Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Кривошеев, Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 2, 71–136

DOI: <https://doi.org/10.4213/im476>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:57:34

УДК 517.5

А. С. Кривошеев

Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях

При некоторых естественных ограничениях приведено полное решение задачи интерполяции в пространствах целых функций экспоненциального типа, сопряженная диаграмма которых находится в заданной выпуклой области. Приведено также полное решение проблемы фундаментального принципа для произвольных нетривиальных замкнутых инвариантных относительно дифференцирования и допускающих спектральный синтез подпространств функций, аналитических в выпуклой области.

Библиография: 57 наименований.

§ 1. Введение

Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $H(D)$ – пространство функций, аналитических в D , с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах из D . Пространство $H(D)$ метризуемо, более того, оно является пространством Фреше–Шварца (см., например, [1, гл. 1, теорема 4.6]).

Пусть $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ – последовательность выпуклых компактов из D , исчерпывающая D , т. е. такая, что $K_m \subset \text{int } K_{m+1}$, $m \geq 1$, и $\bigcup_m K_m = D$ ($\text{int } M$ – внутренность множества M). В силу вложения $K_m \subset \text{int } K_{m+1}$ для каждого $m \geq 1$ найдется $\alpha_m > 0$ такое, что выполнено неравенство

$$H_{K_m}(z) + \alpha_m |z| \leq H_{K_{m+1}}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (1.1)$$

Здесь $H_M(z) = \sup_{y \in M} \text{Re } zy$ – опорная функция множества M (точнее, комплексно-сопряженного к M множества); $H_M(z)$ выпукла, положительно однородна порядка один, полунепрерывна снизу, может принимать значение $+\infty$, непрерывна во внутренности того множества, где принимает конечные значения. Если M ограничено, то $H_M(z)$ ограничена и непрерывна (см. [2]).

Пусть $H^*(D)$ – сильно сопряженное к $H(D)$ пространство (называемое *пространством аналитических функционалов в D*). Известно (см., например, [1, гл. 3, § 12, п. 7]), что преобразование Лапласа аналитических функционалов $\mu \in H^*(D)$, задаваемое по формуле

$$f(z) = (\mu, \exp(z\lambda)), \quad z \in \mathbb{C},$$

устанавливает алгебраический и топологический изоморфизм между пространством $H^*(D)$ и подпространством $\mathbf{P}_D$ (используется также обозначение $[1, H_D]$)

Работа подготовлена при поддержке гранта Президента РФ МД-278.2003.01 и гранта РФФИ № 02-01-01100 и Фонда содействия отечественной науки.

целых функций экспоненциального типа (т.е. функций, допускающих оценку вида $|f(z)| \leq C \exp(A|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, где C, A – некоторые положительные постоянные, зависящие от f), являющимся индуктивным пределом банаховых пространств:

$$\mathbf{P}_D = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{ind } \mathbf{P}_m,$$

$$\mathbf{P}_m = \left\{ h \in H(\mathbb{C}) : \|h\|_m = \sup_{z \in \mathbb{C}} |h(z)| \exp(-H_{K_m}(z)) < \infty \right\}.$$

Пространство $\mathbf{P}_D$ есть так называемое $\mathbf{LN}^*$ -пространство, т.е. является объединением последовательности банаховых пространств $\mathbf{P}_m$ таких, что $\mathbf{P}_m \subset \mathbf{P}_{m+1}$ для каждого $m = 1, 2, \dots$ и эти вложения вполне непрерывны (см. оценку (1.1)). Следовательно, $\mathbf{P}_D$ является отделимым и полным (см., например, [1, гл. 1, § 2, теорема 2.4]).

Для субгармонической функции $\psi(z)$ первого порядка и конечного типа ($|\psi(z)| \leq a + b|z|$) через $h_\psi(z)$ и $\underline{h}_\psi(z)$ обозначим соответственно ее верхний и нижний индикаторы, т.е.

$$h_\psi(z) = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\psi(tz)}{t}, \quad \underline{h}_\psi(z) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi \delta^2} \int_{B(z, \delta)} \frac{\psi(ty)}{t} d\sigma(y).$$

Если $\psi(z) = \ln |f(z)|$, где $f(z)$ – целая функция экспоненциального типа, то вместо $h_{\ln |f|}$ и $\underline{h}_{\ln |f|}$ будем записывать просто h_f и $\underline{h}_f$. Из определений индикаторов легко следует, что они положительно однородны порядка один и верно неравенство $\underline{h}_\psi(z) \leq h_\psi(z) \quad \forall z$. Если в некоторой точке z выполнено равенство $\underline{h}_\psi(z) = h_\psi(z)$, то говорят, что ψ (или f , если $\psi = \ln |f|$) имеет (вполне) *регулярный рост на луче* tz , $t > 0$. Индикатор $h_\psi(z)$ является ограниченной выпуклой, а следовательно, и непрерывной функцией (см., например, [1]). Отметим, что если $f \in \mathbf{P}_D$, то из определений $\mathbf{P}_D$ и h_f сразу следует, что для некоторого $m \geq 1$ выполнено неравенство

$$h_f(z) \leq H_{K_m}(z) < H_D(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Обратно, если $h_f(z) < H_D(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, то для некоторого $m \geq 1$ верна оценка $h_f(z) \leq H_{K_m}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Тогда из теоремы Хартогса о верхнем пределе для семейств субгармонических функций [1, гл. 1, § 6, теорема 6.1] с учетом (1.1) нетрудно получить также оценку

$$|f(z)| \leq C \exp H_{K_{m+1}}(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(где C – некоторая положительная постоянная), которая означает, что $f \in \mathbf{P}_D$. Таким образом, необходимым и достаточным условием принадлежности целой функции f пространству $\mathbf{P}_D$ является неравенство

$$h_f(z) < H_D(z) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Пусть W – нетривиальное ($W \neq \{0\}$, $H(D)$) замкнутое подпространство в $H(D)$, инвариантное относительно оператора дифференцирования, т.е. вместе с каждой функцией φ оно содержит также и ее производную φ' . Примером такого

инвариантного подпространства может служить пространство решений из $H(D)$ системы однородных сверточных уравнений (см., например, [1, гл. 3, § 14, п. 2]):

$$\mathbf{M}_{\mu_i}[\varphi](z) = (\mu_i, \varphi(z + y)) \equiv 0, \quad \mu_i \in H^*(D), \quad i = 1, \dots, p. \quad (1.2)$$

Частным случаем уравнений свертки являются линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (как конечного, так и бесконечного порядков), линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами, дифференциально-разностные уравнения, некоторые типы интегральных уравнений и др. Например, дифференциальное уравнение

$$L(\varphi) = \sum_{k=0}^s a_k \varphi^{(k)} = 0 \quad (1.3)$$

является уравнением свертки, порожденным функционалом

$$\mu = \sum_{k=0}^s (-1)^k a_k \delta^{(k)}.$$

Легко видеть, что характеристический многочлен уравнения (1.3) совпадает с преобразованием Лапласа функционала μ . Пусть $\{\lambda_k, m_k\}$, $k = 1, \dots, l$, $\sum m_k = s$, – последовательность нулей этого многочлена и их кратностей. Хорошо известно, что каждое решение уравнения (1.3) можно записать в виде

$$\varphi(z) = \sum_{k=1, m=0}^{l, m_k-1} c_{k,m} z^m \exp(\lambda_k z).$$

Возможность такого представления иногда называют *фундаментальным принципом Л. Эйлера* для пространств решений однородных дифференциальных уравнений. В этой связи естественно возникает проблема фундаментального принципа, т.е. аналогичного представления решений более общих однородных уравнений свертки и их систем. Сформулируем задачу поточнее. Пусть $f_1, \dots, f_p$ – преобразования Лапласа соответственно функционалов $\mu_1, \dots, \mu_p$, порождающих систему уравнений (1.2). Функции $f_1, \dots, f_p$ называются *характеристическими функциями* операторов $\mathbf{M}_{\mu_1}, \dots, \mathbf{M}_{\mu_p}$. Пусть λ_k , $k = 1, 2, \dots$, – все общие нули функций $f_1, \dots, f_p$ и m_k – их кратности, т.е. для каждого $k = 1, 2, \dots$ имеют место равенства

$$f_i^{(n)}(\lambda_k) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad n = 0, \dots, m_k - 1,$$

и существует $i = i(k)$ такой, что $f_i^{(m_k)}(\lambda_k) \neq 0$. Рассмотрим систему

$$\{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1}. \quad (1.4)$$

В силу выбора показателей λ_k и определения преобразования Лапласа легко показать (простым дифференцированием равенств (1.2)), что каждая функция из системы (1.4) является решением системы (1.2). Решения вида (1.4) называются *элементарными решениями* (1.2). Проблема фундаментального принципа

формулируется следующим образом: при каких условиях каждое решение системы (1.2) можно представить в виде абсолютно и равномерно сходящегося на каждом компакте из D ряда элементарных решений:

$$\varphi(z) = \sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} c_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z)? \quad (1.5)$$

Аналогичная проблема имеет место и для более общих инвариантных подпространств. Поясним, какие функции здесь являются функциями из системы (1.4). Пусть $\text{ort } W$ – подпространство в $H^*(D)$, состоящее из всех функционалов, обращающихся в нуль на каждом элементе из W . Если W не тривиально, то и $\text{ort } W$ также не тривиально. Через $I_W(D)$ обозначим подпространство в $\mathbf{P}_D$, состоящее из преобразований Лапласа всех функционалов из $\text{ort } W$. Пусть $\{\lambda_k, m_k\}$ – последовательность всех общих нулей и их кратностей функций из $I_W(D)$. Легко видеть, что если W – пространство решений системы вида (1.2), то последовательность $\{\lambda_k, m_k\}$, определенная выше по функциям $f_1, \dots, f_p$, совпадает с аналогичной последовательностью, определенной по всем $f \in I_W(D)$. По $\{\lambda_k, m_k\}$ построим систему функций (1.4). Каждый функционал $\mu \in \text{ort } W$ обращается в нуль на этой системе (это можно проверить, дифференцируя равенство из определения преобразования Лапласа). Поэтому любая функция из (1.4) принадлежит W (по следствию из теоремы Хана–Банаха). Проблема фундаментального принципа для инвариантных подпространств формулируется следующим образом: при каких условиях каждую функцию из W можно разложить в ряд (1.5)?

Заметим, что последовательность $\{\lambda_k\}$ является спектром оператора дифференцирования в подпространстве W . При этом $\exp(\lambda_k z)$ являются собственными функциями, а $z^n \exp(\lambda_k z)$, $n = 1, \dots, m_k - 1$, – присоединенными функциями оператора дифференцирования в W . С учетом этого последовательность $\{\lambda_k, m_k\}$ иногда называют *спектром подпространства W* .

Задача описания инвариантных подпространств традиционно подразделяется на две подзадачи:

- 1) проблема спектрального синтеза;
- 2) проблема фундаментального принципа.

Первая состоит в нахождении условий, при которых линейная оболочка системы (1.4) плотна в W . В случае ее положительного решения говорят, что W допускает спектральный синтез. Вторую проблему, естественно, имеет смысл рассматривать лишь для инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез. Поэтому в дальнейшем мы будем иметь дело лишь с такими подпространствами. В этой связи отметим следующее. Известно [3], что ядро оператора свертки, т. е. пространство решений одного однородного сверточного уравнения, всегда допускает спектральный синтез. Пространства решений систем однородных уравнений свертки уже не всегда допускают спектральный синтез. Однако имеются простые достаточные условия, а также критерий допустимости спектрального синтеза и в этом случае (см. [4] и [5]). В этих же работах получен критерий допустимости спектрального синтеза и в более общем случае – для произвольных нетривиальных замкнутых инвариантных подпространств.

Первый результат, обобщающий фундаментальный принцип Л. Эйлера на случай уравнений свертки, более общих, чем дифференциальные уравнения конечного

порядка с постоянными коэффициентами, был получен Ж. Валироном [6]. Он касается представления целых решений однородного дифференциального уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами в виде ряда по элементарным решениям. Этот результат получил дальнейшее развитие в работах [7]–[9] и др. К концу 40-х годов прошлого столетия была замечена тесная связь между проблемой представления решений однородных уравнений свертки и проблемой интерполяции в пространствах целых функций. Оказалось, что эти проблемы двойственные. Первый, кто использовал разрешимость интерполяционной задачи для разложения решений уравнения свертки в ряды экспонент, был, по-видимому, А. Ф. Леонтьев. Вслед за ним указанная связь использовалась уже систематически. Проблема интерполяции в пространствах целых функций сама по себе представляет значительный интерес и уже давно исследуется. Теория интерполяции аналитическими функциями, развитие которой началось в работах Ньютона и Лагранжа, является важной областью современного анализа. Интерес к этой тематике обусловлен обширной сферой ее приложений в вопросах полноты систем аналитических функций, в теории дифференциальных уравнений, уравнений свертки, краевых задачах, задачах оптимального управления и других областях математики. Вопросами интерполирования в классах целых функций конечного порядка занимались многие математики. Отметим исследования А. О. Гельфонда [10], В. Л. Гончарова [11], М. А. Евграфова [12], Б. Я. Левина [13], А. Ф. Леонтьева [14]–[18], И. И. Ибрагимова [19], И. И. Ибрагимова и М. В. Келдыша [20], Ю. А. Казьмина [21]–[23], Ю. Ф. Коробейника [24], [25] и др.

В общей постановке задача интерполяции состоит в следующем. На линейном пространстве Q заданы линейные функционалы μ_k , $k \geq 1$. Для последовательности чисел $\{b_k\}$ требуется найти элемент $f \in Q$, который удовлетворяет условиям

$$\mu_k(f) = b_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Пусть в комплексной плоскости задана последовательность попарно различных точек $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ (узлов интерполяции), $|\lambda_k| \rightarrow +\infty$. Пусть μ_k , $k \geq 1$, – последовательность функционалов, определенных формулами

$$\mu_k(f) = g(\lambda_k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

Ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k E(z)}{(z - \lambda_k) E'(\lambda_k)}, \quad (1.8)$$

где $E(z)$ – целая функция с простыми нулями в узлах λ_k , называется *рядом Лагранжа*. Он является интерполяционным рядом для задачи (1.6), (1.7). Первый общий результат по проблеме интерполяции в пространствах целых функций конечного порядка был получен в 1940 г. Б. Я. Левиным [13]. Он рассмотрел задачу (1.6), (1.7) с узлами, образующими регулярное множество (см. [26, гл. 2]). В этом случае вне некоторого исключительного множества функция $E(z)$ удовлетворяет асимптотическому равенству

$$\ln |E(z)| \approx h(\varphi) r^{\rho(r)},$$

где $z = r \exp(i\varphi)$, $\rho(r)$ – уточненный порядок функции $E(z)$ (см. [26]) и $h(\varphi)$ – ее индикатор. Это равенство позволило доказать, что при условии

$$\ln |b_k| \leq (h(\arg \lambda_k) + \varepsilon) |\lambda_k|^{\rho(|\lambda_k|)} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad k > k(\varepsilon),$$

ряд (1.8) сходится равномерно на каждом компакте, а его сумма является целой функцией класса $[\rho(r), h(\varphi)]$, т.е. функцией, индикатор которой меньше или равен $h(\varphi)r^{\rho(r)}$. Далее при решении интерполяционной задачи используются различные обобщения ряда Лагранжа.

В 1948 г. А. Ф. Леонтьев [14] впервые рассмотрел задачу, получившую затем название *задачи свободной интерполяции*: определить, каким условиям должна удовлетворять последовательность узлов $\{\lambda_k\}$ для того, чтобы по каждой последовательности чисел $\{b_k\}$, удовлетворяющих неравенству

$$\ln |b_k| \leq |\lambda_k|^{\rho+\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad k > k(\varepsilon),$$

можно было построить целую функцию класса $[\rho, \infty]$, т.е. функцию порядка не выше ρ (конечного или бесконечного типа), решающую интерполяционную задачу. А. Ф. Леонтьев, используя обобщенный ряд Лагранжа, полностью решил эту задачу. Ранее некоторые достаточные условия разрешимости задачи (1.6), (1.7) в пространстве $[\rho, \infty]$ нашли М. Мурси, Е. Уинн [27] и А. Макинтайр, Р. Уилсон [28]. А. Ф. Леонтьев рассмотрел также задачу свободной интерполяции в классе $[\rho, \infty)$, т.е. когда числа последовательности $\{b_k\}$ удовлетворяют неравенству $\ln |b_k| \leq A + C|\lambda_k|^\rho$, а искомая целая функция должна иметь порядок не выше ρ и конечный тип. Он решил эту задачу для нецелого ρ в работе [15] и в общем случае – в работе [17]. В дальнейшем идеи Б. Я. Левина и А. Ф. Леонтьева развивались в работах [29]–[31]. Полностью задача свободной (простой) интерполяции в классе $[\rho(r), h(\varphi)]$ была решена в работах [32]–[35].

Наряду с простой интерполяцией рассматривалась также задача кратной интерполяции, когда в роли функционалов из (1.6) выступают не только δ -функции, но и их производные. Пусть задана последовательность $\{\lambda_k, m_k\}$, где $|\lambda_k| \rightarrow +\infty$ и m_k – натуральные числа. Для любой последовательности комплексных чисел $\{b_{k,n}\}_{k=1, n=1}^{\infty, m_k}$ заданного роста требуется найти целую функцию $f(z)$ заданного класса, обладающую дополнительным свойством

$$f^{(n-1)}(\lambda_k) = b_{k,n}, \quad n = 1, \dots, m_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

Одним из первых эту задачу в классе $[\rho, \infty]$ при некоторых специальных предположениях относительно узлов интерполяции решил М. Мурси [36]. Г. П. Лапин [37], [38] перенес результаты А. Ф. Леонтьева о свободной интерполяции в классах $[\rho, \infty]$ и $[\rho, \infty)$ на задачу о кратной интерполяции. Дальнейшее свое развитие эта задача получила в работах [39]–[43]. Полностью задача кратной интерполяции в классах $[\rho(r), H(\varphi)]$ была решена в [44] при наличии следующего ограничения на кратность m_k точек λ_k :

$$|\lambda_k|^{-\rho(|\lambda_k|)} m_k \ln |\lambda_k| \rightarrow 0.$$

В работе [46] эта же задача решена при более слабом ограничении на кратность:

$$|\lambda_k|^{-\rho(|\lambda_k|)} m_k \rightarrow 0.$$

Задача кратной интерполяции в классах $[\rho(r), H(\varphi)]$ оказалась, по-видимому, сложнее. В настоящее время известны лишь некоторые достаточные условия для этих классов, а в случае ограниченной функции $H(\varphi)$ и некоторые необходимые условия, не совпадающие с достаточными (см. [45], [46]). Критерий для ограниченной функции $H(\varphi)$ получается лишь при дополнительном жестком ограничении на последовательность $\{\lambda_k, m_k\}$. В случае неограниченной $H(\varphi)$ ситуация еще сложнее. К примеру, при $\rho(r) \equiv 1$, т.е. в классах $\mathbf{P}_D = [1, H_D)$, критерий разрешимости кратной интерполяционной задачи (впрочем, как и простой) известен лишь для $D = \mathbb{C}$, т.е. в классе $[1, \infty)$ (см. [45]). Существует также критерий, когда D является полуплоскостью или полосой, но лишь в случае, когда последовательность $\{\lambda_k\}$ сосредоточена вдоль прямой, перпендикулярной граничным прямым [46].

Отметим еще работу [47], где решена интерполяционная задача в так называемых алгебрах Хермандера, которые являются обобщением пространства $[\rho, \infty)$. Никаких новых результатов по интерполяции для пространств целых функций конечного порядка эта работа не содержит. Однако в ней, одной из первых, предложен новый метод интерполяции, который основан не на интерполяционном ряде Лагранжа или на каких-либо его обобщениях, а на разрешимости $\bar{\partial}$ -уравнения с оценками.

Отметим один (на наш взгляд, существенный) общий недостаток всех работ по кратной интерполяции. Это – неудачный выбор классов последовательностей $\{b_{k,n}\}$, элементы которых стоят в правой части (1.9). Выбор того или иного класса обусловлен оценками на производные $f^{(n-1)}(\lambda_k)$ функций $f \in [\rho(r), H(\varphi)]$ ($[\rho(r), H(\varphi))$). При получении этих оценок использовались неравенства Коши. Последние, безусловно, точные на всем классе целых функций, являются довольно грубыми на классе целых функций конечного порядка, который участвует в интерполяции. Применение неравенств Коши необоснованно расширяет класс правых частей в (1.9), что приводит к искусственным ограничениям на кратность m_k точек λ_k . Этих ограничений удалось избежать лишь автору работы [46], но при этом класс правых частей в (1.9) выглядит здесь еще более искусственным, чем в других работах. Выбор такого класса обусловлен, по-видимому, техникой доказательств, используемой в [46]. Далее мы покажем, что при ограничениях на кратность, которые предполагаются в работах предшественников, пространство правых частей может выглядеть более естественным, если оценки, определяющие это пространство, освободить от некоторых “технических” сомножителей.

В настоящей работе мы исследуем кратную интерполяционную задачу в пространствах $[1, H_D) = \mathbf{P}_D$. Для ее решения предлагается усовершенствованный метод, использующий $\bar{\partial}$ -технику. Прежде всего, вводится естественное пространство последовательностей $\{b_{k,n}\}$. Оценки на рост этих последовательностей соответствуют точным оценкам производных целых функций экспоненциального типа, которые выводятся не из общих неравенств Коши, а из интегральных представлений, присущих только таким функциям. При таком же ограничении кратности, как и в [46] ($m_k |\lambda_k|^{-1} \rightarrow 0$), мы полностью решаем кратную интерполяционную задачу в пространствах $\mathbf{P}_D$ для любой (ограниченной или неограниченной) выпуклой области D . На этой основе при том же ограничении кратности дается полное решение проблемы фундаментального принципа для произвольных нетривиальных

замкнутых инвариантных подпространств функций, аналитических в выпуклых областях комплексной плоскости, допускающих спектральный синтез. Однако, в отличие от [46], мы обосновываем указанное ограничение кратности, показывая, что оно необходимо для фундаментального принципа в достаточно большом числе случаев. Отметим еще, что нас не интересовал случай более общих пространств $[\rho(r), H(\varphi)]$, так как основной в настоящей работе является проблема фундаментального принципа. По-видимому, преодолев некоторые технические сложности, результат настоящей работы можно перенести и на эти пространства.

Работа состоит из шести параграфов. В §2 устанавливается эквивалентность разрешимости кратной интерполяционной задачи и фундаментального принципа. В §3, 4 доказываются соответственно достаточные и необходимые условия интерполяции. В §5 приводятся различные критерии интерполяции и фундаментального принципа. Наконец, в §6 рассматриваются некоторые примеры.

§2. Интерполяция и фундаментальный принцип

Пусть $\{\lambda_k\}$ – последовательность (конечная или бесконечная; в последнем случае $|\lambda_k| \rightarrow \infty$) различных комплексных чисел, $m_k, k \geq 1$, – натуральные числа. Рассмотрим кратную интерполяционную задачу

$$f^{(n-1)}(\lambda_k) = b_{k,n}, \quad n = 1, \dots, m_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Найдем, прежде всего, естественные оценки на комплексную последовательность $\{b_{k,n}\}$ при условии, что функция f принадлежит пространству $\mathbf{P}_D$. Пусть $\{K_m\}$ – последовательность выпуклых компактов из области D такая же, как и в начале работы. Для каждого $m, k \geq 1$ и $n = 1, \dots, m_k$ положим

$$c_{m,k,n} = \sup_{z \in K_m} |z^{n-1} \exp(z\lambda_k)|.$$

Через $\tilde{\Phi}$ обозначим индуктивный предел банаховых пространств

$$\tilde{\Phi}_m = \left\{ b = \{b_{k,n}\} : \|b\|_m^* = \sup_{k,n} |b_{k,n}| c_{m,k,n}^{-1} < \infty \right\}.$$

На пространстве $\mathbf{P}_D$ определим линейный оператор $\tilde{\Sigma}$ так, что каждой функции f он ставит в соответствие последовательность

$$b = \{b_{k,n}\} = \{f^{(n-1)}(\lambda_k)\}.$$

Через $\mathbf{S}$ обозначим единичную окружность с центром в нуле.

ЛЕММА 2.1. *Для каждой $f \in \mathbf{P}_D$ последовательность $b = \tilde{\Sigma}(f)$ принадлежит пространству $\tilde{\Phi}$. Оператор $\tilde{\Sigma}: \mathbf{P}_D \rightarrow \tilde{\Phi}$ непрерывен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \mathbf{P}_m \subset \mathbf{P}_D$. Из определений индикатора h_f и пространства $\mathbf{P}_m$ легко следует, что верно неравенство $h_f(z) \leq H_{K_m}(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Оно означает, что сопряженная диаграмма функции f (т.е. выпуклый компакт, опорная функция которого совпадает с h_f) лежит на K_m . Тогда контур ∂K_{m+1} , охватывая компакт K_m , будет охватывать также и сопряженную диаграмму. Следовательно, имеет место интегральное представление целой функции экспоненциального типа (см. [48, гл. 1, § 5, теорема 5.2])

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K_{m+1}} \exp(z\lambda) \gamma(z) dz,$$

где γ – ассоциированная по Борелю функция к функции f . Отсюда, дифференцируя под знаком интеграла, для любых $k = 1, 2, \dots$ и $n = 1, \dots, m_k$ имеем

$$|f^{(n-1)}(\lambda_k)| \leq (2\pi)^{-1} \sup_{z \in K_{m+1}} |z^{n-1} \exp(z\lambda_k)| \sup_{z \in \partial K_{m+1}} |\gamma(z)| l_{m+1}, \quad (2.1)$$

где l_{m+1} – длина контура ∂K_{m+1} . Это неравенство влечет за собой включение $\tilde{\Sigma}(f) \in \tilde{\Phi}_{m+1} \subset \tilde{\Phi}$. Докажем теперь непрерывность $\tilde{\Sigma}$. Для этого необходимо оценить γ во всех точках контура ∂K_{m+1} . Пусть $z_0 \in \partial K_{m+1}$. Через каждую граничную точку выпуклого компакта K_{m+1} проходит хотя бы одна опорная прямая. Другими словами, найдется $\xi \in \mathbf{S}$ такое, что $H_{K_{m+1}}(\xi) = \operatorname{Re}(z_0\xi)$. В полуплоскости $\{y: \operatorname{Re}(y\xi) > h_f(\xi)\}$ имеет место интегральное представление ассоциированной функции (см. [48, гл. 1, § 5, теорема 5.3])

$$\gamma(y) = \int_0^{+\infty} \xi f(t\xi) \exp(-yt\xi) dt.$$

Поскольку $\operatorname{Re}(z_0\xi) = H_{K_{m+1}}(\xi) > H_{K_m}(\xi) \geq h_f(\xi)$, то оно выполнено и в точке z_0 . Следовательно, с учетом включения $f \in \mathbf{P}_m \subset \mathbf{P}_D$ и неравенства (1.1) имеем

$$\begin{aligned} |\gamma(z_0)| &\leq \int_0^{+\infty} |f(t\xi)| \exp(\operatorname{Re}(-z_0t\xi)) dt \\ &\leq \|f\|_m \int_0^{+\infty} \exp(H_{K_m}(t\xi) - \operatorname{Re}(z_0t\xi)) dt \\ &= \|f\|_m \int_0^{+\infty} \exp(tH_{K_m}(\xi) - tH_{K_{m+1}}(\xi)) dt \\ &\leq \|f\|_m \int_0^{+\infty} \exp(-\alpha_m t) dt = \|f\|_m \alpha_m^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенства (2.1) получаем

$$\|\tilde{\Sigma}(f)\|_{m+1}^* \leq C \|f\|_m,$$

где $C > 0$ зависит лишь от m . Оператор $\tilde{\Sigma}$ непрерывен на индуктивном пределе $\mathbf{P}_D$, если его сужение на любое $\mathbf{P}_m$ непрерывно (см. [49, гл. 5, § 2, предложение 5]). Так как $\tilde{\Sigma}$ переводит пространство $\mathbf{P}_m$ в $\tilde{\Phi}_{m+1}$, то непрерывность $\tilde{\Sigma}: \mathbf{P}_D \rightarrow \tilde{\Phi}$ следует из непрерывности отображения $\tilde{\Sigma}: \mathbf{P}_m \rightarrow \tilde{\Phi}_{m+1}$, которая имеет место в силу последнего неравенства. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Рост весовых последовательностей, определяющих пространство $\tilde{\Phi}$, нельзя уменьшить. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть функции $f(\lambda) = \exp(\lambda z)$, $z \in D$. Действительно, если $z \in K_m$ – точка, в которой достигается супремум функции $|y^{n-1} \exp(y\lambda_k)|$ по компакту K_m , то верно равенство

$$|f^{(n-1)}(\lambda_k)| = |z^{n-1} \exp(z\lambda_k)| = \sup_{y \in K_m} |y^{n-1} \exp(y\lambda_k)|.$$

Пусть Λ – последовательность $\{\lambda_k, m_k\}$, а $I_\Lambda(D)$ – ядро оператора $\tilde{\Sigma}: \mathbf{P}_D \rightarrow \tilde{\Phi}$. Тогда $I_\Lambda(D)$ – замкнутое подпространство в $\mathbf{P}_D$, состоящее из всех тех и только тех функций, которые обращаются в нуль (по крайней мере) в точках λ_k с кратностью, не меньшей, чем m_k . В рассматриваемой ситуации можно предполагать, что $I_\Lambda(D)$ нетривиально. Действительно, если иметь в виду, что Λ – спектр нетривиального инвариантного подпространства, то $I_\Lambda(D)$ необходимо содержит нетривиальное подпространство $I_W(D)$. Каждая функция $f \in I_W(D)$ является преобразованием Лапласа функционала ν , который обращается в нуль на W и, в частности, на элементах системы (1.4). Поэтому, дифференцируя равенство из определения преобразования Лапласа, получаем

$$f^{(n)}(\lambda_k) = (\nu, z^n \exp(z\lambda_k)) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad n = 0, 1, \dots, m_k - 1,$$

т. е. $f \in I_\Lambda(D)$. Таким образом, в дальнейшем считаем, что $I_\Lambda(D) \neq \{0\}$.

Факторпространство $\mathbf{P}_D/I_\Lambda(D)$, как и $\mathbf{P}_D$, является $\mathbf{LN}^*$ -пространством и представляет собой объединение возрастающей последовательности банаховых пространств $\tilde{\mathbf{P}}_m$. Элемент $[f] \in \mathbf{P}_D/I_\Lambda(D)$ принадлежит $\tilde{\mathbf{P}}_m$ тогда и только тогда, когда некоторый представитель $g \in \mathbf{P}_D$ класса эквивалентности $[f]$ принадлежит $\mathbf{P}_m$. При этом норма $\|[f]\|_m$ равна инфимуму норм $\|g\|_m$ по всем представителям $g \in \mathbf{P}_m$ класса $[f]$. Оператор $\tilde{\Sigma}$ обычным образом порождает оператор Σ , действующий из $\mathbf{P}_D/I_\Lambda(D)$ в $\tilde{\Phi}$. Отображение

$$\Sigma: \mathbf{P}_D/I_\Lambda(D) \rightarrow \tilde{\Phi} \quad (2.2)$$

является уже инъективным, а также непрерывным в силу леммы 2.1 и определения фактортопологии. Таким образом, верно следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *Оператор (2.2) непрерывен и инъективен.*

Для последовательности Λ и подмножества E окружности $\mathbf{S}$ через $\Lambda(E)$ обозначим подпоследовательность $\{\lambda_{k_j}, m_{k_j}\}$ последовательности Λ , состоящую из всех членов $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$ таких, что $\lambda_k/|\lambda_k| \in E$. Положим $m(\Lambda(E)) = 0$, если $\Lambda(E)$ содержит конечное число элементов, и $m(\Lambda(E)) = \lim_{j \rightarrow \infty} m_{k_j}/|\lambda_{k_j}|$ в противном случае. Легко видеть, что

$$m(\Lambda(E_1)) \leq m(\Lambda(E_2)), \quad E_1 \subseteq E_2. \quad (2.3)$$

Если $E = \mathbf{S}$, то вместо $m(\Lambda(E))$ будем записывать $m(\Lambda)$. Отметим, что каждое λ_k является нулем (кратности, не меньшей, чем m_k) любой $f \in I_\Lambda(D)$. Поскольку f имеет экспоненциальный тип, то, например, из [48, гл. 1, теорема 2.3] следует, что $m(\Lambda) < +\infty$. Для выпуклой области D введем множество

$$J(D) = \{z: H_D(z) = +\infty\}.$$

Из выпуклости и однородности функции H_D следует, что $\mathbb{C} \setminus J(D)$ является углом раствора не больше π , за исключением трех следующих случаев:

- 1) $\mathbb{C} \setminus J(D)$ – вся плоскость, если D ограничена;
- 2) $\mathbb{C} \setminus J(D)$ – луч, если D – полуплоскость;
- 3) $\mathbb{C} \setminus J(D)$ – прямая, если D – полоса.

