Общероссийский математический портал

С. А. Кудрявцев, Классификация трехмерных исключительных логканонических гиперповерхностных особенностей. II, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 2, 137–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/im477>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:35:46

УДК 512.7

С. А. Кудрявцев

Классификация трехмерных исключительных логканонических гиперповерхностных особенностей. II

Изучаются трехмерные исключительные канонические гиперповерхностные особенности, не удовлетворяющие условию хорошей определенности. Полученный результат завершает классификацию трехмерных исключительных логканонических гиперповерхностных особенностей, начатую в работе [4].

Библиография: 9 наименований.

Введение

В настоящей работе завершается классификация трехмерных исключительных гиперповерхностных особенностей, начатая в работе [4]. Основным результатом является следующая классификационная теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^4, 0)$ – трехмерная исключительная каноническая (соответственно, строго логканоническая) гиперповерхностная особенность, заданная многочленом f . Тогда существуют биголоморфная замена координат $\psi: (\mathbb{C}^4, 0) \rightarrow (\mathbb{C}_{t,z,x,y}^4, 0)$ и единственный примитивный вектор $\mathbf{p} \in N_{\mathbb{R}}$ такие, что выполнено одно из следующих условий.

1. Квазиоднородный многочлен $\tilde{f}_{\mathbf{p}} = (f \circ \psi)_{\mathbf{p}}$ задает исключительную каноническую (соответственно, строго логканоническую и каноническую вне $\mathbf{0}$) особенность $(X_{\mathbf{p}}, 0) \subset (\mathbb{C}_{t,z,x,y}^4, 0)$; в этом случае $\mathbf{p}$ -раздутие $\mathbb{C}^4$ индуцирует чисто логтерминальные раздутия $\varphi: (Y, E) \rightarrow (X, 0)$ и $\varphi_{\mathbf{p}}: (Y_{\mathbf{p}}, E_{\mathbf{p}}) \rightarrow (X_{\mathbf{p}}, 0)$, причем $(E, \text{Diff}_E(0)) = (E_{\mathbf{p}}, \text{Diff}_{E_{\mathbf{p}}}(0))$, т.е. эти особенности имеют один и тот же тип, в частности одинаковый индекс дополняемости.

Канонические особенности, удовлетворяющие условию хорошей определенности: $\text{Diff}_{E/\mathbb{P}(\mathbf{p})}(0) = 0$, классифицированы в теоремах 3.25, 3.29 статьи [4], в таблицах статьи [4] и таблицах работы [5], где указаны $\tilde{f}_{\mathbf{p}}$, $(E, \text{Diff}_E(0))$, минимальный индекс дополняемости.

Канонические особенности, не удовлетворяющие условию хорошей определенности, перечислены в таблицах работы [6], где указаны $\tilde{f}_{\mathbf{p}}$, $(E, \text{Diff}_E(0))$, минимальный индекс дополняемости.

Строго логканонические и канонические вне $\mathbf{0}$ квазиоднородные особенности по теореме 2.13 из [4] всегда являются исключительными (для любой размерности). В трехмерном случае $(E, \text{Diff}_E(0)) = (\tilde{f}_{\mathbf{p}} \subset \mathbb{P}(\mathbf{p}), 0)$ – КЗ-поверхность с дювалевскими особенностями и особенность $(X, 0)$ 1-дополняема.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов INTAS-OPEN № 2000#269, Ведущих научных школ НШ-489.2003.1 и Молодых кандидатов МК-1285.2003.01.

2. Квазиоднородная часть имеет вид $\tilde{f}_{\mathbf{p}} = t^3 + g_2^2(z, x, y)$, где g_2 – неприводимый однородный многочлен степени 2. В этом случае в теоремах 3.3 и 3.5 работы [4] построено чисто логтерминальное раздутие и получена аналогичная классификация в зависимости от вида струй $\tilde{f}_5$ и $\tilde{f}_6$.

Согласно основной теореме, доказанной в [4], остается классифицировать трехмерные исключительные канонические квазиоднородные особенности, не удовлетворяющие условию хорошей определенности. Строение этих особенностей изучено в настоящей работе. Итоговая классификация дана в таблицах работ [4]–[6].

Из классификации следует, что имеется только конечное число типов трехмерных исключительных гиперповерхностных особенностей. Гипотетически, этот результат должен быть верен для произвольных исключительных особенностей фиксированной размерности. (В двумерном случае см. [4, примеры 1.19 и 1.20].)

Статья организована следующим образом: в § 1 изучаются чисто логтерминальные раздутия не хорошо определенных особенностей, в § 2 изучаются трехмерные квазиоднородные не хорошо определенные особенности.

Автор признателен Ю. Г. Прохорову за ценные советы и постоянный интерес к работе.

