Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Прохоров, О полустабильных стягиваниях Мори, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 2, 147–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/im478>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 17:12:38

О полустабильных стягиваниях Мори

Изучены стягивания Мори–Фано, имеющие не более чем одномерные слои и удовлетворяющие условию полустабильности. В частности, приведено новое доказательство существования полустабильных трехмерных флипов.

Библиография: 16 наименований.

§ 1. Введение

Используем стандартные определения и обозначения теории минимальных моделей (см., например, [10] и [8]).

Пусть X – нормальное трехмерное алгебраическое многообразие над $\mathbb{C}$ (или трехмерное нормальное комплексное пространство), имеющее лишь терминальные особенности. Собственный сюръективный морфизм $f: X \rightarrow Z$ называется *стягиванием Фано–Мори*, если $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Z$ и антиканонический дивизор $-K_X$ f -обилен. Нас интересует *локальная структура* таких стягиваний. Таким образом, будем предполагать, что Z не является точкой, а Z и X – достаточно малые (алгебраические или аналитические) окрестности некоторой точки $o \in Z$ и слоя $f^{-1}(o)$ соответственно. Здесь мы не предполагаем, что f является *экстремальным стягиванием Мори* (т.е. многообразие X $\mathbb{Q}$ -факториально и $\rho(X/Z) = 1$). Если размерность слоев морфизма f (вблизи $f^{-1}(o)$) не превосходит 1, то можно выделить следующие случаи:

- 1) $\dim Z = 2$, тогда f называется *расслоением Мори на коники*;
- 2) $\dim Z = 3$ и f стягивает дивизор на кривую, тогда f называется *дивизориальным стягиванием типа 2-1*;
- 3) $\dim Z = 3$ и исключительное множество морфизма f одномерно, тогда f называется *флиповым стягиванием*.

В настоящей статье мы рассмотрим *полустабильные* стягивания Фано–Мори, которые появляются в полустабильной программе минимальных моделей (см. [16], [4], [15], [5], [8] и ссылки в этих работах). Однако приведенное ниже определение немного отличается от определений, упомянутых выше.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Стягивание Фано–Мори $f: X \rightarrow Z \ni o$ называется *q -полустабильным*, если существует эффективный дивизор Картье $o \in T \subset Z$ такой, что пара (X, f^*T) дивизориально логтерминальна.

Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ (№ 02-01-00441), INTAS-OPEN-2000-269, НШ-489.2003.1 и НШ-1910.2003.1.

Очевидно, что в определении можно заменить T на общее гиперплоское сечение, проходящее через o . В частности, в случае $\dim Z = 3$ можно предполагать, что многообразие T неприводимо, нормально и пара (X, f^*T) чисто логтерминальна.

Следующий результат был инспирирован гипотезой М. Рида “об общем слоне” и является аргументом в ее пользу.

ТЕОРЕМА 1.2 (ср. [3, теорема 0.4.5], [7, теорема 2.2], [15, следствие 4.9]). Пусть $f: X \rightarrow Z \ni o$ – q -полустабильное стягивание Фано–Мори такое, что размерность слоев не превосходит 1, и пусть T – общее гиперплоское сечение, проходящее через o . Тогда дивизор $K_X + f^*T$ является 1-дополняемым [12], т. е. существует эффективный целый дивизор Вейля F такой, что логдивизор $K_X + f^*T + F$ логканоничен и линейно тривиален над Z .

Более того, дивизор $K_X + F$ каноничен и линейно тривиален, поверхность F нормальна, имеет лишь дювалевские особенности типа A_n . Пусть $F \rightarrow \bar{F} \rightarrow f(F)$ – разложение Штейна. Тогда это верно также и для $\bar{F}$.

Используя эту теорему, в §5 мы приведем новое доказательство существования полустабильных флипов.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $f: X \rightarrow Z$ – q -полустабильное трехмерное флиповое стягивание. Предположим, что f экстремально (т. е. многообразие X $\mathbb{Q}$ -факториально и $\rho(X/Z) = 1$). Тогда флип стягивания f существует.

В доказательстве теоремы 1.3 используются теорема 1.2, метод двойного накрытия Каваматы [4] и утверждение о существовании некоторых канонических флопов.

Изучение полустабильных вырождений поверхностей стимулировало рассмотрение полустабильной программы минимальных моделей. Более точно, пусть $h: \mathcal{X} \rightarrow \Delta$ – проективный сюръективный морфизм из неособого трехмерного многообразия на неособую кривую такой, что общий слой является неособой поверхностью, а специальные слои – приведенными дивизорами с простыми нормальными пересечениями. Тогда расслоенное пространство $\mathcal{X}/\Delta$ удовлетворяет следующему свойству:

(*) пара $(\mathcal{X}, h^*P)$ дивизориально логтерминальна для любой точки $P \in \Delta$.

Для того чтобы получить минимальную или относительную модель Фано, применим K -программу минимальных моделей над базой Δ . Каждый шаг K -программы минимальных моделей является в то же время шагом $(K + h^*P)$ -программы минимальных моделей. В частности, свойство (*) сохраняется, и все стягивания и флипы q -полустабильны. Это согласуется, более или менее, с определениями, приведенными в [16], [4], [1].

