18. *Казарновский Б. Я.* Многогранники Ньютона, инкременты и корни систем матричных функций конечномерных представлений // Функцион. анализ и его прилож. (сдано в печать).
19. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.–Л.: ГОНТИ, 1936.
20. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.
21. *Харви Р.* Голоморфные цепи и их границы. М.: Мир, 1979.
22. *Буземан Г.* Выпуклые поверхности. М.: Наука, 1964.
23. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа. М.: Наука, 1988.

НТЦ Информрегистр
E-mail: kazarn@borisk.mccme.ru

Поступило в редакцию
30.05.2003