§ 1. Строение чисто логтерминального раздутия не хорошо определенной особенности

Настоящая работа является непосредственным продолжением статьи [4] (поэтому обозначения и определения см. в [4]).

1.1. Напомним основную терминологию торической геометрии [7], которая используется здесь. Пусть N – свободная абелева группа $\mathbb{Z}^n$ и M – ее двойственная решетка $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$. Обозначим $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ и $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ через $N_{\mathbb{R}}$ и $M_{\mathbb{R}}$ соответственно. Имеем следующее билинейное спаривание $\langle \cdot, \cdot \rangle: N_{\mathbb{R}} \times M_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть σ – положительный октант $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ решетки $N_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$ и $\sigma^{\vee}$ – его двойственный октант. Тогда $\mathbb{C}^n$ является торическим многообразием, соответствующим конусу σ . Для веера Δ в N соответствующее торическое многообразие обозначается через $T_N(\Delta)$. Пусть $\mathbf{p} \in N$ – примитивный вектор из одномерного конуса $\tau = \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{p}$ в Δ ; тогда замыкание $\text{orb}(\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{p})$ обозначается через $D_{\mathbf{p}}$, где $D_{\mathbf{p}}$ – дивизор на многообразии $T_N(\Delta)$.

Пусть $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ – гиперповерхностная особенность, и пусть $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ – примитивный элемент в решетке N такой, что для некоторых i_1 и i_2 имеем $p_{i_1} > 0$, $p_{i_2} > 0$ (такой вектор $\mathbf{p}$ называется *весом*). Пусть $\varphi: \mathbb{C}^n(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbb{C}^n$ – раздутие с весом $\mathbf{p}$. Собственный прообраз X на многообразии $\mathbb{C}^n(\mathbf{p})$ обозначим через $X(\mathbf{p})$. Раздутие $\varphi: \mathbb{C}^n(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbb{C}^n$ и его ограничение $\varphi|_{X(\mathbf{p})}: X(\mathbf{p}) \rightarrow X$ будем называть *$\mathbf{p}$ -раздутием*. Исключительное множество $\varphi|_{X(\mathbf{p})}$ обозначим через $E_{\mathbf{p}}$. Исключительное множество $D_{\mathbf{p}}$ морфизма φ является взвешенным проективным пространством $\mathbb{P}(\mathbf{p})$. Эти $\mathbf{p}$ -раздутия получаются разбиением конуса σ . Соответствующий веер состоит из граней конусов σ_i , где σ_i порождаются векторами $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{i-1}, \mathbf{p}, \mathbf{e}_{i+1}, \dots, \mathbf{e}_n$. Векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ – это векторы $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ – многочлен. Он называется *квазиоднородным степени d* , если существуют строго положительные рацио-

нальные числа $p_1, \dots, p_n$, называемые *весами*, такие, что для любого λ и всех $x_1, \dots, x_n$

$$f(\lambda^{p_1} x_1, \dots, \lambda^{p_n} x_n) = \lambda^d f(x_1, \dots, x_n). \quad (1)$$

Для квазиоднородных особенностей неотрицательные рациональные числа $p_1, \dots, p_n$, удовлетворяющие условию (1), также будут называться *весами*, а $d \neq 0$ – *степенью*.

Объясним более подробно условие хорошей определенности квазиоднородной особенности. Пусть $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ – квазиоднородная логканоническая, каноническая вне $\mathbf{0}$ особенность с весами $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ и квазиоднородной степенью d , определенная многочленом $g(x_1, \dots, x_n)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $p_1, \dots, p_n, d$ – целые числа и $(p_1, \dots, p_n) = 1$.

Рассмотрим $\mathbf{p}$ -раздутие $\psi: \mathbb{C}^n(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbb{C}^n$. Это раздутие индуцирует чисто логтерминальное раздутие $\psi|_{X(\mathbf{p})}: (X(\mathbf{p}), E) \rightarrow (X, 0)$ [4, теорема 2.13]. Положим $q_i = (p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n)$. Тогда

$$\begin{aligned} E &= (\tilde{g}(x_1, \dots, x_n) \subset \mathbb{P}(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n)) \\ &= (g(x_1^{1/q_1}, \dots, x_n^{1/q_n}) \subset \mathbb{P}(p_1 q_1 / (q_1 \dots q_n), \dots, p_n q_n / (q_1 \dots q_n))). \end{aligned}$$

Положим $q_{ij} = (\tilde{p}_1, \dots, \hat{\tilde{p}}_i, \dots, \hat{\tilde{p}}_j, \dots, \tilde{p}_n)$ при $i \neq j$. Квазиоднородную степень $\tilde{g}(x_1, \dots, x_n)$ обозначим через $\tilde{d}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 [1]. В приведенных выше обозначениях квазиоднородная особенность называется *хорошо определенной*, если выполнено одно из следующих равносильных условий:

- 1) $\text{Diff}_{E/\mathbb{P}(\mathbf{p})}(0) = 0$;
- 2) для всех $i \neq j$ имеем $q_{ij} \mid \tilde{d}$.