Пусть F – компактное подмножество $\mathbf{S}$. Для $D \neq \mathbb{C}$ положим

$$m_F(\Lambda) = \inf_{E \supset F} m(\Lambda(E)), \quad m_D(\Lambda) = \sup_{F \subset (\mathbf{S} \setminus J(D))} m_F(\Lambda),$$

где инфимум берется по всем открытым на $\mathbf{S}$ множествам $E \supset F$, а супремум – по всем компактным подмножествам $F \subset (\mathbf{S} \setminus J(D))$.

Наряду с пространствами $\tilde{\Phi}_m$ и $\tilde{\Phi}$ рассмотрим еще пространства последовательностей с более простыми весами:

$$\Phi_m = \left\{ b = \{b_{k,n}\} : \|b\|_m = \sup_{k,n} |b_{k,n}| \exp(-H_{K_m}(\lambda_k)) < \infty \right\},$$

$$\Phi = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{ind } \Phi_m.$$

Нетрудно видеть (в силу (1.1)), что вложения $\Phi_m \subset \Phi_{m+1}$, $m = 1, 2, \dots$, вполне непрерывны. Поэтому Φ является $\mathbf{LN}^*$ -пространством.

Через $B(x, \delta)$ обозначим круг с центром x радиуса δ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $m_D(\Lambda) = 0$. Тогда множества Φ и $\tilde{\Phi}$ совпадают, а топологии Φ и $\tilde{\Phi}$ эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что для каждого $m = 1, 2, \dots$ найдутся номер $p = 1, 2, \dots$ и постоянная $A > 0$ такие, что

$$\exp(H_{K_m}(\lambda_k)) \leq A c_{p,k,n} \quad \forall k = 1, 2, \dots, \quad \forall n = 1, \dots, m_k. \quad (2.4)$$

Предположим, что (2.4) неверно. Тогда для каждого $p = 1, 2, \dots$ найдутся $k_p = 1, 2, \dots$ и $n_p = 1, \dots, m_{k_p}$ такие, что выполнено неравенство

$$\exp(H_{K_m}(\lambda_{k_p})) > p c_{p,k_p,n_p}. \quad (2.5)$$

В силу вложений $K_p \subset \text{int } K_{p+1}$ величина $c_{p,k,n}$ возрастает с увеличением p (при неизменных k и n). Следовательно, если $\{\lambda_{k_p}\}$ содержит бесконечное число одинаковых членов, равных, например, λ_k , то в силу последнего неравенства имеем $\exp(H_{K_m}(\lambda_{k_p})) = +\infty$, что невозможно, поскольку K_m – компакт. Таким образом, переходя к подпоследовательности, можно полагать, что $k_p \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow \infty$. Кроме того, можно также полагать, что $\{\lambda_{k_p} |\lambda_{k_p}|^{-1}\}$ сходится к некоторому $x_0 \in \mathbf{S}$. Пусть вначале $x_0 \in J(D)$. Из определений H_D и $J(D)$ следует, что для некоторого $z_0 \in D$ верна оценка

$$\text{Re}(z_0 x_0) > \max\{1, H_{K_m}(x_0)\}.$$

Тогда $|z_0| > 1$, а с учетом непрерывности H_{K_m} найдется $\delta > 0$ такое, что

$$\text{Re}(z_0 x) > H_{K_m}(x), \quad x \in B(x_0, \delta).$$

Выберем номер p_0 так, что $\lambda_{k_p}/|\lambda_{k_p}| \in B(x_0, \delta)$ для всех $p \geq p_0$. Пусть K_p , $p \geq p_0$, — один из компактов, содержащих z_0 (такой необходимо существует, поскольку последовательность $\{K_p\}$ исчерпывает D). Тогда с учетом положительной однородности опорной функции получаем

$$\begin{aligned} c_{p,k_p,n_p} &= \sup_{z \in K_p} |z^{n_p} \exp(\lambda_{k_p} z)| \geq |z_0^{n_p} \exp(\lambda_{k_p} z_0)| \\ &> \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k_p} z_0)) > \exp(H_{K_m}(\lambda_{k_p})). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Это противоречит неравенству (2.5). Пусть теперь $x_0 \notin J(D)$ и z_0 — граничная точка K_{m+1} , для которой выполнено равенство $\operatorname{Re}(z_0 x_0) = H_{K_{m+1}}(x_0)$. Если $z_0 = 0$, то вместо K_{m+1} возьмем компакт K_{m+2} , граница которого уже не будет содержать начала координат, так как $K_{m+1} \subset \operatorname{int} K_{m+2}$. В силу неравенства (1.1) найдем $\delta > 0$ такое, что

$$\operatorname{Re}(z_0 x) > H_{K_m}(x) + \frac{\alpha_m |x|}{2}, \quad x \in B(x_0, \delta).$$

По условию $m_D(\Lambda) = 0$. Следовательно, $m_F(\Lambda) = 0$, где $F = \{x_0\}$. Тогда в силу определения величины $m_F(\Lambda)$ и сходимости $\{\lambda_{k_p} |\lambda_{k_p}|^{-1}\}$ к x_0 для каждого $\varepsilon > 0$ найдется номер p_0 такой, что $m_{k_p} \leq \varepsilon |\lambda_{k_p}|$ для всех $p > p_0$. Фиксируем $\varepsilon > 0$ такое, что $\varepsilon \ln |z_0| > -\alpha_m/2$, и $p > \max(p_0, m+1)$ такое, что $\lambda_{k_p}/|\lambda_{k_p}| \in B(x_0, \delta)$. Тогда $z_0 \in K_p$ и мы получаем

$$\begin{aligned} c_{p,k_p,n_p} &= \sup_{z \in K_p} |z^{n_p} \exp(\lambda_{k_p} z)| \geq |z_0^{n_p} \exp(\lambda_{k_p} z_0)| \\ &= \exp(n_p \ln |z_0| + \operatorname{Re}(\lambda_{k_p} z_0)) > \exp(-n_p \alpha_m (2\varepsilon)^{-1} + \operatorname{Re}(\lambda_{k_p} z_0)) \\ &> \exp(-2^{-1} \alpha_m |\lambda_{k_p}| + H_{K_m}(\lambda_{k_p}) + 2^{-1} \alpha_m |\lambda_{k_p}|) = \exp(H_{K_m}(\lambda_{k_p})). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Это снова противоречит неравенству (2.5).

Таким образом, неравенство (2.4) выполнено. Используя его, получаем

$$\|b\|_p^* = \sup_{k,n} |b_{k,n}| c_{p,k,n}^{-1} \leq A \sup_{k,n} |b_{k,n}| \exp(-H_{K_m}(\lambda_k)) = A \|b\|_m \quad \forall b \in \Phi_m.$$

Отсюда следует, что Φ вложено в $\tilde{\Phi}$ и это вложение непрерывно.

Остается показать, что имеет место обратное вложение и оно также непрерывно. Для этого достаточно установить неравенство

$$c_{m,k,n} \leq C \exp(H_{K_p}(\lambda_k)) \quad \forall k = 1, 2, \dots, \quad \forall n = 1, \dots, m_k, \quad (2.8)$$

где p зависит только от m . Предположим противное. Тогда

$$c_{m,k_p,n_p} > p \exp(H_{K_p}(\lambda_{k_p})). \quad (2.9)$$

Как и выше, можно полагать, что $k_p \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow \infty$ и $\{\lambda_{k_p}/|\lambda_{k_p}|\}$ сходится к некоторой точке $x_0 \in \mathbf{S}$. Пусть $x_0 \in J(D)$. Через y_0 обозначим точку компакта K_m с максимальным модулем. Тогда

$$c_{m,k_p,n_p} \leq |y_0|^{n_p} \exp(H_{K_m}(\lambda_{k_p})) \leq \exp(m_{k_p} |\ln |y_0|| + H_{K_m}(\lambda_{k_p})).$$

Как уже отмечалось ранее, величина $m(\Lambda)$ конечна. Следовательно, $m_k \leq \beta|\lambda_k|$, $k = 1, 2, \dots$. Таким образом,

$$c_{m,k_p,n_p} \leq \exp(\beta|\lambda_{k_p}| |\ln |y_0|| + H_{K_m}(\lambda_{k_p})).$$

Согласно определениям функции H_{K_m} и множества $J(D)$ найдем $z_0 \in D$ такое, что

$$\operatorname{Re}(z_0 x_0) > \beta |\ln |y_0|| + H_{K_m}(x_0).$$

По непрерывности эта оценка продолжается в некоторую окрестность x_0 :

$$\operatorname{Re}(z_0 x) > \beta |\ln |y_0|| |x| + H_{K_m}(x), \quad x \in B(x_0, \delta).$$

Выберем номер p так, что компакт K_p содержит z_0 и $\lambda_{k_p}/|\lambda_{k_p}| \in B(x_0, \delta)$. Отсюда и из одноуровневости опорной функции получаем

$$H_{K_p}(\lambda_{k_p}) \geq \operatorname{Re}(z_0 \lambda_{k_p}) > \beta |\lambda_{k_p}| |\ln |y_0|| + H_{K_m}(\lambda_{k_p}) \geq \ln c_{m,k_p,n_p}.$$

Это противоречит неравенству (2.9). Случай $x_0 \notin J(D)$ разбирается аналогично. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. В [46] при определении пространств последовательностей, аналогичных Φ , в роли $c_{m,k,n}$ выступают величины $n! |\lambda_k|^{-n} \exp(H_{K_m}(\lambda_k))$. При этом налагается ограничение на кратность, более жесткое (для неограниченной области D), чем в настоящей работе: $m(\Lambda) = 0$. Это ограничение обеспечивает изоморфность пространства последовательностей из [46] и пространства Φ . Чтобы показать это, достаточно установить оценки

$$\exp(-\varepsilon(k)|\lambda_k|) \leq |\lambda_k|^{-n} n! \leq \exp(\varepsilon(k)|\lambda_k|), \quad (2.10)$$

где $\varepsilon(k) \rightarrow 0$, когда $k \rightarrow \infty$. Имеем

$$\frac{n!}{|\lambda_k|^n} \leq \frac{n^n}{|\lambda_k|^n} \leq \left(\frac{m_k}{|\lambda_k|}\right)^n \leq \left(\frac{\beta|\lambda_k|}{|\lambda_k|}\right)^n \leq \beta^{m_k} \leq \exp(\varepsilon(k)|\lambda_k|).$$

Последнее неравенство здесь следует из того, что $m(\Lambda) = 0$. Кроме того, как и в предложении 2.4, мы пользуемся оценкой $m_k \leq \beta|\lambda_k|$ (где, не ограничивая общности, считаем, что $\beta > 1$). Получаем правое неравенство из (2.10). Докажем теперь левое. Учитывая то, что $m(\Lambda) = 0$ и функция $x^{-1} \ln(3x)$ убывает при $x > 1$, имеем

$$|\lambda_k|^{-1} \ln \left(\frac{|\lambda_k|^n}{n!} \right) \leq |\lambda_k|^{-1} \ln \left(\frac{3^n |\lambda_k|^n}{n^n} \right) = n |\lambda_k|^{-1} \ln \left(\frac{3|\lambda_k|}{n} \right) \leq a_k^{-1} \ln(3a_k) \rightarrow 0,$$

где $a_k = |\lambda_k|/m_k \rightarrow +\infty$. Отсюда следует левое неравенство из (2.10).

В других работах по кратной интерполяции в качестве $c_{m,k,n}$ используют величины $n! \exp(H_{K_m}(\lambda_k))$. При этом предполагается следующее более жесткое ограничение на кратность: $|\lambda_k|^{-1} m_k \ln |\lambda_k| \rightarrow 0$. Возникающие при этом пространства последовательностей также изоморфны Φ . В самом деле, верны оценки

$$|\lambda_k|^{-1} \ln n! \leq |\lambda_k|^{-1} \ln(m_k!) \leq |\lambda_k|^{-1} m_k \ln m_k \leq |\lambda_k|^{-1} m_k \ln(\beta|\lambda_k|) \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что $1 \leq n! \leq \exp(\varepsilon(k)|\lambda_k|)$, где $\varepsilon(k) \rightarrow 0$. Последнее и дает нам требуемый изоморфизм.

Таким образом, во всех работах предшественников по кратной интерполяции использовались пространства последовательностей, изоморфные пространству Φ , которое, безусловно, является более простым и естественным.

Обратимся теперь к представлению функций из инвариантного подпространства W со спектром Λ . Прежде всего, заметим, что если функция $\varphi \in W$ представляется рядом, сходящимся в топологии пространства $H(D)$:

$$\varphi(z) = \sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z), \quad (2.11)$$

то это представление единственное. Действительно, если имеется еще одно представление, то, вычитая одно из другого, получаем

$$0 \equiv \sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} d'_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z),$$

причем ряд сходится в $H(D)$. Пусть $\nu_{k,n}$, $k = 1, 2, \dots$, $n = 1, \dots, m_k$, — биортогональная к системе (1.4) последовательность функционалов из $H^*(D)$, т.е. $\nu_{k,n}(z^{p-1} \exp(\lambda_j z)) = 1$ при $k = j$, $n = p$ и $\nu_{k,n}(z^{p-1} \exp(\lambda_j z)) = 0$ в противном случае. Тогда в силу линейности и непрерывности функционалов $\nu_{k,n}$ имеем

$$0 = \nu_{j,i}(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{k=1, n=0}^{p, m_k-1} d'_{k,n} \nu_{j,i}(z^n \exp(\lambda_k z)) = d'_{j,i}.$$

Это противоречит тому, что разложения функции φ были разными. Таким образом, имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 2.6. *Если $\varphi \in W$ представляется рядом (2.11), сходящимся в топологии $H(D)$, то представление единственное, а его коэффициенты можно вычислить по формуле $d_{k,n} = \nu_{k,n}(\varphi)$, где $\{\nu_{k,n}\}$ — произвольная последовательность функционалов из $H^*(D)$, биортогональная к системе (1.4)*

Указанная последовательность функционалов всегда существует. Для ее построения проще всего найти сначала преобразования Лапласа $\{f_{k,n}\}$ этих функционалов. Функции $f_{k,n}$ можно построить, например, следующим образом. Фиксируем $k \geq 1$ и $n = 1, \dots, m_k$. Рассмотрим какую-нибудь функцию $f \in I_W(D)$, для которой $f^{(m_k)}(\lambda_k) \neq 0$ (такая f существует в силу выбора Λ). Положим

$$f_s(\lambda) = \frac{f(\lambda) m_k!}{(\lambda - \lambda_k)^{m_k - n + 1 - s} (s + n - 1)! f^{(m_k)}(\lambda_k)}, \quad s = 0, \dots, m_k - n.$$

Функция $f_s(\lambda)$ обращается в нуль в точке λ_k с кратностью $s + n - 1$, и выполнено равенство $f_s^{(s+n-1)}(\lambda_k) = 1$. Кроме того, $f_s(\lambda)$ обращается в нуль в точках λ_p с кратностью, не меньшей, чем m_p , для всех $p \neq k$. Положим далее

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1(\lambda) &= f_0(\lambda) - (f_0^{(n)}(\lambda_k))^{-1} f_1(\lambda), \\ \tilde{f}_s(\lambda) &= \tilde{f}_{s-1}(\lambda) - (\tilde{f}_{s-1}^{(s+n-1)}(\lambda_k))^{-1} f_s(\lambda), \quad s = 2, \dots, m_k - n. \end{aligned}$$

Тогда функция $f_{k,n}(\lambda) = \tilde{f}_{m_k-n}(\lambda)$ обращается в нуль в точках λ_p с кратностью, не меньшей, чем m_p , для всех $p \neq k$. Кроме того, $f_{k,n}^{(p)}(\lambda_k) = 0$ для всех $p = 0, \dots, n-2, n, \dots, m_k-1$ и $f_{k,n}^{(n-1)}(\lambda_k) = 1$. Таким образом, функция $f_{k,n}$ искомая.

Определим функционал $\nu_{k,n} \in H^*(D)$ по формуле

$$(\nu_{k,n}, g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} g(z) \gamma_{k,n}(z) dz, \quad g \in H(D),$$

где $\gamma_{k,n}(z)$ – функция, ассоциированная по Борелю с $f_{k,n}$, и $\Delta \subset D$ – контур, охватывающий сопряженную диаграмму функции $f_{k,n}$, или, что то же самое, выпуклую оболочку особенностей $\gamma_{k,n}$. Согласно интегральному представлению целой функции экспоненциального типа, которое мы уже использовали в лемме 2.1, преобразование Лапласа функционала $\nu_{k,n}$ совпадает с функцией $f_{k,n}$. Следовательно,

$$\nu_{k,n}(z^{p-1} \exp(\lambda_j z)) = f_{k,n}^{(p-1)}(\lambda_j).$$

Из построения $f_{k,n}$ вытекает, что $\{\nu_{k,n}\}$ – последовательность, биортогональная к (1.4).

Перейдем теперь к описанию последовательностей коэффициентов $\{d_{k,n}\}$, для которых в области D сходится ряд

$$\sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} d_{k,n} z^n \exp(\lambda_k z). \quad (2.12)$$

Для каждого $m = 1, 2, \dots$ введем банахово пространство

$$Q_m = \left\{ d = \{d_{k,n}\} : \|d\|_m = \sup_{k,n} |d_{k,n}| \exp(H_{K_m}(\lambda_k)) < \infty \right\}.$$

Пусть $Q = \bigcap_m Q_m$. В пространстве Q определим метрику по формуле

$$\rho(d, d') = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m} \min(1, \|d - d'\|_m).$$

Нетрудно видеть, что с этой метрикой Q становится пространством Фреше.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Пусть $m_D(\Lambda) = 0$. Тогда верны утверждения:

- 1) если ряд (2.12) сходится в каждой точке области D , то $d = \{d_{k,n}\} \in Q$;
- 2) для каждого $m = 1, 2, \dots$ найдутся номер $p = 1, 2, \dots$ и постоянная $C_0 > 0$ такие, что

$$\sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} |d_{k,n}| c_{m,k,n} \leq C_0 \|d\|_p \quad \forall d = \{d_{k,n}\} \in Q. \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что $d \notin Q$. Тогда для некоторого $m = 1, 2, \dots$ найдется подпоследовательность $\{d_{k_p, n_p}\}$ такая, что

$$|d_{k_p, n_p}| \exp(H_{K_m}(\lambda_{k_p})) > 1.$$

Переходя еще раз к подпоследовательности, можно считать, что $\lambda_{k_p}/|\lambda_{k_p}|$ сходится к некоторой точке $x_0 \in \mathbf{S}$. Тогда, как и при получении оценок (2.6) и (2.7) в предложении 2.4, найдутся точка $z_0 \in D$ и номер p_0 такие, что

$$|z_0^{n_p} \exp(\lambda_{k_p} z_0)| > \exp(H_{K_m}(\lambda_{k_p})), \quad p \geq p_0.$$

Следовательно, с учетом предыдущего неравенства получаем

$$|d_{k_p, n_p}| |z_0^{n_p} \exp(\lambda_{k_p} z_0)| > |d_{k_p, n_p}| \exp(H_{K_m}(\lambda_{k_p})) > 1.$$

Это противоречит сходимости ряда (2.12) в точке $z_0 \in D$. Таким образом, $d \in Q$.

2) Пусть $d = \{d_{k, n}\} \in Q$. В силу неравенства (2.8) с учетом (1.1) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} |d_{k, n}| c_{m, k, n} &\leq C \sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} |d_{k, n}| \exp(H_{K_p}(\lambda_k)) \\ &\leq C \sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} |d_{k, n}| \exp(H_{K_{p+1}}(\lambda_k) + H_{K_p}(\lambda_k) - H_{K_{p+1}}(\lambda_k)) \\ &\leq C \|d\|_{p+1} \sum_{k=1}^{\infty} m_k \exp(-\alpha_p |\lambda_k|). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Пусть $\{\lambda'_s\}$ – перенумерованная в порядке неубывания абсолютных величин последовательность $\{\lambda_k\}$, причем точка λ_k повторяется в ней столько раз, какова ее кратность, и $f \in I_\Lambda(D)$. Поскольку функция f имеет экспоненциальный тип и обращается в нуль в точках λ_k с кратностью, не меньшей, чем m_k , то в силу [48, гл. 1, теорема 2.3] для некоторого $A > 0$ будет выполнено неравенство $s \leq A |\lambda'_s|$, которое влечет за собой сходимость ряда $\sum_s \exp(-\alpha_p |\lambda'_s|)$, а вместе с ним и последнего ряда в (2.14). Предложение доказано.

Как следствие этого предложения, можно получить простую реализацию подпространства W , любой элемент которого разлагается в топологии $H(D)$ в ряд (2.12). Пусть $\mathbf{E}$ – оператор, который каждой $\varphi \in W$ ставит в соответствие последовательность $d = \{\nu_{k, n}(\varphi)\}$, где $\{\nu_{k, n}\} \subset H^*(D)$ биортогональна к системе (1.4). Отметим, что в общем случае (для подпространств, не допускающих спектральный синтез) оператор $\mathbf{E}$ зависит от $\{\nu_{k, p}\}$.

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Пусть $m_D(\Lambda) = 0$. Тогда эквивалентны утверждения:

1) каждая функция φ из замкнутого подпространства W разлагается в ряд (2.11), который сходится в топологии пространства $H(D)$;

2) отображение $\mathbf{E}$ устанавливает изоморфизм линейных топологических пространств W и Q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\rightarrow$ 2). Пусть $\varphi \in W$. По условию она разлагается в ряд (2.11), сходящийся в $H(D)$. Тогда по лемме 2.6

$$\mathbf{E}(\varphi) = \{\nu_{k,n}(\varphi)\} = \{d_{k,n}\},$$

а в силу утверждения 1) предложения 2.7 $\{d_{k,n}\} \in Q$. Поскольку разные функции имеют разные коэффициенты разложения, то оператор $\mathbf{E}: W \rightarrow Q$ инъективен. Пусть теперь $d = \{d_{k,n}\} \in Q$. Тогда в силу утверждения 2) предложения 2.7 ряд (2.12) сходится в D равномерно на компактах к некоторой функции $\varphi \in H(D)$. Поскольку подпространство W замкнуто и содержит все функции системы (1.4), то $\varphi \in W$. Применяя снова лемму 2.6, получаем $\{d_{k,n}\} = \{\nu_{k,n}(\varphi)\} = \mathbf{E}(\varphi)$. Таким образом, оператор $\mathbf{E}$ сюръективен. Из (2.13) следует, что для каждого $m \geq 1$

$$\sup_{z \in K_m} |\varphi(z)| \leq C_0 \|d\|_p \quad \forall d = \{d_{k,n}\} \in Q,$$

где p и C_0 зависят лишь от m . Это означает, что оператор $\mathbf{E}^{-1}$ непрерывен. Тогда по теореме об открытом отображении для пространств Фреше (см. [49, гл. VI, п. 3, теорема 8]) $\mathbf{E}$ является изоморфизмом.

2) $\rightarrow$ 1). Пусть $\varphi \in W$. По условию существует $d = \{d_{k,n}\} \in Q$ такое, что $\mathbf{E}(\varphi) = \{d_{k,n}\}$. Как и в первой части доказательства, ряд (2.12) сходится равномерно на компактах из D к некоторой функции $\varphi' \in W$, причем $\{d_{k,n}\} = \{\nu_{k,n}(\varphi')\} = \mathbf{E}(\varphi')$. Поскольку $\mathbf{E}$ — биекция, то $\varphi' = \varphi$. Следствие доказано.

При разложении функций из W в ряд (2.11) естественно возникает вопрос о выборе топологии, в которой должен сходиться этот ряд. Следующее утверждение показывает, что этот вопрос несуществен: слабая сходимость ряда (2.11) влечет за собой его сильную сходимость, более того, его абсолютную сходимость и специальную равномерную оценку ряда из абсолютных величин.

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Пусть $m_D(\Lambda) = 0$. Если любая функция φ замкнутого подпространства W разлагается в ряд (2.11), который сходится в каждой точке области D , то для любого $m = 1, 2, \dots$ выполнено неравенство

$$\sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} |d_{k,n}| \sup_{z \in K_m} |z^{n-1} \exp(\lambda_k z)| \leq A \sup_{y \in K_q} |\varphi(y)|, \quad \varphi \in W, \quad (2.15)$$

где номер q и постоянная $A > 0$ зависят лишь от m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изоморфизм между W и Q означает, в частности, что для каждого $p \geq 1$ верна оценка

$$\|\mathbf{E}(\varphi)\|_p = \|d\|_p \leq A_0 \sup_{y \in K_q} |\varphi(y)|, \quad \varphi \in W,$$

где номер q и $A > 0$ зависят лишь от p . С учетом этого неравенства требуемое утверждение сразу следует из предложения 2.7 и следствия 2.8.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.10. Базис (1.4), для которого выполнено (2.15), имеет несколько названий: *базис Кете*, *регулярный базис* и др.

Перейдем теперь к установлению эквивалентности разрешимости интерполяционной задачи и проблемы фундаментального принципа. Первым шагом в этом направлении будет следующее утверждение.

ЛЕММА 2.11. *Пусть система (1.4) является базисом Кете (т. е. выполнено неравенство (2.15)) в подпространстве $W \subset H(D)$. Тогда оператор (2.2) сюръективен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $b = \{b_{k,n}\} \in \tilde{\Phi}_D$. Выберем номер $m = 1, 2, \dots$ такой, что $b \in \tilde{\Phi}_m$. Тогда для некоторого $B > 0$ имеем

$$|b_{k,n}| \leq B c_{m,k,n}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad n = 1, \dots, m_k.$$

Поэтому в силу (2.15) для каждой функции $\varphi \in W$ сходится ряд $\sum_{k,n} d_{k,n} b_{k,n}$ (где $d_{k,n}$ – коэффициенты разложения φ) и верна оценка

$$\sum_{k=1, n=0}^{\infty, m_k-1} |d_{k,n}| |b_{k,n}| \leq BA \sup_{y \in K_q} |\varphi(y)|,$$

где q и $A > 0$ зависят лишь от m . Таким образом, на W определен линейный функционал $\nu(\varphi) = \sum_{k,n} d_{k,n} b_{k,n}$. По теореме Хана–Банаха его можно продолжить на все пространство $H(D)$ так, что будет выполнено неравенство

$$|\nu(\varphi)| \leq BA \sup_{y \in K_q} |\varphi(y)|, \quad \varphi \in H(D).$$

Отсюда сразу следует, что ν непрерывен на $H(D)$. Пусть f – преобразование Лапласа функционала ν . Тогда, как уже отмечалось выше, $f^{(n)}(\lambda_k) = \nu(z^n \exp(\lambda_k z))$. С другой стороны, по определению ν имеем $\nu(z^n \exp(\lambda_k z)) = b_{k,n}$. Это означает, что $\tilde{\Sigma}(f) = b$. Лемма доказана.

Выше были введены два пространства $I_W(D)$ и $I_\Lambda(D)$ функций, которые обращаются в нуль в точках λ_k с кратностью, не меньшей, чем m_k . В общем случае эти подпространства не совпадают. Однако имеет место следующая

ЛЕММА 2.12. *Пусть W – нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$ со спектром Λ . Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) *подпространство W допускает спектральный синтез;*
- 2) *$I_W(D) = I_\Lambda(D)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$ каждая функция из $I_W(D)$ обращается в нуль в точках λ_k с кратностью, не меньшей, чем m_k . Пространство $I_\Lambda(D)$ содержит все такие функции. Поэтому верно вложение $I_W(D) \subset I_\Lambda(D)$. Пусть W допускает спектральный синтез, $f \in I_\Lambda(D)$ и ν – функционал, преобразование Лапласа которого равно f . Поскольку f обращается в нуль в точках λ_k с кратностью, не меньшей, чем m_k , то функционал ν обращается в нуль на всех функциях системы (1.4), так как $f^{(n)}(\lambda) = (\nu, z^n \exp(\lambda z))$. По предположению линейная оболочка системы (1.4) плотна в W . Поэтому ν обращается

в нуль на всем W . Тогда по определению пространства $I_W(D)$ функция f принадлежит ему. Таким образом, $I_W(D) = I_\Lambda(D)$.

Обратно, пусть $I_W(D) = I_\Lambda(D)$. Тогда любая функция, которая обращается в нуль в точках λ_k с кратностью, не меньшей, чем m_k , принадлежит $I_W(D)$. Другими словами, каждый функционал, который обращается в нуль на всех функциях системы (1.4), обращается в нуль и на всем подпространстве W . Это означает, что линейная оболочка системы (1.4) плотна в W , т. е. W допускает спектральный синтез. Лемма доказана.

В заключение докажем заявленную выше эквивалентность двух задач. Если Y – подпространство X и $x \in X$, то, как и выше, $[x]$ обозначает класс эквивалентности из факторпространства X/Y , порожденный x .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.13. Пусть W – нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$ со спектром Λ , допускающее спектральный синтез, и $m_D(\Lambda) = 0$. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) оператор $\Sigma: \mathbf{P}_D/I_\Lambda(D) \rightarrow \Phi$ является изоморфизмом линейных топологических пространств;
- 2) каждая функция $\varphi \in W$ представляется рядом (2.11), который сходится в каждой точке области D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 2) $\rightarrow$ 1). По предложениям 2.4 и 2.3 оператор $\Sigma: \mathbf{P}_D/I_\Lambda(D) \rightarrow \Phi$ непрерывен и инъективен, а в силу следствия 2.9 и леммы 2.11 этот оператор является сюръективным. Тогда по теореме об открытом отображении (см. [49, приложение 1, теорема 2]) для отделимых пространств, покрываемых счетным семейством своих подпространств Фреше (каковыми, очевидно, являются $\mathbf{L}\mathbf{N}^*$ -пространства), оператор Σ является изоморфизмом линейных топологических пространств.

1) $\rightarrow$ 2). Поскольку $H(D)$ – пространство Фреше–Шварца, то имеет место изоморфизм (см. [50]): $W \cong [H^*(D)/\text{ort } W]^*$. Так как W допускает спектральный синтез, то по лемме 2.12 $\mathbf{P}_D/I_W(D)$ совпадает с $\mathbf{P}_D/I_\Lambda(D)$. Учитывая, что преобразование Лапласа отождествляет пространства $\mathbf{P}_D/I_W(D)$ и $H^*(D)/\text{ort } W$, получаем следующие изоморфизмы:

$$W \cong [H^*(D)/\text{ort } W]^* \cong [\mathbf{P}_D/I_\Lambda(D)]^*.$$

Пусть φ – произвольная функция из W и функционалы $s \in [H^*(D)/\text{ort } W]^*$ и $\mu \in [\mathbf{P}_D/I_\Lambda(D)]^*$ сопоставляются ей при указанных изоморфизмах. Фиксируем $z \in D$. Если δ_z – функционал Дирака, сосредоточенный в точке z , то

$$\varphi(z) = (\delta_z, \varphi) = ([\delta_z], \varphi) = (s, [\delta_z]) = (\mu, [f_z]),$$

где f_z – преобразование Лапласа функционала δ_z . Функция $f_z(\eta)$, как легко видеть, совпадает с $\exp(z\eta)$. Таким образом, имеет место равенство $\varphi(z) = (\mu, [\exp(z\eta)])$. Согласно утверждению 1) пространство $\mathbf{P}_D/I_\Lambda(D)$ изоморфно Φ . Поэтому найдется функционал $\tau \in \Phi^*$ такой, что

$$\varphi(z) = (\mu, [\exp(z\eta)]) = (\tau, \Sigma[\exp(z\eta)]) = (\tau, \{z^{n-1} \exp(\lambda_k z)\}).$$

Выберем номер m такой, что $b = \{b_{k,n}\} = \{z^{n-1} \exp(\lambda_k z)\} \in \Phi_m$. Функционал τ непрерывен на Φ^* . Поэтому его сужение на банахово пространство Φ_{m+1} (как и на любое другое Φ_s) будет непрерывным (см. [49, гл. 5, § 2, предложение 5]), т. е. $|(\tau, \tilde{b})| \leq c \|\tilde{b}\|_{m+1} \quad \forall \tilde{b} \in \Phi_{m+1}$. Пусть $d_{k,n}$ равно значению функционала τ на элементе $e^{k,n} = \{b'_{l,s}\}$, где $b'_{l,s}$ равен единице, когда $l = k$, $s = n$, и равен нулю для всех остальных значений индексов l, s . Тогда из предыдущего с учетом неравенства (1.1) получаем

$$\begin{aligned}
& \left| \varphi(z) - \sum_{\substack{k=1, \dots, j-1 \\ n=1, \dots, m_k}} d_{k,n} b_{k,n} - \sum_{n=1}^p d_{j,n} b_{j,n} \right| \\
&= \left| (\tau, b) - \sum_{\substack{k=1, \dots, j-1 \\ n=1, \dots, m_k}} d_{k,n} b_{k,n} - \sum_{n=1}^p d_{j,n} b_{j,n} \right| \\
&= \left| (\tau, b) - (\tau, (b_{1,1}, \dots, b_{1,m_1}, b_{2,1}, \dots, b_{j-1, m_{j-1}}, b_{j,1}, \dots, b_{j,p}, 0, \dots)) \right| \\
&\leq c \sup_{k > j-1, n=1, \dots, m_k} |b_{k,n}| \exp(-H_{K_m}(\lambda_k)) \\
&= c \sup_{k > j-1, n=1, \dots, m_k} |b_{k,n}| \exp(-H_{K_m}(\lambda_k)) \exp(H_{K_m}(\lambda_k) - H_{K_{m+1}}(\lambda_k)) \\
&\leq c \|b\|_m \sup_{k > j-1, n=1, \dots, m_k} \exp(H_{K_m}(\lambda_k) - H_{K_{m+1}}(\lambda_k)) \\
&\leq c \|b\|_m \sup_{k > j-1, n=1, \dots, m_k} \exp(-\alpha_m |\lambda_k|) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\varphi(z) = \sum_{k,n} d_{k,n} z^{n-1} \exp(\lambda_k z)$. Предложение доказано.