Полустабильность, определенная Шокуровым в [15] (ср. [11]), также близка к полустабильности, введенной в определении 1.1, согласно [15, лемма 1.4]. Однако конструкция Шокурова индуктивна и задается в терминах некоторого (необязательно проективного) разрешения.

Дж. Коллар и С. Мори [7, с. 541] определяли полустабильные экстремальные окрестности $f: X \rightarrow Z \ni o$ в терминах общего члена $F_Z \ni |-K_Z|$: стягивание f полустабильно, если $F_Z \ni o$ – дювалевская особенность типа A_n . По теореме 1.2

определение 1.1 влечет определение Мори–Коллара. Обратно, если $F_Z \ni o$ – дювалевская особенность типа A_n , то дивизор $K_X + F + f^*T$ логканоничен (но необязательно дивизориально логтерминален) для некоторого эффективного дивизора Картье T на Z . Таким образом, f “почти” q -полустабильно.

В применяемом методе используется теорема Каваматы–Фивега об обращении в нуль, и поэтому доказательства перестают быть верными для положительной характеристики. Случай смешанной и положительной характеристики рассматривался в [5].

Автор благодарит Киотский исследовательский институт математических наук за гостеприимство в течение визита в 2002–2003 гг. Настоящая статья основывается на материале лекции, прочитанной на семинаре по алгебраической геометрии в этом институте 17 апреля 2003 г. Автор благодарен участникам семинара за внимание и В. В. Шокурову за полезные комментарии.

§2. Особенности класса T

Пусть группа μ_n действует на $\mathbb{C}^2$ по правилу $(x, y) \rightarrow (\eta x, \eta^q y)$, где η – примитивный корень степени n из единицы и $\text{НОД}(n, q) = 1$. В этом случае будем говорить, что фактор $\mathbb{C}^2/\mu_n$ есть *особенность типа $\frac{1}{n}(1, q)$* . Минимальное разрешение особенности $\frac{1}{n}(1, q)$ может быть описано следующим образом.

Двойственный граф исключительного дивизора является цепью неособых рациональных кривых, индексы самопересечения $-b_1, \dots, -b_\varrho$ которых находятся из разложения в цепную дробь:

$$\frac{n}{q} = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\dots \frac{1}{b_\varrho}}}. \quad (2.1)$$

Для краткости будем обозначать цепную дробь из (2.1) через $[b_1, \dots, b_\varrho]$. Положим $\varrho(n/q) := \varrho$. Определим также следующие инварианты:

- (i) $\iota(n/q) = n/\text{НОД}(n, q+1)$ – индекс $\frac{1}{n}(1, q)$;
- (ii) $\beta(n/q) = \text{НОД}(n, q+1)/\iota(n/q) = \text{НОД}(n, q+1)^2/n$;
- (iii) $\gamma(n/q) = (q+1)/\text{НОД}(n, q+1)$.

По определению

$$\iota, \gamma \in \mathbb{N}, \quad \gamma \leq \iota, \quad \text{НОД}(\iota, \gamma) = 1.$$

Таким образом, имеем тройку (ι, β, γ) , которая определяет n/q :

$$n = \beta\iota^2, \quad q = \beta\iota\gamma - 1.$$

Заметим, что представление циклической факторособенности в форме $\frac{1}{n}(1, q)$ не единственно: $\frac{1}{n}(1, q')$ определяет ту же самую особенность, если и только если $q \equiv q'$ или $qq' \equiv 1 \pmod n$. Очевидно, что $\varrho(n/q) = \varrho(n/q')$. Поскольку $\text{НОД}(n, q+1) = \text{НОД}(n, q'+1)$, то мы имеем $\beta(n/q) = \beta(n/q')$ и $\iota(n/q) = \iota(n/q')$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Циклическая недовалевская факторособенность $\frac{1}{n}(1, q)$ имеет тип T (или просто является T-особенностью), если $(1+q)^2 \equiv 0 \pmod n$.

Следующий результат подтверждает справедливость определения.

ТЕОРЕМА 2.2 (см. [2, предложение 5.9], [9]). Пусть $S \ni P$ – росток двумерной факторособенности. Следующие условия эквивалентны:

- (i) особенность $S \ni P$ дювалевская или типа Т;
- (ii) особенность $S \ni P$ имеет $\mathbb{Q}$ -горнштейново однопараметрическое сглаживающее пространство деформаций;
- (iii) существуют терминальная трехмерная особенность $X \ni P$ и вложение $P \in S \subset X$ такие, что $S \subset X$ – дивизор Картье в точке P и пара (X, S) чисто логтерминальна.

Если $\frac{1}{n}(1, q)$ – Т-особенность (дювалевская особенность), то будем говорить, что n/q – Т-дробь (соответственно, дювалевская дробь) и $[b_1, \dots, b_\varrho]$ – Т-цепь (соответственно, дювалевская цепь). Таким образом, n/q является Т-дробью, если и только если $\beta(n/q) \in \mathbb{Z}$.