В противном случае особенность будет называться *не хорошо определенной*. Следует заметить, что при выборе другого вектора квазиоднородности свойство хорошей определенности может не выполняться. Для слабо исключительной и, следовательно, для исключительной особенности примитивный вектор $\mathbf{p}$ единствен [4, теорема 2.13], и поэтому понятие хорошей определенности однозначно.

Определим следующие множества индексов

$$I_i = \{j \mid 1 \leq j \leq n, j \neq i, q_{ij} \nmid \tilde{d}\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. *Имеем*

$$\text{Diff}_E(0) = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) \left(C_i \setminus \bigcup_{j \in I_i} C_{ij}\right) + \sum_{i < j, j \in I_i} \left(1 - \frac{1}{q_{ij} q_i q_j}\right) C_{ij},$$

где дивизоры C_i и C_{ij} на E задаются уравнениями $x_i = 0$ и $x_i = x_j = 0$ соответственно. Более того,

$$C'_i \stackrel{\text{def}}{=} C_i \setminus \bigcup_{j \in I_i} C_{ij} = \left\{ x_i = \left(\prod_{j \in I_i} x_j \right)^{-1} g(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0 \right\},$$

где $q_i \neq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для подсчета дифференты нужно определить компоненты $\text{Sing } X(\mathbf{p})$ коразмерности 2 в $X(\mathbf{p})$, лежащие в E . Многообразие $X(\mathbf{p})$ в аффинной карте

$$U_k = \mathbb{C}_{x_1, \dots, x_n}^n / \mathbb{Z}_{p_k}(-p_1, \dots, -p_{k-1}, 1, -p_{k+1}, \dots, -p_n)$$

для $\mathbf{p}$ -раздутия задается многочленом $g' = g(x_1, \dots, x_{k-1}, 1, x_{k+1}, \dots, x_n) = 0$. Очевидно, что особенность, задаваемая этим многочленом, имеет коразмерность не менее 3 в $\mathbb{C}^{n-1} \cong \{x_k = 0\}$ и, следовательно, не влияет на $\text{Diff}_E(0)$ (напомним, что $E \cap U_k$ задается многочленом g' в $\{x_k = 0\} / \mathbb{Z}_{p_k}$). Отсюда $\text{Diff}_E(0)$ возникает только из-за действия циклической группы.

Поскольку $q_{ij}q_iq_j = (p_1, \dots, \hat{p}_i, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_n)$, то остается показать следующее: если $q_{ij} \nmid \tilde{d}$, то $\{x_i = x_j = 0\}$ задает дивизор на E . Действительно, это условие означает, что x_i или x_j делит любой моном из g .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.5. Если $q_{ij} \nmid \tilde{d}$, то $g = x_i g_1(x_1, \dots, x_n) + x_j g_2(x_1, \dots, x_n)$. Более того, если $q_i > 1$ и $q_{ij} \nmid \tilde{d}$, то $q_j = 1$. Действительно, если $q_j > 1$, то $g = x_i^{q_i} g_1(x_1, \dots, x_n) + x_j^{q_j} g_2(x_1, \dots, x_n)$, т. е. g задает ненормальную особенность.

Следующее предложение доказывается так же, как и предыдущее предложение 1.4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. *Имеем*

$$\text{Diff}_{E/\mathbb{P}(\mathbf{p})}(0) = \sum_{i < j, j \in I_i} \left(1 - \frac{1}{q_{ij}}\right) C_{ij}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.7 (ср. [2, предложение 2.10]). Пусть $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ – квази-однородная строго логканоническая, каноническая вне $\mathbf{0}$ особенность с весом $\mathbf{p}$. Тогда она хорошо определена (по теореме 2.13 работы [4] она является исключительной).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим чисто логтерминальное раздутие

$$\psi: (X(\mathbf{p}), E) \rightarrow (X, 0).$$

Поскольку $K_{X(\mathbf{p})} + E = \psi^* K_X$ – дивизор Картье, то $\text{Diff}_E(0) = 0$. Отсюда по предложениям 1.4 и 1.6 получаем $\text{Diff}_{E/\mathbb{P}(\mathbf{p})}(0) = 0$. В частности, при $n = 4$ исключительный дивизор E является КЗ-поверхностью с дювалевскими особенностями [1, лемма 1.4.1].