§ 3. Достаточные условия интерполяции

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству основного результата этого параграфа, введем обозначения и докажем некоторые вспомогательные утверждения. Для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$, где $|\lambda_k| \rightarrow \infty$ (если она бесконечна), введем функции

$$q_\Lambda(z, y, \delta) = \prod_{\lambda_k \in B(y, \delta|y|)} \left(\frac{z - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|} \right)^{m_k}, \quad q_\Lambda^j(z, y, \delta) = q_\Lambda(z, y, \delta) \left(\frac{z - \lambda_j}{3\delta|\lambda_j|} \right)^{-m_j},$$

причем вторая функция определяется лишь для тех j , для которых λ_j принадлежит $B(y, \delta|y|)$. Модуль функции $q_\Lambda(z, y, \delta)$ можно интерпретировать как меру сгущения точек $\lambda_k \in B(y, \delta|y|)$ около z . В случае, когда $B(y, \delta|y|)$ не содержит ни одной из λ_k , считаем, что $q_\Lambda(z, y, \delta) \equiv 1$ и $q_\Lambda^j(z, y, \delta) \equiv 1$. Отметим, что модуль каждого из сомножителей в определении $q_\Lambda^j(z, y, \delta)$ и $q_\Lambda(z, y, \delta)$ в круге $B(y, \delta|y|)$ оценивается сверху величиной $2(3(1-\delta))^{-1}$ (для $\delta \in (0, 1)$), т. е. при $\delta \in (0, 1/3)$ он не превосходит единицы. Кроме того, если $\delta_1 \leq \delta_2$ и $B(y_1, \delta_1|y_1|) \subseteq B(y_2, \delta_2|y_2|)$, то число сомножителей в определении $q_\Lambda^j(z, y_1, \delta_1)$ не превосходит числа сомножителей в определении $q_\Lambda^j(z, y_2, \delta_2)$ и каждый из сомножителей для $q_\Lambda^j(z, y_1, \delta_1)$ по

модулю не меньше соответствующего сомножителя для $q_\Lambda^j(z, y_2, \delta_2)$. Таким образом, имеем

$$|q_\Lambda^j(z, y_1, \delta_1)| \geq |q_\Lambda^j(z, y_2, \delta_2)|, \quad z \in B(y_2, \delta_2|y_2|), \quad (3.1)$$

если $0 < \delta_1 \leq \delta_2 < 1/3$ и $B(y_1, \delta_1|y_1|) \subseteq B(y_2, \delta_2|y_2|)$.

Аналогичное неравенство верно и для $q_\Lambda(z, y, \delta)$:

$$|q_\Lambda(z, y_1, \delta_1)| \geq |q_\Lambda(z, y_2, \delta_2)|, \quad z \in B(y_2, \delta_2|y_2|), \quad (3.2)$$

если $0 < \delta_1 \leq \delta_2 < 1/3$, $B(y_1, \delta_1|y_1|) \subseteq B(y_2, \delta_2|y_2|)$. Положим $S_\Lambda = 0$, если Λ состоит из конечного числа элементов, и

$$S_\Lambda = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|^{-1} \ln |q_\Lambda^k(\lambda_k, \lambda_k, \delta)|$$

в противном случае. Это определение корректно, поскольку в силу (3.1) предел по δ всегда существует. В силу сказанного выше $S_\Lambda \leq 0$. Положим

$$M_\Lambda(y, \delta) = \sum_{\lambda_k \in B(y, \delta|y|)} m_k, \quad M_\Lambda = \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|^{-1} M_\Lambda(\lambda_k, \delta),$$

причем считаем $M_\Lambda = 0$, если Λ конечна. Очевидно, что $M_\Lambda \geq m(\Lambda) \geq 0$ и

$$M_\Lambda(y_1, \delta_1) \leq M_\Lambda(y_1, \delta_2), \quad B(y_1, \delta_1|y_1|) \subset B(y_2, \delta_2|y_2|). \quad (3.3)$$

Отсюда следует, что определение M_Λ также корректно. Отметим еще, что если некоторая целая функция экспоненциального типа обращается в нуль (по крайней мере) в точках λ_k с кратностью, не меньшей, чем m_k , то по тем же соображениям, что и для $m(\Lambda)$, величина M_Λ конечна.

ЛЕММА 3.1. Пусть последовательность Λ такова, что $S_\Lambda \geq a > -\infty$ и $M_\Lambda \leq A < +\infty$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для всех $\delta \in (0, \delta_0)$ выполнено неравенство

$$|q_\Lambda(y, \lambda_k, \delta)| \geq \tilde{C}_1 d_k \quad \forall y: 2^{-1} \rho_k(\delta) - \tilde{C}_2 d_k \leq |y - \lambda_k| \leq 2^{-1} \rho_k(\delta),$$

где $d_k = \exp((2a - 3A - \varepsilon)|\lambda_k|)$, $\rho_k(\delta) = \min(\rho_k, \delta|\lambda_k|)$, $\rho_k = \min_{j \neq k} |\lambda_k - \lambda_j|$, $k = 1, 2, \dots$, и постоянные $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 > 0$ зависят лишь от δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon/8$. Согласно определению величины S_Λ найдем $\delta_0 \in (0, 1/6)$ такое, что $\lim_{j \rightarrow \infty} |\lambda_j|^{-1} \ln |q_\Lambda^j(\lambda_j, \lambda_j, 2\delta_0)| \geq a - \tilde{\varepsilon}$. Выберем теперь номер j_0 так, чтобы $|\lambda_j|^{-1} \ln |q_\Lambda^j(\lambda_j, \lambda_j, 2\delta_0)| \geq a - 2\tilde{\varepsilon}$, $j \geq j_0$. Тогда с учетом (3.1) имеем

$$|q_\Lambda^j(\lambda_j, \lambda_j, \delta)| \geq \exp((a - 2\tilde{\varepsilon})|\lambda_j|), \quad j \geq j_0, \quad \delta \in (0, 2\delta_0). \quad (3.4)$$

В силу определения величины M_Λ , уменьшая при необходимости $\delta_0 > 0$ и увеличивая j_0 , можно считать, что

$$M_\Lambda(\lambda_j, 2\delta_0) \leq (A + 2\tilde{\varepsilon})|\lambda_j|, \quad j \geq j_0.$$

Отсюда и из (3.3) получаем

$$M_\Lambda(\lambda_j, \delta) \leq (A + 2\varepsilon)|\lambda_j|, \quad j \geq j_0, \quad \delta \in (0, 2\delta_0). \quad (3.5)$$

Пусть $j \geq j_0$, $\delta \in (0, 2\delta_0)$ и $\rho_j(\delta) = \rho_j$. Рассмотрим произвольное z такое, что $|z - \lambda_j| = \rho_j/2$. Для всех $k = 1, 2, \dots$ справедливы соотношения

$$|z - \lambda_k| \geq |\lambda_j - \lambda_k| - |z - \lambda_j| = |\lambda_j - \lambda_k| - \rho_j/2 \geq |\lambda_j - \lambda_k|/2.$$

Тогда с учетом (3.4), (3.5) и неотрицательности числа b имеем

$$\begin{aligned} |q_\Lambda^j(z, \lambda_j, \delta)| &\geq \exp[\ln(1/2)(A + 2\varepsilon)|\lambda_j|] |q_\Lambda^j(\lambda_j, \lambda_j, \delta)| \\ &\geq \exp[(\ln(1/2)(A + 2\varepsilon) + a - 2\varepsilon)|\lambda_j|] \geq \exp[(a - A - 4\varepsilon)|\lambda_j|] \end{aligned} \quad (3.6)$$

для любого z такого, что

$$|z - \lambda_j| = \rho_j/2 = \rho_j(\delta)/2.$$

Пусть теперь $\rho_j(\delta) = \delta|\lambda_j|$. Тогда в силу определений величины $\rho_j(\delta)$ и функции q_Λ^j с учетом неравенств $a \leq 0$ и $A \geq 0$ получаем

$$1 \equiv |q_\Lambda^j(z, \lambda_j, \delta)| \geq \exp((a - A - 4\varepsilon)|\lambda_j|) \quad \forall z: |z - \lambda_j| = \rho_j(\delta)/2.$$

Отсюда и из (3.6) имеем оценку

$$|q_\Lambda^j(z, \lambda_j, \delta)| \geq \exp((a - A - 4\varepsilon)|\lambda_j|) \quad (3.7)$$

для любого z такого, что

$$|z - \lambda_j| = \rho_j(\delta)/2, \quad j \geq j_0, \quad \delta \in (0, 2\delta_0).$$

Выберем $j_1 \geq j_0$ так, что для любого $j \geq j_1$ каждый номер k , для которого $\lambda_k \in B(\lambda_j, \delta_0|\lambda_j|)$, будет не меньше j_0 . Пусть $j \geq j_1$, $\delta \in (0, \delta_0)$, $\rho_j(\delta) = \rho_j$ и k_j — один из номеров таких, что $|\lambda_j - \lambda_{k_j}| = \rho_j$. Поскольку $\rho_j \leq \delta|\lambda_j|$, то $|\lambda_{k_j}| \geq (1 - \delta)|\lambda_j|$. Следовательно, с учетом неравенства $\delta < 1/2$ имеем

$$|\lambda_j - \lambda_{k_j}| \leq \delta|\lambda_j| \leq \delta(1 - \delta)^{-1}|\lambda_{k_j}| < 2\delta|\lambda_{k_j}|,$$

т. е. $\lambda_j \in B(\lambda_{k_j}, 2\delta|\lambda_{k_j}|)$. Так как для наших δ множители в произведении, определяющем функцию $q_\Lambda^{k_j}(z, \lambda_{k_j}, 2\delta)$, не превосходят по модулю единицы, то в силу (3.4) получаем

$$|\lambda_j - \lambda_{k_j}|^{m_j} (6\delta|\lambda_j|)^{-m_j} \geq |q_\Lambda^{k_j}(\lambda_{k_j}, \lambda_{k_j}, 2\delta)| \geq \exp[(a - 2\varepsilon)|\lambda_j|].$$

Отсюда с учетом неотрицательности A имеем

$$|\lambda_j - z|^{m_j} (3\delta|\lambda_j|)^{-m_j} = |\lambda_j - \lambda_{k_j}|^{m_j} (6\delta|\lambda_j|)^{-m_j} \geq \exp[(a - 2A - 4\varepsilon)|\lambda_j|] \quad (3.8)$$

для любого z такого, что

$$|z - \lambda_j| = \frac{\rho_j(\delta)}{2} = \frac{\rho_j}{2} = \frac{|\lambda_j - \lambda_{k_j}|}{2}.$$

Пусть теперь $\rho_j(\delta) = \delta|\lambda_j|$. Тогда с учетом (3.5) и того, что $a \leq 0$, получаем

$$\begin{aligned} |\lambda_j - z|^{m_j} (3\delta|\lambda_j|)^{-m_j} &= (\delta|\lambda_j|)^{m_j} (6\delta|\lambda_j|)^{-m_j} \geq \exp(\ln(1/6)(A + 2\varepsilon)|\lambda_j|) \\ &\geq \exp((a - 2A - 4\varepsilon)|\lambda_j|) \quad \forall z: |z - \lambda_j| = \frac{\rho_j(\delta)}{2} = \frac{\delta|\lambda_j|}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда, из (3.7), (3.8) и определения функции $q_\Lambda(z, \lambda_j, \delta)$ следует, что

$$|q_\Lambda(z, \lambda_j, \delta)| \geq \exp[(2a - 3A - 8\varepsilon)|\lambda_j|] \quad (3.9)$$

для любого z такого, что

$$|z - \lambda_j| = \frac{\rho_j(\delta)}{2}, \quad j \geq j_1, \quad \delta \in (0, \delta_0).$$

Пусть $\delta \in (0, \delta_0)$. Выберем $j_0(\delta) \geq j_1$ так, что $\delta|\lambda_j| \geq 2$ для всех $j \geq j_0(\delta)$. Тогда круг $B(z, 1)$ лежит в $B(\lambda_j, \delta|\lambda_j|)$ для всех $z \in B(\lambda_j, \delta|\lambda_j|/2)$ и $j \geq j_0(\delta)$. Поскольку функция $q_\Lambda(y, \lambda_j, \delta)$ не превосходит по модулю единицы в $B(\lambda_j, \delta|\lambda_j|)$, то из интегральной формулы Коши следует, что этим же свойством, но уже в круге $B(\lambda_j, \delta|\lambda_j|/2)$, обладает и ее производная. Используя теперь формулу для первообразной, получаем оценку

$$|q_\Lambda(y, \lambda_j, \delta) - q_\Lambda(z, \lambda_j, \delta)| \leq |y - z|, \quad y, z \in \overline{B(\lambda_j, \delta|\lambda_j|/2)}.$$

Отсюда с учетом (3.9) и выбора ε находим, что

$$|q_\Lambda(y, \lambda_j, \delta)| \geq 2^{-1} \exp[(2a - 3A - \varepsilon)|\lambda_j|], \quad j \geq j_0(\delta),$$

для любого y такого, что

$$2^{-1}(\rho_j(\delta) - \exp[(2a - 3A - \varepsilon)|\lambda_j|]) \leq |y - \lambda_j| \leq 2^{-1}\rho_j(\delta), \quad \delta \in (0, \delta_0).$$

Выбирая подходящие постоянные $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 > 0$ в зависимости лишь от номера $j_0(\delta)$ (а значит, лишь от δ), получаем требуемое утверждение.

Докажем теперь некоторые вспомогательные утверждения относительно целых функций экспоненциального типа. Из первого утверждения получим оценку числа нулей таких функций в круге $B(y, \delta|y|)$.

ЛЕММА 3.2. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$; φ — целая функция экспоненциального типа, обращающаяся в нуль (по крайней мере) в точках λ_k с кратностью, не меньшей, чем m_k ; $H(z)$ — положительно однородная порядка один функция; $\tau \in (0, 1)$ и F — подмножество $\mathbf{S}$ такие, что

$$h_\varphi(\zeta) \leq H(w), \quad \zeta \in B(w, \tau), \quad w \in F. \quad (3.10)$$

Тогда верно неравенство

$$\lim_{\substack{|y| \rightarrow \infty \\ y/|y| \in F, \varphi(y) \neq 0}} |y|^{-1} (M_\Lambda(y, \delta) - H(y) + \ln|\varphi(y)|) \leq 0, \quad \delta \in (0, \tau/3).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольное число $\tilde{\varepsilon} > 0$. По свойству индикаторов (см., например, [1, гл. 1, § 6, свойство г)) найдем $T_1 > 0$ такое, что

$$\ln|\varphi(z)| \leq h_\varphi(z) + \tilde{\varepsilon}|z| \quad \forall z: |z| \geq T_1. \quad (3.11)$$

В силу (3.10) верно неравенство

$$h_\varphi(z) + \tilde{\varepsilon}|z| \leq H(y) + \tilde{\varepsilon}(1 + \tau)|y| \leq H(y) + 2\tilde{\varepsilon}|y|, \quad z \in B(y, \tau|y|), \quad y/|y| \in F.$$

Пусть $\varphi(y) \neq 0$, $y/|y| \in F$, $|y| \geq (1 - \tau)^{-1}T_1$. Тогда в круге $B(y, \tau|y|)$ выполнено (3.11). Следовательно,

$$\ln|\varphi(z)| \leq H(y) + 2\tilde{\varepsilon}|y|, \quad z \in B(y, \tau|y|).$$

Пусть $\delta \in (0, \tau/3)$ и $m = M_\Lambda(y, \delta)$. Из последней оценки и теоремы о нулях аналитической функции в круге (см., например, [48, гл. 1, § 2, теорема 2.1]) легко следует, что

$$e^m \leq \exp(H(y) - \ln|\varphi(y)| + 2\tilde{\varepsilon}|y|).$$

В силу произвольности выбора $\tilde{\varepsilon} > 0$ отсюда получаем требуемое неравенство.

В следующих двух утверждениях будут получены другие оценки целых функций экспоненциального типа. Но прежде сделаем одно простое замечание, которым будем неоднократно пользоваться в дальнейшем. Пусть функция $h_0(z)$ вещественнозначна и положительно однородна порядка один, $F \subset \mathbf{S}$, $\varepsilon > 0$ и $\tau \in (0, 1/3)$ такие, что

$$|h_0(y) - h_0(w)| \leq \varepsilon/3 \quad \forall w \in F, \quad y \in B(w, \tau). \quad (3.12)$$

Тогда верно неравенство

$$\sup_{y \in B(z, \tau|z|)} h_0(y) \leq \inf_{y \in B(z, \tau|z|)} h_0(y) + \varepsilon \inf_{y \in B(z, \tau|z|)} |y| \quad \forall z: z/|z| \in F. \quad (3.13)$$

Действительно, в силу положительной однородности функции $h_0(y)$ имеем

$$\begin{aligned} |h_0(y) - h_0(x)| &\leq |h_0(y) - h_0(z)| + |h_0(x) - h_0(z)| \leq |z| |h_0(y/|z|) - h_0(z/|z|)| \\ &\quad + |z| |h_0(x/|z|) - h_0(z/|z|)| \leq 3^{-1}2\varepsilon|z| \quad \forall z: z/|z| \in F, \quad y, x \in B(z, \tau|z|). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\sup_{y \in B(z, \tau|z|)} h_0(y) \leq \inf_{y \in B(z, \tau|z|)} h_0(y) + 3^{-1}2\varepsilon|z| \quad \forall z: z/|z| \in F.$$

Заметим, что $|z| = (1 - \tau)^{-1} \inf_{y \in B(z, \tau|z|)} |y| \quad \forall z \neq 0$. Поэтому, учитывая включение $\tau \in (0, 1/3)$, из предыдущего легко получаем неравенство (3.13).

Для множества $R \subset \mathbb{C}$ через R^δ , $\delta > 0$, обозначим объединение кругов $\cup B(z, \delta|z|)$, где z принимает значения из R .

ЛЕММА 3.3. Пусть φ – целая функция экспоненциального типа, функции $h(z)$, $H(z)$ непрерывны и положительно однородны порядка один в $\mathbb{C}$, $\alpha, \varepsilon > 0$ и R – неограниченное множество такие, что

$$h_\varphi(z) \leq H(z), \quad z \in R^\alpha, \quad \lim_{z \in R, |z| \rightarrow \infty} |z|^{-1}(\ln|\varphi(z)| - h(z)) \geq 0.$$

Тогда существуют постоянная $\delta_0 > 0$ (зависящая только от h , H , α и ε) и $T > 0$ такие, что для каждого $\delta \in (0, \delta_0)$ найдется набор открытых, попарно непересекающихся множеств U_p , $p = 1, 2, \dots$, обладающих следующими свойствами:

- 1) для каждого $p \geq 1$ и любого $y \in U_p$ имеет место вложение $U_p \subset B(y, 88\delta|y|)$;
- 2) $U_p \subset R^{22\delta}$, $p \geq 1$;
- 3) $R^\delta \setminus B(0, T) \subset \bigcup \overline{U_p}$;
- 4) для каждого $p \geq 1$ выполнено неравенство

$$\ln|\varphi(z)| \geq h(z) - 2\varepsilon|z| - (3 + \ln 24)(H(z) - h(z) + 3\varepsilon|z|), \quad z \in \partial U_p.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию найдем $T_1 > 1$ такое, что

$$|z|^{-1}(\ln|\varphi(z)| - h(z)) \geq -\varepsilon \quad \forall z \in R \setminus B(0, T_1). \quad (3.14)$$

Поскольку функции $H(z) + \varepsilon|z|$ и $h(z) - \varepsilon|z| - (3 + \ln 24)(H(z) - h(z) + 3\varepsilon|z|)$ непрерывны (а поэтому и равномерно непрерывны на $\mathbf{S}$), то для некоторого $\tau \in (0, 1/3)$, $\tau < \alpha$, и $F = \mathbf{S}$ будет выполнено (3.12), а значит, и (3.13), если в качестве h_0 взять одну из них. Положим $\delta_0 = \tau/132$ и фиксируем $\delta \in (0, \delta_0)$. Отметим, что δ_0 зависит только от τ , которое, в свою очередь, зависит лишь от h , H , α и ε , но не зависит от φ и R . На окружности $\mathbf{S}$ выберем точки $x_1, \dots, x_m$ так, что объединение кругов $B(x_j, \delta)$, $j = \overline{1, m}$, покрывает ее. Для всех $j = \overline{1, m}$ положим $x_{j,1} = x_j$ и $x_{j,s} = (1 + \delta)x_{j,s-1}$, $s \geq 2$. Легко видеть, что круги $B(x_{j,s}, 2\delta|x_{j,s}|)$, $j = \overline{1, m}$, $s \geq 1$, покрывают в совокупности внешность единичного круга с центром в нуле. Из набора точек $x_{j,s}$, $j = \overline{1, m}$, $s \geq 1$, удалим все те, для которых круг $B(x_{j,s}, 2\delta|x_{j,s}|)$ не пересекает $R \setminus B(0, T_1)$. Оставшиеся точки перенумеруем в произвольном порядке и обозначим $w_1, w_2, \dots$. По построению

$$R \setminus B(0, T_1) \subset \bigcup B(w_p, 2\delta|w_p|).$$

Пусть $z_p, y \in (R \setminus B(0, T_1)) \cap B(w_p, 2\delta|w_p|)$. Тогда круг $B(z_p, 11\delta|z_p|)$ содержит любое $z \in B(y, \delta|y|)$. Действительно, с учетом неравенства $\delta < 1/4$ имеем

$$\begin{aligned} |z_p - z| &\leq |z_p - w_p| + |w_p - y| + |y - z| \leq 2\delta|w_p| + 2\delta|w_p| + \delta|y| \\ &\leq 4\delta|w_p| + (1 + 2\delta)\delta|w_p| \leq \frac{11\delta|w_p|}{2} \leq \frac{11\delta|z_p|}{2(1 - 2\delta)} \leq 11\delta|z_p|. \end{aligned}$$

Положим $T \geq 2T_1 > (1 + \delta)T_1$, и пусть $z \in R^\delta \setminus B(0, T)$. Тогда $z \in B(y, \delta|y|)$ для некоторой точки $y \in R \setminus B(0, T_1)$, которая лежит в одном из кругов $B(w_p, 2\delta|w_p|)$.

Следовательно, по доказанному $z \in B(z_p, 11\delta|z_p|)$. Таким образом, объединение $\bigcup_p B(z_p, 11\delta|z_p|)$ содержит множество $R^\delta \setminus B(0, T)$.

Увеличивая при необходимости $T_1 > 0$, можно считать, что для всех $p \geq 1$ в $B(z_p, 132\delta|z_p|)$ выполнено (3.11) для $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. Тогда по условию леммы имеем

$$\ln|\varphi(z)| \leq H(z) + \varepsilon|z| \quad \forall z \in R^\alpha, \quad |z| \geq T_1.$$

Отсюда с учетом (3.13) имеем

$$\ln|\varphi(z)| \leq H(z_p) + 2\varepsilon|z_p|, \quad z \in B(z_p, 132\delta|z_p|), \quad p = 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Рассмотрим функцию $\varphi_p(z) = \varphi(z)/\varphi(z_p)$. Она обладает следующими свойствами: $\varphi_p(z_p) = 1$, а в силу (3.14) и (3.15)

$$\ln|\varphi_p(z)| \leq H(z_p) - h(z_p) + 3\varepsilon|z_p|, \quad z \in B(z_p, 132\delta|z_p|), \quad p = 1, 2, \dots$$

Тогда по теореме об оценке снизу модуля аналитической функции (см., например, [48, гл. 1, § 4, теорема 4.2]) имеет место неравенство

$$\ln|\varphi_p(z)| \geq -(3 + \ln 24)(H(z_p) - h(z_p) + 3\varepsilon|z_p|),$$

которое выполнено в $B(z_p, 22\delta|z_p|)$, но вне исключительных кружков с суммой радиусов, равной $11\delta|z_p|/2$. Отсюда с учетом (3.14) и (3.13) получаем

$$\ln|\varphi(z)| \geq h(z) - 2\varepsilon|z| - (3 + \ln 24)(H(z) - h(z) + 3\varepsilon|z|). \quad (3.16)$$

Поскольку сумма диаметров исключительных кружков не превосходит $11\delta|z_p|$, то найдется $d_p \in [1, 2)$ такое, что на окружности $\partial B(z_p, 11d_p\delta|z_p|)$ выполнено (3.16). Положим

$$U_1 = B(z_1, 11d_1\delta|z_1|), \quad U_p = B(z_p, 11d_p\delta|z_p|) \setminus \left[\bigcup_{j=1, p-1} \overline{U_j} \right], \quad p \geq 2.$$

Тогда U_p , $p \geq 1$, обладают свойствами 1)–4) из утверждения леммы. Действительно, свойство 4) следует из (3.16) и того, что граница U_p состоит из дуг окружностей $\partial B(z_j, 11d_j\delta|z_j|)$; свойство 3) имеет место, поскольку $\bigcup_p \overline{U_p}$ содержит множество $\bigcup_p B(z_p, 11\delta|z_p|)$, которое, в свою очередь, содержит $R^\delta \setminus B(0, T)$. Наконец, свойства 2) и 1) легко следуют из вложения $U_p \subset B(z_p, 11d_p\delta|z_p|)$ и неравенства $22\delta < 1/2$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Если в условиях леммы 3.3 $h(z) = c_1|z|$, $H(z) = c_2|z|$ и $\varepsilon = 1$, то число $\delta_0 > 0$ можно выбрать так, что оно не будет зависеть от h , H и ε (т. е. от c_1, c_2), но при этом ухудшится оценка в свойстве 4) для U_p . Действительно, пусть $0 < \tau < \min\{\alpha, 1/2\}$. Тогда для любого $z \neq 0$

$$\begin{aligned} \sup_{y \in B(z, \tau|z|)} c|y| &\leq 3 \inf_{y \in B(z, \tau|z|)} c|y|, \quad c > 0, \\ \sup_{y \in B(z, \tau|z|)} c|y| &\leq 3^{-1} \inf_{y \in B(z, \tau|z|)} c|y|, \quad c > 0. \end{aligned}$$

Определяя по τ , как и в лемме, число δ_0 и пользуясь этими неравенствами вместо (3.13), мы точно так же для каждого $\delta \in (0, \delta_0)$ построим множества U_p , обладающие свойствами 1)–3) и свойством

$$4') \quad \ln|\varphi(z)| \geq \tilde{a}|z|, \quad z \in \partial U_p, \text{ где } \tilde{a} \text{ зависит только от } c_1, c_2.$$

ЛЕММА 3.5. Пусть φ – целая функция экспоненциального типа, функции $h(z)$, $H(z)$ непрерывны и положительно однородны порядка один в $\mathbb{C}$, $\alpha, \varepsilon > 0$ и R – неограниченное множество такие, что

$$h_\varphi(z) \leq H_1(z) \quad \forall z \in \tilde{R}^\alpha, \quad \lim_{z \in \tilde{R}, |z| \rightarrow \infty} |z|^{-1} (\ln |\varphi(z)| - h_1(z)) \geq 0.$$

Тогда существует постоянная $\tilde{T} > 0$ такая, что для $z \in \tilde{R}$ и $|z| > \tilde{T}$

$$|\varphi(y)| \geq \exp(h_1(y) - 3\varepsilon|y|), \quad y \in B(z, \exp(h_1(z) - H_1(z) - 4\varepsilon|z|)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем $T_1 > 0$ такое, что при $|z| > T_1$ выполнены (3.11) (при $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$) и (3.14), и $\tau \in (0, 1/3)$, $\tau < \alpha$, такое, что для $h_0(z) = H_1(z) + \varepsilon|z|$ и $F = S$ выполнено (3.13). Можно считать, что $\tau T_1 > 2$. Пусть $z \in \tilde{R}$ и $|z| > T_1 + 2$. Тогда в силу (3.11), условия леммы и (3.13) имеем оценку

$$\ln |\varphi(y)| \leq H_1(z) + 2\varepsilon|z|, \quad y \in B(z, 2).$$

Отсюда, как и в лемме 3.1, используя вначале интегральную формулу Коши для производной, а затем формулу для первообразной, получаем

$$|\varphi(z) - \varphi(y)| \leq \exp(H_1(z) + 2\varepsilon|z|)|z - y|, \quad |z| > T_1 + 2, \quad y \in B(z, 1).$$

Следовательно, с учетом (3.14) верны неравенства (не ограничивая общности, мы считаем здесь, что $\exp(-\varepsilon|z|) < 1/2$, когда $|z| > T_1 + 2$)

$$\begin{aligned} |\varphi(y)| &\geq |\varphi(z)| - \exp(H_1(z) + 2\varepsilon|z|)|z - y| \\ &\geq \exp(h_1(z) - \varepsilon|z|) - \exp(H_1(z) + 2\varepsilon|z|)|z - y| \\ &\geq \exp(h_1(z) - \varepsilon|z|)(1 - \exp(-\varepsilon(z))) \geq \exp(h_1(z) - 2\varepsilon|z|), \\ &|z| > T_1 + 2, \quad y \in B(z, \exp(h_1(z) - H_1(z) - 4\varepsilon|z|)). \end{aligned}$$

Уменьшая, если это необходимо, $\tau > 0$, можно считать, что для функции $h_0(z) = h_1(z) - 2\varepsilon|z|$ выполнено (3.13). Тогда из предыдущего получаем требуемую оценку, где $\tilde{T} = T_1 + 2$. Лемма доказана.

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству основного результата этого параграфа, сделаем еще одно простое замечание и докажем лемму для выпуклых областей. Как мы уже отмечали, опорная функция ограниченного множества непрерывна всюду. Опорная функция неограниченного выпуклого множества L непрерывна лишь во внутренности того множества, где она конечна, т. е. в $\mathbb{C} \setminus \overline{J(L)}$. Однако можно распространить понятие непрерывности H_L и в другие точки плоскости. Действительно, будем говорить, что H_L непрерывна в точке z_0 , если $H_L(z) \rightarrow H_L(z_0)$, когда $z \rightarrow z_0$, допуская при этом, что $H_L(z)$ и $H_L(z_0)$ могут принимать значение $+\infty$. В таком более широком смысле опорная функция любой неограниченной выпуклой области D непрерывна всюду в плоскости, за исключением, возможно, начала координат и одного или двух лучей $\{t\xi\}$ таких, что

$\xi \in \partial J(D) \setminus J(D)$, т.е. граничных лучей $J(D)$, на которых H_D ограничена. Если $z_0 \in \partial J(D) \setminus J(D)$, то

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in J(D)} H_D(z) = +\infty \neq H_D(z_0) < +\infty,$$

но в то же время $\lim_{z \rightarrow z_0, z \notin J(D)} H_D(z) = H_D(z_0)$.

Таким образом, H_D имеет разрыв на луче $\{tz_0, t > 0\}$, но только если z приближается к нему так, что $H_D(z) = +\infty$. Лучи разрыва существуют тогда и только тогда, когда граница ∂D содержит точки, сколь угодно близкие к одной или двум прямым, но не имеет с ними общих точек либо содержит один или два неограниченных прямолинейных участка (лишь в двух случаях, когда D – полоса или полуплоскость, эти участки являются прямыми).

Пусть $F \subset \mathbf{S}$. Через $E(\beta)$ обозначим β -окрестность F на $\mathbf{S}$, т.е. $E(\beta) = \{z \in \mathbf{S} \mid \exists \zeta \in F: |z - \zeta| < \beta\}$.