ЛЕММА 2.3. Пусть $qq' \equiv 1 \pmod n$. Тогда n/q является Т-дробью, если и только если $\gamma(n/q') + \gamma(n/q) = \iota(n/q)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Если $\iota(n/q) = 2$, то $\gamma(n/q) = 1$ и n/q является Т-дробью. Легко видеть, что это влечет одно из следующих равенств:

$$n/q = [4] \quad \text{или} \quad n/q = [3, 2, \dots, 2, 3]. \quad (2.2)$$

Более того, $\beta(n/q) = \varrho(n/q)$. Обратно, $\iota = 2$ для любой цепи такой, как в (2.2).

Минимальные разрешения Т-особенностей полностью описаны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5 [9]. (i) Если цепь $[b_1, \dots, b_\varrho]$ имеет тип Т, то таковы же цепи $[2, b_1, \dots, b_\varrho + 1]$ и $[b_1 + 1, \dots, b_\varrho, 2]$.

(ii) Каждая Т-цепь может быть получена применением переходов $[b_1, \dots, b_\varrho] \rightarrow [2, b_1, \dots, b_\varrho + 1]$ или $[b_1, \dots, b_\varrho] \rightarrow [b_1 + 1, \dots, b_\varrho, 2]$ к одной из цепей (2.2).

Для цепи $[b_1, \dots, b_\varrho]$ обозначим соответствующие логдискрепантности через $\alpha_1, \dots, \alpha_\varrho$.

ЛЕММА 2.6. Имеем

$$\alpha_1 = (q + 1)/n = \gamma/\iota.$$

Если n/q – Т-дробь, то $\alpha_\varrho = 1 - \gamma/\iota$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Взвешенное раздутие с весами $\frac{1}{n}(1, q)$ позволяет получить первое соотношение. Второе следует из леммы 2.3.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Цепь $[b_1, \dots, b_\varrho]$ имеет тип Т, если и только если $\alpha_1 + \alpha_\varrho = 1$.

§ 3. Случай: многообразие T приводимо

Пусть S – алгебраическая поверхность (или двумерное комплексное пространство), имеющая лишь факторособенности, и пусть $\varphi: S \rightarrow T$ – стягивание. Предположим, что T – не точка и T – достаточно малая окрестность $o \in T$. Будем называть φ логстягиванием, если дивизор $-K_S$ φ -обилен. Если, более того, любая

особенность поверхности S имеет тип T или дювалевский тип, то будем называть φ T -стягиванием.

В настоящем параграфе докажем теорему 1.2 для случая, когда многообразие T приводимо. По теореме Бертини это возможно, только если $\dim Z = 2$, т.е. f – расслоение Мори на коники. Пусть T_i – неприводимые компоненты T . Тогда любая компонента T_i является $\mathbb{Q}$ -картье дивизором и $S_i := f^*T_i$ – неприводимая нормальная поверхность [10, следствие 17.5]. Более того, согласно [8, предложения 5.61, 5.62] слой $C := f^{-1}(o)_{\text{red}}$ неприводим, T имеет две компоненты, $C = S_1 \cap S_2$ и пара (S_1, C) чисто логтерминальна. Таким образом, $f|_{S_1}: S_1 \rightarrow T_1 \ni o$ – логстягивание на кривую. В этой ситуации дивизор K_{S_1} является 1-дополняемым (см. [12, теорема 7.1.12]). Наконец, утверждение теоремы 1.2 легко вытекает из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1 (см. [12, предложение 4.4.1]). *Пусть $f: X \rightarrow Z \ni o$ – стягивание, и пусть S – приведенный дивизор на X такой, что $S \cap f^{-1}(o) \neq \emptyset$, пара (X, S) чисто логтерминальна и дивизор $-(K_X + S)$ f -численно эффективен и f -объемен. Если логдивизор $K_S + \text{Diff}_S$ является n -дополняемым, то таким же будет $K_X + S$. Здесь Diff_S – дифференциал, корректирующий член в формуле присоединения $K_S + \text{Diff}_S = (K_X + S)|_S$ (см. [10, гл. 16]).*

Начиная с этого места рассмотрим q -полустабильные стягивания Фано–Мори $f: X \rightarrow Z \ni o$ такие, что пара (X, f^*T) чисто логтерминальна (и размерность слоев не превосходит 1).

§4. Двумерные логстягивания

Пусть $\varphi: S \rightarrow T \ni o$ – логстягивание. Предположим, что S имеет по крайней мере одну недювалевскую особенность. Пусть $\mu: \tilde{S} \rightarrow S$ – минимальное разрешение, и пусть $\phi: \tilde{S} \rightarrow T$ – композиция. Рассмотрим эффективный дивизор Картье D на S такой, что $\text{Supp}(D) = \varphi^{-1}(o)$ и дивизор $-D$ φ -численно эффективен. Например, в случае $\dim T = 1$ можно положить $D = \varphi^*(o)$ (схемный слой), а в случае $\dim T = 2$ можно положить $D := \varphi^*\varphi_*H - H$, где H – очень обильный дивизор на S такой, что φ_*H – дивизор Картье.