ПРИМЕР 1.8. Пусть $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ – слабо исключительная дювалевская особенность, определенная многочленом h . Тогда h – один из следующих многочленов:

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 x_3 + x_3^{n-1}, \quad n \geq 4 \text{ (тип } \mathbb{D}_n); \\ & x_1^2 + x_2^3 + x_3^4 \text{ (тип } \mathbb{E}_6); \\ & x_1^2 + x_2^3 + x_3^3 x_2 \text{ (тип } \mathbb{E}_7); \\ & x_1^2 + x_2^3 + x_3^5 \text{ (тип } \mathbb{E}_8) \text{ (см. [8, пример 4.7]).} \end{aligned}$$

Рассмотрим $\mathbf{p}$ -раздутия, соответствующее их весам квазиоднородности. Тогда особенности $\mathbb{D}_n$ при $n \geq 5$ и $\mathbb{E}_7$ не хорошо определены. Их строение приведено в следующей таблице:

Особенность	$E \cong \mathbb{P}^1$	$\text{Diff}_{E/\mathbb{P}(\mathbf{p})}(0)$	$\text{Diff}_E(0)$
$D_{2n}, n \geq 3$	$x_1 + x_2^2 x_3 + x_3^{2n-1}$ $\subset \mathbb{P}(2n-1, n-1, 1)$	$\frac{n-2}{n-1} P_3$	$\frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2$ $+ \frac{2n-3}{2n-2} P_3$
$D_{2n+1}, n \geq 2$	$x_1^2 + x_2 x_3 + x_3^{2n}$ $\subset \mathbb{P}(n, 2n-1, 1)$	$\frac{2n-2}{2n-1} P_3$	$\frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2$ $+ \frac{2n-2}{2n-1} P_3$
E_7	$x_1 + x_2^3 + x_3 x_2 \subset \mathbb{P}(3, 1, 2)$	$\frac{1}{2} P_3$	$\frac{1}{2} P_1 + \frac{2}{3} P_2$ $+ \frac{3}{4} P_3$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Определим $\mathbb{Q}$ -дивизор $\widehat{D} = \sum_{i=1}^n (1 - \frac{1}{q_i}) \{x_i = 0\}$ на $\mathbb{P}(\mathbf{p})$ и $\mathbb{Q}$ -дивизор $D = \sum_{i=1}^n (1 - \frac{1}{q_i}) C_i$ на E . Напомним, что если $(X, 0)$ – хорошо определенная особенность, то $D = \widehat{D}|_E = \text{Diff}_E(0)$ (ср. [4, определение 3.12]).

В общем случае, тем не менее, имеет место следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.10. Имеем $K_E + \text{Diff}_E(0) = (K_{\mathbb{P}(\mathbf{p})} + E + \widehat{D})|_E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 1.6, замечанию 1.5 и в силу [9, следствие 3.10]

$$\begin{aligned}
(K_{\mathbb{P}(\mathbf{p})} + E + \widehat{D})|_E &= K_E + \text{Diff}_{E/\mathbb{P}(\mathbf{p})}(\widehat{D}) \\
&= K_E + \sum_{i < j, j \in I_i} \left[\left(1 - \frac{1}{q_{ij}}\right) C_{ij} + \frac{1}{q_{ij}} \left(1 - \frac{1}{q_i q_j}\right) C_{ij} \right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{q_i}\right) \left(C_i \setminus \bigcup_{j \in I_i} C_{ij}\right).
\end{aligned}$$

По предложению 1.4 последнее выражение равно $K_E + \text{Diff}_E(0)$.

ПРИМЕР 1.11. Вернемся к рассмотрению примера 1.8. Тогда в соответствии с предложением 1.10 получаем следующую таблицу:

Особенность	D	$\text{Diff}_E(0) = \text{Diff}_{E/\mathbb{P}(\mathbf{p})}(\widehat{D})$
$D_{2n}, n \geq 3$	$\frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2 + \frac{1}{2} P_3$	$\frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2$ $+ \left(\frac{n-2}{n-1} + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{2}\right) P_3$
$D_{2n+1}, n \geq 2$	$\frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2$	$\frac{1}{2} P_1 + \frac{1}{2} P_2$ $+ \left(\frac{2n-2}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} \cdot 0\right) P_3$
E_7	$\frac{1}{2} P_1 + \frac{2}{3} P_2 + \frac{1}{2} P_3$	$\frac{1}{2} P_1 + \frac{2}{3} P_2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) P_3$

§ 2. Исследование исключительности трехмерных не хорошо определенных особенностей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Квазиоднородная гиперповерхностная особенность, заданная f , принадлежит классу $\mathcal{M}_i$, если максимальная компактная грань многогранника Ньютона $\Gamma_+(f)$ имеет размерность i .