ЛЕММА 3.6. Пусть D – неограниченная выпуклая область, K – выпуклый компакт в D , F – компактное подмножество $\mathbf{S} \cap J(D)$ и $d > 0$. Тогда существуют выпуклый компакт L и число $\beta > 0$ (в случае, когда $F \subset \text{int } J(D)$, β зависит от F , но не зависит от K и d) такие, что $K + L$ – компакт в D и $H_L(z) \geq d|z| \quad \forall z: z/|z| \in E(\beta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если D – полоса, то $J(D)$ – объединение двух открытых полуплоскостей. В противном случае $J(D)$ является углом (с вершиной в нуле) раствора не меньше π (в особых случаях, когда D ограничена или является полуплоскостью, $J(D)$ – соответственно вся плоскость или плоскость без луча). В любом случае F можно представить как объединение двух компактов F_1 и F_2 , каждый из которых лежит (в своей) полуплоскости, во внутренней которой H_D бесконечна. Предположим, что для $F = F_1$ и $F = F_2$ мы построили соответственно компакты $L = L_1$ и $L = L_2$, которые обладают требуемыми свойствами. Тогда компакт L , являющийся выпуклой оболочкой объединения $L_1 \cup L_2$, будет искомым. Действительно, из вложений $K + L_1 \subset D$ и $K + L_2 \subset D$ следует, что $K + L \subset D$. Кроме того,

$$H_L(z) = \max\{H_{L_1}(z), H_{L_2}(z)\}.$$

Отсюда получаем требуемую оценку для H_L . Таким образом, можно считать, что для некоторого $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ имеет место вложение $F \subset \bar{\Pi}$, где

$$\Pi = \{t \exp(i\alpha): \alpha \in (\alpha_0 - \pi/2, \alpha_0 + \pi/2), t > 0\},$$

и $H_D(z) = +\infty$, $z \in \Pi$. Пусть $F = F_1 \cup F_2$ и F_1 лежит в той части полуплоскости $\bar{\Pi}$, где $\alpha \geq \alpha_0$, а F_2 – в той части $\bar{\Pi}$, где $\alpha \leq \alpha_0$. Считаем, что $F_1 \neq \emptyset$, и положим $\tau_0 = \max\{\tau: \exp(i(\alpha_0 + \tau)) \in F_1\}$. Пусть вначале $\tau_0 < \pi/2$. Тогда F_1 – компакт в Π . Выберем β_1 так, что окрестность $E_1(\beta_1)$ множества F_1 компактно вложена в Π . Поскольку $\text{Re}(z \exp(-i\alpha_0)) > 0$ для всех $z \in \Pi$, то найдется $t_1 > 0$ такое, что $t_1 \text{Re}(z \exp(-i\alpha_0)) > d$ для всех $z \in E_1(\beta_1)$. Если L_1 – компакт, состоящий из одной точки $t_1 \exp(-i\alpha_0)$, то

$$H_{L_1}(z) = t_1 \text{Re}(z \exp(-i\alpha_0)) > d, \quad z \in E_1(\beta_1).$$

Кроме того, $H_{K+L_1}(z) < H_D(z) = +\infty$, $z \in \Pi$, а с учетом вложения $K \subset D$ и неравенства $\operatorname{Re}(z \exp(-i\alpha_0)) \leq 0$, $z \notin \Pi$, имеем

$$H_{K+L_1}(z) = H_K(z) + H_{L_1}(z) \leq H_K(z) < H_D(z), \quad z \notin \Pi, \quad z \neq 0.$$

Следовательно, $K + L_1 \subset D$. Пусть теперь $\tau_0 = \pi/2$. Точка $\tilde{z} = \exp(i(\alpha_0 + \tau_0))$ принадлежит $F_1 \subset J(D)$. Если $F_1 \subset \operatorname{int} J(D)$, то найдется $\gamma \in (0, \pi/8)$ (не зависящее от K и d) такое, что

$$H_D(\exp(i\alpha)) = +\infty > 2d + d_1, \quad \alpha \in [\alpha_0 + \pi/2, \alpha_0 + 2\gamma + \pi/2],$$

где $d_1 = \max_{y \in S} H_K(y)$. В противном случае в силу непрерывности функции H_D (в широком смысле) в точке $\tilde{z}$ найдется $\gamma \in (0, \pi/8)$ (уже зависящее от K и d) такое, что

$$H_D(\exp(i\alpha)) > 2d + d_1, \quad \alpha \in [\alpha_0 + \pi/2, \alpha_0 + 2\gamma + \pi/2].$$

Положим

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \{t \exp(i\alpha) : \alpha \in (\alpha_0 + 2\gamma - \pi/2, \alpha_0 + 2\gamma + \pi/2), t > 0\}, \\ E &= \{\exp(i\alpha) : \alpha \in (\alpha_0 + 3\gamma - \pi/2, \alpha_0 + \gamma + \pi/2)\}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что множество E является окрестностью F_1 на $\mathbf{S}$. Пусть $\zeta = \exp(-i(\alpha_0 + 2\gamma))$ и $t_2 > 0$ такое, что

$$t_2 \operatorname{Re}(\zeta \exp(i(\alpha_0 + \gamma + \pi/2))) = t_2 \sin \gamma = d.$$

Тогда для компакта $L_1 = \{t_2 \zeta\}$ имеем

$$\begin{aligned} H_{L_1}(z) &= \operatorname{Re}(t_2 \zeta z) \geq t_2 \sin \gamma = d, \quad z \in E, \\ H_{L_1}(z) &= \operatorname{Re}(t_2 \zeta z) \leq t_2 \sin 2\gamma \leq 2d, \quad z \in (\Pi_1 \setminus \Pi) \cap \mathbf{S}. \end{aligned}$$

Кроме того, из предыдущего и неравенства $\operatorname{Re}(\zeta z) \leq 0$, $z \notin \Pi_1$, получаем

$$\begin{aligned} H_K(z) + H_{L_1}(z) &< H_D(z) = +\infty, \quad z \in \Pi, \\ H_K(z) + H_{L_1}(z) &\leq (2d + d_1)|z| < H_D(z), \quad z \in (\Pi_1 \setminus \Pi), \\ H_K(z) + H_{L_1}(z) &\leq H_K(z) < H_D(z), \quad z \notin \Pi_1, \quad z \neq 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $K + L_1 \subset D$. Аналогичным образом строим компакт L_2 для множества F_2 . Тогда, как и выше, компакт L , являющийся выпуклой оболочкой объединения $L_1 \cup L_2$, будет искомым. Лемма доказана.

Для $D \neq \mathbb{C}$ введем обозначения:

$$\begin{aligned} S_\Lambda(F) &= \sup_{E \supset F} S_{\Lambda(E)}, \quad S_\Lambda(D) = \inf_{F \subset (\mathbf{S} \setminus J(D))} S_\Lambda(F), \\ M_\Lambda(F) &= \sup_{E \supset F} M_{\Lambda(E)}, \quad M_\Lambda(D) = \inf_{F \subset (\mathbf{S} \setminus J(D))} M_\Lambda(F), \end{aligned}$$

где E – произвольное открытое на $\mathbf{S}$ множество, содержащее F , а F – компактное подмножество $\mathbf{S} \setminus J(D)$. Для $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$ через $N(\Lambda)$ обозначим совокупность всех предельных точек последовательности $\{\lambda_k/|\lambda_k|\}$, $\lambda_k \neq 0$.

ТЕОРЕМА 3.7. Пусть выпуклая область D и $\Lambda = \{\lambda_k, t_k\}$ такие, что $I_\Lambda(D) \neq \{0\}$. Предположим, что выполнено следующее:

- 1) $S_\Lambda \geq a > -\infty$;
- 2) $S_\Lambda(D) = 0$;
- 3) существуют функция $\varphi_0 \in I_\Lambda(D)$ и $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ такие, что для любых $\delta > 0$ и $w \in (N(\Lambda) \cap \partial J(D)) \cap J(D)$ найдутся $\beta, T > 0$, удовлетворяющие условию: $\lambda_k \in R_0^\delta$, если $\lambda_k/|\lambda_k| \in B(w, \beta)$ и $|\lambda_k| > T$, где $R_0 = \{z: \ln|\varphi_0(z)| \geq \alpha_0|z|\}$;
- 4) для каждого $m \geq 1$ существует $\varphi \in I_\Lambda(D)$ такая, что для любых $\delta > 0$ и $w \in (N(\Lambda) \cap \partial J(D)) \setminus J(D)$ найдутся $\beta, T > 0$, удовлетворяющие условию: $\lambda_k \in R_m^\delta$, если $\lambda_k/|\lambda_k| \in B(w, \beta)$ и $|\lambda_k| > T$, где $R_m = \{z: \ln|\varphi(z)| \geq H_{K_m}(z)\}$;
- 5) для любых $m \geq 1$, $\delta > 0$ и каждого компактного подмножества F множества $S \setminus \overline{J(D)}$ существуют $\varphi \in I_\Lambda(D)$ и $T > 0$ такие, что $\lambda_k \in R_m^\delta$, если $\lambda_k/|\lambda_k| \in F$ и $|\lambda_k| > T$.

Тогда:

- (i) $M_\Lambda(D) = m_D(\Lambda) = 0$;
- (ii) $\Sigma: \mathbf{P}_D/I_\Lambda(D) \rightarrow \Phi$ – изоморфизм.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.8. Условие 1) обеспечивает то, что в относительной близости от каждого λ_k находится лишь определенное число других точек λ_p и лишь на определенных расстояниях. Условие 2) аналогично условию 1), но является более сильным ограничением и относится только к тем λ_k , которые лежат на множестве, где H_D конечна, а также сосредоточены вдоль одного или двух граничных лучей множества $J(D)$, не принадлежащих ему (если такие существуют). За исключением двух случаев, когда D – полоса или полуплоскость, граничные лучи множества $J(D)$ являются и граничными лучами дополнительного множества, где H_D конечна. В исключительных случаях дополнительное к $J(D)$ множество просто совпадает с граничными лучами $J(D)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.9. Условия 3)–5) накладывают ограничения на рост функций $\varphi \in I_\Lambda(D)$ в относительной близости от тех λ_k , которые лежат на множестве, где H_D конечна, а также сосредоточены вдоль граничных лучей $J(D)$. Эти ограничения означают в каком-то смысле равномерное распределение указанных λ_k .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.10. Условия 3) и 4) фактически отсутствуют, если пусты соответственно множества $(N(\Lambda) \cap \partial J(D)) \cap J(D)$ и $(N(\Lambda) \cap \partial J(D)) \setminus J(D)$. В случае, когда D ограничена или совпадает со всей плоскостью, оба эти множества пусты. Если D ограничена, то условие 1) является следствием условия 2). Если же $D = \mathbb{C}$, то из всех условий остается только первое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.7. (i) Пусть F – компактное подмножество $S \setminus J(D)$ и $E(\beta)$ – его β -окрестность. Если $\Lambda(E(\beta))$ для некоторого $\beta > 0$ имеет конечное число элементов, то по определению $M_\Lambda(F) = 0$. Будем полагать поэтому, что $\Lambda(E(\beta))$ бесконечна для всех $\beta > 0$. Покажем, что

$$M_{\Lambda(E(\beta))} \rightarrow 0, \quad \beta \rightarrow 0. \quad (3.17)$$

Предположим противное. Тогда с учетом (3.3) для некоторого $\tilde{\varepsilon} > 0$ найдутся подпоследовательность $\{\tilde{\lambda}_p\}$ последовательности $\{\lambda_k\}$ и точка $x_0 \in F$ такие, что $|\tilde{\lambda}_p| \rightarrow \infty$, $\tilde{\lambda}_p/|\tilde{\lambda}_p| \in B(x_0, 1/p)$ и

$$M_\Lambda(\tilde{\lambda}_p, 1/p) > \tilde{\varepsilon}|\tilde{\lambda}_p|, \quad p = 1, 2, \dots \quad (3.18)$$

Пусть вначале $x_0 \in \mathbf{S} \setminus \overline{J(D)}$. Тогда, как мы уже отмечали ранее, функция H_D непрерывна (в обычном смысле) в некоторой окрестности точки x_0 . Следовательно, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\tau \in (0, 1/2)$ такое, что

$$|H_D(\zeta) - H_D(w)| \leq \varepsilon, \quad w \in B(x_0, \tau), \quad \zeta \in B(w, 2\tau). \quad (3.19)$$

Поскольку H_D непрерывна на $\overline{B(x_0, \tau)}$, а компакты K_m исчерпывают область D , то найдется номер m такой, что

$$H_{K_m}(x) \geq H_D(x) - \varepsilon, \quad x \in \overline{B(x_0, \tau)}. \quad (3.20)$$

Пусть $\delta \in (0, \tau/3)$, $F = \overline{B(x_0, \tau)} \cap \mathbf{S}$ и $\varphi \in I_\Lambda(D)$ определяется по m, δ, F в условии 5). Из включения $\varphi \in I_\Lambda(D) \subset \mathbf{P}_D$ следует, что $h_\varphi(z) < H_D(z)$, $z \neq 0$. Тогда с учетом (3.19) по лемме 3.2 для некоторого $t > 0$ получаем

$$M_\Lambda(y, 2\delta) \leq H_D(y) + \varepsilon|y| - \ln|\varphi(y)| \quad \forall y: y/|y| \in B(x_0, \tau), \quad |y| > t, \quad \varphi(y) \neq 0.$$

Используя эту оценку, (3.20) и определение R_m , имеем

$$M_\Lambda(y, 2\delta) \leq 2\varepsilon|y|, \quad y/|y| \in B(x_0, \tau), \quad y \in R_m, \quad |y| > t. \quad (3.21)$$

Так как $\tilde{\lambda}_p/|\tilde{\lambda}_p| \rightarrow x_0$ и $|\tilde{\lambda}_p| \rightarrow \infty$, то по условию 5) для каждого $p \geq p_0$ найдется $y_p \in R_m$ такое, что круг $B(y_p, \delta|y_p|)$ содержит $\tilde{\lambda}_p$. Легко видеть, что $y_p/|y_p| \in B(x_0, 2\delta + 1/p)$, $p \geq p_0$. Увеличивая при необходимости p_0 , можно считать, что $y_p/|y_p| \in B(x_0, \tau)$, $B(\tilde{\lambda}_p, p^{-1}|\tilde{\lambda}_p|) \subset B(y_p, 2\delta|y_p|)$ и $|y_p| > t$ при $p \geq p_0$. Тогда из (3.3) и (3.21) получаем

$$M_\Lambda(\tilde{\lambda}_p, 1/p) \leq M_\Lambda(y_p, 2\delta) \leq 2\varepsilon|y_p|, \quad p \geq p_0.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ это противоречит (3.18), так как $|\tilde{\lambda}_p| \geq (1 - \delta)|y_p|$.

Пусть теперь $x_0 \in \partial J(D) \setminus J(D)$. Поскольку x_0 – предельная точка последовательности $\{\tilde{\lambda}_p/|\tilde{\lambda}_p|\}$, то $x_0 \in N(\Lambda)$. Для каждого $\varepsilon > 0$ выберем m такое, что $H_{K_m}(x_0) \geq H_D(x_0) - \varepsilon$. Пусть $\varphi \in I_\Lambda(D)$ удовлетворяет условию 4). В силу непрерывности h_φ с учетом неравенства $h_\varphi(x_0) < H_D(x_0)$ найдем $\tau \in (0, 1/3)$ такое, что $h_\varphi(x) < H_D(x)$, $x \in B(x_0, 3\tau)$. Имея в виду еще непрерывность H_{K_m} , можно считать, что $H_{K_m}(x) \geq H_D(x) - 2\varepsilon$, $x \in B(x_0, 3\tau)$. По условию 4) для каждого $\delta \in (0, \tau/3)$ любая точка $\tilde{\lambda}_p$, $p \geq p(\delta)$, принадлежит R_m^δ , т.е. для некоторого $y_p \in R_m$ попадает в круг $B(y_p, \delta|y_p|)$. Тогда при больших p верно вложение $B(\tilde{\lambda}_p, p^{-1}|\tilde{\lambda}_p|) \subset B(y_p, 2\delta|y_p|)$. Кроме того, поскольку $\{\tilde{\lambda}_p/|\tilde{\lambda}_p|\}$ сходится к x_0 , то $y_p/|y_p| \in B(x_0, \tau)$ при больших p . По лемме 3.2 имеем

$$M_\Lambda(y, 2\delta) \leq H_D(x_0)|y| + \varepsilon|y| - \ln|\varphi(y)| \quad \forall y: y/|y| \in B(x_0, \tau), \quad |y| > t_1.$$

Проводя далее такие же рассуждения, как и в первом случае, мы вновь получим противоречие с (3.18).

Таким образом, мы показали, что (3.17) выполнено. Тогда по определению $M_\Lambda(F) = 0$, а в силу произвольности F и $M_\Lambda(D) = 0$. С учетом очевидных неравенств $M_\Lambda(D) \geq m_D(\Lambda) \geq 0$ получаем первое утверждение теоремы.

(ii) Согласно доказанному и предложениям 2.4, 2.3 оператор $\Sigma: \mathbf{P}_D/I_\Lambda(D) \rightarrow \Phi$ непрерывен и инъективен. В силу теоремы об открытом отображении достаточно показать теперь, что он является сюръективным. Пусть $b = \{b_{k,n}\}$ – произвольный элемент пространства Φ , а значит, Φ_s для некоторого $s \geq 1$. Нам нужно лишь построить функцию $f \in \mathbf{P}_D$ такую, что $f^{(n-1)}(\lambda_k) = b_{k,n}$, $n = 1, \dots, m_k$, $k \geq 1$. Другими словами, необходимо аналитически продолжить функцию, заданную вместе со своими производными в точках последовательности $\{\lambda_k\}$, до целой функции с подходящими оценками на рост. Это продолжение мы будем осуществлять в три этапа: локальное продолжение, полулокальное продолжение и собственно продолжение до целой функции.

1. Для каждого $k = 1, 2, \dots$ положим

$$\psi_k(\lambda) = \sum_{n=1}^{m_k} \frac{b_{k,n}}{(n-1)!} (\lambda - \lambda_k)^{n-1}.$$

По построению производная порядка n функции ψ_k в точке λ_k равна $b_{k,n}$, $n = 1, \dots, m_k$. Таким образом, функцию, заданную первоначально вместе со своими производными лишь в точках λ_k , мы продолжили в окрестность каждой из этих точек. Теперь необходимо установить, как такое продолжение изменило исходные оценки. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\lambda_k|} \ln \left| \frac{(\lambda - \lambda_k)^{n-1}}{(n-1)!} \right| &\leq \frac{1}{|\lambda_k|} \ln \left| \frac{3(\lambda - \lambda_k)}{n-1} \right|^{n-1} \leq \frac{n-1}{|\lambda_k|} \ln \left| \frac{3\lambda_k}{n-1} \right| \\ &\leq \sup_{x>0} x^{-1} \ln(3x) \leq 2, \quad \lambda \in B(\lambda_k, |\lambda_k|), \quad k = 1, 2, \dots, \quad n = 2, \dots, m_k, \quad \lambda_k \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, с учетом определения пространства Φ_s и неравенства $m_k \leq C|\lambda_k|$ (которым мы уже пользовались выше) получаем

$$\begin{aligned} |\psi_k(\lambda)| &\leq C \|b\|_s m_k \exp(H_{K_s}(\lambda_k) + 2|\lambda_k|) \leq C_1 \exp((\gamma + 3)|\lambda_k|), \\ \lambda &\in B(\lambda_k, |\lambda_k|), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.22)$$

где $\gamma = \max_{z \in S} H_{K_s}(z)$. Эти оценки достаточно грубы, но верны для всех k . Для некоторых k можно получить более точные оценки. Пусть F – компактное подмножество $S \setminus J(D)$, $E(\beta)$ – его окрестность и $\varepsilon > 0$. Покажем, что для некоторых $C_2, \beta_0 > 0$ верно неравенство

$$|\psi_k(\lambda)| \leq C_2 \exp(H_{K_s}(\lambda_k) + \varepsilon|\lambda_k|), \quad \lambda \in B(\lambda_k, |\lambda_k|), \quad \lambda_k/|\lambda_k| \in E(\beta_0). \quad (3.23)$$

Пусть $\tilde{\varepsilon} > 0$. В силу (3.17) существуют β_0 и k_0 такие, что при $k \geq k_0$ и $\lambda_k/|\lambda_k| \in E(\beta_0)$ имеет место оценка $m_k/|\lambda_k| \leq \tilde{\varepsilon}$. Отсюда, как и в (2.10), при подходящем $\tilde{\varepsilon} > 0$ и тех же k и λ_k получаем

$$\left| \frac{(\lambda - \lambda_k)^{n-1}}{(n-1)!} \right| \leq \exp\left(\frac{\varepsilon|\lambda_k|}{2}\right), \quad n = 1, \dots, m_k.$$

Это неравенство вместе с оценкой $m_k \leq \tilde{\varepsilon}|\lambda_k|$ обеспечивает (3.23).

2. На этом этапе построим функции, которые вместе со своими производными принимают заданные значения уже не в одной лишь точке λ_k , а на группе таких точек. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Как было отмечено выше, величина M_Λ конечна. Пусть $M_\Lambda \leq A$. По лемме 3.1 найдем $\delta_0 \in (0, 1/3)$ такое, что для всех $\delta \in (0, \delta_0)$ выполнено неравенство из утверждения этой леммы. Фиксируем $\tilde{\delta} \in (0, \delta_0/8)$, и пусть $k \geq 1$. Легко видеть, что для каждого $\lambda_j \in B(\lambda_k, 2\tilde{\delta}|\lambda_k|)$ круг $B(\lambda_j, 8\tilde{\delta}|\lambda_j|)$ содержит $B(\lambda_k, 2\tilde{\delta}|\lambda_k|)$. Поэтому согласно (3.2)

$$|q_\Lambda(z, \lambda_k, 2\tilde{\delta})| \geq |q_\Lambda(z, \lambda_j, 8\tilde{\delta})|, \quad z \in B(\lambda_j, 8\tilde{\delta}|\lambda_j|), \quad \lambda_j \in B(\lambda_k, 2\tilde{\delta}|\lambda_k|). \quad (3.24)$$

В силу выбора величин $\rho_k(\tilde{\delta})$ в лемме 3.1 круги $B(\lambda_j, 2^{-1}\rho_j(8\tilde{\delta}))$, $j = 1, 2, \dots$, попарно не пересекаются. Для каждого $j = 1, 2, \dots$ через e_j обозначим функцию, обладающую следующими свойствами (здесь $\tilde{C}_2$ и d_j – те же, что и в лемме 3.1):

- 1) $e_j \in C^\infty(\mathbb{C})$;
- 2) $0 \leq e_j(z) \leq 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$;
- 3) $e_j(z) = 1$, $z \in B(\lambda_j, 2^{-1}\rho_j(8\tilde{\delta}) - \tilde{C}_2 d_j)$;
- 4) $e_j(z) = 0$, $z \notin B(\lambda_j, 2^{-1}\rho_j(8\tilde{\delta}))$;
- 5) $|de_j(z)/dz| \leq \tilde{C}_3 d_j^{-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$, где $\tilde{C}_3 > 0$ не зависит от $j = 1, 2, \dots$ (о построении таких функций см., например, [51, теорема 1.4.1 и формула (1.4.2)]).

Фиксируем $k = 1, 2, \dots$. Из свойств 3) и 4) следует, что функция

$$\sigma_k(z) = q_\Lambda^{-1}(z, \lambda_k, 2\tilde{\delta}) \sum_j \psi_j(z) \frac{de_j(z)}{dz},$$

где суммирование ведется по всем j таким, что $\lambda_j \in B(\lambda_k, \tilde{\delta}|\lambda_k|)$, отлична от нуля лишь в кольцах $2^{-1}\rho_j(8\tilde{\delta}) - \tilde{C}_2 d_j \leq |z - \lambda_j| \leq 2^{-1}\rho_j(8\tilde{\delta})$ для тех же j . Из свойства 5) для e_j , неравенств (3.22), (3.24) и леммы 3.1 получаем

$$|\sigma_k(z)| \leq C_1 \tilde{C}_1^{-1} \tilde{C}_3 d_p^{-2} \exp((\gamma + 3)|\lambda_k|),$$

$$2^{-1}\rho_p(8\tilde{\delta}) - \tilde{C}_2 d_p \leq |z - \lambda_p| \leq 2^{-1}\rho_p(8\tilde{\delta}).$$

Уменьшая при необходимости $\tilde{\delta}$ и используя (3.13), имеем

$$|\sigma_k(z)| \leq \tilde{C}_4 d_p^{-2} \exp((3A - 2a + \gamma + 3 + 4\varepsilon)|z|) \quad \forall z,$$

где $\tilde{C}_4 > 0$ не зависит от $k = 1, 2, \dots$. Отсюда следует, что

$$\int_{\mathbb{C}} |\sigma_k(z)|^2 \exp((4a - 6A - 2\gamma - 6 - 10\varepsilon)|z|) d\lambda(z) \leq \tilde{C}_5, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда, как известно (см., например, [52, гл. 3, § 6, п. 2, теорема 3.6.2]), в пространстве локально интегрируемых с квадратом модуля функций в $\mathbb{C}$ найдется элемент g , который (в обобщенном смысле) удовлетворяет равенству

$$\frac{dg_k}{dz} = \sigma_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.25)$$

и, кроме того, оценке

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{C}} |\sigma_k(z)|^2 \exp((4a - 6A - 2\gamma - 6 - 12\varepsilon)|z|) d\lambda(z) \\ & \leq \int_{\mathbb{C}} |\sigma_k(z)|^2 \exp((4a - 6A - 2\gamma - 6 - 10\varepsilon)|z|) (1 + |z|^2)^{-2} d\lambda(z) \leq 2^{-1} \tilde{C}_5. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Для каждого $k = 1, 2, \dots$ рассмотрим функцию

$$\tilde{\psi}_k(z) = \sum_j \psi_j(z) e_j(z) - g_k(z) q_\Lambda(z, \lambda_k, 2\delta),$$

где суммирование по j такое же, как и выше. Легко видеть, что $\tilde{\psi}_k$ вместе со своими производными принимает значения $b_{j,n}$ в точках $\lambda_j \in B(\lambda_k, \tilde{\delta}|\lambda_k|)$. В силу (3.25) обобщенная производная $\tilde{\psi}_k$ по $\bar{z}$ равна нулю всюду в плоскости. Хорошо известно, что это означает аналитичность $\tilde{\psi}_k(z)$. Найдем теперь оценку на $|\tilde{\psi}_k|$ в круге $B(\lambda_k, \tilde{\delta}|\lambda_k|)$. Выберем k_0 такое, что $\tilde{\delta}|\lambda_k| \geq 1$ при $k \geq k_0$. Напомним, что модуль функции $q_\Lambda(z, \lambda_k, 2\tilde{\delta})$ оценивается сверху единицей в круге $B(\lambda_k, 2\tilde{\delta}|\lambda_k|)$, и в каждой точке z отлична от нуля не более чем одна из функций e_j . С учетом этого, используя субгармоничность $\tilde{\psi}_k$, свойство 2) для e_j и неравенства (3.22), (3.13), получаем для всех $z \in B(\lambda_k, \tilde{\delta}|\lambda_k|)$ и $k \geq k_0$

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}_k(z)| & \leq \pi^{-1} \int_{B(z,1)} |\tilde{\psi}_k(y)| d\lambda(y) \\ & \leq \pi^{-1} \int_{B(z,1)} |g_k(y)| d\lambda(y) + C_1 \exp((\gamma + 3 + \varepsilon)|z|). \end{aligned}$$

Отсюда, используя еще (3.26) и неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}_k(z)| & \leq C_1 \exp((\gamma + 3 + \varepsilon)|z|) \\ & \quad + \pi^{-1} \left(\frac{1}{2} \tilde{C}_5 \int_{B(z,1)} \exp((6A - 4a + 2\gamma + 6 + 12\varepsilon)|y|) d\lambda(y) \right)^{1/2} \\ & \leq C_1 \exp((\gamma + 3 + \varepsilon)|z|) \\ & \quad + (2^{-1} \tilde{C}_5)^{1/2} \exp\left(\sup_{B(z,1)} ((3A - 2a + \gamma + 3 + 6\varepsilon)|y|) \right) \\ & \leq C_3 \exp((3A - 2a + \gamma + 3 + 7\varepsilon)|z|), \quad z \in B(\lambda_k, \tilde{\delta}|\lambda_k|). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Увеличивая при необходимости C_3 , можно считать, что последнее неравенство выполнено для всех $k = 1, 2, \dots$

Пусть F – компактное подмножество $\mathbf{S} \setminus J(D)$ и $E(\beta)$ – его окрестность. Как и выше, для номеров k таких, что $\lambda_k/|\lambda_k| \in E(\beta)$, можно получить более точные оценки. Для этого в приведенных выше рассуждениях достаточно использовать (3.23) вместо (3.22) и то, что для некоторого $\beta > 0$ в силу условия 2) теоремы $S_{\Lambda(E(\beta))} \geq -\varepsilon$, а в силу уже доказанного утверждения (i) $M_{\Lambda(E(\beta))} \leq \varepsilon$. Таким образом, подбирая подходящие $\tilde{\beta}, \tilde{\delta} > 0$, имеем

$$|\tilde{\psi}_k(z)| \leq C_4 \exp(H_{K_s}(z) + 13\varepsilon|z|), \quad z \in B(\lambda_k, \tilde{\delta}|\lambda_k|), \quad \lambda_k/|\lambda_k| \in E(\tilde{\beta}). \quad (3.28)$$

3. На заключительном этапе доказательства построим требуемую целую функцию. Разобьем этот этап на несколько пунктов. Их число зависит от вида области D . Поясним это подробнее. В общем случае существует четыре типа точек: точки, в окрестности которых функция H_D конечна, точки, в окрестности которых она бесконечна, и точки, в окрестности которых она и конечна и бесконечна одновременно, но последние, в свою очередь, бывают двух видов: точки, где H_D принимает значение $+\infty$, и точки, где H_D конечна. В частных случаях присутствуют не все точки указанных типов. К примеру, если D ограничена или совпадает со всей плоскостью, то существуют точки только одного типа (своего для каждого из случаев). Если D – полуплоскость или полоса, то существует только два типа точек. Если же D – область, ограниченная параболой, то имеется три типа точек. Мы рассмотрим, естественно, самый общий случай, когда существуют точки всех типов, т. е. когда D – неограниченная область, и одна из точек $\partial J(D) \cap \mathbf{S}$, скажем w_2 , принадлежит множеству $J(D)$, а другая, скажем w_1 , не принадлежит ему. Такая ситуация реализуется, например, для области, лежащей в верхней полуплоскости, граница которой в левой полуплоскости совпадает с куском параболы, а в правой полуплоскости – с положительной вещественной полуосью. Кроме того, мы считаем, что обе точки, w_1 и w_2 , содержатся в $N(\Lambda)$ (в противном случае приводимые ниже рассуждения упрощаются).

Этот этап доказательства разобьем на четыре пункта, в каждом из которых будем строить целую функцию, принимающую вместе со своими производными заданные значения лишь в точках λ_k таких, что $\lambda_k/|\lambda_k|$ лежит в окрестности множества, состоящего из точек одного типа. Требуемую функцию мы получим затем, сложив эти целые функции. В частных случаях некоторые пункты могут отсутствовать, если отсутствуют точки соответствующего типа.

3.1. Фиксируем $\varepsilon \in (0, \alpha_s/100)$, где α_s – такое же, как и в (1.1). Выберем номер $m \geq s+1$ такой, что $H_{K_m}(w_1) \geq H_D(w_1) - \varepsilon$. Пусть $\varphi \in I_\Lambda(D)$ удовлетворяет условию 4). В силу непрерывности H_{K_m} и h_φ , как и выше, для некоторого $\alpha \in (0, 1/6)$ имеем

$$h_\varphi(z) \leq H_D(w_1) \leq H_{K_m}(z) + 2\varepsilon, \quad z \in B(w_1, 6\alpha). \quad (3.29)$$

Пусть $h(z) = H_{K_m}(z)$ и $H(z) = H_{K_m}(z) + 2\varepsilon|z|$. По функциям $h(z)$, $H(z)$ и числам ε , α найдем $\delta_0 > 0$ из леммы 3.3 и фиксируем положительное $\delta < \min\{\delta_0, \alpha/22, \tilde{\delta}/88\}$ ($\tilde{\delta} > 0$ – такое же, как и в (3.28), где в качестве F берем одноточечное множество $\{w_1\}$). Согласно условию 4) существуют $\beta \in (0, \alpha)$ и $T' > 0$ такие, что $\lambda_k \in B(z_k, \delta|z_k|)$ для некоторого $z_k \in R_m$, как только $|\lambda_k| > T'$ и $\lambda_k/|\lambda_k| \in B(w_1, \beta)$. Легко видеть, что $z_k/|z_k| \in B(w_1, 2\alpha)$. Пусть множество R состоит из всех точек z_k . Тогда в силу (3.29)

$$h_\varphi(z) \leq H_{K_m}(z) + 2\varepsilon|z|, \quad z \in R^\alpha. \quad (3.30)$$

Отсюда согласно определению R_m по лемме 3.3 найдем $T > 0$ и попарно непересекающиеся открытые множества U_p , $p \geq 1$, обладающие свойствами 1)–3) этой леммы и такие, что

$$\begin{aligned} \ln|\varphi(z)| &\geq h(z) - 2\varepsilon|z| - (3 + \ln 24)(H(z) - h(z) + 3\varepsilon|z|) \\ &\geq h(z) - 2\varepsilon|z| - 7(2\varepsilon|z| + 3\varepsilon|z|) = H_{K_m}(z) - 37\varepsilon|z|, \quad z \in \partial U_p. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Пусть $\tilde{R} = \cup \partial U_p$, $h_1(z) = H_{K_m}(z) - 37\varepsilon|z|$ и $H_1(z) = H_{K_m}(z) + 2\varepsilon|z|$. В силу свойства 2) из леммы 3.3 и выбора δ верно вложение $\tilde{R} \subset R^\alpha$. Тогда, как нетрудно заметить, $z/|z| \in B(w_1, 6\alpha)$ для всех $z \in \tilde{R}^\alpha$. Следовательно, согласно (3.29) и (3.31) выполнены все условия леммы 3.5, по которой имеем

$$|\varphi(y)| \geq \exp(H_{K_m}(y) - 40\varepsilon|y|), \quad y \in B(z, \exp(-43\varepsilon|z|)), \quad z \in \tilde{R} \setminus B(0, \tilde{T}). \quad (3.32)$$

Пусть $T_1 > \max\{T', T, \tilde{T}/(1 - 88\delta)\}$ (не ограничивая общности, можно считать, что $88\delta < 1$) и $\Gamma_1 = \{tz : z \in B(w_1, \beta_1) \cap \mathbf{S}, t > T_1\}$, где $0 < \beta_1 < \min\{\beta, \tilde{\beta}\}$ ($\tilde{\beta}$ такое же, как в (3.28)) и $w_2 \notin \overline{B(w_1, \beta_1)}$. Согласно выбору β_1 и T_1 каждая точка λ_k из Γ_1 принадлежит R^δ , а значит, в силу свойства 3) леммы 3.3 и некоторому $\overline{U}_p$. Пусть подпоследовательность $\{U_{p_i}\}$ состоит из всех множеств U_p таких, что $\overline{U}_p$ содержит хотя бы одну точку $\lambda_k \in \Gamma_1$. Какую-нибудь одну из таких точек, принадлежащих U_{p_i} , обозначим λ_{k_i} , $i = 1, 2, \dots$. По свойству 1) леммы 3.3 имеет место вложение $U_{p_i} \subset B(\lambda_{k_i}, 88\delta|\lambda_{k_i}|)$, $i \geq 1$. Следовательно, в силу выбора δ и β_1 для функции $\tilde{\psi}_{k_i}$ на множестве U_{p_i} выполнено (3.28). Кроме того, из последнего вложения и выбора T_1 следует, что все U_{p_i} лежат вне круга $B(0, \tilde{T})$. Поэтому для каждого $i \geq 1$ и любого $z \in \partial U_{p_i}$ выполнено (3.32). Пусть

$$V_i = U_{p_i} \setminus \cup \{B(z, \exp(-43\varepsilon|z|)), z \in \partial U_{p_i}\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Поскольку $\varphi(\lambda_k) = 0$, то в силу (3.32) каждая точка $\lambda_k \in \Gamma_1$ принадлежит внутренности одного из V_i (так как принадлежит одному из $\overline{U}_{p_i}$). Уменьшая при необходимости $\delta > 0$ (так, что при $\tau = 88\delta$ для функций $43\varepsilon|z|$ и $44\varepsilon|z|$ выполнено (3.13)), имеем

$$\text{dist}(V_1, \partial U_{p_i}) \geq \exp(-44\varepsilon|\lambda_{k_i}|), \quad i \geq 1.$$

Тогда, как и выше, найдем функции e_i^1 , $i \geq 1$, обладающие следующими свойствами:

- 1) $e_i^1 \in C^\infty(\mathbb{C})$;
- 2) $0 \leq e_i^1(z) \leq 1 \quad \forall z$;
- 3) $e_i^1(z) = 1, z \in V_i$;
- 4) $e_i^1(z) = 0, z \notin U_{p_i}$;
- 5) $|de_i^1(z)/d\bar{z}| \leq \tilde{C}_6 \exp(44\varepsilon|\lambda_{k_i}|) \quad \forall z$, где постоянная $\tilde{C}_6 > 0$ не зависит от номера i .