Можно записать стандартную формулу:

$$\mu^*K_S = K_{\tilde{S}} + \Delta, \quad (4.1)$$

где Δ – эффективный исключительный дивизор, так называемый *дивизор кодискрепантностей*. Поскольку особенности S логтерминальны, то $[\Delta] = 0$. Запишем $\mu^*D = \sum_{i,j} (l_i L_i + e_j E_j)$, где E_j (соответственно, L_i) – μ -исключительные (соответственно, не μ -исключительные) компоненты и $l_i, e_j \in \mathbb{N}$. Положим $L = \sum l_i L_i$ и $E = \sum e_j E_j$. Таким образом, $D = \mu_*L$ и $\text{Supp}(\Delta) \subset \sum E_j$.

ЛЕММА 4.1. *Имеем:*

- (i) $\text{Supp}(L + E)$ – дерево неособых рациональных кривых;
- (ii) любая компонента L является (-1) -кривой;
- (iii) $\Delta \cdot L_i < 1$ для всех i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) очевидно, так как морфизм ϕ является плоским в случае $\dim T = 1$ и так как $Z \ni o$ – рациональная особенность в случае $\dim T = 2$. Из формулы (4.1) имеем

$$0 > \mu^* K_S \cdot L_i = K_{\tilde{S}} \cdot L_i + \Delta \cdot L_i = \Delta \cdot L_i - 2 - L_i^2.$$

Поскольку $L_i^2 < 0$ и $\Delta \cdot L_i \geq 0$, то $L_i^2 = K_{\tilde{S}} \cdot L_i = -1$ и $\Delta \cdot L_i < 1$. Утверждения (ii) и (iii) доказаны.

Для того чтобы описать логстягивания, будем пользоваться терминологией взвешенных графов. *Взвешенным графом* Γ называется граф, каждой вершине которого приписан вес $b_i \geq 1$. Каждому взвешенному графу $\Gamma = \{v_1, \dots, v_\varrho\}$ сопоставим *квадратичную форму* следующим образом. Положим $v_i^2 = -b_i$, и пусть $v_i \cdot v_j$ для $i \neq j$ будет равно числу ребер, соединяющих v_i и v_j . Взвешенный граф $\Gamma = \{v_1, \dots, v_\varrho\}$ является *эллиптическим* (соответственно, *параболическим*), если ассоциированная квадратичная форма имеет сигнатуру $(0, \varrho)$ (соответственно, $(0, \varrho - 1)$). Вершины с $b_i = 1$ будут называться (и изображаться на рисунках) *черными*, а вершины с $b_i \geq 2$ – *белыми*.

Раздутие вершины v_i – это следующее преобразование: вес вершины v_i увеличивается на 1, т.е. $b'_i = b_i + 1$, и к графу добавляется новая черная вершина, соединенная ребром с вершиной v'_i . Аналогично, *раздутие ребра* $\{v_i, v_j\}$ – следующее преобразование: вес вершин v_i и v_j увеличивается на 1, число ребер, соединяющих v_i и v_j , уменьшается на 1 и к графу добавляется новая черная вершина, соединенная ребрами с вершинами v'_i и v'_j . Обратные преобразования называются *стягиваниями*. Легко видеть, как определенные выше преобразования соотносятся с раздутиями и стягиваниями кривых на неособой поверхности.

Обозначим через $[a_1, \dots, a_r]$ (взвешенную) цепь, а через $[p \mid a_1, \dots, a_r \mid b_1, \dots, b_s \mid c_1, \dots, c_l]$ – вилку Γ , имеющую центральную вершину v_0 веса p такую, что $\Gamma \setminus \{v_0\}$ является несвязным объединением цепей $[a_1, \dots, a_r]$, $[b_1, \dots, b_s]$ и $[c_1, \dots, c_l]$, где вершины, соответствующие a_1, b_1 и c_1 , соединены с v_0 .

Теперь обозначим через $\Gamma(\varphi)$ двойственный граф слоя $\phi^{-1}(o)$. По лемме 4.1 граф $\Gamma(\varphi)$ – дерево. Более того, граф $\Gamma(\varphi)$ является параболическим, если $\dim T = 1$, и эллиптическим, если $\dim T = 2$.

ЛЕММА 4.2. Вилка $[1 \mid a \mid b \mid c]$ не является эллиптическим графом для $a, b, c \geq 1$. Следующие графы являются параболическими (но не эллиптическими):

- (i) цепи $[1, 1]$, $[1, 2, \dots, 2, 1]$, $[2, 1, 2]$;
- (ii) вилка $[2 \mid 2 \mid 2 \mid 2, \dots, 2, 1]$.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Пусть D_i – неприводимые компоненты дивизора D .