Следующая теорема доказывается перебором всех случаев, выполненным в работе [4].

ТЕОРЕМА 2.2. Все не хорошо определенные трехмерные исключительные канонические квазиоднородные особенности получаются вращением линейки Ньютона через следующие части типа $\mathcal{M}_2$:

- 1) $t^2 + z^3 + x^m$, где $x^m = zx^5, zx^5y, zx^7, zx^6y, zx^5y^2$;
- 2) $t^2 + z^4 + x^m$, где $x^m = zx^4, zx^5, zx^4y$;
- 3) все части типа $\Upsilon_2^{(2)}$ (они имеют уравнение вида $t^2 + z^3x + h(z, x, y)$);
- 4) $t^2 + z^3y + x^m$, где $x^m = x^7y, x^8y, zx^5, zx^6, zx^5y$;
- 5) $t^2 + z^5 + zx^5$; $t^2 + z^4x + x^m$, где $x^m = x^6, x^5y, x^4y^2, zx^5, zx^4y, zx^3y^2$; $t^2 + z^4y + x^m$, где $x^m = x^5y, zx^5, zx^4y$; $t^2 + z^3x^2 + x^m$, где $x^m = zx^5, zx^4y, zx^3y^2$; $t^2 + z^3y^2 + zx^5$; $t^2 + z^3xy + x^m$, где $x^m = x^6, x^5y, x^7, x^6y, x^5y^2, zx^5, zx^4y$; $t^2 + z^5 + zx^3y$; $t^2 + z^4x + zx^3y$; $t^2 + z^4x + x^4y$; $t^2 + z^3x^2 + zx^3y$;
- 6) $t^3 + z^2xy + x^5$; $t^3 + z^2xy + x^4y$; $t^3 + z^4 + zx^2y$; $t^3 + z^4 + tx^3$; $t^3 + z^3x + x^m$, где $x^m = zx^2y, x^3y, tx^3, tx^2y$; $t^3 + z^3y + tx^3$; $t^3 + tz^3 + x^m$, где $x^m = z^2x^2, zx^3, zx^2y$; $t^3 + tz^2x + zx^2y$; $t^3 + tz^2x + x^2y^2$; $g_3(t, z) + zx^3$, где g_3 – бинарная форма степени 3; $t^3 + z^2x + x^m$, где $x^m = x^4, x^5, x^4y, x^6 + tx^4, x^5y, x^4y^2, x^7, x^6y, x^5y^2, x^4y^3, x^8, x^7y, x^6y^2, x^5y^3, x^4y^4, tx^3, tx^3y, tx^5, tx^4y, tx^3y^2$; $t^3 + z^2y + x^7y$; $t^3 + z^2y + tx^5$;
- 7) $t^2z + g_4(z, x)$, где g_4 – бинарная форма степени 4; $t^2z + z^4 + x^m$, где $x^m = x^3y, x^5, x^4y, x^3y^2, tx^3, tx^2y$; $t^2z + z^3x + x^m$, где $x^m = x^3y, x^5, x^4y, x^3y^2, tx^3, tx^2y$; $t^2z + z^3y + x^m$, где $x^m = x^5, x^4y, zx^3, z^2x^2, tx^3$; $t^2z + z^2x^2 + x^m$, где $x^m = x^5, x^4y, x^3y^2, tx^2y$; $t^2z + z^2xy + x^5$; $t^2z + z^2xy + x^4y$; $t^2z + z^2x + x^m$, где $x^m = x^4, zx^3 + x^5, x^4y, x^6, x^5y, x^4y^2, tx^3, tx^4, tx^3y$; $t^2z + z^2y + x^m$, где $x^m = x^5y, zx^3, tx^4$;
- 8) $t^2x + z^4 + x^m$, где $x^m = x^3y, x^5, x^4y, zx^2y, zx^4, zx^3y, zx^2y^2$; $t^2x + z^3x + x^m$, где $x^m = x^2y^2, x^5, x^4y, x^3y^2, x^2y^3, x^6, x^5y, x^4y^2, x^3y^3, x^2y^4, zx^2y, zx^4, zx^3y, zx^2y^2$; $t^2x + z^3y + x^m$, где $x^m = x^5, x^4y, x^6, x^5y, x^4y^2, zx^4, zx^3y, z^2x^2$;
- 9) $t^2y + z^4 + zx^4$; $t^2y + z^3x + x^m$, где $x^m = x^5, x^6, x^5y, zx^4, tx^3$.