С учетом (3.13) последнее свойство можно заменить на свойство

$$5') \quad |de_i^1(z)/d\bar{z}| \leq \tilde{C}_6 \exp(45\varepsilon|z|) \quad \forall z.$$

Определим последовательность $b^1 = \{b_{k,n}^1\}$. Положим $b_{k,n}^1 = b_{k,n}$, $n = 1, \dots, m_k$, если $\lambda_k \in \Gamma_1$, и $b_{k,n}^1 = 0$, $n = 1, \dots, m_k$, если $\lambda_k \notin \Gamma_1$. Поскольку $\|b^1\|_s \leq \|b\|_s$, то будем считать, что все построения, которые мы провели выше, сделаны для последовательности b^1 .

В силу свойств 3) и 4) для e_i^1 функция $\nu_1(z) = \varphi^{-1}(z) \sum_i \tilde{\psi}_{k_i}(z) de_i^1(z)/d\bar{z}$ отлична от нуля лишь на множествах $U_{p_i} \setminus V_i$, $i = 1, 2, \dots$. Поэтому из свойства 5') для e_i^1 , (3.28) и (3.32) получаем

$$|\nu_1(z)| \leq C_4 \tilde{C}_6 \exp(H_{K_s}(z) - H_{K_m}(z) + 98\varepsilon|z|) \quad \forall z.$$

Отсюда с учетом (1.1), выбора ε и m , а также вложения $K_j \subset K_{j+1}$ имеем

$$|\nu_1(z)| \leq C_4 \tilde{C}_6 \exp(H_{K_s}(z) - H_{K_{s+1}}(z) + 98\varepsilon|z|) \leq C_4 \tilde{C}_6.$$

Поскольку $\varphi \in \mathbf{P}_D$, то найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что

$$h_{\varphi_1}(z) + 5\varepsilon_1|z| < H_D(z), \quad z \neq 0. \quad (3.33)$$

По предыдущему имеем

$$\int_{\mathbb{C}} |\nu_1(z)|^2 \exp(-2\varepsilon_1|z|) d\lambda(z) < \infty.$$

Тогда, как и выше, найдем функцию $\theta_1(z)$, которая удовлетворяет уравнению $d\theta_1(z)/d\bar{z} = \nu_1(z)$ и неравенству $\int_{\mathbb{C}} |\theta_1(z)|^2 \exp(-4\varepsilon_1|z|) d\lambda(z) < \infty$. Положим

$$f_1(z) = \sum_i \tilde{\psi}_{k_i}(z) e_i^1(z) - \theta_1(z) \varphi(z).$$

Функция f_1 целая. Так же, как и для $\tilde{\psi}_k$, с учетом (3.28), свойств 2), 4) функций e_i^1 , неравенств (3.11) (где $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1$) и (3.13) получаем оценку

$$\begin{aligned} |f_1(z)| &\leq \pi^{-1} \int_{B(z,1)} |f_1(y)| d\lambda(y) \\ &\leq C_4 \exp(H_{K_s}(z) + 14\varepsilon|z|) + \tilde{C}_7 \exp(h_{\varphi}(z) + 2\varepsilon_1|z|) \int_{\mathbb{C}} |\theta_1(y)| d\lambda(y) \\ &\leq C_4 \exp(H_{K_{s+1}}(z)) + \tilde{C}_8 \exp(h_{\varphi}(z) + 5\varepsilon_1|z|). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.33) следует, что

$$h_{f_1}(z) \leq \max\{H_{K_{s+1}}(z), h_{\varphi}(z) + 5\varepsilon_1|z|\} < H_D(z), \quad z \neq 0,$$

т. е. $f_1 \in \mathbf{P}_D$. По построению f_1 вместе со своими производными принимает значения $b_{k,n}^1$ в точках λ_k .

3.2. Построим функцию $f_2 \in \mathbf{P}_D$, которая вместе со своими производными принимает значения $b_{k,n}^2$ в точках λ_k , где $b_{k,n}^2 = b_{k,n}$, $n = \overline{1, m_k}$, если $\lambda_k \in \Gamma_2 = \{tz: z \in B(w_2, \beta_2) \cap \mathbf{S}, t > T_2\}$, и $b_{k,n}^2 = 0$, $n = \overline{1, m_k}$, если $\lambda_k \notin \Gamma_2$. Заранее полагаем, что $B(w_1, \beta_1) \cap B(w_2, \beta_2) = \emptyset$. Тогда Γ_1 и Γ_2 не пересекаются.

Пусть $\varepsilon, \alpha = 1$, $h(z) = a_0|z|$ и $H(z) = d_0|z|$, где $d_0 = \max_{y \in \mathbf{S}} h_{\varphi_0}(y)$. По ε, α, h и H определим число δ_0 из леммы 3.3. Положим $d = 3A - 2a + \gamma + 65 + 15d_0 - 16a_0$ (где A, a, γ — те же, что и в (3.27), и a_0 — из условия 3)), и пусть K — сопряженная диаграмма φ_0 , т. е. $H_K \equiv h_{\varphi_0}$. По лемме 3.6 для компакта K , множества $F = \{w_2\}$ и числа d найдем $\beta > 0$ и выпуклый компакт L такие, что $K + L \subset D$ и $H_L(z) \geq d|z| \forall z: z/|z| \in E(3\beta)$. Уменьшая, если это необходимо, $\beta > 0$, в силу непрерывности (в широком смысле) H_D в точке $w_2 \in J(D)$ можно считать, что

$$H_D(z) > 3A - 2a + \gamma + 10, \quad z \in \overline{B(w_2, 3\beta)}.$$

Тогда из определения опорной функции легко следует, что для некоторого компакта $L_1 \subset D$ выполнено неравенство

$$H_{L_1}(z) > 3A - 2a + \gamma + 10, \quad z \in \overline{B(w_2, 3\beta)}. \quad (3.34)$$

Фиксируем положительное $\delta < \min\{\delta_0, \beta/88, \tilde{\delta}/88\}$ ($\tilde{\delta} > 0$ такое же, как в (3.27)). Для $R = R_0$ по лемме 3.3 найдем $T > 0$ и попарно непересекающиеся открытые множества U_p , $p \geq 1$, со свойствами 1)–3) леммы 3.3 такие, что

$$\begin{aligned} \ln|\varphi_0(z)| &\geq h(z) - 2|z| - (3 + \ln 24)(H(z) - h(z) + 3|z|) \\ &\geq (8a_0 - 7d_0 - 23)|z| = d_1|z|, \quad z \in \partial U_p. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Пусть $\tilde{R} = \cup \partial U_p$, $h_1(z) = d_1|z|$ и $H_1(z) = d_0|z|$. Тогда по лемме 3.5

$$|\varphi_0(y)| \geq \exp((d_1 - 3)|y|), \quad y \in B(z, \exp((d_1 - d_0 - 4)|z|)), \quad z \in \tilde{R} \setminus B(0, \tilde{T}). \quad (3.36)$$

Согласно условию 3) существуют $\beta_2 \in (0, \beta)$ и $T' > 0$ такие, что $\lambda_k \in R_0^\delta = R^\delta$, если $|\lambda_k| > T'$ и $\lambda_k/|\lambda_k| \in B(w_2, \beta_2)$. Пусть $T_2 > \max\{T', T, \tilde{T}/(1 - 88\delta)\}$ и U_{p_i} , λ_{k_i} , $i \geq 1$, обладают теми же свойствами, что и в п. 3.1, но уже для множества Γ_2 . Положим

$$V_i = U_{p_i} \setminus \cup \{B(z, \exp((d_1 - d_0 - 4)|z|)), z \in \partial U_{p_i}\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Тогда, как и в п. 3.1, найдем функции e_i^2 , $i \geq 1$, обладающие свойствами 1)–4) для e_i^1 и свойством

$$5'') \quad |de_i^2(z)/d\bar{z}| \leq \tilde{C}_9 \exp((d_0 + 6 - d_1)|z|) \quad \forall z, \text{ где } \tilde{C}_9 > 0 \text{ не зависит от } i.$$

Функция $\sum \tilde{\psi}_{k_j} e_j^2$ отлична от нуля на множествах $U_{p_i} \subset B(\lambda_{k_i}, 88\delta|\lambda_{k_i}|)$, $i \geq 1$, и удовлетворяет в них такой же оценке, как и последняя оценка в (3.27). В силу выбора β_2 и δ для любых $i \geq 1$ и $z \in U_{p_i} \subset B(\lambda_{k_i}, 88\delta|\lambda_{k_i}|)$ точка $z/|z|$ принадлежит $B(w_2, 3\beta)$. Следовательно, с учетом (3.34) получаем

$$\left| \sum \tilde{\psi}_{k_j}(z) e_j^2(z) \right| \leq C_3 \exp(H_{L_1}(z)) \quad \forall z.$$

Функция $\nu_2(z)$ (определяемая, как и $\nu_1(z)$) отлична от нуля только на множествах $U_{p_i} \setminus V_i$, $i = 1, 2, \dots$. Поэтому в силу (3.27), (3.36) и свойства 5'') для e_i^2 с учетом свойств компакта L имеем оценку

$$|\nu_2(z)| \leq \tilde{C}_9 C_3 \exp(H_L(z)) \quad \forall z.$$

Поскольку L_1 и $K + L$ — компакты в D , то найдется $\varepsilon_2 > 0$ такое, что

$$H_{L_1}(z) + \varepsilon_2|z| < H_D(z), \quad H_L(z) + H_K(z) + 5\varepsilon_2|z| < H_D(z), \quad z \neq 0.$$

Согласно полученной оценке на $\nu_2(z)$ существует функция θ_2 , которая удовлетворяет уравнению $d\theta_2(z)/d\bar{z} = \nu_2(z)$ и неравенству

$$\int_{\mathbb{C}} |\theta_2(z)|^2 \exp(H_L(z) - 4\varepsilon_1|z|) d\lambda(z) < \infty.$$

Тогда, как и выше, для f_2 (определяемой, как и f_1) получаем оценку

$$h_{f_2}(z) \leq \max\{H_{L_1}(z) + \varepsilon_2|z|, H_K(z) + H_L(z) + 5\varepsilon_2|z|\} < H_D(z), \quad z \neq 0.$$

Следовательно, $f_2 \in \mathbf{P}_D$.

3.3. Множество $\mathbf{S} \setminus (B(w_1, \beta_1) \cup B(w_2, \beta_2))$ состоит из двух дуг F_1 и F_2 окружности $\mathbf{S}$, причем в окрестности F_1 функция H_D конечна, а в окрестности F_2 бесконечна. Построим функцию $f_3 \in \mathbf{P}_D$, которая вместе со своими производными принимает значения $b_{k,n}^3$ в точках λ_k , где $b_{k,n}^3 = b_{k,n}$, если $\lambda_k \in \Gamma_3 = \{tz : z \in F_1, t > T_3\}$, и $b_{k,n}^3 = 0$, если $\lambda_k \notin \Gamma_3$, $n = \overline{1, m_k}$. Фиксируем $\varepsilon \in (0, \alpha_s/100)$, где α_s такое же, как и в (1.1). Поскольку F_1 – компакт в $\mathbf{S} \setminus \overline{J(D)}$ и H_D непрерывна на $\mathbf{S} \setminus \overline{J(D)}$ (в обычном смысле), то найдутся номер $m \geq s + 1$ и $\alpha > 0$ такие, что $H_{K_m}(z) \geq H_D(z) - \varepsilon$, $z \in E(6\alpha)$ ($E(\alpha)$ – окрестность F_1). Пусть $h(z) = H_{K_m}(z)$ и $H(z) = H_{K_m}(z) + 2\varepsilon|z|$. По функциям $h(z)$, $H(z)$ и числам ε , α найдем $\delta_0 > 0$ из леммы 3.3 и фиксируем положительное $\delta < \min\{\delta_0, \alpha/22, \tilde{\delta}/88\}$ ($\tilde{\delta} > 0$ такое же, как и в (3.28), где в качестве F берем F_1). Сразу же наложим дополнительное условие на δ : при $\tau = 88\delta$ для функций $43\varepsilon|z|$ и $44\varepsilon|z|$ выполнено (3.13). Для выбранных δ , m и F_1 согласно условию 5) теоремы найдем функцию $\varphi \in I_\Lambda(D)$. В силу условия 5) каждая точка λ_k такая, что $\lambda_k/|\lambda_k| \in F_1$ и $|\lambda_k| > T$, принадлежит кругу $B(z_k, \delta|z_k|)$ для некоторого $z_k \in R_m$. Дальнейшее построение практически полностью совпадает с построением, проведенным в п. 3.1, с единственным исключением: в отличие от Γ_1 для определения Γ_3 не нужно подбирать число, подобное β_1 .

3.4. Построим, наконец, функцию $f_4 \in \mathbf{P}_D$, которая вместе со своими производными принимает значения $b_{k,n}^4$ в точках λ_k , где $b_{k,n}^4 = b_{k,n}$, $n = \overline{1, m_k}$, если $\lambda_k \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, и $b_{k,n}^4 = 0$, $n = \overline{1, m_k}$, если $\lambda_k \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$.

Пусть φ – произвольная функция из $I_\Lambda(D)$, не равная тождественно нулю (по условию $I_\Lambda(D) \neq \{0\}$). По теореме об оценке снизу на окружностях модуля целой функции конечного порядка и типа (см. [48, гл. I, § 4, теорема 4.3]) для каждого $\delta > 0$ существуют $a_0(\delta) > 0$ и $r_j > 0$, $j \geq 1$, такие, что $r_j \rightarrow +\infty$, $r_{j+1} < (1 + \delta)r_j$ и выполнено

$$\ln|\varphi(z)| \geq -a_0(\delta)|z|, \quad |z| = r_j, \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.37)$$

Положим $R = \{z : |z| = r_j, j = 1, 2, \dots\}$. Тогда для некоторого $T' > 0$ каждая точка λ_k такая, что $|\lambda_k| > T$, принадлежит R^δ . Таким образом, мы получили условие, подобное условию 5) теоремы, но с более слабыми оценками.

Пусть ε , $\alpha = 1$, $h(z) = a_0(\delta)|z|$ и $H(z) = d_0|z|$, где $d_0 = \max_{y \in \mathbf{S}} h_\varphi(y)$. Согласно замечанию 3.4 найдем число $\delta_0 > 0$ из леммы 3.3, не зависящее от h и H . Поскольку F_2 – компакт в $\text{int } J(D)$, то существует его окрестность $E(3\beta)$, в которой $H_D(z) = +\infty$. Кроме того, уменьшая при необходимости $\beta > 0$, можно считать, что 3β – число, которое определяется только по F_2 в лемме 3.6. Фиксируем положительное $\delta < \min\{\delta_0, \beta/88, \tilde{\delta}/88\}$ ($\tilde{\delta} > 0$ такое же, как и в (3.27)). С учетом (3.37) и замечания 3.4 найдем множества U_p и $T > T'$, обладающие свойствами 1)–3) леммы 3.3, и $\tilde{a}$ такое, что $\ln|\varphi(z)| \geq \tilde{a}|z|$, $z \in \partial U_p$. Далее, как и выше, применяем лемму 3.5 и выделяем U_{p_i} , $i \geq 1$, которые содержат все λ_k из множества $\Gamma_4 = \{tz : z \in F_2, t > T\}$. Имеется лишь конечное число точек λ_k , не попавших

в объединение $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$. Выберем попарно непересекающиеся окрестности таких точек, которые к тому же не пересекаются ни с одним из U_{p_i} . Добавим эти окрестности к U_{p_i} и после перенумерации будем считать, что сами U_{p_i} , $i \geq 1$, содержат все точки λ_k , не принадлежащие объединению $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. При этом необходимые оценки на $\ln |\varphi|$ в окрестностях множеств ∂U_{p_i} изменятся лишь на константу. Дальнейшее построение f_4 вполне аналогично построению f_2 . Заметим только, что при выборе функций, подобных e_i^2 , в свойстве 5) вместо (3.13) нужно использовать неравенства из замечания 3.4. Положим $f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$. По построению f – искомая функция. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.11. Из доказательства теоремы 3.7 видно, что утверждение (i) является следствием только лишь условий 4) и 5).

§ 4. Необходимые условия интерполяции и фундаментального принципа

Здесь мы найдем необходимые условия интерполяции, которые, на первый взгляд, будут выглядеть даже сильнее достаточных. Прежде всего, докажем, что условия 1) и 2) теоремы 3.7 являются следствием разрешимости интерполяционной задачи.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть D – выпуклая область и $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$. Если верно вложение $\Phi \subset \Sigma(\mathbf{P}_D \setminus I_\Lambda(D))$, то:

- (i) $S_\Lambda(D) = 0$;
- (ii) $S_\Lambda \geq a > -\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Как мы уже отмечали, для любой последовательности $\tilde{\Lambda}$ величина $S_{\tilde{\Lambda}}$ неположительна. Следовательно, $S_\Lambda(D) \leq 0$. Предположим, что для некоторого $\tilde{\varepsilon} > 0$ верно неравенство $S_\Lambda(D) < -2\tilde{\varepsilon}$. Тогда $S_\Lambda(F) < -\tilde{\varepsilon}$ для некоторого компакта $F \subset \mathbf{S} \setminus J(D)$, а значит, $S_{\Lambda(E(\beta))} < -\tilde{\varepsilon}$ для любой окрестности $E(\beta)$ этого компакта. Отсюда с учетом (3.1) следует, что для каждого $j \geq 4$ найдется точка λ_{k_j} со свойствами: $\lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}| \in E(1/k)$, $|\lambda_{k_j}| > k$ и

$$|\lambda_{k_j}|^{-1} \ln |q_\Lambda^{k_j}(\lambda_{k_j}, \lambda_{k_j}, 1/j)| < -\tilde{\varepsilon}. \quad (4.1)$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|$ сходится к точке $x_0 \in F$ и $|\lambda_{k_{j+1}}|/|\lambda_{k_j}| > 2$, $j \geq 4$. Последнее означает, что для всех $\delta \in (0, 1/2)$ круг $B(\lambda_{k_j}, \delta|\lambda_{k_j}|)$ не содержит точек λ_{k_p} при $p \neq j$.

Пусть $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}/4)$. Выберем номер m так, что $H_{K_m}(x_0) \geq H_D(x_0) - \varepsilon$. Рассмотрим последовательность $b = \{b_{k,n}\}_{k=1, n=1}^{\infty, m_k}$, где $b_{k_j,1} = \exp H_{K_m}(\lambda_{k_j})$ и $b_{k,n} = 0$ для всех остальных k, n . Тогда $b \in \Phi$. Поэтому согласно условию теоремы существует функция $f \in \mathbf{P}_D$ такая, что $\tilde{\Sigma}(f) = b$, т.е. $f^{(n-1)}(\lambda_k) = b_{k,n}$, $k \geq 1$, $n = \overline{1, m_k}$. В силу непрерывности H_{K_m} , h_f , выбора номера m и неравенства $h_f(z) < H_D(z)$, $z \neq 0$, для некоторого $\delta \in (0, 1/6)$ имеем

$$h_f(z) \leq H_D(x_0) \leq H_{K_m}(z) + 2\varepsilon, \quad z \in B(x_0, 6\delta).$$

Отсюда, как и в (3.11), получаем

$$\ln |f(z)| \leq h_f(z) + \varepsilon|z| \leq H_{K_m}(z) + 3\varepsilon|z| \quad \forall z: z/|z| \in B(x_0, 6\delta), \quad |z| \geq T.$$

Поскольку $\lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}| \rightarrow x_0$, то в силу (3.13) (при малом δ) верно неравенство

$$\ln|f(z)| \leq H_{K_m}(\lambda_{k_j}) + 4\varepsilon|\lambda_{k_j}|, \quad z \in \overline{B(\lambda_{k_j}, 5\delta|\lambda_{k_j}|)}, \quad j \geq j_0.$$

Нетрудно заметить, что $|q_\Lambda^{k_j}(z, \lambda_{k_j}, \delta)| \geq 1$, $z \in \partial B(\lambda_{k_j}, 5\delta|\lambda_{k_j}|)$. Поэтому

$$\ln|f(z)(q_\Lambda^{k_j}(z, \lambda_{k_j}, \delta))^{-1}| \leq H_{K_m}(\lambda_{k_j}) + 4\varepsilon|\lambda_{k_j}|, \quad z \in \partial B(\lambda_{k_j}, 5\delta|\lambda_{k_j}|), \quad j \geq j_0.$$

По построению $f(z)$ обращается в нуль в точках $\lambda_k \in B(\lambda_{k_j}, \delta|\lambda_{k_j}|)$, $k \neq k_j$, с кратностью, не меньшей, чем m_k . Следовательно, $f(z)(q_\Lambda^{k_j}(z, \lambda_{k_j}, \delta))^{-1}$ — целая функция. Тогда по принципу максимума из предыдущего получаем

$$\ln|f(\lambda_{k_j})(q_\Lambda^{k_j}(\lambda_{k_j}, \lambda_{k_j}, \delta))^{-1}| \leq H_{K_m}(\lambda_{k_j}) + 4\varepsilon|\lambda_{k_j}|.$$

Отсюда с учетом (4.1), (3.1) и выбора числа ε имеем

$$\ln|f(\lambda_{k_j})| < H_{K_m}(\lambda_{k_j}) + 4\varepsilon|\lambda_{k_j}| - \tilde{\varepsilon}|\lambda_{k_j}| < H_{K_m}(\lambda_{k_j}), \quad j \geq j_1.$$

Это противоречит равенству $f(\lambda_{k_j}) = \exp(H_{K_m}(\lambda_{k_j}))$, $j \geq 4$. Таким образом, утверждение (i) доказано.

(ii) Утверждение содержательно лишь для неограниченной области, поскольку для ограниченной области D оно является следствием утверждения (i). Доказательство утверждения (ii) аналогично проведенному выше. Заметим лишь, что при оценке сверху $\ln|f(z)|$ вместо функции $H_{K_m}(z) + 3\varepsilon|z|$ необходимо взять $(a+1)|z|$, где $a = \sup\{h_f(z), z \in \mathbf{S}\}$, и затем воспользоваться соотношением $|\lambda_{k_j}|^{-1} \times \ln|q_\Lambda^{k_j}(\lambda_{k_j}, \lambda_{k_j}, 1/j)| \rightarrow -\infty$, $j \rightarrow \infty$, которое будет иметь место, если предположить, что $S_\Lambda = -\infty$. При выборе f компакт K_m можно заменить любым компактом из D . Теорема доказана.

Далее мы хотим доказать необходимость условий 3)–5) теоремы 3.7 (и даже более сильных условий) для разрешимости интерполяционной задачи при дополнительном предположении $m_D(\Lambda) = 0$. Но вначале докажем необходимость более слабых условий. Введем функции

$$\Psi_j(z) = \overline{\lim}_{w \rightarrow z} \sup\{|\ln|\varphi(w)|| : \varphi \in I_\Lambda(D), \|\varphi\|_j \leq 1\}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Функция Ψ_j является субгармонической как регуляризация верхней огибающей семейства субгармонических функций, равномерно ограниченных на каждом компакте (см., например, [52, гл. I, § 5, п. 1]). Ясно, что $\{\Psi_j\}$ — возрастающая последовательность.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть D — выпуклая область и $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$ такая, что $m_D(\Lambda) = 0$. Предположим, что $\Sigma: \mathbf{P}_D/I_\Lambda(D) \rightarrow \Phi$ — изоморфизм. Тогда для функций Ψ_j , $j = 1, 2, \dots$, верны следующие утверждения:

(i) для каждого $m \geq 1$ и каждого компакта $F \subset \mathbf{S} \setminus J(D)$ существует $j \geq 1$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся $\beta, T > 0$, удовлетворяющие условию: $\lambda_k \in R_{m,j}^\delta$, если $\lambda_k/|\lambda_k| \in E(\beta)$ и $|\lambda_k| > T$, где $R_{m,j} = \{z: \Psi_j(z) \geq H_{K_m}(z)\}$ и $E(\beta)$ — β -окрестность F ;

(ii) существуют $j \geq 1$ и $a_0 \in \mathbb{R}$ такие, что для любого $\delta > 0$ найдется $T > 0$, удовлетворяющее условию: $\lambda_k \in R_0^\delta$, если $|\lambda_k| > T$, где $R_0 = \{z: \Psi_j(z) \geq a_0|z|\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Предположим, что утверждение неверно. Тогда для некоторых $m \geq 1$, компакта $F \subset \mathbf{S} \setminus J(D)$ и каждого $j \geq 1$ существуют $\delta > 0$ и подпоследовательность $\{\lambda_{k_p}\}$ (зависящие от j) такие, что

$$\lambda_{k_p}/|\lambda_{k_p}| \in E(1/p), \quad \lambda_{k_p} \notin R_{m,j}^\delta, \quad p = 1, 2, \dots, \quad |\lambda_{k_p}| \rightarrow \infty.$$

Фиксируем $\varepsilon \in (0, \alpha_m/5)$, где α_m такое же, как в (1.1). По условию оператор Σ – изоморфизм. Это означает, что для некоторых $j \geq 1$ и $C > 0$

$$\|\Sigma^{-1}(b)\|_j \leq C\|b\|_{m+1} \quad \forall b \in \Phi_{m+1}. \quad (4.2)$$

Пусть $\delta > 0$ и $\{\lambda_{k_p}\}$ соответствуют номеру $j + 1$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $|\lambda_{k_{p+1}}| \geq 2|\lambda_{k_p}|$, $p \geq 1$. Тогда $\sum_p |\lambda_{k_p}|^{-1} < \infty$ и функция $g(z) = \prod_{p=1}^{\infty} (1 - z/\lambda_{k_p})$ является целой и имеет экспоненциальный минимальный тип, т. е. $h_g(z) \equiv 0$ (см., например, [48, гл. I, теорема 3.9]). Кроме того, ее нули $\{\lambda_{k_p}\}$ образуют так называемое регулярное множество, и поэтому для некоторого $\tilde{T} > 0$ верна оценка (см., например, [48, гл. I, теорема 6.4])

$$\ln|g(z)| \geq -\varepsilon|z|, \quad |z| \geq \tilde{T}, \quad z \notin B(\lambda_{k_p}, 1), \quad p = 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Рассмотрим последовательность $b = \{b_{k,n}\}_{k=1, n=1}^{\infty, m_k}$, где $b_{k,n} = \exp(H_{K_{m+1}}(\lambda_{k_p}))$, если $k = k_p$, $n = m_{k_p}$, и $b_{k,n} = 0$ для всех остальных k, n . Тогда $b \in \Phi_{m+1}$ и $\|b\|_{m+1} = 1$. Поэтому согласно условию теоремы с учетом (4.2) существует функция $f \in \mathbf{P}_j$ такая, что $\|f\|_j \leq 2C$ и $f^{(n-1)}(\lambda_k) = b_{k,n}$, $k \geq 1$, $n = \overline{1, m_k}$. Пусть $\beta \in (0, 1/2)$, $\beta < \delta/2$. Функция f обращается в нуль в точке λ_{k_p} с кратностью $m(p) = m_{k_p} - 1$. Поэтому $f(z) = ((z - \lambda_{k_p}) / (\beta|\lambda_{k_p}|))^{m(p)} \tilde{f}(z)$, где $\tilde{f}$ целая. Отсюда имеем

$$\exp(H_{K_{m+1}}(\lambda_{k_p})) = f^{(m(p))}(\lambda_{k_p}) = m(p)! \tilde{f}(\lambda_{k_p}) (\beta|\lambda_{k_p}|)^{-m(p)}.$$

Из условия $m_D(\Lambda) = 0$ следует, что $m(p)/|\lambda_{k_p}| \rightarrow 0$. Последнее, как и в (2.10), влечет за собой оценки

$$|\lambda_{k_p}|^{m(p)}/m(p)! \geq \exp(-\varepsilon|\lambda_{k_p}|), \quad \beta^{m(p)} \geq \exp(-\varepsilon|\lambda_{k_p}|)$$

при $p \geq p_0$. Следовательно, из предыдущего получаем

$$|\tilde{f}(\lambda_{k_p})| \geq \exp(H_{K_{m+1}}(\lambda_{k_p}) - 2\varepsilon|\lambda_{k_p}|), \quad p \geq p_0.$$

По принципу максимума найдется y_p такое, что $|y_p - \lambda_{k_p}| = \beta|\lambda_{k_p}|$ и

$$|\tilde{f}(y_p)| \geq \exp(H_{K_{m+1}}(\lambda_{k_p}) - 2\varepsilon|\lambda_{k_p}|), \quad p \geq p_0.$$

Отсюда с учетом (3.13) (при малом β) имеем

$$|\tilde{f}(y_p)| \geq \exp(H_{K_{m+1}}(y_p) - 3\varepsilon|y_p|), \quad p \geq p_0.$$

Тогда в силу выбора y_p

$$|f(y_p)| = |\tilde{f}(y_p)| \geq \exp(H_{K_{m+1}}(y_p) - 3\varepsilon|y_p|), \quad p \geq p_0. \quad (4.4)$$

Поскольку $h_g(z) \equiv 0$, то, как и в (3.11), получаем оценку (где α_j – из (1.1))

$$|g(z)| \leq C_1 \exp(\alpha_j|z|) \quad \forall z. \quad (4.5)$$

Рассмотрим функцию $\varphi(z) = (2CC_1)^{-1}f(z)g(z)$. Из неравенств (4.3), (4.4), (1.1) с учетом неравенства $|\lambda_{k_{p+1}}| \geq 2|\lambda_{k_p}|$ и выбора y_p , ε следует, что

$$|\varphi(y_p)| \geq \exp(H_{K_{m+1}}(y_p) - 5\varepsilon|y_p|) \geq \exp(H_{K_m}(y_p)), \quad p \geq p_1. \quad (4.6)$$

С другой стороны, в силу (4.5), (1.1) и выбора f имеем

$$|\varphi(z)| \leq (2CC_1)^{-1}2C \exp(H_{K_j}(z))C_1 \exp(\alpha_j|z|) \leq \exp(H_{K_{j+1}}(z)) \quad \forall z,$$

т.е. $\|\varphi\|_{j+1} \leq 1$. По построению φ обращается в нуль во всех точках λ_k с кратностью, не меньшей, чем m_k . Поэтому $\varphi \in I_\Lambda(D)$. Тогда по определению Ψ_{j+1} с учетом (4.6) верно неравенство

$$\Psi_{j+1}(y_p) \geq H_{K_m}(y_p), \quad p \geq p_1.$$

Таким образом, $y_p \in R_{m,j+1}$, $p \geq p_1$. В силу выбора y_p и β имеем

$$\delta|y_p| \geq 2^{-1}\delta|\lambda_{k_p}| > \beta|\lambda_{k_p}|, \quad p \geq p_1.$$

Это влечет за собой включение $\lambda_{k_p} \in B(y_p, \delta|y_p|) \subset R_{m,j+1}^\delta$, $p \geq p_1$, которое противоречит выбору $\{\lambda_{k_p}\}$. Утверждение (i) доказано.