Тогда:

- (i) точки пересечения $D_i \cap D_j$ особы для поверхности S и не являются дювалевскими;
- (ii) имеется не более двух особых точек поверхности S на каждой компоненте D_i ;
- (iii) пара (S, D_i) чисто логтерминальна вблизи любой дювалевской точки;
- (iv) поверхность S не имеет дювалевских особенностей типа D_n и E_n .

ЛЕММА 4.4. Пусть $\varphi: S \rightarrow T \ni o$ – Т-стягивание, и пусть C – компонента D . Предположим, что C содержит две особые точки поверхности S и эти точки имеют тип Т (таким образом, они недювалевские). Тогда пара (S, C) чисто логтерминальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $C \neq \text{Supp}(D)$, то кривая C стягиваема над T , т.е. существует разложение $S \rightarrow T' \rightarrow T$ такое, что $\varphi': S \rightarrow T'$ бирационально и C совпадает с φ' -исключительным дивизором. Заменяя T на T' , можно считать, что $C = \text{Supp}(D)$.

Пусть P_1, P_2 – особые точки. Предположим, что пара (S, C) не является чисто логтерминальной вблизи P_1 . Мы утверждаем, что тогда пара (S, C) чисто логтерминальна вблизи P_2 . Действительно, рассмотрим два общих гиперплоских сечения H_1 и H_2 , проходящих через P_1 и P_2 соответственно. Для некоторых $0 < \varepsilon' \ll \varepsilon \ll 1$ дивизор $-(K_S + (1 - \varepsilon')C + \varepsilon H_1 + \varepsilon H_2)$ φ -обилен и пара $(S, (1 - \varepsilon')C + \varepsilon H_1 + \varepsilon H_2)$ не является логканоничной в P_1 и P_2 . Это противоречит лемме о связности [14, лемма 5.7].

Таким образом, пара (S, C) чисто логтерминальна вблизи P_2 и граф $\Gamma(\varphi)$ имеет вид

$$\begin{array}{c} b_1 \circ \dots \circ b_k \circ \dots \circ b_\varrho \\ | \\ \bullet \circ c_1 \dots \circ c_l \end{array} \quad (4.2)$$

где $[b_1, \dots, b_\varrho]$ и $[c_1, \dots, c_l]$ – Т-цепи (т.е. $\Gamma(\varphi) = [b_k \mid b_{k-1}, \dots, b_1 \mid b_{k+1}, \dots, b_\varrho \mid 1, c_1, \dots, c_l]$). Пусть α'_1 и α_k – логдискрепантности вершин, соответствующих c_1 и b_k . По лемме 4.1 имеем $\alpha'_1 + \alpha_k > 1$. Пусть

$$\Gamma(\varphi) = \Gamma_0 \rightarrow \Gamma_1 \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_r = \Gamma'$$

– последовательность стягиваний черных вершин. Если $b_k = 2$, то граф Γ_1 содержит вилку $[1 \mid b_{k-1} \mid b_{k+1} \mid c_1 - 1]$. Это противоречит лемме 4.2. Следовательно, $b_k \geq 3$. Используя те же аргументы, получим, что в каждом графе Γ_i центральная вершина (соответствующая b_k) не является черной. Поскольку $[b_1, \dots, b_\varrho]$ – цепь типа Т, то можно считать, что $b_\varrho = 2$ и $b_1 \geq 3$. Таким образом,

$$\Gamma' = [b_k - s \mid b_{k-1}, \dots, b_1 \mid b_{k+1}, \dots, b_\varrho \mid c_s - 1, c_{s+1}, \dots, c_l],$$

где $s \geq 1$, $b_k - s \geq 2$ и $c_s - 1 \geq 2$. Очевидно, что граф Γ' эллиптичен и логтерминален (поскольку дивизор $-(K_{\tilde{S}} + \Delta)$ численно эффективен и объемен над T). Теперь воспользуемся классификацией двумерных логтерминальных особенностей (см., например, [10, гл.3]). Так как $b_1 > 2$, то мы имеем $[c_s - 1, \dots, c_l] = n/q$, где $1 \leq q < n$, $\text{НОД}(n, q) = 1$ и $n = 2, 3, 4, 5$. Таким образом, $[c_s - 1, \dots, c_l] = [n], [2, \dots, 2], [2, 3], [3, 2]$.

Предположим, что $s = 1$. Тогда $[c_1, \dots, c_l] = [4], [3, 3]$ (см. предложение 2.5), $k = \varrho - 1$ и $[b_1, \dots, b_{k-1}] = n'/q'$, где $1 \leq q' < n' - 1$, $\text{НОД}(n', q') = 1$ и $n' = 3, 4, 5$. Далее, $\alpha'_1 = 1/2$. Путем несложных вычислений (см. [10, (3.1.3)]) получим, что

$2/b_k > \alpha_k > 1/2$. Таким образом, $b_k = 3$. Следовательно, существует только одна возможность $[b_1, \dots, b_k, \dots, b_\varrho] = [4, 3, 2]$. Но тогда $\alpha_k = 1/5$. Противоречие.