При исследовании исключительности особенностей удобно пользоваться предложением 3.13 и следствием 3.14 работы [4]. Следствие 3.15 [4] обобщается в следующем предложении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть $(X, 0) \subset (\mathbb{C}_{x_1, \dots, x_4}^4, 0)$ – трехмерная квазиоднородная логканоническая особенность с весом $\mathbf{p}$. Предположим, что для любого гиперплоского сечения H пара (X, H) имеет не логканонические особенности. Пусть $D = \sum_i d_i D_i$ (см. определение 1.9). Если $d_k \geq 6/7$ для некоторого k , то особенность является исключительной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что особенность $(X, 0)$ неисклужительна. Пусть $H_X = \{x_k = 0\}|_X$ – гиперплоское сечение и $H_{X(\mathbf{p})}$ – собственный прообраз H_X в $X(\mathbf{p})$. Тогда

$$K_{X(\mathbf{p})} + E + H_{X(\mathbf{p})} = \psi^*(K_X + H_X) + aE.$$

Пусть $C_k = \sum_i C_{ki}$, где C_{ki} – неприводимые кривые (см. предложение 1.4). Имеем

$$\text{Diff}_E(0) = \sum_i d_{ki} C_{ki} + \Xi.$$

Коэффициенты $d_{ki} \geq 6/7$ для всех i , так как $d_{ki} = \frac{m_i-1}{m_i} + \frac{1}{m_i} d_k \geq d_k$ [9, следствие 3.10]. В силу [4, предложение 3.14] существует 1-, 2-, 3-, 4- или 6-дополнение D^+ . По определению дополнения $D^+ \geq \sum_i C_{ki} + \Xi$, поэтому $-(K_E + \sum_i C_{ki} + \Xi)$ – численно эффективный, логканонический дивизор. Поскольку

$$\text{Diff}_E(H_{X(\mathbf{p})}) = \text{Diff}_{E/\mathbb{P}(\mathbf{p})}(\widehat{D} + \{x_k = 0\}),$$

где $\{x_k = 0\}$ – соответствующий дивизор в $\mathbb{P}(\mathbf{p})$, то

$$\text{Diff}_E(H_{X(\mathbf{p})}) = \sum_i C_{ki} + \Xi.$$

Отсюда $a \geq 0$ и пара (X, H_X) логканонична. Противоречие.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Предложение 2.3, гипотетически, остается верным в любой размерности (см. [4, замечание 3.16]). В двумерном случае требуется, чтобы $d_k \geq 2/3$ для некоторого k .

ПРИМЕР 2.5. В предложении 2.3 нельзя заменить D на $\text{Diff}_E(0)$. Проиллюстрируем это на двух примерах.

1. Пусть $(X, 0) \subset (\mathbb{C}^3, 0)$ – дювалевская особенность типа $\mathbb{D}_n$, заданная многочленом $x_1^2 + x_2^2 x_3 + x_3^{n-1}$, где $n \geq 4$. Для любого гиперплоского сечения H пара (X, H) не логканонична. При $n \geq 5$ один из коэффициентов $\text{Diff}_E(0)$ больше или равен $2/3$, а все коэффициенты D равны $1/2$. Эта особенность является неисклужительной по определению, так как $K_X + \{x_1 = x_3 = 0\} \sim_{\mathbb{Q}} 0$ дает 2-дополнение (см. также пример 1.8 из [4]).

2. Пусть $(X, 0) \subset (\mathbb{C}_{t,z,x,y}^4, 0)$ – каноническая особенность, заданная многочленом $t^3 + z^2 x + x^4 + xy^5$. Для любого гиперплоского сечения H пара (X, H) не логканонична. Вдоль кривой $C = \{t = x = z^2 + y^5 = 0\} = \text{Sing } X$ многообразие X имеет cA_2 -особенность (вне 0). Дивизор $T = \{t = x = 0\}$ на X является $\mathbb{Q}$ -картье, так как $3T \sim \{x = 0\}$. Поэтому дивизор $(K_X + T)|_T = K_{\mathbb{C}_{z,y}^2} + \frac{2}{3}C$ логтерминален по Кавамате. Отсюда $(X, 0)$ – не слабо исклужительная особенность [8, следствие 4.6].