(ii) Утверждение доказывается аналогично. Заметим только, что при определении номера j и последовательности $\{b_{k,n}\}$ достаточно взять $m = 0$, а при оценке $|\tilde{f}(\lambda_{k_p})|$ вместо (2.10) необходимо воспользоваться тем же неравенством, что и при получении (3.22). Кроме того, в этом случае F совпадает с окружностью $\mathbf{S}$. Теорема доказана.

Покажем теперь, что выполнение для функций Ψ_j свойств из утверждений (i), (ii) теоремы 4.2 влечет за собой существование функций $\varphi \in I_\Lambda(D)$ с аналогичными свойствами. Но прежде сделаем простое наблюдение. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$ – такая, что $I_\Lambda(\mathbb{C}) \neq \{0\}$. Введем функцию

$$f_\Lambda(z) = \prod_{k \geq 1} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)^{m_k} \exp\left(\frac{m_k z}{\lambda_k}\right).$$

Поскольку точки λ_k с кратностью m_k , $k \geq 1$, являются нулями целой функции экспоненциального типа $\varphi \in I_\Lambda(\mathbb{C})$, то (см., например, [48, гл. 1, теоремы 2.2, 3.1 и 3.3]) f_Λ – целая функция порядка не выше первого (возможно, бесконечного типа при порядке один), обращающаяся в нуль лишь в точках λ_k с кратностью m_k ,

$k \geq 1$. В частности, это означает, что для некоторых $C, b > 0$ выполнено неравенство $|f_\Lambda(z)| \leq C \exp(b|z|^2) \quad \forall z$. Тогда по теореме об оценке снизу на окружностях целой функции конечного порядка (см. [48, гл. I, § 4, теорема 4.3]) существуют $a > 0$ и последовательность $r_j \rightarrow +\infty$ такие, что

$$r_{j+1} < 2r_j, \quad \ln|f_\Lambda(z)| \geq -a|z|^2, \quad |z| = r_j, \quad j \geq 1. \quad (4.7)$$

Пусть $d > 0$, $f \in I_\Lambda(\mathbb{C})$ и $|\varphi(z)| \leq \exp(d|z|) \quad \forall z$. Функция φ/f_Λ целая, и в силу (4.7) имеем

$$\left| \frac{\varphi(z)}{f_\Lambda(z)} \right| \leq \exp(d|z| + a|z|^2), \quad |z| = r_j, \quad j \geq 1.$$

Отсюда по принципу максимума получаем

$$\left| \frac{\varphi(z)}{f_\Lambda(z)} \right| \leq \exp((d+a)r_{j+1}^2) \leq \exp(4(d+a)|z|^2),$$

где $|z| \geq 1$, $r_j \leq |z| \leq r_{j+1}$, $j \geq 1$. Следовательно,

$$\left| \frac{\varphi(z)}{f_\Lambda(z)} \right| \leq C \exp(4(d+a)|z|^2) \quad \forall z$$

и $C > 0$ зависит от f_Λ и d , но не зависит от f . Положим

$$\psi(z) = \overline{\lim}_{w \rightarrow z} \sup \{ \ln|\varphi(w)| - \ln|f_\Lambda(w)| : f \in I_\Lambda(\mathbb{C}), \quad |\varphi(w)| \leq \exp H_L(z) \},$$

где L – ограниченное выпуклое множество. Тогда, как и Ψ_j , функция ψ субгармоническая. Кроме того, верна оценка

$$\psi(z) \leq \tilde{C} + \tilde{a}|z|^2 \quad \forall z. \quad (4.8)$$

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть D – выпуклая область и $\Lambda = \{\lambda_k, t_k\}$. Предположим, что для функций Ψ_j , $j \geq 1$, выполнены утверждения (i) и (ii) теоремы 4.2. Тогда верны и следующие утверждения:

(i) для каждого $p \geq 1$ и каждого компакта $F \subset \mathbf{S} \setminus J(D)$ существует функция $\varphi \in I_\Lambda(D)$ такая, что для любого $\tilde{\delta} > 0$ найдутся $\tilde{\beta}, \tilde{T} > 0$, удовлетворяющие условию: $\lambda_k \in R_p^{\tilde{\delta}}$, если $\lambda_k/|\lambda_k| \in E(\tilde{\beta})$ и $|\lambda_k| > \tilde{T}$, где $R_p = \{z: \ln|\varphi(z)| \geq H_{K_p}(z)\}$ и $E(\tilde{\beta})$ – β -окрестность F ;

(ii) существуют $\varphi \in I_\Lambda(D)$ и $a_0 \in \mathbb{R}$ такие, что для любого $\tilde{\delta} > 0$ найдется $\tilde{T} > 0$, удовлетворяющее условию: $\lambda_k \in R_0^{\tilde{\delta}}$, если $|\lambda_k| > \tilde{T}$, где $R_0 = \{z: \ln|\varphi(z)| \geq a_0(z)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Фиксируем $p \geq 1$ и компакт $F \subset \mathbf{S} \setminus J(D)$. Пусть $\varepsilon \in (0, \alpha_p/31)$, где α_p – такое же, как и в (1.1). Поскольку F – компакт и (как мы отмечали выше) сужение H_D на F непрерывно, то найдется номер $m \geq p + 1$, для которого выполнено неравенство

$$H_{K_m}(z) \geq H_D(z) - \varepsilon, \quad z \in F. \quad (4.9)$$

По m и F согласно утверждению (i) теоремы 4.2 найдем $j \geq 1$. Функция

$$\tilde{\Psi}_j(z) = \overline{\lim}_{w \rightarrow z} \sup \left\{ \ln |\varphi(w)| - \ln |f_\Lambda(z)| : \varphi \in I_\Lambda(D), \|\varphi\|_j \leq 1 \right\}$$

субгармонична во всей плоскости и удовлетворяет оценке вида (4.8). Тогда в силу [53, теорема 5] найдутся целая функция $\varphi_j(z)$, постоянная $C > 0$ и исключительное множество $E \subset \mathbb{C}$ такие, что

$$|\ln |\varphi_j(z)| - \tilde{\Psi}_j(z)| \leq C \ln |z|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E, \quad (4.10)$$

причем E может быть покрыто кружками $B_i = B(z_i, r_i)$, $i \geq 1$, такими, что $\sum r_i = A < \infty$. Положим $\varphi(z) = \varphi_j(z)f_\Lambda(z)$. Тогда φ – целая функция. Покажем, что она искомая. Прежде всего заметим, что φ обращается в нуль в точках λ_k с кратностью, не меньшей, чем m_k . Далее, функция $\ln |f_\Lambda|$ непрерывна (в широком смысле) в каждой точке плоскости. Поэтому с учетом определения Ψ_j , $\tilde{\Psi}_j$ верно равенство $\Psi_j(z) = \tilde{\Psi}_j(z) + \ln |f_\Lambda(z)|$. Отсюда и из (4.10)

$$|\ln |\varphi(z)| - \Psi_j(z)| = |\ln |\varphi_j(z)| - \tilde{\Psi}_j(z)| \leq C \ln |z|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E. \quad (4.11)$$

Пусть $\tilde{\varepsilon} > 0$. Тогда, учитывая определение Ψ_j , для некоторого $t(\tilde{\varepsilon}) > 0$ получаем неравенство

$$\ln |\varphi(z)| \leq \Psi_j(z) + C \ln |z| \leq H_{K_j}(z) + \tilde{\varepsilon}|z|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E, \quad |z| \geq t(\tilde{\varepsilon}). \quad (4.12)$$

Пусть $|z| > 3A + t(\tilde{\varepsilon})$. Поскольку сумма диаметров кружков B_i равна $2A$, то в круге $B(z, 3A)$ найдется окружность, на которой выполнено (4.12). Тогда

$$\ln |\varphi(z)| \leq \sup_{y \in B(z, 3A)} (H_{K_j}(y) + \tilde{\varepsilon}|y|).$$

Используя теперь (3.13), найдем $t_1(\tilde{\varepsilon}) > 0$ такое, что

$$\ln |\varphi(z)| \leq H_{K_j}(z) + 2\tilde{\varepsilon}|z|, \quad |z| \geq t_1(\tilde{\varepsilon}).$$

Отсюда следует неравенство $h_\varphi(z) \leq H_{K_j}(z) + 2\tilde{\varepsilon}|z|$, а в силу произвольности $\tilde{\varepsilon} > 0$ и неравенство $h_\varphi(z) \leq H_{K_j}(z) \quad \forall z$. Таким образом, $\varphi \in \mathbf{P}_D$, а значит, $\varphi \in I_\Lambda(D)$. Пусть $\tilde{\delta} > 0$. Используя (4.9), непрерывность H_{K_m} , H_{K_j} и то, что $H_{K_j}(z) < H_D(z)$, $z \neq 0$, найдем $\alpha \in (0, 1/27)$, $\alpha < \tilde{\delta}/6$, такое, что

$$2\varepsilon + H_{K_m}(z) \geq H_{K_j}(z), \quad z \in E(27\alpha). \quad (4.13)$$

Кроме того, можно считать, что при $\tau = 12\alpha$ для $h_0(z) = H_{K_m}(z) + 2\varepsilon|z|$ и $h_0(z) = H_{K_m}(z) - 28\varepsilon|z|$ выполнено (3.13). Пусть $\delta \in (0, \alpha/2)$. По δ согласно утверждению (i) теоремы 4.2 определим $\beta, T > 0$. Фиксируем положительное $\tilde{\beta} < \min\{\alpha, \beta\}$ и $\tilde{T} > \max\{T, 3A\alpha^{-1}(1+\delta), 2(1-2\alpha)^{-1}(1+\delta)T_1\}$, где $T_1 > 0$ выбрано так, что $C \ln|w| \leq \varepsilon|w|$ при $|w| \geq T_1$. Пусть λ_k удовлетворяет условиям $|\lambda_k| > \tilde{T}$ и $\lambda_k/|\lambda_k| \in E(\tilde{\beta})$. В силу утверждения (i) теоремы 4.2 для некоторого $z' \in R_{m,j}$ круг $B(z', \delta|z'|)$ содержит λ_k . Тогда $|z'| > \max\{3A\alpha^{-1}, 2(1-2\alpha)^{-1}T_1\}$. По определению Ψ_j и $R_{m,j}$ найдем точку z и функцию $\tilde{\varphi} \in I_\Lambda(D)$ такие, что $|z| > \max\{2A\alpha^{-1}, (1-2\alpha)^{-1}T_1\}$, $\lambda_k \in B(z, 2\delta|z|)$, $\ln|\tilde{\varphi}(y)| \leq H_{K_j}(y) \quad \forall y$ и $\ln|\tilde{\varphi}(z)| \geq H_{K_m}(z) - \varepsilon|z|$. Нетрудно видеть, что $z/|z| \in E(3\alpha)$. Поэтому в силу (4.13) и (3.13) получаем

$$\ln|\tilde{\varphi}(y)| \leq H_{K_m}(z) + 3\varepsilon|z|, \quad y \in B(z, 12\alpha|z|).$$

Рассмотрим функцию $\varphi_z(y) = \tilde{\varphi}(y)/\tilde{\varphi}(z)$. Она обладает следующими свойствами: $\varphi_z(z) = 1$ и $\ln|\varphi_z(y)| \leq 4\varepsilon|z|$, $y \in B(z, 12\alpha|z|)$. Тогда по теореме об оценке снизу модуля аналитической функции (см., например, [48, гл. 1, § 4, теорема 4.2]) имеет место неравенство

$$\ln|\varphi_z(y)| \geq -(3 + \ln 24)(4\varepsilon|z|) \geq -28\varepsilon|z|, \quad (4.14)$$

которое выполнено в $B(z, 2\alpha|z|)$, но вне исключительных кружков $\tilde{B}_s$ с суммой радиусов, равной $\alpha|z|/2$. Поскольку $\alpha|z| > 2A$, то сумма диаметров всех кружков $\tilde{B}_s$ и B_i строго меньше $2\alpha|z|$. Следовательно, в круге $B(z, 2\alpha|z|)$ найдется окружность, на которой выполнено (4.14) и (4.11). Пусть w — произвольная точка этой окружности. Тогда из неравенства (4.14), оценки снизу на $|\tilde{\varphi}(z)|$ и (3.13) следует неравенство $\ln|\tilde{\varphi}(w)| \geq H_{K_m}(w) - 30\varepsilon|w|$. Отсюда с учетом определения Ψ_j , (4.11) и выбора $\tilde{T}$ получаем

$$\ln|\varphi(w)| \geq \Psi_j(w) - \varepsilon|w| \geq \ln|\tilde{\varphi}(w)| - \varepsilon|w| \geq H_{K_m}(w) - 31\varepsilon|w|.$$

Учитывая еще выбор номера m и числа $\varepsilon > 0$, а также неравенство (1.1), имеем

$$\ln|\varphi(w)| \geq H_{K_m}(w) - 31\varepsilon|w| \geq H_{K_{p+1}}(w) - \alpha_p|w| \geq H_{K_p}(w).$$

Таким образом, $w \in R_p$. Далее, поскольку $w \in B(z, 2\alpha|z|)$, а в силу выбора δ $\lambda_k \in B(z, 2\delta|z|) \subset B(z, \alpha|z|)$, то в силу выбора α круг $B(w, \tilde{\delta}|w|)$ содержит λ_k . Следовательно, $\lambda_k \in R_p^{\tilde{\delta}}$. Утверждение (i) полностью доказано.

(ii) Доказательство утверждения проводится по упрощенной схеме доказательства утверждения (i).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. В теоремах 4.2, 4.3 мы получили необходимые условия интерполяции, которые оказались сильнее достаточных условий 3)–5) теоремы 3.7. В частности, для разрешимости интерполяционной задачи необходимо существование некоторых оценок снизу на функции $\varphi \in I_\Lambda(D)$ в относительной близости от всех точек λ_k (а не только от тех точек, которые лежат в окрестности множества, где H_D конечна, как в теореме 3.7). Это обстоятельство позволит нам ослабить ограничения, приведенные в теореме 3.7, отказавшись от условия 3). Более точно, имеет место следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 4.5. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$ – такая, что $I_\Lambda(\mathbb{C}) \neq \{0\}$. Предположим, что $S_\Lambda \geq a > -\infty$. Тогда выполнено условие 3) теоремы 3.7 для любой выпуклой области D .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вначале $D = \mathbb{C}$. Тогда, как было отмечено в замечании 3.10, выполнены все условия теоремы 3.7, а значит, и ее утверждения. Следовательно, оператор $\Sigma: \mathbf{P}_\mathbb{C}/I_\Lambda(\mathbb{C}) \rightarrow \Phi$ – изоморфизм. По теоремам 4.2 и 4.3 это влечет за собой существование функции $\tilde{\varphi} \in I_\Lambda(\mathbb{C})$ и $\tilde{\alpha}_0 \in \mathbb{R}$ таких, что для любого $\tilde{\delta} > 0$ найдется $\tilde{T} > 0$, удовлетворяющее условию: $\lambda_k \in R_0^{\tilde{\delta}}$, если $|\lambda_k| > \tilde{T}$, где $R_0 = \{z: \ln|\tilde{\varphi}(z)| \geq \tilde{\alpha}_0|z|\}$.

Пусть теперь D – произвольная выпуклая область такая, что $J(D) \cap \partial J(D)$ не пусто (если $J(D) \cap \partial J(D)$ пусто, то условие 3) теоремы 3.7 выполнено тривиально). Тогда D – неограниченная область, отличная от плоскости, полосы и полуплоскости. В этом случае множество $\mathbb{C} \setminus J(D)$ – угол с вершиной в нуле и раствора не больше π , а $J(D)$ – угол раствора не меньше π , содержащий хотя бы один свой граничный луч. Следовательно, в $J(D)$ лежит полуплоскость

$$\Pi = \{t \exp(i\alpha): \alpha \in (\alpha_0 - \pi/2, \alpha_0 + \pi/2), t > 0\}$$

такая, что луч $\{t \exp(i(\alpha_0 + \pi/2)), t > 0\}$ также лежит в $J(D)$.

Отметим, что для любого $y \in \mathbb{C}$ функция $\varphi(z) = \tilde{\varphi}(z) \exp(yz)$ обладает всеми свойствами из условия 3) теоремы 3.7, за исключением, возможно, одного: $\varphi \in I_\Lambda(D)$. Поскольку $\tilde{\varphi} \in I_\Lambda(\mathbb{C})$, то и это свойство будет иметь место, если $\varphi \in \mathbf{P}_D$. Таким образом, нам достаточно показать, что для некоторого y верно включение $\varphi \in \mathbf{P}_D$. Последнее равносильно тому, что сдвиг сопряженной диаграммы K функции $\tilde{\varphi}$ на вектор y лежит в D . Действительно, неравенство

$$h_\varphi(z) = h_{\tilde{\varphi}}(z) + \operatorname{Re}(zy) = H_K(z) + \operatorname{Re}(zy) < H_D(z), \quad z \neq 0,$$

выполнено тогда и только тогда, когда $y + K \subset D$.

Пусть $d < \min_{z \in S} H_D(z)$ и $d_1 \geq \max_{z \in S} H_K(z)$, $d_1 > d$. В силу непрерывности H_D (в широком смысле) в точке $\tilde{z} = \exp(i(\alpha_0 + \pi/2))$ найдется $\gamma \in (0, \pi/8)$ такое, что верна оценка

$$H_D(\exp(i\alpha)) > 2d_1 - d, \quad \alpha \in [\alpha_0 + \pi/2, \alpha_0 + 2\gamma + \pi/2).$$

Положим $y(t) = t \exp(-i(\alpha_0 + \gamma))$. Выберем $t_1 > 0$ из условия

$$\operatorname{Re}(y(t_1) \exp(i(\alpha_0 + 2\gamma + \pi/2))) = -t_1 \sin \gamma = d - d_1.$$

Тогда

$$\operatorname{Re}(y(t_1) \exp(i\alpha)) \leq -t_1 \sin \gamma = d - d_1, \quad \alpha \in [\alpha_0 + 2\gamma + \pi/2, \alpha_0 + 3\pi/2],$$

$$\operatorname{Re}(y(t_1) \exp(i\alpha)) \leq t_1 \sin \gamma = d_1 - d, \quad \alpha \in [\alpha_0 + \pi/2, \alpha_0 + 2\gamma + \pi/2).$$

Пусть $y = y(t_1)$. Из предыдущего получаем

$$\begin{aligned} H_K(\exp(i\alpha)) + \operatorname{Re}(y \exp(i\alpha)) &\leq d_1 + d - d_1 = d < H_D(\exp(i\alpha)), \\ \alpha &\in [\alpha_0 + 2\gamma + \pi/2, \alpha_0 + 3\pi/2]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_K(\exp(i\alpha)) + \operatorname{Re}(y \exp(i\alpha)) &\leq d_1 + d_1 - d < H_D(\exp(i\alpha)), \\
\alpha &\in [\alpha_0 + \pi/2, \alpha_0 + 2\gamma + \pi/2); \\
H_K(\exp(i\alpha)) + \operatorname{Re}(y \exp(i\alpha)) &< H_D(\exp(i\alpha)) = +\infty, \\
\alpha &\in (\alpha_0 - \pi/2, \alpha_0 + \pi/2).
\end{aligned}$$

Таким образом, $H_K(z) + \operatorname{Re}(zy) < H_D(z)$, $z \neq 0$, т.е. $y + K \subset D$. Следствие полностью доказано.

Далее рассмотрим случай ограниченной выпуклой области D . Здесь мы получим более простые по форме и более сильные условия, необходимые для разрешимости интерполяционной задачи.

ТЕОРЕМА 4.6. Пусть D – ограниченная выпуклая область и $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$ – такая, что $m(\Lambda) = 0$. Предположим, что $\Sigma: \mathbf{P}_D/I_\Lambda(D) \rightarrow \Phi$ – изоморфизм. Тогда для каждого $m \geq 1$ существует $\varphi_m \in I_\Lambda(D)$ такая, что $\underline{h}_{\varphi_m} \geq H_{K_m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \geq 1$. Фиксируем $\varepsilon \in (0, \alpha_m/30)$, где α_m – такое же, как и в (1.1). Выберем номер $j \geq m + 1$, для которого верно неравенство

$$H_{K_j}(z) \geq H_D(z) - \varepsilon, \quad z \in \mathbf{S}. \quad (4.15)$$

Согласно теоремам 4.2 и 4.3 (где в качестве F берем окружность $\mathbf{S}$) найдем функцию $\varphi \in I_\Lambda(D)$ такую, что для любого $s \geq 1$ существует $T_s > 0$, удовлетворяющее следующему условию: $\lambda_k \in R_j^{1/s}$, если $|\lambda_k| > T_s$. Положим $\alpha = 1$, $R = R_j$, $h(z) = H_{K_j}(z)$ и $H(z) = H_{K_j}(z) + \varepsilon|z|$. С учетом (4.15) по ε , α , h , H и R согласно лемме 3.3 определим $\delta_0, T > 0$ и для каждого $\delta = 1/s < \delta_0$ найдем открытые множества $U_p = U_{p,s}$, $p \geq 1$, обладающие свойствами 1)–4) этой леммы. По свойствам 3) и 4) каждое λ_k такое, что $|\lambda_k| \geq \max\{T, T_s\}$, принадлежит одному из множеств $U_{p,s}$ (при фиксированном s). Таким образом, для некоторого k_0 каждое λ_k , $k > k_0$, принадлежит хотя бы одному из $U_{p,s}$, $p \geq 1$, $s > 1/\delta_0$.

Построим теперь множества V_i , $i = 0, 1, \dots$. В качестве V_1 возьмем множество $U_{p,s}$ с максимальным номером s , содержащее λ_{k_0+1} (такой номер найдется, поскольку в противном случае в силу свойств 1) и 4) леммы 3.3 в точке λ_{k_0+1} будет выполнено неравенство из свойства 4), что невозможно, так как $\varphi(\lambda_k) = 0$, $k \geq 1$). Предположим, что мы уже построили $V_1, \dots, V_r$, и пусть λ_k – точка с минимальным номером $k > k_0$, не попавшая ни в одно из V_i , $i = 1, \dots, r$. Тогда в качестве V_{r+1} возьмем $U_{p,s} \setminus \bigcup_{i=1}^r \bar{V}_i$, где $U_{p,s}$ – множество с максимальным номером s , содержащее λ_k . Наконец, в качестве V_0 возьмем любое открытое ограниченное множество, содержащее все λ_k , не попавшие ни в одно из V_i , и не пересекающиеся ни с одним из V_i , $i \geq 1$. По построению V_i , $i = 0, 1, \dots$, обладают следующими свойствами. Граница каждого V_i , $i \geq 1$, состоит из кусков границ множеств $U_{p,s}$. Поэтому по свойству 4) леммы 3.3 верна оценка

$$\begin{aligned}
\ln|\varphi(z)| &\geq C + H_{K_j}(z) - 2\varepsilon|z| - (3 + \ln 24)(H_{K_j}(z) + \varepsilon|z| - H_{K_j}(z) + 3\varepsilon|z|) \\
&\geq C + H_{K_j}(z) - 30\varepsilon|z| \geq C + H_{K_m}(z), \quad z \in \partial V_i, \quad i = 0, 1, \dots
\end{aligned} \quad (4.16)$$

В последнем неравенстве мы воспользовались (1.1) и выбором ε, j . Каждая точка λ_k попадает в одно из V_i , $i \geq 0$. Пусть λ_{k_i} — одна из таких точек, попавшая в V_i . Тогда $k_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, и поэтому $|\lambda_{k_i}| \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$. Если $|\lambda_{k_i}| \geq \max\{T, T_s\}$, то по свойству 1) леммы 3.3 имеет место вложение $V_i \subset B(y, 88s^{-1}|y|)$ для каждого $y \in V_i$. Рассмотрим функцию

$$\psi(z) = \begin{cases} \ln|\varphi(z)| - \ln|f_\Lambda(z)|, & z \in \cup \overline{V_i}, \\ \max\{\ln|\varphi(z)| - \ln|f_\Lambda(z)|, C + H_{K_m}(z) - \ln|f_\Lambda(z)|\}, & z \notin \cup \overline{V_i}. \end{cases}$$

На множестве $\cup V_i$ функция $\psi(z)$ совпадает с $\ln|\varphi(z)/f_\Lambda(z)|$, и поскольку $\varphi \in I_\Lambda(D)$, то она субгармонична на $\cup V_i$. На дополнении к $\cup \overline{V_i}$ функция f_Λ не имеет нулей, а потому $\ln|f_\Lambda|$ гармонична. Следовательно, $\psi(z)$ субгармонична на $\mathbb{C} \setminus \cup \overline{V_i}$ как максимум субгармонических. Пусть $z \in \partial V_i$. Тогда в силу (4.16) имеют место соотношения

$$\psi(z) = \ln|\varphi(z)| - \ln|f_\Lambda(z)| \geq \overline{\lim}_{y \rightarrow z} (\ln|\varphi(y)| - \ln|f_\Lambda(y)|) = \overline{\lim}_{y \rightarrow z} \psi(y),$$

т. е. $\psi(y)$ полунепрерывна сверху в точке z . Кроме того, при $\tau > 0$

$$\begin{aligned} \psi(z) = \ln|\varphi(z)| - \ln|f_\Lambda(z)| &\leq \frac{1}{\pi\tau^2} \int_{B(z, \tau)} (\ln|\varphi(y)| - \ln|f_\Lambda(y)|) d\lambda(y) \\ &\leq \frac{1}{\pi\tau^2} \int_{B(z, \tau)} \psi(y) d\lambda(y). \end{aligned}$$

Таким образом, функция ψ субгармонична во всей плоскости. Покажем, что она удовлетворяет оценке вида (4.8). Как мы уже показали ранее, функция $\ln|\varphi(z)| - \ln|f_\Lambda(z)|$ удовлетворяет подобной оценке:

$$\ln|\varphi(z)| - \ln|f_\Lambda(z)| \leq C_1 + a_1|z|^2 \quad \forall z.$$

Отсюда и из (4.16) следует, что

$$\ln|f_\Lambda(z)| \geq C_2 + a_2|z|^2, \quad z \in \partial V_i, \quad i = 0, 1, \dots$$

Используя это неравенство и неравенство (4.7), по принципу максимума для субгармонических функций получаем

$$H_{K_m}(z) - \ln|f_\Lambda(z)| \leq C_3 + a_3|z|^2, \quad z \notin \cup V_i.$$

Таким образом, ψ удовлетворяет оценке вида (4.8). Тогда в силу [53, теорема 5] найдутся такие целая функция $f_m(z)$, постоянная $\tilde{C} > 0$ и исключительное множество $E \subset \mathbb{C}$, что

$$|\ln|f_m(z)| - \psi(z)| \leq \tilde{C} \ln|z|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E, \quad (4.17)$$

причем E может быть покрыто кружками $B_j = B(z_j, r_j)$, $j \geq 1$, такими, что $\sum r_j = A < \infty$. Положим $\varphi_m(z) = f_m(z)f_\Lambda(z)$. Пользуясь тем, что $\varphi \in \mathbf{P}_s$ для некоторого $s \geq 1$, как и в теореме 4.3, показываем, что $\varphi_m \in I_\Lambda(D)$.

Предположим, что необходимое неравенство не выполнено, т.е. $\underline{h}_{\varphi_m}(y) < H_{K_m}(y) - 3\tilde{\varepsilon}$ для некоторых $\tilde{\varepsilon} > 0$ и $y \in \mathbb{C}$. В силу однородности $\underline{h}_{\varphi_m}$ и H_{K_m} можно считать, что $y \in \mathbf{S}$. Тогда согласно [54, предложение 9.3] существуют $\delta \in (0, 1)$ и последовательность $\{t_r\}$, $t_r \rightarrow +\infty$, такие, что

$$\ln|\varphi_m(t_rw)|/t_r \leq H_{K_m}(y) - 2\tilde{\varepsilon}, \quad w \in B(y, \delta), \quad r = 1, 2, \dots$$

Уменьшая при необходимости δ , в силу (3.13) получаем

$$\ln|\varphi_m(z)| \leq H_{K_m}(z) - \tilde{\varepsilon}|z|, \quad z \in B(t_ry, \delta t_r), \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.18)$$

С другой стороны, из (4.16), (4.17) и определения $\psi(z)$ следует оценка

$$\ln|\varphi_m(z)| \geq H_{K_m}(z) - \tilde{C} \ln|z|, \quad z \notin \cup V_i \cup E. \quad (4.19)$$

Если $\delta t_r > 4A$, то в кольце $B(t_ry, \delta t_r) \setminus B(t_ry, \delta t_r/2)$ найдется окружность S_r , не пересекающаяся с E . Поэтому для некоторого r_0 и всех $r \geq r_0$ множество $\cup V_i$ содержит S_r (в противном случае (4.18) противоречит (4.19)). Поскольку V_i , $i \geq 1$, открыты и попарно не пересекаются, каждая окружность S_r при $r \geq r_0$ лежит только в одном из V_i , скажем $V_{i(r)}$. Индекс $i(r)$ неограниченно растет, когда $r \rightarrow \infty$. Действительно, если это не так, то с учетом неравенства $\delta < 1$ нетрудно заметить, что хотя бы одно из V_i должно быть тогда неограниченным, что неверно. Следовательно, $i(r)$, а вместе с ним и $|\lambda_{k_{i(r)}}|$ стремятся к $+\infty$ при $r \rightarrow \infty$. Тогда, как мы отмечали, $V_{i(r)} \subset B(w, 88\delta_r|w|)$, где $w \in S_r$ и $\delta_r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Это означает, в частности, что S_r не может лежать в $V_{i(r)}$ при больших r . Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.7. Утверждение теоремы 4.6 сильнее утверждения (i) теоремы 4.3, сформулированного для ограниченной области. Действительно, согласно [55, лемма 2.7] неравенство $\underline{h}_{\varphi}(y) \geq H_{K_{m+1}}(y)$ влечет за собой существование последовательности $\{z_j\}$ такой, что $z_j/|z_j| \rightarrow y$, $|z_{j+1}|/|z_j| \rightarrow 1$, $|z_j| \rightarrow \infty$ и $\ln|\varphi(z_j)| \geq H_{K_m}(z_j)$, $j \geq 1$. Как легко заметить, это означает, что для любого $\delta > 0$ множество R_m^δ содержит внешность некоторого круга с центром в нуле, а не только окрестности точек λ_k .

СЛЕДСТВИЕ 4.8. В условиях теоремы 4.6 для каждого $m \geq 1$ существует $j \geq 1$ такой, что $\underline{h}_{\Psi_j} \geq H_{K_m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m \geq 1$. По теореме 4.6 найдем функцию $\varphi_m \in I_\Lambda(D)$ такую, что $\underline{h}_{\varphi_m} \geq H_{K_m}$. Поскольку $\varphi_m \in \mathbf{P}_D$, то для некоторого $j \geq 1$ пространство P_j содержит φ_m . Пусть $d = \|\varphi_m\|_j$. Тогда по определению Ψ_j имеем $\Psi_j \geq \ln|\varphi_m/d|$. Следовательно,

$$\underline{h}_{\Psi_j}(z) \geq \underline{h}_{\varphi_m/d}(z) = \underline{h}_{\varphi_m}(z) \geq H_{K_m}(z) \quad \forall z.$$

Для ограниченной выпуклой области D введем еще функцию

$$\Psi(z) = \overline{\lim}_{w \rightarrow z} \sup \left\{ \ln|\varphi(w)| : \varphi \in I_\Lambda(\mathbb{C}), \sup_{y \in \mathbb{C}} |\varphi(y)| \exp(-H_D(y)) \leq 1 \right\}.$$

По тем же соображениям, что и в доказательстве теоремы 4.6, $\Psi(z)$ – субгармоническая функция.

СЛЕДСТВИЕ 4.9. В условиях теоремы 4.6 функция $\Psi(z)$ имеет регулярный рост всюду в плоскости и ее верхний индикатор равен H_D , т. е. $\underline{h}_\Psi \equiv h_\Psi \equiv H_D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения Ψ следует, что $h_\Psi \leq H_D$. Нетрудно заметить также, что $\Psi \geq \Psi_j$ для любого $j \geq 1$. Тогда по следствию 4.8 $\underline{h}_\Psi \geq H_{K_m}$, $m \geq 1$. Отсюда с учетом неравенства $\underline{h}_\Psi \leq h_\Psi$ и того, что $\{K_m\}$ исчерпывает D , получаем требуемое.