Предположим, что $s > 1$. Тогда $c_1 = \dots = c_{s-1} = 2$. Следовательно, $c_l \geq 3$ и $[c_1, \dots, c_l] = [2, \dots, 2, n+1]$, $[2, \dots, 2, 3, 3]$. Поскольку $[c_1, \dots, c_l]$ – Т-цепь, то $n \geq 4$ и $[c_1, \dots, c_l] = [2, 5]$, $[2, 2, 6]$. Как и выше, получаем $\alpha'_1 \leq 1/3$, $2/b_k > \alpha_k > 2/3$ и $b_k = 2$. Противоречие.

ЛЕММА 4.5. Пусть D_1 и D_2 – две компоненты дивизора D такие, что:

- (i) $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$;
- (ii) существуют Т-точки $P_i \in D_i$, $P_i \notin D_1 \cap D_2$.

Тогда дивизор $K_S + D_1 + D_2$ логканоничен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. По лемме 4.4 $\Gamma(\varphi)$ содержит подграф Γ вида

где $\varrho \geq 2$ и $[a_1, \dots, a_r]$, $[b_1, \dots, b_\varrho]$, $[c_1, \dots, c_l]$ – Т-цепи.

Заметим, что $b_1 \geq 3$. Согласно следствию 2.7 и лемме 4.1 имеем $a_1 = c_1 = 2$. Рассмотрим $s, m \geq 1$ такие, что

$$a_1 = \dots = a_s = 2, \quad a_{s+1} > 2, \quad c_1 = \dots = c_m = 2, \quad c_{m+1} > 2.$$

Стягивая последовательно черные вершины, получим следующий логтерминальный граф:

$$\Gamma' = [b_1 - s - m - 2 \mid b_2, \dots, b_\varrho \mid a_{s+1} - 1, \dots, a_r \mid c_{m+1} - 1, \dots, c_l].$$

Согласно предложению 2.5 имеем $\sum a_i = 2 - \beta + 3r$, где β – число вершин соответствующей цепи (2.2) (при этом β совпадает с инвариантом $\beta(n/q)$, определенным в § 2, но мы это не будем использовать). Поскольку $\beta + s \leq r$, то

$$a_{s+1} + \dots + a_r = 2 - \beta + 3r - 2s \geq 2 + r + \beta \geq 5.$$

Аналогично, $c_{m+1} + \dots + c_l \geq 5$. Следовательно, $\varrho = b_\varrho = 2$, и можно считать, что $[a_{s+1} - 1, \dots, a_r] = 3/q$. С другой стороны, $a_r \geq 3$. Таким образом, $[a_{s+1} - 1, \dots, a_r] = [3]$ и $[a_1, \dots, a_r] = [2, \dots, 2, 4]$. Противоречие.

СЛЕДСТВИЕ 4.6. Пусть $\varphi: S \rightarrow T \ni o$ – Т-стягивание.

- (i) Если поверхность S имеет одну недювалевскую точку P , то все компоненты D проходят через P .

(ii) Если S имеет более одной недювалевской точки, то пара (S, D_i) чисто логтерминальна для любой компоненты D_i дивизора D , содержащей две недювалевские точки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.7. Пусть $\varphi: S \rightarrow T \ni o$ – T -стягивание. Тогда дивизор K_S является 1-дополняемым.

Теперь теорема 1.2 следует из предложений 3.1 и 4.7.

Предположим, что $\varphi: S \rightarrow T \ni o$ – произвольное логстягивание. Применим методы, разработанные в [13]. Выберем δ так, что пара $(S, \delta D)$ станет максимально логканонична.

Заметим, что на поверхности S программа минимальных моделей применима для любого дивизора G . Действительно, существует граница F такая, что дивизор $K_X + F$ логтерминален по Кавамате, численно тривиален и компоненты F порождают группу $\text{Pic}(S) \otimes \mathbb{Q}$. Тогда G -программа минимальных моделей эквивалентна $(K_S + F + \varepsilon G')$ -программе минимальных моделей для $0 < \varepsilon \ll 1$ и подходящего $G' \sim_{\mathbb{Q}} G$.

ЛЕММА 4.8. Предположим, что пара $(S, \delta D)$ чисто логтерминальна. Тогда дивизор K_S является 1-дополняемым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку пара $(S, \delta D)$ максимально логканонична, то $[\delta D] \neq 0$. Положим $C = [\delta D]$ и $B = \delta D - C$. По лемме о связности [14, лемма 5.7] C – неприводимая кривая. Согласно следствию 4.3 дивизор $\text{Diff}_C(\delta B)$ содержится в двух точках, скажем P_1 и P_2 . Применим $-(K_S + C)$ -программу минимальных моделей над T :

$$\psi: S \rightarrow \bar{S}.$$

Так как дивизор $-K_S$ ψ -обилен, то кривая C не стягивается. Поскольку дивизор $-(K_S + \delta D)$ ψ -обилен, свойство чистой логтерминальности пары $(S, \delta D)$ сохраняется. Мы получим чисто логтерминальную модель $(\bar{X}, \bar{C})$ такую, что дивизор $-(K_{\bar{S}} + \bar{C})$ численно эффективен над T . Согласно аргументам, приведенным выше, $\text{Diff}_{\bar{C}}(\delta \bar{B})$ содержится в двух точках. Следовательно, дивизор $K_{\bar{S}} + \text{Diff}_{\bar{C}}$ является 1-дополняемым (см. [14, пример 5.2]). Так как $-(K_{\bar{S}} + \bar{C})$ численно эффективен и обилен над T , это дополнение может быть продолжено на $\bar{S}$ (см. [12, предложение 4.4.1]). Из работы [12, § 4.3] следует, что существует 1-дополнение дивизора $K_S + C$.