Теперь рассмотрим $(40, 45, 30, 18)$ -раздутие $\mathbb{C}^4$. Оно индуцирует чисто логтерминальное раздутие $(X, 0)$. Тогда

$$\begin{aligned} (E, \text{Diff}_E(0)) &= \left(t + zx + x^4 + xy \subset \mathbb{P}(4, 3, 1, 3), \frac{2}{3}(\{t=0\} \setminus \{t=x=0\}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\{z=0\} + \frac{4}{5}\{y=0\} + \frac{8}{9}\{t=x=0\} \right) \\ &= \left(\mathbb{P}^2, \frac{2}{3}l_1 + \frac{1}{2}l_2 + \frac{4}{5}l_3 + \frac{8}{9}l_4 \right), \end{aligned}$$

где l_i – прямые в общем положении. Дивизор $K_{\mathbb{P}^2} + \frac{2}{3}l_1 + \frac{1}{2}l_2 + \frac{5}{6}l_3 + l_4 \sim_{\mathbb{Q}} 0$ является не логтерминальным по Кавамате 6-дополнением минимального индекса. Поскольку дивизор $K_{\mathbb{P}^2} + \text{Diff}_E(0) + \frac{1}{9}l_4$ является антиобильным и не логтерминальным по Кавамате, то по критерию [3, теорема 2.1] $(X, 0)$ – не слабо исключительная особенность. В этом примере все коэффициенты D не превосходят $4/5$.

Следующий пример интересно сравнить с предыдущим примером 2.5, п. 2.

ПРИМЕР 2.6. Пусть $(X, 0) \subset (\mathbb{C}_{t,z,x,y}^4, 0)$ – каноническая особенность, заданная многочленом $t^3 + z^2x + tx^3 + ty^5$. Вдоль кривой $C = \{t = z = x^3 + y^5 = 0\} = \text{Sing } X$ многообразие X имеет sA_1 -особенность (вне 0). Рассмотрим дивизор $T = \{t = z = 0\}$ на X . Если бы T был $\mathbb{Q}$ -картье дивизором, то дивизор $(K_X + T)|_T = K_{\mathbb{C}_{x,y}^2} + \frac{1}{2}C$ был логтерминальным по Кавамате и, следовательно, $(X, 0)$ была не слабо исключительной особенностью. Покажем, что T не $\mathbb{Q}$ -картье дивизор, а $(X, 0)$ – исключительная особенность.

Рассмотрим $\mathbf{p}$ -раздутие $\mathbb{C}^4$, где $\mathbf{p} = (30, 35, 20, 12)$. Оно индуцирует чисто логтерминальное раздутие $\psi: (X(\mathbf{p}), E) \rightarrow (X, 0)$. Тогда

$$\begin{aligned} (E, \text{Diff}_E(0)) &= \left(t^3 + zx + tx^3 + ty \subset \mathbb{P}(3, 7, 2, 6), \frac{1}{2}\{z = t^2 + x^3 + y = 0\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4}\{t = z = 0\} + \frac{4}{5}\{y = 0\} = \frac{1}{2}\Delta + \frac{3}{4}\Gamma_2 + \frac{4}{5}L \right). \end{aligned}$$

На поверхности E имеем следующее расположение ее особенностей и этих кривых:

Предположим, что T – $\mathbb{Q}$ -картье дивизор. Тогда

$$K_{X(\mathbf{p})} + E + T_Y = \psi^*(K_X + T) + aE$$

– антиобильный дивизор над X , так как $a > 0$. Отсюда $K_E + \text{Diff}_E(T_Y) = K_E + \frac{1}{2}\Delta + \Gamma_2 + \frac{4}{5}L$ – антиобильный дивизор. Это неверно, поскольку

$$\begin{aligned} (K_E + \text{Diff}_E(T_Y)) \cdot \Delta &= \left(K_E + \frac{1}{2}\Delta + \frac{3}{4}\Gamma_2 + \frac{11}{12}L \right) \cdot \Delta + \left(\frac{1}{4}\Gamma_2 + \left(\frac{4}{5} - \frac{11}{12} \right)L \right) \cdot \Delta \\ &= \left(K_{\mathbb{P}(\mathbf{p})} + E + \frac{1}{2}\{z=0\} + \frac{11}{12}\{y=0\} \right) \cdot \Delta + \frac{1}{4} - \frac{7}{60} \\ &= 0 + \frac{1}{4} - \frac{7}{60} > 0. \end{aligned}$$

Здесь $\{z=0\}$ и $\{y=0\}$ обозначают соответствующие дивизоры на $\mathbb{P}(\mathbf{p})$.

Дивизор $K_E + \text{Diff}_{E/\mathbb{P}(\mathbf{p})}(\frac{3}{5}\{z=0\} + \frac{4}{5}\{y=0\}) = K_E + \frac{3}{5}\Delta + \frac{4}{5}\Gamma_2 + \frac{4}{5}L$ дает 5-дополнение минимального индекса. Легко видеть, что единственное 1-, 2-, 3-, 4- или 6-дополнение – это 6-дополнение

$$\begin{aligned} K_E + \text{Diff}_{E/\mathbb{P}(\mathbf{p})} \left(\frac{1}{6}\{t=0\} + \frac{1}{2}\{z=0\} + \frac{5}{6}\{y=0\} \right) \\ = K_E + \frac{1}{2}\Delta + \frac{5}{6}\Gamma_2 + \frac{5}{6}L + \frac{1}{6}\{t=x=0\} \sim_{\mathbb{Q}} 0. \end{aligned}$$

Понятно, что этот дивизор логтерминален по Кавамате. Поэтому $(X, 0)$ является исключительной особенностью.