ТЕОРЕМА 4.10. Пусть $\underline{h}_\Psi \equiv h_\Psi \equiv H_D$. Тогда существует целая функция $\varphi \in I_\Lambda(\mathbb{C})$, которая имеет регулярный рост всюду в плоскости и ее верхний индикатор равен H_D , т. е. $\underline{h}_\varphi \equiv h_\varphi \equiv H_D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$\tilde{\Psi}(z) = \overline{\lim}_{w \rightarrow z} \sup \left\{ \ln |\varphi(w)| - \ln |f_\Lambda(w)| : \varphi \in I_\Lambda(\mathbb{C}), \sup_{y \in \mathbb{C}} |\varphi(y)| \exp(-H_D(y)) \leq 1 \right\}.$$

Ранее мы показали, что функция $\tilde{\Psi}$ субгармонична во всей плоскости и удовлетворяет оценке вида (4.8). Тогда в силу [53, теорема 5] найдется целая функция $\tilde{\varphi}$, постоянная $C > 0$ и исключительное множество $E \subset \mathbb{C}$ такие, что

$$|\ln |\tilde{\varphi}(z)| - \tilde{\Psi}(z)| \leq C \ln |z|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E, \quad (4.20)$$

причем множество E может быть покрыто кружками $B_i = B(z_i, r_i)$, $i \geq 1$, такими, что $\sum r_i = A < \infty$. Положим $\varphi(z) = \tilde{\varphi}(z)f_\Lambda(z)$. Как и в теореме 4.3, устанавливается неравенство $h_\varphi \leq H_D$. Если $\underline{h}_\varphi(y) \geq H_D$, то утверждение теоремы будет выполнено. Предположим противное, т. е. $\underline{h}_\varphi(y) < H_D(y) - 3\tilde{\varepsilon}$ для некоторых $\tilde{\varepsilon} > 0$ и $y \in \mathbf{S}$. Тогда, как и в теореме 4.6, существуют $\delta \in (0, 1)$ и последовательность $\{t_r\}$, $t_r \rightarrow +\infty$, такие, что

$$\ln |\varphi(z)| \leq H_D(z) - \tilde{\varepsilon}|z|, \quad z \in B(t_r y, \delta t_r), \quad r = 1, 2, \dots \quad (4.21)$$

Пусть $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}/25)$. Из (4.20) и определений $\Psi(z)$, $\tilde{\Psi}(z)$ следует оценка

$$\ln |\varphi(z)| \geq \Psi(z) - \varepsilon|z|, \quad z \notin E, \quad |z| > T, \quad (4.22)$$

для некоторого $T > 0$. По условию $\underline{h}_\Psi(y) \geq H_D(y)$. Тогда в силу [55, лемма 2.7] с учетом неравенства (3.13) существует последовательность $\{z_j\}$ такая, что

$$\begin{aligned} |z_j| \uparrow +\infty, \quad |z_j/z_j - y| < \delta/4, \quad |z_{j+1}|/|z_j| < 1 + \delta/4, \\ \Psi(z_j) \geq H_D(z_j) - \varepsilon|z_j|, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Поскольку $|z_j| \uparrow +\infty$, то для каждого r , начиная с некоторого r_0 , найдется номер $j(r)$ такой, что $|z_{j(r)}| \leq t_r \leq |z_{j(r)+1}|$. Из свойств $\{z_j\}$ следует, что имеет место вложение $B(z_{j(r)}, \delta|z_{j(r)}|/2) \subset B(t_r y, \delta t_r)$, $r \geq r_0$. Учитывая еще определение $\Psi(z)$ и неравенство (3.13) для любого $r \geq r_0$ найдем точку $\tilde{z}_r$ и целую функцию φ_r , которые удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} B(\tilde{z}_r, \delta|\tilde{z}_r|/3) \subset B(t_r y, \delta t_r), \quad \ln |\varphi_r(z)| \leq H_D(z) \quad \forall z, \\ \ln |\varphi_r(\tilde{z}_r)| \geq H_D(\tilde{z}_r) - 2\varepsilon|\tilde{z}_r|. \end{aligned}$$

Отсюда для функции $\tilde{\varphi}_r(z) = \varphi_r(y)/\varphi_r(\tilde{z}_r)$ с учетом неравенства (3.13) (уменьшая при необходимости $\delta > 0$) получаем соотношения

$$\tilde{\varphi}_r(\tilde{z}_r) = 1, \quad \ln|\tilde{\varphi}_r(z)| \leq 3\varepsilon|\tilde{z}_r|, \quad z \in B(\tilde{z}_r, 2\delta|\tilde{z}_r|).$$

Тогда по теореме об оценке снизу модуля аналитической функции (см., например, [48, гл. 1, § 4, теорема 4.2]) имеет место неравенство

$$\ln|\tilde{\varphi}_r(z)| \geq -(3 + \ln 24)(3\varepsilon|\tilde{z}_r|) \geq -21\varepsilon|\tilde{z}_r|, \quad (4.23)$$

которое выполнено в $B(\tilde{z}_r, \delta|\tilde{z}_r|/3)$, но вне исключительных кружков $\tilde{B}_{r,s}$ с суммой радиусов, равной $\delta|\tilde{z}_r|/12$. Увеличивая r_0 , можно считать, что $2A < \delta|\tilde{z}_r|/6$ и $(1 - \delta/3)|\tilde{z}_r| > T$ при $r \geq r_0$. Тогда сумма диаметров всех кружков $\tilde{B}_{r,s}$ и B_i строго меньше $\delta|\tilde{z}_r|/3$ при $r \geq r_0$. Следовательно, в $B(\tilde{z}_r, \delta|\tilde{z}_r|/3)$, $r \geq r_0$, найдется точка w_r (и даже целая окружность), для которой выполнены неравенства (4.22) и (4.23). В силу (4.23) и оценки на $\ln|\varphi_r(\tilde{z}_r)|$ с учетом (3.13) имеем

$$\ln|\varphi_r(w_r)| \geq H_D(w_r) - 24\varepsilon|w_r|.$$

Отсюда, из (4.22) и выбора ε при $r \geq r_0$ следует оценка

$$\ln|\varphi(w_r)| \geq \ln|\varphi_r(w_r)| - \varepsilon|w_r| \geq H_D(w_r) - 25\varepsilon|w_r| > H_D(w_r) - \tilde{\varepsilon}|w_r|,$$

которая противоречит (4.21). Теорема доказана.

В заключение параграфа покажем, что дополнительные условия $m_D(\Lambda) = 0$ и $m(\Lambda) = 0$ из теорем 4.2 и 4.6 на самом деле в некоторых случаях являются следствием разрешимости интерполяционной задачи и фундаментального принципа. Перед этим введем еще одну характеристику Λ :

$$G_\Lambda = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|^{-1} \min_{j \neq k} |\lambda_k - \lambda_j|.$$

Кроме того, для $D \neq \mathbb{C}$ положим также

$$G_\Lambda(F) = \inf_{E \supset F} G_\Lambda(E), \quad G_\Lambda(D) = \sup_{F \subset \mathbb{S} \setminus J(D)} G_\Lambda(F),$$

где E – произвольное открытое на $\mathbb{S}$ множество, содержащее F , а F – компактное подмножество $\mathbb{S} \setminus J(D)$. В отличие от величины S_Λ , которая дает оценку снизу на расстояния от точки λ_k до других точек λ_j , величина G_Λ обеспечивает подобную оценку сверху.

ТЕОРЕМА 4.11. Пусть D – выпуклая область и Λ – такая, что $G_\Lambda(D) = 0$. Предположим, что $\Phi \subset \Sigma(\mathbf{P}_D/I_\Lambda(D))$. Тогда $m_D(\Lambda) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F – произвольный компакт из $\mathbf{S} \setminus J(D)$. Предположим, что $m_F(\Lambda) > \tilde{\varepsilon} > 0$. Тогда найдутся подпоследовательность $\{\lambda_{k_j}\}$ и точка $x_0 \in F$ такие, что $\lambda_{k_j}/|\lambda_{k_j}|$ сходится к x_0 , $|\lambda_{k_{j+1}}| \geq 2|\lambda_{k_j}|$ и $m_{k_j} \geq \tilde{\varepsilon}|\lambda_{k_j}|$, $j \geq 1$. Для каждого $j \geq 1$ выберем номер $\tilde{k}_j$, удовлетворяющий условию

$$|\lambda_{k_j} - \lambda_{\tilde{k}_j}| = \min_{k \neq k_j} |\lambda_{k_j} - \lambda_k|.$$

По условию и определению величины $G_\Lambda(D)$ имеем $|\lambda_{k_j}|^{-1}|\lambda_{k_j} - \lambda_{\tilde{k}_j}| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $\lambda_{\tilde{k}_j}/|\lambda_{\tilde{k}_j}|$ также сходится к x_0 и, кроме того, $\lambda_{\tilde{k}_j} \in B(\lambda_{k_j}, \delta_j|\lambda_{k_j}|)$, где $\delta_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Поскольку $|\lambda_{k_{j+1}}| \geq 2|\lambda_{k_j}|$, то в круге $B(\lambda_{k_j}, 2^{-1}|\lambda_{k_j}|)$ нет точек λ_{k_p} при $p \neq j$. Поэтому можно считать, что для каждого $j \geq 1$ точка $\lambda_{\tilde{k}_j}$ не совпадает ни с одной из точек λ_{k_p} , $p = 1, 2, \dots$. Пусть $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}/4)$. Выберем номер m так, что $H_{K_m}(x_0) \geq H_D(x_0) - \varepsilon$. Рассмотрим последовательность $b = \{b_{k,n}\}_{k=1, n=1}^{\infty, m_k}$, где $b_{\tilde{k}_j, 1} = \exp(H_{K_m}(\lambda_{\tilde{k}_j}))$, $j \geq 1$, и $b_{k,n} = 0$ для всех остальных k, n . Тогда $b \in \Phi$. Поэтому согласно условию существует $f \in \mathbf{P}_D$ такая, что $\tilde{\Sigma}(f) = b$, т.е. $f^{(n-1)}(\lambda_k) = b_{k,n}$, $k \geq 1$, $n = \overline{1, m_k}$. В силу непрерывности h_f , выбора m и неравенства $h_f(z) < H_D(z)$, $z \neq 0$, для некоторого $\delta \in (0, 1/2)$ имеем

$$h_f(z) \leq H_D(x_0) \leq H_{K_m}(x_0) + \varepsilon, \quad z \in B(x_0, 2\delta).$$

Тогда по лемме 3.2 для некоторого $T > 0$ верна оценка

$$\begin{aligned} M_{\tilde{\Lambda}}(y, \delta/4) &\leq H_{K_m}(x_0)|y| - \ln|\varphi(y)| + 2\varepsilon|y|, \\ y/|y| &\in B(x_0, \delta), \quad |y| > T, \quad f(y) \neq 0, \end{aligned}$$

где $\tilde{\Lambda} = \{\tilde{\lambda}_s, \tilde{m}_s\}$ – последовательность нулей и их кратностей функции f . Отметим, что по построению f обращается в нуль в точках λ_{k_j} с кратностью, не меньшей, чем m_{k_j} . Поскольку $\lambda_{\tilde{k}_j}/|\lambda_{\tilde{k}_j}|$ сходится к x_0 и $\lambda_{\tilde{k}_j} \in B(\lambda_{k_j}, \delta_j|\lambda_{k_j}|)$, то по предыдущему

$$\begin{aligned} m_{k_j} &\leq M_{\tilde{\Lambda}}(\lambda_{\tilde{k}_j}, \delta/4) \leq H_{K_m}(x_0)|\lambda_{\tilde{k}_j}| - \ln|\varphi(\lambda_{\tilde{k}_j})| + 2\varepsilon|\lambda_{\tilde{k}_j}| \\ &= H_{K_m}(x_0)|\lambda_{\tilde{k}_j}| - H_{K_m}(\lambda_{\tilde{k}_j}) + 2\varepsilon|\lambda_{\tilde{k}_j}|, \quad j \geq j_0. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая еще непрерывность H_{K_m} и выбор ε , получаем

$$m_{k_j} \leq 3\varepsilon|\lambda_{\tilde{k}_j}| \leq 3\varepsilon(1 + \delta_j)|\lambda_{k_j}| \leq 4\varepsilon|\lambda_{k_j}| < \tilde{\varepsilon}|\lambda_{k_j}|, \quad j \geq j_1.$$

Это противоречит выбору $\{\lambda_{k_j}\}$. Теорема доказана.

Пусть D – ограниченная выпуклая область и $w \in \mathbf{S}$. Через $L_D(w)$ и $\Pi_D(w)$ обозначим соответственно опорную прямую и опорную полуплоскость к D в направлении w , т.е. $L_D(w) = \{z: \operatorname{Re}(zw) = H_D(w)\}$, $\Pi_D(w) = \{z: \operatorname{Re}(zw) < H_D(w)\}$. Для каждого $w \in \mathbf{S}$ область D лежит в $\Pi_D(w)$, а прямая $L_D(w)$ не пересекает D и содержит хотя бы одну точку $z \in \partial D$. Множество всех таких z обозначим $\Gamma_D(w)$.

Через каждую точку $z \in \partial D$ проходит хотя бы одна опорная прямая. Если область D гладкая, то такая прямая лишь одна.

Будем говорить, что $w \in \mathbf{S}$ – круговое направление по отношению к D , если для некоторого $z \in \Gamma_D(w)$ выполнено одно из следующих условий:

- 1) $z = 0$;
- 2) $B(0, |z|) \cap D = \emptyset$;
- 3) для каждого $\delta \in (0, |z|)$ дуга $\partial B(0, |z|) \cap B(0, \delta)$ окружности $\partial B(0, |z|)$ содержит точки множества $\overline{D}$ по обе стороны от z .

Нетрудно заметить, что если $w \in \mathbf{S}$ – круговое направление по отношению к D , то для некоторого $z \in \Gamma_D(w)$ либо $z = 0$, либо прямая $L_D(w)$ перпендикулярна отрезку $[0, z]$. Существуют по крайней мере две точки $z \in \partial D$, обладающие указанными свойствами. Это – самая близкая и самая дальняя относительно начала координат точки границы. В силу выпуклости D имеется лишь одна граничная точка z , ближайшая к началу координат. При этом направление w , для которого $z \in \Gamma_D(w)$, всегда является круговым по отношению к D . В отличие от этого точек $z \in \partial D$, наиболее удаленных от начала координат, может быть несколько и даже бесконечно много, но при этом, в общем случае, направление w , для которого $z \in \Gamma_D(w)$, не обязано быть круговым по отношению к D . Например, если D – круг с центром в нуле, то все $w \in \mathbf{S}$ являются круговыми направлениями по отношению к D . Если D – круг, центр которого отличен от начала координат, то существует лишь одно направление, круговое по отношению к D .

ТЕОРЕМА 4.12. Пусть D – выпуклая гладкая ограниченная область, $F \subset \mathbf{S}$, W – нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$ со спектром $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$. Предположим, что выполнено следующее:

- 1) каждое $w \in F \cap N(\Lambda)$ не является круговым направлением по отношению к D ;
- 2) в W имеет место фундаментальный принцип, т. е. любая функция $\varphi \in W$ представляется рядом (2.11), сходящимся в топологии $H(D)$.

Тогда $m_F(\Lambda) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $m_F(\Lambda) > \tilde{\varepsilon} > 0$. Тогда найдутся подпоследовательность $\{\lambda_{k(j)}\}$ и точка $w_0 \in F$ такие, что $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|$ сходится к w_0 , $|\lambda_{k(j)}| \rightarrow \infty$ и $m_{k(j)} \geq \tilde{\varepsilon}|\lambda_{k(j)}|$, $j \geq 1$. Пусть $\widetilde{W}$ – замыкание линейной оболочки системы $\{z^{n-1} \exp(\lambda_{k(j)} z), n = 1, \dots, m_{k(j)}, j \geq 1\}$ в топологии $H(D)$. Тогда $\widetilde{W}$ – нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$, допускающее спектральный синтез, причем $\widetilde{W} \subset W$. Ближайшую к началу координат точку множества $\Gamma_D(w_0)$ обозначим z_0 . По условию 1) теоремы $z_0 \neq 0$ и, так как $D \subset \Pi_D(w_0)$, пересечение $B(0, |z_0|) \cap \Pi_D(w_0)$ не пусто. Покажем, что все функции из $\widetilde{W}$ аналитически продолжаются в область $B(0, |z_0|) \cap \Pi_D(w_0)$.

Пусть $\varphi \in \widetilde{W}$. По условию 2) с учетом леммы 2.6 функция φ разлагается в ряд (2.11), где $d_{k,n} = \nu_{k,n}(\varphi)$, а $\{\nu_{k,n}\}$ – последовательность функционалов из $H^*(D)$, биортогональная к системе (1.4). Если k не совпадает ни с одним из $k(j)$ и $n = 1, \dots, m_k$, то $\nu_{k,n}(z^{p-1} \exp(\lambda_{k(j)} z)) = 0$ для всех $p = 1, \dots, m_{k(j)}$, $j \geq 1$.

Отсюда следует, что $d_{k,n} = \nu_{k,n}(\varphi) = 0$, $n = 1, \dots, m_k$, $k \neq k(j)$, т.е.

$$\varphi(z) = \sum_{j=1, n=0}^{\infty, m_{k(j)}-1} d_{k(j),n} z^n \exp(\lambda_{k(j)} z), \quad (4.24)$$

причем ряд сходится в $H(D)$. Пусть K – произвольный компакт из области $B(0, |z_0|) \cap \Pi_D(w_0)$. Поскольку $z_0 \in \Gamma_D(w_0)$, то существуют число $\tau > 0$ и точка $z_1 \in D$ такие, что $|z_1| \geq |z|$ и $\operatorname{Re}(z_1 w_0) > \operatorname{Re}(z w_0) + \tau$ для всех $z \in K$. Из последнего неравенства и сходимости $\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|$ к w_0 следует, что для некоторого $a > 0$ верна оценка

$$a + \operatorname{Re}(z_1 \lambda_{k(j)}) > \operatorname{Re}(z \lambda_{k(j)}) + \tau |\lambda_{k(j)}|, \quad z \in K, \quad j \geq 1.$$

Тогда в силу ограниченности членов ряда (4.24) в точке z_1 по тем же соображениям, что и в предложении 2.7, получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1, n=0}^{\infty, m_{k(j)}-1} |d_{k(j),n}| \sup_{z \in K} |z^n \exp(\lambda_{k(j)} z)| \\ & \leq C \sum_{j=1, n=0}^{\infty, m_{k(j)}-1} \sup_{z \in K} (|z/z_1|^n \exp(\operatorname{Re}(\lambda_{k(j)}(z - z_1)))) \\ & \leq C_1 \sum_{j=1, n=0}^{\infty, m_{k(j)}-1} \exp(-\tau |\lambda_{k(j)}|) < \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, каждая функция $\varphi \in \widetilde{W}$ аналитична в области $D \cup (B(0, |z_0|) \cap \Pi_D(w_0))$ и представляется в этой области рядом (4.24), который сходится равномерно на компактах. Покажем теперь, что в этой области содержится некоторая специальная выпуклая область $\tilde{D}$, которая, в свою очередь, содержит D .

Из условия 1) следует, что D пересекает круг $B(0, |z_0|)$ и последний не лежит в D . Если $D \subset B(0, |z_0|)$, то в качестве $\tilde{D}$ возьмем $B(0, |z_0|) \cap \Pi_D(w_0)$. В противном случае окружность $\partial B(0, |z_0|)$ содержит граничные точки D , отличные от z_0 , и по условию 1) найдем $z_2 \in \partial D \cap \partial B(0, |z_0|)$ такую, что открытая дуга γ окружности $\partial B(0, |z_0|)$ с концами z_0 и z_2 не пересекает $\overline{D}$.

Как отмечалось выше, найдется $w_2 \in \mathbf{S}$, для которого множество $\Gamma_d(w_2)$ содержит z_2 . Поскольку z_0 – ближайшая к началу координат точка множества $\Gamma_D(w_0)$, то $w_2 \neq w_0$. Тогда с учетом гладкости D прямая $L_D(w_2)$ не содержит z_0 . Предположим вначале, что $B(0, |z_0|) \subset \Pi_D(w_0)$. Определим точку $z_3 \in \partial B(0, |z_0|)$. Если прямая $L_D(w_2)$ не пересекает γ , то положим $z_3 = z_2$. В противном случае в качестве z_3 возьмем точку пересечения $L_D(w_2)$ и γ . Пусть γ_1 – дуга с концами z_0 и z_3 , лежащая на γ . Тогда $\tilde{D}$ определим как внутренность выпуклой оболочки множества $\overline{D} \cup \gamma_1$. Пусть теперь $B(0, |z_0|)$ не лежит целиком в $\Pi_D(w_0)$ и γ_2 – хорда окружности $\partial B(0, |z_0|)$, лежащая на прямой $L_D(w_0)$. Если $L_D(w_2)$ не пересекает γ_2 , то положим $\gamma_3 = \gamma_2$. В противном случае в качестве γ_3 возьмем отрезок $[z_0, z_4]$, где z_4 – точка пересечения $L_D(w_2)$ и γ_2 , которая не совпадает с z_0 (если

$z_0 = z_4$, то $z_0 \in L_D(w_2)$, что невозможно в силу гладкости области D). Определим $\tilde{D}$ как внутренность выпуклой оболочки объединения $\overline{D} \cup \gamma_3$. Очевидно, что $D \subset \tilde{D}$. Отметим, что $\tilde{D}$ можно представить в следующем виде (см., например, [2]):

$$\tilde{D} = \text{int} \left(\bigcup_{z \in \overline{D}, y \in \gamma'} \{tz + (1-t)y, t \in [0, 1]\} \right) = \text{int} \left(\bigcup_{z \in \overline{D}, y \in \gamma'} [z, y] \right),$$

где γ' — дуга $\bar{\gamma}_1$ или отрезок γ_3 . По построению кривая γ' лежит в угле Δ , который является пересечением полуплоскостей $\overline{\Pi_D(w_0)}$ и $\overline{\Pi_D(w_2)}$. Там же согласно определению опорной функции лежит и $\overline{D}$. Следовательно, $\tilde{D} \subset \Delta$. Остается показать, что имеет место вложение $\tilde{D} \subset B(0, |z_0|) \cup D$.

Отрезок $[z_0, z_2]$ делит угол Δ на две части Δ_1 и Δ_2 , причем γ' целиком лежит в одной из них, скажем Δ_1 . Кроме того, $\gamma' \subset \overline{B(0, |z_0|)}$. Пусть $z \in \overline{D}$ и $y \in \gamma'$. Если $z \in \overline{B(0, |z_0|)}$, то и $[z, y] \subset \overline{B(0, |z_0|)}$. Предположим, что z не принадлежит кругу $\overline{B(0, |z_0|)}$. Тогда $z \in \Delta_2$. (Действительно, в противном случае отрезок $[z_0, z]$, лежащий в $\overline{D}$, пересекает дугу γ , а это противоречит выбору γ .) Поскольку $y \in \Delta_1$ и $[z_0, z_2] \subset \overline{B(0, |z_0|)}$, то отрезки $[z_0, z_2]$ и $[z, y]$ пересекаются в некоторой точке $x \in \overline{B(0, |z_0|)}$. Тогда $[x, y] \subset \overline{B(0, |z_0|)}$, а в силу выпуклости множества $\overline{D}$ оно содержит $[z, x]$. Таким образом, мы показали, что требуемое вложение имеет место. По доказанному это означает, что каждая функция $\varphi \in \widetilde{W}$ аналитически продолжается в выпуклую область $\tilde{D} \supset D$ и представляется там рядом (4.24), который сходится равномерно на компактах.

Положим $J(D, \tilde{D}) = \{w \in \mathbf{S} : H_D(w) < H_{\tilde{D}}(w)\}$. Множество $J(D, \tilde{D})$ не содержит точку w_0 ($H_{\tilde{D}}(w_0) \leq H_D(w_0)$), так как $\tilde{D} \subset \Pi_D(w_0)$, которая является единственной предельной точкой последовательности $\{\lambda_{k(j)}/|\lambda_{k(j)}|\}$. Тогда из [56, теорема 5] следует, что для каждого $w \in \partial J(D, \tilde{D}) \cap \mathbf{S}$ и любых $\delta, \varepsilon > 0$ существуют $\xi \in B(w, \delta) \cap \mathbf{S}$ и $f \in \mathbf{P}_D$, обращающаяся в нуль в точках $\lambda_{k(j)}$ с кратностью, не меньшей, чем $m_{k(j)}$, удовлетворяющие условию

$$\underline{h}_f(\xi) \geq H_D(\xi) - H_{D_1}(\xi) - \varepsilon, \quad (4.25)$$

где $D_1 = \{z : \text{Re}(z\zeta) < H_D(\zeta) - h_f(\zeta), \zeta \in \mathbf{S}\}$.

В силу [53, теорема 5] найдутся целая функция $f_1(z)$, постоянная $C > 0$ и исключительное множество $E \subset \mathbb{C}$ такие, что

$$|\ln|f_1(z)| - H_{D_1}(z)| \leq C \ln|z|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E,$$

причем E может быть покрыто кружками $B_i = B(z_i, r_i)$, $i \geq 1$, такими, что $\sum r_i = A < \infty$. Положим $\tilde{f}(z) = f(z)f_1(z)$. Из определения D_1 следует, что $h_{\tilde{f}}(\zeta) \leq H_D(\zeta) - H_{D_1}(\zeta) \quad \forall \zeta$. Поэтому, используя оценку (4.25), предложение 9.3 из [54], лемму 2.7 из [55], теорему об оценке снизу модуля аналитической функции и рассуждения, схожие с теми, которые мы проводили в теоремах 4.3, 4.6, 4.10, нетрудно установить, что

$$\underline{h}_{\tilde{f}}(\xi) \geq H_D(\xi) - b\varepsilon, \quad (4.26)$$

где $b > 0$ не зависит от w, δ, ε . При этом имеет место также неравенство

$$h_{\tilde{f}}(\zeta) \leq h_f(\zeta) + H_{D_1}(\zeta) \leq H_D(\zeta) \quad \forall \zeta. \quad (4.27)$$

Покажем, что $w_0 \in \partial J(D, \tilde{D})$. По выбору дуга γ_1 не пересекает $\overline{D}$. Отрезок γ_3 , лежащий на прямой $L_D(w_0)$, пересекает $\overline{D}$ лишь в точке z_0 , так как в противном случае z_0 не будет ближайшей к началу координат точкой множества $\Gamma_D(w_0)$. Пусть последовательность $\{y_p\}$, $y_p \in \gamma'$, $y_p \neq z_0$, сходится к z_0 . Поскольку $y_p \notin \overline{D}$, то найдется $\xi_p \in \mathbf{S}$ такая, что $H_{\tilde{D}}(\xi_p) \geq \operatorname{Re}(y_p \xi_p) > H_{\tilde{D}}(\xi_p)$, $p \geq 1$. Следовательно, $\xi_p \in J(D, \tilde{D})$, $p \geq 1$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{\xi_p\}$ сходится к ξ_0 . Тогда

$$H_D(\xi_0) \geq \operatorname{Re}(z_0 \xi_0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(y_p \xi_p) \geq \lim_{p \rightarrow \infty} H_D(\xi_p) = H_D(\xi_0),$$

т.е. прямая $L_D(\xi_0)$ проходит через точку z_0 . В силу гладкости D это возможно лишь в случае, когда $\xi_0 = w_0$. Таким образом, в (4.26) точку ξ можно выбрать сколь угодно близкой к w_0 . Поэтому, учитывая еще (4.27) и подбирая подходящие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ (так, чтобы для $h_0(z) = H_D(z)$ при $\tau = 5\delta$ было выполнено (3.13)), по лемме 3.2, как и выше, получаем противоречие с неравенством $m_F(\Lambda) > \hat{\varepsilon}$. Теорема доказана.

§5. Критерии интерполяции и фундаментального принципа

Прежде всего сформулируем самый общий критерий, пригодный для произвольной (ограниченной или неограниченной) выпуклой области.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть D – выпуклая область, W – нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$ со спектром $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$, допускающее спектральный синтез. Предположим, что $m_D(\Lambda) = 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) оператор $\Sigma: \mathbf{P}_D/I_\Lambda(D) \rightarrow \Phi$ является изоморфизмом линейных топологических пространств;
- 2) каждая функция $\varphi \in W$ представляется рядом (2.11), который сходится в каждой точке области D ;
- 3) система (1.4) является базисом Кете в W ;
- 4) $S_\Lambda > -\infty$, $S_\Lambda(D) = 0$ и для каждого $m \geq 1$ и каждого компакта $F \subset \mathbf{S} \setminus J(D)$ существует $j \geq 1$ такое, что для любого $\delta > 0$ найдутся $\beta, T > 0$, удовлетворяющие условию: $\lambda_k \in R_{m,j}^\delta$, если $\lambda_k/|\lambda_k| \in E(\beta)$ и $|\lambda_k| > T$, где $R_{m,j} = \{z: \Psi_j(z) \geq H_{K_m}(z)\}$, $E(\beta)$ – β -окрестность F и Ψ_j определены перед теоремой 4.2;
- 5) $S_\Lambda > -\infty$, $S_\Lambda(D) = 0$ и для каждого $p \geq 1$ и каждого компакта $F \subset \mathbf{S} \setminus J(D)$ существует $\varphi \in I_\Lambda(D)$ такая, что для любого $\delta > 0$ найдутся $\beta, T > 0$, удовлетворяющие условию: $\lambda_k \in R_p^\delta$, если $\lambda_k/|\lambda_k| \in E(\beta)$ и $|\lambda_k| > T$, где $R_p = \{z: \ln|\varphi(z)| \geq H_{K_p}(z)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность утверждений 1) и 2) доказана в предложении 2.13. Эквивалентность утверждений 2) и 3) вытекает из следствия 2.9. Наконец, эквивалентность утверждений 1), 4) и 5) следует из теорем 3.7, 4.1–4.3 и следствия 4.5.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. При определении $q_\Lambda^j(z, y, \delta)$ мы использовали коэффициент 3 в знаменателе. Выбор именно такого коэффициента обусловлен лишь некоторым удобством при рассуждениях. Его вполне можно заменить на любое другое, отличное от нуля число. Действительно, пусть $b \neq 0$ и величины $S_\Lambda(b)$, $S_\Lambda(D, b)$ определены точно так же, как S_Λ , $S_\Lambda(D)$, по функциям $q_\Lambda^j(z, y, \delta)$, где число 3 заменено на b . Тогда, как нетрудно заметить, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} S_\Lambda(b) &\leq M_\Lambda \ln(3/|b|) + S_\Lambda, & S_\Lambda &\leq M_\Lambda \ln(|b|/3) + S_\Lambda(b), \\ S_\Lambda(D, b) &\leq M_\Lambda(D) \ln(3/|b|) + S_\Lambda(D), & S_\Lambda(D) &\leq M_\Lambda(D) \ln(|b|/3) + S_\Lambda(D, b). \end{aligned}$$

Поскольку в настоящей работе $M_\Lambda < +\infty$, то неравенства $S_\Lambda > -\infty$ и $S_\Lambda(b) > -\infty$ выполнены или не выполнены одновременно. Если, дополнительно, $M_\Lambda(D) = 0$, то также одновременно выполнены или не выполнены равенства $S_\Lambda(D) = 0$ и $S_\Lambda(D, b) = 0$. Условия 4), 5) теоремы 3.7 являются частью необходимых и достаточных условий интерполяции (при ограничении $m_D(\Lambda) = 0$). Поэтому с учетом замечания вслед за доказательством теоремы 3.7 утверждения теоремы 5.1 останутся верными, если соотношения $S_\Lambda > -\infty$ и $S_\Lambda(D) = 0$ заменить в ней на следующие: $S_\Lambda(b) > -\infty$, $S_\Lambda(D, b) = 0$ (для некоторого $b \neq 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Рассмотрим еще так называемый индекс конденсации $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$:

$$Q_\Lambda = \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|^{-1} \int_0^{\delta|\lambda_k|} \frac{M_\Lambda(\lambda_k, t/|\lambda_k|) - m_k}{t} dt.$$

Положим еще

$$Q_\Lambda(F) = \inf_{E \supset F} Q_\Lambda(E), \quad Q_\Lambda(D) = \sup_{F \subset (\mathbf{S} \setminus J(D))} Q_\Lambda(F),$$

где E – произвольное открытое на $\mathbf{S}$ множество, содержащее F , а F – компактное подмножество $\mathbf{S} \setminus J(D)$. По формуле Иенсена имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |q_\Lambda^k(\lambda_k + r \exp(i\theta), \lambda_k, \delta)| d\theta \\ &= \int_0^r \frac{M_\Lambda(\lambda_k, g(t)) - m_k}{t} dt + \ln |q_\Lambda^k(\lambda_k, \lambda_k, \delta)|, \end{aligned}$$

где $g(t) = \delta$, $t \geq \delta|\lambda_k|$, и $g(t) = t/|\lambda_k|$, $t \in [0, \delta|\lambda_k|]$. Отсюда, используя неравенства $\ln |q_\Lambda^k(z, \lambda_k, \delta)| \leq 1$, $z \in B(\lambda_k, \delta|\lambda_k|)$, и $\ln |q_\Lambda^k(z, \lambda_k, \delta)| \geq 1$, $z \notin B(\lambda_k, 5\delta|\lambda_k|)$, получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^{\delta|\lambda_k|} \frac{M_\Lambda(\lambda_k, t/|\lambda_k|) - m_k}{t} dt + \ln |q_\Lambda^k(\lambda_k, \lambda_k, \delta)| \leq 0, \\ &M_\Lambda(\lambda_k, \delta) \ln 5 + \int_0^{\delta|\lambda_k|} \frac{M_\Lambda(\lambda_k, t/|\lambda_k|) - m_k}{t} dt + \ln |q_\Lambda^k(\lambda_k, \lambda_k, \delta)| \geq 0. \end{aligned}$$

Тогда, как и выше, неравенства $S_\Lambda > -\infty$, $Q_\Lambda < +\infty$ и равенства $S_\Lambda(D) = 0$, $Q_\Lambda(D) = 0$ (если $M_\Lambda(D) = 0$) выполнены или не выполнены одновременно.