Если пара $(S, \delta D)$ не является чисто логтерминальной, то существует *индуктивное раздутие* $(S, \delta D)$. По определению это – бирациональное стягивание $\sigma: S' \rightarrow S$ с неприводимым исключительным дивизором E , удовлетворяющее следующим свойствам:

(i) дивизор $K_{S'} + E + \delta D' = \sigma^*(K_S + \delta D)$ логканоничен, где D' – собственный прообраз D ;

(ii) пара (S', E) чисто логтерминальна.

Поскольку минимальное разрешение $\mu: \tilde{S} \rightarrow S$ является также логразрешением для (S, D) , то можно предполагать, что μ пропускается через σ (см. [12, доказательство утверждения 3.1.4]). Тогда $K_{S'} + \alpha E = \sigma^* K_S$, где $\alpha \geq 0$, и дивизор $-(K_{S'} + \alpha E)$ численно эффективен над T . Как и в доказательстве леммы 4.8,

применим $-(K_{S'} + E)$ -программу минимальных моделей над T . В этом случае кривая E снова не может быть стянута, и мы получим модель $(\bar{S}, \bar{E})$ такую, что дивизор $-(K_{\bar{S}} + \bar{E})$ численно эффективен над T :

Обозначим через N исключительный дивизор морфизма ψ , и пусть $V := \text{Sing}(S') \cap E$. Если дивизор $-(K_{S'} + E)$ численно эффективен над T , то положим $\psi = \text{id}$ и $N = \emptyset$. Очевидно, что все особые точки $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_r$ поверхности $\bar{S}$, лежащие на $\bar{E}$, содержатся в $\psi(V) \cup \psi(N)$. Если $r \leq 2$, то дивизор $K_{\bar{E}} + \text{Diff}_{\bar{E}}$ является 1-дополняемым (см. [14, пример 5.2]). Поскольку $-(K_{\bar{S}} + \bar{E})$ численно эффективен над T , это дополнение может быть продолжено на $\bar{S}$ (см. [12, предложение 4.4.1]). Из работы [12, § 4.3] следует существование 1-дополнения дивизора K_S .

ЛЕММА 4.9. *Предположим, что поверхность S имеет единственную недювалевскую точку и эта точка является циклическим фактором. Тогда дивизор K_S является 1-дополняемым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что пара $(S, \delta D)$ не является чисто лог-терминальной. Поскольку $P := \sigma(E) \in S$ – циклическая факторособенность, то множество V содержит не более двух точек. Действительно, дивизор $-K_{S'}$ ψ -обилен и поверхность S' имеет лишь дювалевские особенности вне $\text{Sing}(\bar{S}) \cap \bar{E}$. Из работы [8, лемма 3.38] следует, что дискрепантности всех дивизоров $\bar{S}$ над $\psi(E)$ строго положительны. Следовательно, поверхность $\bar{S}$ неособа в точках $\psi(N)$, $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_r \in \psi(V)$ и $r \leq 2$. Значит, дивизор K_S является 1-дополняемым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 4.7. Пусть множество V содержит не более двух точек. Если дивизор K_S не является 1-дополняемым, то $r \geq 3$ (см. [14, пример 5.2]). Возьмем $\bar{P} \in \psi(N) \setminus \psi(V)$, и пусть $N_0 = \psi^{-1}(\bar{P})$. Тогда точка $N_0 \cap E \in S$ неособа и множество N_0 содержит по крайней мере одну недювалевскую точку поверхности S' . Если V – две точки, то по следствию 4.3 мы получим подграф (4.2). Противоречие.

Предположим, что V – одна точка. Тогда существуют две точки $\bar{P}, \bar{P}_1 \in \psi(N) \setminus \psi(V)$, и, аналогично, из леммы 4.4 мы получим подграф (4.3). Противоречие.

Наконец, предположим, что S' неособо вдоль E . Тогда E является (-4) -кривой. Следовательно, $\Gamma(\varphi)$ содержит вилку $[4 \mid 1, b_1 \mid 1, b_2 \mid 1, b_3]$. Такой граф не может быть эллиптическим.

§ 5. Существование трехмерных полустабильных флипов

В этом параграфе, следуя [4, предложения 8.5, 8, 7], приведем набросок доказательства того, что теорема 1.3 следует из теоремы 1.2.