Приведем еще один пример, показывающий процесс исследования исключительности не хорошо определенных особенностей.

ПРИМЕР 2.7. Пусть $(X, 0) \subset (\mathbb{C}_{t,z,x,y}^4, 0)$ – каноническая особенность, заданная многочленом

$$f = t^2x + z^3x + zx^2y + atz^2y + bz^2y^3 + cxy^4.$$

Рассмотрим $\mathbf{p}$ -раздутие $\mathbb{C}^4$, где $\mathbf{p} = (6, 4, 5, 3)$. Тогда

$$(E, \text{Diff}_E(0)) = \left(f \subset \mathbb{P}(6, 4, 5, 3), \frac{2}{3}\Delta_3 + \frac{1}{2}\Upsilon_4 \right),$$

где $\Delta_3 = \{z=x=0\}$ и $\Upsilon_4 = \{x=y=0\}$. Докажем, что при $c=0$ (тогда $b \neq 0$) дивизор

$$\left(K_{\mathbb{P}(\mathbf{p})} + E + \frac{1}{4}\{z=0\} \right) \Big|_E = K_E + \frac{3}{4}\Delta_3 + \frac{1}{2}\Upsilon_4 + \frac{1}{2}\{t=z=0\}$$

является не логтерминальным по Кавамате 4-дополнением, т.е. $(X, 0)$ – не исключительная особенность. Поскольку при накрытиях свойства сохраняются, то достаточно показать, что пара $(Z, \frac{1}{4}T)$ логканонична, но не логтерминальна по Кавамате, где $Z = \{t^2x + z^3x + zx^2 + atz^2 + z^2 = 0\} \subset \mathbb{C}_{t,z,x}^3$ и $T = \{z=0\}|_Z$. Отметим, что $(Z, 0)$ – особенность типа $\mathbb{D}_5$. Раздутие $\mathbb{C}^3$ с весами $(3, 4, 2)$ индуцирует раздутие $\psi: (\tilde{Z}, C) \rightarrow Z$, причем $K_{\tilde{Z}} + C + \frac{1}{4}T_{\tilde{Z}} = \psi^*(K_Z + \frac{1}{4}T)$. Исключительный дивизор C – это не хорошо определенная гиперповерхность $tx + zx^2 + z^2 \subset \mathbb{P}(3, 2, 1)$. Дивизор

$$K_C + \text{Diff}_C \left(\frac{1}{4}T_{\tilde{Z}} \right) = K_C + \frac{1}{2}P_1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)P_2 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \right)P_3$$

логтерминален по Кавамате. Теперь из обращения присоединения получаем требуемое. При $c \neq 0$ таким же способом доказываем, что $(X, 0)$ – исключительная особенность.

Список литературы

1. *Iano-Fletcher A. R.* Working with weighted complete intersections // Explicit birational geometry of 3-folds. London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 281. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000. P. 73–173.
2. *Ishii S.* The quotient of log-canonical singularities by finite groups // Advanced Studies in Pure Math. 2000. V. 29. P. 135–161.
3. *Кудрявцев С. А.* О чисто логтерминальных раздутиях // Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 6. С. 892–899.
4. *Кудрявцев С. А.* Классификация трехмерных исключительных логканонических гиперповерхностных особенностей. I // Изв. РАН. Сер. матем. 2002. Т. 66. № 5. С. 83–170.
5. *Kudryavtsev S. A.* Classification of three-dimensional exceptional log canonical hypersurface singularities. I. e-print math.AG/0201025.
6. *Kudryavtsev S. A.* Classification of three-dimensional exceptional log canonical hypersurface singularities. II. e-print math.AG/0202105.
7. *Oda T.* Convex bodies and algebraic geometry. An introduction to the theory of toric varieties. Berlin–Heidelberg–New York–London–Paris–Tokyo: Springer-Verlag, 1988.
8. *Prokhorov Yu. G.* Blow-ups of canonical singularities // Algebra. Proc. Internat. Conf. on the Occasion of the 90th birthday of A. G. Kurosh. Moscow, May 25–30, 1998 / Ed. Yu. Baturin. Berlin: Walter de Gruyter, 2000. P. 301–317.
9. *Шокуров В. В.* Трехмерные логперестройки // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 1. С. 105–203.

МГУ им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра высшей алгебры
E-mail: kudryav@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
01.07.2003