Приведем теперь результат для ограниченной области. Функции Ψ_j и Ψ определены ранее по компактам K_j и области D .

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть D – ограниченная выпуклая область, W – нетривиальное замкнутое инвариантное подпространство в $H(D)$ со спектром $\Lambda = \{\lambda_k, t_k\}$, допускающее спектральный синтез. Предположим, что $t(\Lambda) = 0$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) оператор $\Sigma: \mathbf{P}_D/I_\Lambda(D) \rightarrow \Phi$ является изоморфизмом линейных топологических пространств;
- 2) каждая функция $\varphi \in W$ представляется рядом (2.11), который сходится в каждой точке области D ;
- 3) система (1.4) является базисом Кете в W ;
- 4) $S_\Lambda = 0$ и для любого $m \geq 1$ существует $j \geq 1$ такой, что $\underline{h}_{\Psi_j} \geq H_{K_m}$;
- 5) $S_\Lambda = 0$ и для любого $m \geq 1$ существует $\varphi \in I_\Lambda(D)$ такая, что $\underline{h}_\varphi \geq H_{K_m}$;
- 6) $S_\Lambda = 0$ и функция $\Psi(z)$ имеет регулярный рост всюду в плоскости, а ее верхний индикатор равен H_D , т. е. $\underline{h}_\Psi \equiv h_\Psi \equiv H_D$;
- 7) $S_\Lambda = 0$ и существует функция $\varphi \in I_\Lambda(\mathbb{C})$, которая имеет регулярный рост всюду в плоскости и ее верхний индикатор равен H_D , т. е. $\underline{h}_\varphi \equiv h_\varphi \equiv H_D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность утверждений 1) и 2) доказана в предложении 2.13. Эквивалентность утверждений 2) и 3) вытекает из следствия 2.9. С учетом ограниченности D эквивалентность утверждений 1), 4) и 5) следует из теорем 3.7, 4.1, 4.6, следствия 4.8 и леммы 2.7 из [55]. Импликации 1) $\rightarrow$ 6) и 6) $\rightarrow$ 7) доказаны соответственно в следствии 4.9 и теореме 4.10. Остается показать, что из утверждения 7) следует утверждение 1). Для этого достаточно установить, что выполнены условия теоремы 3.7. Поскольку D ограничена, в проверке нуждается лишь условие 5) этой теоремы. Фиксируем $m \geq 1$, $\delta > 0$ и покажем, что для некоторых $\varphi_m \in I_\Lambda(D)$ и $T > 0$ имеет место включение $\lambda_k \in R_m^\delta$, если $|\lambda_k| > T$, где $R_m = \{z: \ln|\varphi_m(z)| \geq H_{K_m}(z)\}$.

Пусть φ' – произвольная не равная тождественно нулю функция из $I_\Lambda(D)$ (такая функция существует в силу нетривиальности W) и $\varphi \in I_\Lambda(\mathbb{C})$ – функция из утверждения 7). Положим $\tilde{\varphi}' = \varphi'/f_\Lambda$ и $\tilde{\varphi} = \varphi/f_\Lambda$. Как и выше, $\tilde{\varphi}'$ и $\tilde{\varphi}$ целые, и для некоторых $a, b > 0$ и любого $\alpha \in [0, 1]$ верна оценка

$$\psi_\alpha(z) = \alpha \ln|\tilde{\varphi}'(z)| + (1 - \alpha) \ln|\tilde{\varphi}(z)| \leq a + b|z|^2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Тогда из [53, теорема 5] найдутся целая функция $\tilde{\varphi}_\alpha(z)$, постоянная $c > 0$ и исключительное множество $E \subset \mathbb{C}$ такие, что

$$|\ln|\tilde{\varphi}_\alpha(z)| - \psi_\alpha(z)| \leq c \ln|z|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E, \quad (5.1)$$

причем E может быть покрыто кружками $B_l = \{z: |z - z_l| < r_l\}$, $l \geq 1$, такими, что $\sum r_l = A < \infty$. Положим $\varphi_\alpha = f_\Lambda \tilde{\varphi}_\alpha$. Фиксируем $\varepsilon \in (0, \alpha_m/30)$, где α_m из неравенства (1.1). Выберем $\tau \in (0, 1)$ такое, что для $F = \mathbf{S}$ и функций $h_0(z) = H_D(z)$, $h_0(z) = H_D(z) - \varepsilon|z| - 3(3 + \ln 48)\varepsilon|z|$ выполнено неравенство (3.13), и $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \min\{\delta/8, \tau/12\}$. По теореме об оценке снизу на окружностях целой

функции конечного порядка и типа (см. [48, гл. I, § 4, теорема 4.3]) существуют $d > 0$ и последовательность $t_j \rightarrow +\infty$ такие, что

$$t_{j+1} < (1 + \delta_1)t_j, \quad \ln|\varphi'(z)| \geq -d|z|^2, \quad |z| = t_j, \quad j \geq 1. \quad (5.2)$$

На окружности $\mathbf{S}$ выберем точки $y_1, \dots, y_s$ так, что $\bigcup_{i=1}^s B(y_i, \delta_1/2)$ содержит $\mathbf{S}$. Поскольку φ имеет регулярный рост всюду в плоскости, то из [55, лемма 2.7] с учетом неравенства (3.13) для каждого $i = 1, \dots, s$ существует последовательность $\{y_{i,p}\}$ такая, что $|y_{i,p}| \uparrow +\infty$, $|y_{i,p}|/|z_{i,p}| - y_i| < \delta_1/2$, $|y_{i,p+1}|/|y_{i,p}| < 1 + \delta_1$ и

$$|y_{i,p}| > t_1, \quad \ln|\varphi(y_{i,p})| \geq H_D(y_{i,p}) - \varepsilon|y_{i,p}|, \quad p \geq 1. \quad (5.3)$$

Нетрудно заметить, что для некоторого $T > 0$ внешность круга $B(0, T)$ покрывается кругами $B(y_{i,p}, 2\delta_1|y_{i,p}|)$, $i = 1, \dots, s$, $p \geq 1$. Кроме того, из первых неравенств в (5.2) и (5.3) следует, что для любых $i = \overline{1, s}$ и $p \geq 1$ круг $B(y_{i,p}, \delta_1|y_{i,p}|)$ пересекает хотя бы одну из окружностей $|z| = t_j$, $j \geq 1$, скажем $|z| = t_{j_i,p}$. Можно считать, что $\delta_1|y_{i,p}| > 4A$, $i = 1, \dots, s$, $p \geq 1$, и так же, как в (3.11), выполнено неравенство

$$\ln|\varphi(z)| \leq h_\varphi(z) + \varepsilon|z| = H_D(z) + \varepsilon|z|, \quad |z| > (1 - \tau)T.$$

Отсюда с учетом (3.13) имеем

$$\ln|\varphi(z)| \leq H_D(y_{i,p}) + 2\varepsilon|y_{i,p}|, \quad z \in B(y_{i,p}, \tau|y_{i,p}|).$$

Используя это и (5.3), как и ранее, по теореме об оценке снизу модуля аналитической функции для любых $i = 1, \dots, s$ и $p \geq 1$ с учетом (3.13) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \ln|\varphi(z)| &\geq H_D(y_{i,p}) - \varepsilon|y_{i,p}| - 3(3 + \ln 48)\varepsilon|y_{i,p}| \\ &\geq H_D(z) - 2\varepsilon|z| - 3(3 + \ln 48)\varepsilon|z| \geq H_D(z) - 26\varepsilon|z|, \end{aligned} \quad (5.4)$$

которое выполнено в круге $B(y_{i,p}, 2\delta_1|y_{i,p}|)$, но вне исключительных кружков $B_{k,i,p}$, $k = 1, \dots, k_{i,p}$, с суммой радиусов, равной $\delta_1|y_{i,p}|/4$. Поскольку сумма диаметров кружков $B_{k,i,p}$, $k = 1, \dots, k_{i,p}$, и B_l , $l \geq 1$, меньше $\delta_1|y_{i,p}|$, то неравенства (5.4) и (5.1) будут выполнены на некоторой окружности $S_{i,p}$, лежащей в кольце $B(y_{i,p}, 2\delta_1|y_{i,p}|) \setminus B(y_{i,p}, \delta_1|y_{i,p}|)$. Выберем $\alpha_0 \in (0, 1)$ такое, что

$$\alpha_0(H_D(z) - 26\varepsilon|z|) \leq \varepsilon|z| \quad \forall z, \quad \alpha_0 d \leq \varepsilon. \quad (5.5)$$

В силу (5.1), увеличивая при необходимости $T > 0$, можно считать, что

$$|\ln|\varphi_{\alpha_0}(z)| - (\alpha_0 \ln|\varphi'(z)| + (1 - \alpha_0) \ln|\varphi(z)|)| \leq \varepsilon|z|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E, \quad |z| > (1 - \tau)T. \quad (5.6)$$

Пусть $z_{i,p} \in S_{i,p} \cap \{z: |z| = t_{j_i,p}\}$. Тогда с учетом неравенств (1.1), (5.2), (5.4), (5.5) и выбора числа ε получаем

$$\ln|\varphi_{\alpha_0}(z_{i,p})| \geq H_D(z_{i,p}) - 29\varepsilon|z_{i,p}| \geq H_{K_{m+1}}(z_{i,p}) - 29\varepsilon|z_{i,p}| \geq H_{K_m}(z_{i,p}).$$

Таким образом, если $\varphi_m = \varphi_{\alpha_0}$, то $z_{i,p} \in R_m$, $i = 1, \dots, s$, $p \geq 1$. Нетрудно видеть, что $B(y_{i,p}, 2\delta_1|y_{i,p}|) \subset B(z_{i,p}, 8\delta_1|z_{i,p}|)$. Поэтому (с учетом выбора δ_1) внешность круга $B(0, T)$ покрывается кругами $B(z_{i,p}, \delta|z_{i,p}|)$, $i = 1, \dots, s$, $p \geq 1$. Это означает, что $\lambda_k \in R_m^\delta$, если $|\lambda_k| > T$. Остается установить включение $\varphi_m \in I_\Lambda(D)$. По построению φ_m обращается в нуль в точках λ_k с кратностью, не меньшей, чем m_k . Кроме того, используя (5.6), принцип максимума, неравенство (3.13) и то, что $h_{\varphi'}(z) < H_D(z)$, $z \neq 0$, имеем

$$h_{\varphi_m}(z) \leq \alpha_0 h_{\varphi'}(z) + (1 - \alpha_0) H_D(z) < H_D(z), \quad z \neq 0.$$

Таким образом, $\varphi_m \in I_\Lambda(D)$. Теорема полностью доказана.

В заключение приведем условия, эквивалентные существованию функции $\varphi \in I_\Lambda(\mathbb{C})$ такой, что $\underline{h}_\varphi \equiv h_\varphi \equiv H_D$. В теории целых функций существует понятие асимптотического равенства. Говорят, что f и $\tilde{f}$ *асимптотически равны* (по отношению к порядку один), т.е. $f \approx \tilde{f}$, если вне некоторого C^0 -множества $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |z|^{-1}(f(z) - \tilde{f}(z)) = 0$. Напомним, что C^0 -множество – это множество, которое может быть покрыто кругами $\tilde{B}_j = B(y_j, \tilde{r}_j)$ такими, что

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} r^{-1} \sum_{|y_j| < r} \tilde{r}_j = 0.$$

В работе [57] показано, что $\tilde{B}_j$ можно считать попарно непересекающимися. По аналогии с этим будем говорить, что ψ – асимптотически субгармоническая функция, если существует субгармоническая функция $\tilde{\psi}$ такая, что $\psi \approx \tilde{\psi}$.

ТЕОРЕМА 5.5. Пусть D – ограниченная выпуклая область и $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) существует функция $\varphi \in I_\Lambda(\mathbb{C})$ такая, что $\underline{h}_\varphi \equiv h_\varphi \equiv H_D$;
- 2) $H_D(z) - \ln|f_\Lambda(z)|$ – асимптотически субгармоническая функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\rightarrow$ 2). Равенство $\underline{h}_\varphi \equiv h_\varphi \equiv H_D$ означает, что функция φ имеет регулярный рост всюду в плоскости, или, другими словами, ее нулевое множество правильно распределено. Тогда (см., например, [48, гл. I, теорема 6.2]) $\ln|\varphi| \approx H_D$. Отсюда следует, что

$$\ln|\varphi| - \ln|f_\Lambda| \approx H_D - \ln|f_\Lambda|.$$

Поскольку $\varphi \in I_\Lambda(\mathbb{C})$, то $\ln|\varphi| - \ln|f_\Lambda|$ – субгармоническая функция. Поэтому функция $H_D(z) - \ln|f_\Lambda(z)|$ асимптотически субгармоническая.

2) $\rightarrow$ 1). Пусть $\tilde{\psi}$ – субгармоническая функция такая, что $H_D - \ln|f_\Lambda| \approx \tilde{\psi}$. Тогда $H_D \approx \ln|f_\Lambda| + \tilde{\psi}$. Поскольку $\tilde{B}_j$ попарно не пересекаются и $t_j/|y_j| \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, то отсюда, из неравенства (3.13) и принципа максимума для субгармонических функций легко следует неравенство

$$\ln|f_\Lambda(z)| + \tilde{\psi}(z) \leq a + H_D(z) + \varepsilon(z)|z| \quad \forall z,$$

где $\varepsilon(z) \rightarrow 0$, когда $|z| \rightarrow \infty$. Используя опять принцип максимума и (4.7), как и ранее, устанавливаем, что $\tilde{\psi}$ удовлетворяет оценке (4.8). Тогда в силу [53, теорема 5] найдутся целая функция $\tilde{\varphi}$, $C > 0$ и исключительное множество $E \subset \mathbb{C}$ такие, что

$$|\ln|\tilde{\varphi}(z)| - \tilde{\psi}(z)| \leq C \ln|z|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus E, \quad (5.7)$$

причем множество E может быть покрыто кружками $B_i = B(z_i, r_i)$, $i \geq 1$, такими, что $\sum r_i = A < \infty$. Положим $\varphi(z) = \tilde{\varphi}(z)f_\Lambda(z)$. Очевидно, что объединение всех кругов $\tilde{B}_j$ и B_i является C^0 -множеством. Тогда с учетом неравенства (5.7) имеем $\ln|\varphi| \approx H_D$. Отсюда, как и выше, следует, что $h_\varphi \leq H_D$, и, кроме того, неравенство $\underline{h}_\varphi \geq H_D$. Действительно, если последнее неверно, то для функции φ имеет место оценка (4.21). Но это невозможно, так как объединение кругов $B(t_r y, \delta t_r)$, $r \geq 1$, является множеством линейной плотности, не меньшей, чем δ (т.е. $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \sum_{|t_r| < t} t_r \delta \geq \delta$), а потому не может лежать ни в каком C^0 -множестве. Таким образом, $\underline{h}_\varphi \equiv h_\varphi \equiv H_D$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.6. Пусть $M_\Lambda(X)$ – сумма кратностей m_k точек λ_k , попавших в множество X . Для компакта $K \subset \mathbb{C}$ через $K(\sigma)$ обозначим его σ -вздутие. Следуя работе [44], положим

$$d_\Lambda(K) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} M_\Lambda(tK(\sigma)).$$

Основываясь на результатах работ [33] и [44], можно показать, что утверждение 1) теоремы 5.5 эквивалентно следующему неравенству: $d_\Lambda(K) \leq \mu(K) \quad \forall K \subset \mathbb{C}$. Здесь μ – риссовская мера субгармонической функции H_D .

§ 6. Некоторые примеры

ПРИМЕР 6.1. Пусть $D, \tilde{D}$ – выпуклые области и K – выпуклый компакт в $\mathbb{C}$ такие, что $D = \tilde{D} + K$; $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$; функция $\varphi \in I_\Lambda(D)$ имеет индикатор h_φ , равный H_K , и регулярный рост всюду в плоскости ($\underline{h}_\varphi \equiv h_\varphi$); $S_\Lambda = 0$. Этих условий достаточно для разрешимости интерполяционной задачи. Действительно, пусть $\tilde{K}_m$ – последовательность выпуклых компактов из $\tilde{D}$, исчерпывающая $\tilde{D}$. Тогда $K_m = K + \tilde{K}_m$ – последовательность выпуклых компактов из D , исчерпывающая D . Для каждого $m \geq 1$, как и выше, найдем целую функцию $\tilde{\varphi}_m$ такую, что $\ln|\tilde{\varphi}_m|$ аппроксимирует $H_{\tilde{K}_m}$. Положим $\varphi_m = \tilde{\varphi}_m \varphi$. Можно показать, что

$$\underline{h}_{\varphi_m} \equiv h_{\varphi_m} \equiv h_\varphi + h_{\tilde{\varphi}_m} \equiv H_K + H_{\tilde{K}_m} \equiv H_{K_m}.$$

Отсюда и из теоремы 5.1 следует тогда, что оператор $\Sigma: \mathbf{P}_D/I_\Lambda(D) \rightarrow \Phi$ – изоморфизм.

Обратно, пусть D – ограниченная выпуклая область и K – выпуклый компакт в $\mathbb{C}$; $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$, $m(\Lambda) = 0$, $S_\Lambda = 0$; функция $\varphi \in I_\Lambda(D)$ имеет индикатор h_φ , равный H_K , и регулярный рост всюду в плоскости. Предположим, что оператор $\Sigma: \mathbf{P}_D/I_\Lambda(D) \rightarrow \Phi$ – изоморфизм. Тогда D необходимо имеет вид $D = \tilde{D} + K$, где $\tilde{D}$ – выпуклая область. Действительно, согласно следствию 4.9 и теореме 4.10 существует функция $f \in I_\Lambda(\mathbb{C})$ такая, что $\underline{h}_f \equiv h_f \equiv H_D$. Положим $\tilde{\varphi} = f/\varphi$. Функция $\tilde{\varphi}$ целая, а из регулярности роста φ вытекает тождество $h_\varphi + h_{\tilde{\varphi}} \equiv H_D$. Это означает, что $D = \tilde{D} + K$, где $\tilde{D}$ – внутренность сопряженной диаграммы $\tilde{\varphi}$.

ПРИМЕР 6.2. Пусть D – ограниченная выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$, где $\lambda_{2k} = k$, $\lambda_{2k+1} = -k$ и $m_k = 1$, $k \geq 1$. Последовательность $\{\lambda_k\}$ является множеством нулей целой функции экспоненциального типа $\varphi(z) = \sin(\pi z)$ (считаем, что $\varphi \in I_\Lambda(D)$). Эта функция имеет регулярный рост всюду в комплексной плоскости, а ее сопряженная диаграмма K представляет собой отрезок мнимой оси $[-i, i]$, т.е. $H_K(z) = h_\varphi(z) = |\operatorname{Im} z|$. Кроме того, легко показать, что $Q_\Lambda = 0$. Таким образом, в силу сказанного выше оператор $\Sigma: \mathbf{P}_D/I_\Lambda(D) \rightarrow \Phi$ будет изоморфизмом тогда и только тогда, когда $D = \tilde{D} + K$ для некоторой выпуклой области $\tilde{D}$. Последнее эквивалентно тому, что множества $\Gamma_D(-1)$ и $\Gamma_D(1)$ содержат отрезки длины не меньше, чем два. Действительно, нетрудно показать, что в этом случае в качестве $\tilde{D}$ нужно взять множество, состоящее из середин вертикальных отрезков длины два, лежащих в D .

ПРИМЕР 6.3. Пусть D – ограниченная выпуклая область, $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$, где $\lambda_{2k} = k$, $\lambda_{2k+1} = k + \varepsilon(k)$, $\varepsilon(k) \rightarrow 0$, и $m_k = 1$, $k \geq 1$. Последовательность $\{\lambda_k\}$ является частью нулей целой функции экспоненциального типа $f = \varphi\varphi_1$, где φ – та же, что и в примере 6.2, а φ_1 обладает свойствами, схожими со свойствами φ (считаем, что $f \in I_\Lambda(D)$). Функция f имеет регулярный рост всюду в комплексной плоскости. Если множества $\Gamma_D(-1)$ и $\Gamma_D(1)$ содержат отрезки длины не меньше, чем четыре, то $D = \tilde{D} + K$, где K – сопряженная диаграмма f . Таким образом, необходимым и достаточным условием того, что оператор $\Sigma: \mathbf{P}_D/I_\Lambda(D) \rightarrow \Phi$ – изоморфизм, является в этом случае равенство $S_\Lambda = 0$, или, что то же самое, равенство $Q_\Lambda = 0$. Имеем (при больших k)

$$\begin{aligned} 0 \leq Q_\Lambda &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|^{-1} \int_0^{\delta|\lambda_k|} \frac{M_\Lambda(\lambda_k, t/|\lambda_k|) - m_k}{t} dt \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|^{-1} \int_{1/2}^{\delta|\lambda_k|} \frac{M_\Lambda(\lambda_k, t/|\lambda_k|) - m_k}{t} dt \\ &\quad + \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|^{-1} \int_0^{1/2} \frac{M_\Lambda(\lambda_k, t/|\lambda_k|) - m_k}{t} dt \\ &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|^{-1} \int_{1/2}^{\delta|\lambda_k|} \frac{3t}{t} dt + \lim_{\delta \rightarrow 0} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|^{-1} \int_{\varepsilon(k)}^{1/2} \frac{1}{t} dt \\ &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |\lambda_k|^{-1} (-\ln(\varepsilon(k))). \end{aligned}$$

Следовательно, равенство $Q_\Lambda = 0$ будет выполнено в том и только том случае, когда $\varepsilon(k) = \exp(-\tilde{\varepsilon}(k)|\lambda_k|)$, где $\tilde{\varepsilon}(k) > 0$ и $\tilde{\varepsilon}(k) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

ПРИМЕР 6.4. Выше мы показали, что в случае ограниченной выпуклой области разрешимость интерполяционной задачи (при условии $m(\Lambda) = 0$) влечет за собой существование функции $\varphi \in I_\Lambda(\mathbb{C})$, которая имеет регулярный рост всюду в плоскости. В случае неограниченной области такой функции может не существовать. В подтверждение этого рассмотрим пример из работы [46]. Пусть D – полуплоскость $\{z: \operatorname{Re} z < a\}$ и последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, m_k\}$ – такая, что $m_k \equiv 1$, $\lambda_k = k$ при $k = 2^s$, $s \geq 1$, а остальные λ_k лежат на интервалах $(2^s, 2^{s+1})$ так, что число λ_k , попавших на $(2^s, r)$, $r < 2^s$, равно целой части $\sqrt{r}2^s$. В работе [46] доказано, что соответствующая интерполяционная задача разрешима.

При этом, однако, не существует функции $\varphi \in I_\Lambda(\mathbb{C})$, которая имеет регулярный рост на положительной вещественной полуоси. Действительно, предположим, что это не так, т.е. для некоторой $\varphi \in I_\Lambda(\mathbb{C})$ верно равенство $\underline{h}_\varphi(1) = h_\varphi(1)$. Тогда по лемме 2.7 из [55] существует последовательность $\{z_j\}$ такая, что $|z_j| \rightarrow +\infty$, $|z_j|/|z_j| - 1| \rightarrow 0$, $|z_{j+1}|/|z_j| \rightarrow 1$ и $\lim_{j \rightarrow \infty} \ln |\varphi(z_j)|/|z_j| \geq h_\varphi(1)$.

Пусть $\varepsilon > 0$. Из последнего неравенства и леммы 3.2 получаем

$$M_\Lambda\left(z_j, \frac{\delta}{4}\right) \leq 2\varepsilon|z_j|, \quad j \geq j_0, \quad (6.1)$$

где $\delta > 0$ выбрано из условия $h_\varphi(z) \leq h_\varphi(1) + \varepsilon$, $z \in B(1, 2\delta)$. Используя выпуклость h_φ , нетрудно показать, что для некоторого $c > 0$ верно неравенство $h_\varphi(z) \leq h_\varphi(1) + c|z - 1|$, $z \in B(1, 1)$. Поэтому в (6.1) в качестве δ можно взять $\varepsilon/(2c)$. Из свойств последовательности $\{z_j\}$ следует, что для некоторого $b > 0$ луч $[b, +\infty)$ покрывается кругами $B(z_j, \varepsilon|z_j|/(16c))$, $j \geq 1$. Выберем номер j_s такой, что $2^s \in B(z_{j_s}, \varepsilon|z_{j_s}|/(16c))$, $s \geq s_0$. Тогда интервал $(2^s, \varepsilon|z_{j_s}|/(16c))$ лежит в круге $B(z_{j_s}, \varepsilon|z_{j_s}|/(8c))$, а при малых $\varepsilon > 0$ будет выполнено неравенство $2^s \geq |z_{j_s}|/2$, $s \geq s_0$. Следовательно, по определению λ_k имеем

$$M_\Lambda\left(z_j, \frac{\varepsilon}{8c}\right) \geq \left\lfloor \sqrt{\frac{2^s \varepsilon |z_{j_s}|}{16c}} \right\rfloor \geq \left\lfloor |z_{j_s}| \sqrt{\frac{\varepsilon}{32c}} \right\rfloor.$$

При малых $\varepsilon > 0$ это противоречит (6.1), где $\delta = \varepsilon/(2c)$.

Список литературы

1. Напалков В. В. Уравнения свертки в многомерных пространствах. М.: Наука, 1982.
2. Лейтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.
3. Красичков-Терновский И. Ф. Однородное уравнение типа свертки на выпуклых областях // ДАН СССР. 1971. Т. 197. № 1. С. 29–31.
4. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный анализ на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 87. № 4. С. 459–489.
5. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях // Матем. сб. 1972. Т. 88. № 1. С. 3–30.
6. Valiron G. Sur les solutions des equations differentielles lineaires d'ordre infini et a coefficients constants // Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 1929. V. 46. № 1. P. 25–53.
7. Schwartz L. Theorie generale des fonctions moyenne-periodique // Ann. Math. 1947. V. 48. № 4. P. 857–929.
8. Гельфонд А. О. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами бесконечного порядка и асимптотические периоды целых функций // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1951. Т. 38.
9. Dickson D. G. Expansions in series of solutions of linear difference-differential and infinite order differential equations with constant coefficients // Memor. Amer. Math. Soc. 1957. V. 23. P. 1–72.
10. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.
11. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гостехиздат, 1954.
12. Евграфов М. А. Интерполяционная задача Абеля–Гончарова. М.: Гостехиздат, 1954.
13. Левин Б. Я. О некоторых приложениях интерполяционного ряда Лагранжа к теории целых функций // Матем. сб. 1940. Т. 8. № 3. С. 437–454.

14. Леонтьев А. Ф. Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка // ДАН СССР. 1948. Т. 61. №5. С. 785–787.
15. Леонтьев А. Ф. Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка нормального типа // ДАН СССР. 1949. Т. 66. №2. С. 153–156.
16. Леонтьев А. Ф. Об интерполяционной задаче // ДАН СССР. 1949. Т. 66. №3. С. 331–334.
17. Леонтьев А. Ф. К вопросу об интерполировании в классе целых функций конечного порядка // Матем. сб. 1957. Т. 41. №1. С. 81–96.
18. Леонтьев А. Ф. О значениях целой функции конечного порядка в заданных точках // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1958. Т. 22. №3. С. 387–394.
19. Ибрагимов И. И. Методы интерполяции функций и некоторые их приложения. М.: Наука, 1971.
20. Ибрагимов И. И., Келдыш М. В. Об интерполяции целых функций // Матем. сб. 1947. Т. 20. №2. С. 283–292.
21. Казьмин Ю. А. К вопросу о восстановлении аналитической функции по ее элементам // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1966. Т. 30. №2. С. 307–324.
22. Казьмин Ю. А. Об одной интерполяционной задаче // Сиб. матем. журн. 1967. Т. 8. №2. С. 293–312.
23. Казьмин Ю. А. Об одной интерполяционной задаче // Сиб. матем. журн. 1967. Т. 8. №3. С. 587–600.
24. Коробейник Ю. Ф. Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т. 44. №5. С. 1066–1144.
25. Коробейник Ю. Ф. Представляющие системы // УМН. 1981. Т. 1. С. 73–126.
26. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
27. Mursi M., Winn E. On the interpolated integral function of given order // Quart. J. Math. 1933. V. 4. P. 173–179.
28. Macintyre A. J., Wilson R. On the order of the interpolated integral functions // Quart. J. Math. 1933. V. 5. P. 211–220.
29. Фурсакова О. С. Некоторые вопросы интерполирования с помощью целых функций // ДАН СССР. 1958. Т. 120. №3. С. 477–480.
30. Малютин К. Г. Интерполяция голоморфными функциями: Дис. . . канд. физ.-матем. наук. Харьков, 1980.
31. Малютин К. Г. Об интерполяционной задаче в классе целых функций вполне регулярного роста // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1984. Т. 135. С. 96–107.
32. Руссаковский А. М. Об интерполяции в классе целых функций, имеющих индикатор не выше данного // Теория функций, функц. анализ. и их прилож. Вып. 37. Харьков: Вища школа, 1982. С. 111–114.
33. Гришин А. Ф. О множествах регулярного роста целых функций // Теория функций, функц. анализ и их прилож. Вып. 40. Харьков: Вища школа, 1983. С. 36–47.
34. Гришин А. Ф. О множествах регулярного роста целых функций // Теория функций, функц. анализ и их прилож. Вып. 41. Харьков: Вища школа, 1984. С. 39–55.
35. Гришин А. Ф. О множествах регулярного роста целых функций // Теория функций, функц. анализ и их прилож. Вып. 42. Харьков: Вища школа, 1984. С. 37–43.
36. Mursi M. Sur l'ordre de fonctions entieres definies par interpolation // Bull. Sci. Math. 1949. V. 73. P. 96–112.
37. Лапин Г. П. О целых функциях конечного порядка, принимающих вместе с производными заданные значения в заданных точках // Сиб. матем. журн. 1965. Т. 6. №6. С. 1267–1281.
38. Лапин Г. П. Интерполирование в классе целых функций конечного порядка // Изв. вузов. Математика. 1959. Т. 5. С. 146–153.
39. Братищев А. В. Об интерполяционной задаче в некоторых классах целых функций // Сиб. матем. журн. 1976. Т. 7. №1. С. 30–44.
40. Братищев А. В. О разрешимости интерполяционной задачи в классах $[\rho(r), H(\theta)]$, $[\rho(r), H(\theta)]$ // Механика сплошной среды. Ростов-на-Дону. 1981. С. 49–54.

41. *Братищев А. В., Коробейник Ю. Ф.* Интерполяционная задача в пространствах целых функций конечного порядка // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1976. Т. 40. № 5. С. 1102–1127.
42. *Руссаковский А. М.* Об интерполяции в классе целых функций, имеющих индикатор не выше данного // Теория функций, функц. анализ и их прилож. Вып. 37. Харьков: Вища школа, 1982. С. 111–114.
43. *Руссаковский А. М.* Об интерполяции в классе целых функций, имеющих индикатор не выше данного // Теория функций, функц. анализ и их прилож. Вып. 41. Харьков: Вища школа, 1984. С. 119–122.
44. *Гришин А. Ф., Руссаковский А. М.* Свободная интерполяция целыми функциями // Теория функций, функц. анализ и их прилож. Вып. 44. Харьков: Вища школа, 1985. С. 32–42.
45. *Братищев А. В.* Один тип оценок снизу целых функций конечного порядка и некоторые приложения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1984. Т. 48. № 3. С. 451–475.
46. *Братищев А. В.* Базисы Кете, целые функции и их приложения: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. Ростов-на-Дону, 1993.
47. *Berenstein C. A., Taylor B. A.* A new look at interpolation theory for entire functions of one variables // Adv. Math. 1979. V. 33. № 2. P. 109–143.
48. *Леонтьев А. Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983.
49. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1967.
50. *Гротендик А. О.* О пространствах (F) и (DF) // Математика. 1958. Т. 2. № 3. С. 81–127.
51. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. I. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
52. *Ронкин Л. И.* Введение в теорию целых функций многих переменных. М.: Наука, 1971.
53. *Юлмухаметов Р. С.* Аппроксимация субгармонических функций // Anal. Math. 1985. Т. 11. С. 257–282.
54. *Кривошеев А. С., Напалков В. В.* Комплексный анализ и операторы свертки // УМН. 1992. Т. 47. № 6. С. 3–58.
55. *Кривошеев А. С.* Об индикаторах целых функций и продолжении решений однородного уравнения свертки // Матем. сб. 1993. Т. 184. № 8. С. 81–108.
56. *Кривошеев А. С.* Аналитическое продолжение функций из инвариантных подпространств в выпуклых областях комплексного пространства // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 2. С. 75–102.
57. *Красичков-Терновский И. Ф.* Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона // Матем. заметки. 1978. Т. 24. № 4. С. 531–546.

Поступило в редакцию
31.10.2002