Существование флипа эквивалентно конечной порожденности $\mathcal{O}_Z$ -алгебры

$$\mathcal{R}_Z(K_Z) := \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{O}_Z(mK_Z)$$

(см. [4, лемма 3.1]). По теореме 1.2 существует элемент $L = 2F \in |-2K_X|$ такой, что дивизор $K_X + f^*T + \frac{1}{2}L$ логканоничен. Так как f — экстремальное стягивание и дивизор $K_X + f^*T + \frac{1}{2}L$ численно тривиален, можно показать, что $K_Z + T + \frac{1}{2}L_Z$ также логканоничен, где $L_Z := f_*L \in |-2K_Z|$. Следовательно, то же самое верно и для общего элемента $L_Z \in |-2K_Z|$, который является приведенным и неприводимым. Как и в [4, § 8], рассмотрим двойное накрытие $\pi: Z' \rightarrow Z$, разветвленное вдоль L_Z . Тогда дивизор $K_{Z'} + \pi^*T = \pi^*(K_Z + T + \frac{1}{2}L_Z)$ логканоничен и является дивизором Картье. Поскольку π^*T — также дивизор Картье, то Z' имеет каноническую горенштейнову особенность в $o' := \pi^{-1}(o)$. Положим $L_{Z'} := \pi^*(L_Z)_{\text{red}}$. Из работы [4, лемма 3.2] следует, что конечные порожденности алгебр $\mathcal{R}_Z(K_Z)$ и $\mathcal{R}_{Z'}(K_{Z'} - L'_{Z'})$ эквивалентны. Наконец, последняя алгебра конечно порождена согласно [4, теорема 6.1] (см. также [6], [10, § 6], [8, § 6]). Теорема 1.3 доказана. Заметим, что в нашем случае конечная порожденность алгебры $\mathcal{R}_{Z'}(K_{Z'} - L'_{Z'})$ более очевидна в силу того, что существует дивизор Картье π^*T , для которого пара (Z', π^*T) логканонична.

СЛЕДСТВИЕ 5.1 [7]. Пусть $f: X \rightarrow Z \ni o$ — q -полустабильное бирациональное стягивание со слоями размерности не более 1 (флиповое или дивизориальное типа 2-1), и пусть T — общее гиперплоское сечение, проходящее через o . Тогда $T \ni o$ — циклическая факторособенность. Если, кроме того, f дивизориально, то $T \ni o$ имеет тип T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1.2 пара $(Z, T + f(F))$ логканонична. Согласно формуле присоединения такова же пара $(T, \text{Diff}_T(f(F)))$. Более того, $K_T + \text{Diff}_T(f(F)) \sim 0$. Согласно классификации логтерминальных особенностей с приведенной границей $T \ni o$ — циклическая факторособенность.

Список литературы

1. Corti A. Semistable 3-fold flips. e-print alg-geom/9505035.
2. Looijenga E., Wahl J. Quadratic functions and smoothing surface singularities // Topology. 1986. V. 25. P. 261–291.
3. Mori S. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds // J. Amer. Math. Soc. 1988. V. 1. P. 117–253.
4. Kawamata Y. Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces // Ann. Math. (2). 1988. V. 127. P. 93–163.
5. Kawamata Y. Semistable minimal models of threefolds in positive or mixed characteristic // J. Alg. Geom. 1994. V. 3. P. 463–491.
6. Kollár J. Flops // Nagoya Math. J. 1989. V. 113. P. 15–36.
7. Kollár J., Mori S. Classification of three-dimensional flips // J. Amer. Math. Soc. 1992. V. 5. P. 533–703.

8. *Kollár J., Mori S.* Birational geometry of algebraic varieties // Cambridge Tracts in Mathematics. V. 134. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998.
9. *Kollár J., Shepherd-Barron N. I.* Threefolds and deformations of surface singularities // Invent. Math. 1988. V. 91. P. 299–338.
10. *Kollár J. et al.* Flips and abundance for algebraic threefolds // A summer seminar at the Univ. of Utah. (Salt Lake City, 1991). V. 211. Astérisque, 1992.
11. *Куликов Вук. С.* Вырождения К3-поверхностей и поверхностей Энриквеса // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. № 5. С. 1008–1042.
12. *Prokhorov Yu. G.* Lectures on complements on log surfaces // MSJ Memoirs. V. 10. Tokyo: Mathematical Society of Japan, 2001.
13. *Прохоров Ю. Г., Шокуров В. В.* Первая основная теорема о дополнениях: от локального к глобальному // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. № 6. С. 99–128.
14. *Шокуров В. В.* Трехмерные логперестройки // Изв. РАН. Сер. матем. 1992. Т. 56. № 1. С. 105–203.
15. *Shokurov V. V.* Semistable 3-fold flips // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 2. С. 165–224.
16. *Tsunoda Sh.* Degenerations of surfaces // Algebraic geometry. Sendai, 1985. Adv. Stud. Pure Math. V. 10. Amsterdam: North-Holland, 1987. P. 755–764.

Кафедра алгебры
механико-математического факультета
МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: prokhorov@mech.math.msu.su

Поступило в редакцию
30.09.2003