Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Штепин, Промежуточная алгебра Ли $\mathfrak{d}_{n-1/2}$, весовая схема и конечномерные представления со старшим весом, *Изв. РАН. Сер. матем.*, 2004, том 68, выпуск 2, 159–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/im479>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 03:03:20

УДК 519.46

В. В. Штепин

Промежуточная алгебра Ли $\mathfrak{d}_{n-1/2}$, весовая схема и конечномерные представления со старшим весом

Разделение кратных точек спектра в редукции $D_n \downarrow D_{n-1}$ достигается с помощью введения неполупростой промежуточной подалгебры и весовой схемы, отличающейся от схемы Гельфанда–Цетлина. Предложен метод построения весового базиса в пространстве конечномерного неприводимого представления D_n , элементы которого нумеруются указанными весовыми схемами. Для введенной промежуточной алгебры Ли исследуется категория ее конечномерных представлений со старшим весом.

Библиография: 10 наименований.

Введение

Настоящая работа продолжает серию работ автора [1], [2] по исследованию промежуточных (между классическими) групп и алгебр Ли и их конечномерных представлений со старшим весом. В работе [1] были рассмотрены группы и алгебры Ли типов $A_{n-1/2}$ и $C_{n-1/2}$, а в работе [2] – типа $B_{n-1/2}$. Настоящая работа посвящена изучению серии D .

Пусть T_m – конечномерное неприводимое представление комплексной простой группы Ли G серии A_n, B_n, C_n или D_n , m – старший вес представления T_m . Обозначим через G_0 максимальную одноименную подгруппу меньшего ранга (соответственно, $A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1}$ или D_{n-1}). Сужение $T_m|_{G_0}$ вполне приводимо, и его спектр описывается так называемым правилом ветвления. Соответствующие сериям A, B, C и D правила ветвления известны уже довольно давно. Они получены Г. Вейлем [3] для унимодулярной серии (в современной терминологии – для группы Ли $GL(n, \mathbb{C})$), И. М. Гельфандом и М. Л. Цетлиным [4] для ортогональных серий, Д. П. Желобенко [6] для симплектической серии. Характерно, что во всех четырех сериях спектр может содержать кратные точки. Это становится особенно наглядным, если записать правило ветвления следующим единым для всех серий образом:

$$T_m|_{G_0} = \bigoplus_{l \rightarrow m} \left(\bigoplus_{t \rightarrow l} T_t \right), \quad (1)$$

где стрелки обозначают условия подчинения старших весов. Эти условия подчинения для каждой серии свои, они представляются некоторой известной системой неравенств. Из правила ветвления, записанного в виде (1), следует, что пространство $\bigoplus_{t \rightarrow l} T_t$ может быть наделено структурой не только G_0 -модуля, но и структурой модуля над некоторой промежуточной между G и G_0 группой Ли.

Иначе говоря, разделить кратные точки спектра в правиле ветвления (1) – это значит подобрать подходящую промежуточную группу Ли G' , $G_0 \subset G' \subset G$, такую, что ее представление T_l со старшим весом l , $l \rightarrow m$, при сужении на G_0 имеет такой же спектр, как и прямая сумма $\bigoplus_{t \rightarrow l} T_t$ в правой части (1). Точное определение будет дано далее (§3). Хорошо известно, что в сериях A и C разделить кратные точки спектра можно с помощью только неполупростых (и нередуктивных) промежуточных подгрупп соответственно $A_{n-1/2}$ и $C_{n-1/2}$ [1]. На первый взгляд, в качестве промежуточной подгруппы в серии B удобно использовать группу Ли D_n , $B_{n-1} \subset D_n \subset B_n$, а в серии D – группу B_{n-1} , $D_{n-1} \subset B_{n-1} \subset D_n$. Такой очевидный подход, однако, не лишен недостатков. Регулярное вложение¹ D_n в B_n строится просто (достаточно в стандартном представлении B_n взять стабилизатор неизотропного вектора), но уже регулярного вложения B_{n-1} в D_n не существует (в системе корней B_{n-1} существуют два корня, образующие угол $\frac{3\pi}{4}$, в то время как в системе корней D_n таких корней нет). В результате использование цепочки вложений ортогональных групп Ли, в которой регулярные вложения чередуются с нерегулярными:

$$\mathrm{SO}(2, \mathbb{C}) \subset \mathrm{SO}(3, \mathbb{C}) \subset \cdots \subset \mathrm{SO}(2n-2, \mathbb{C}) \subset \mathrm{SO}(2n-1, \mathbb{C}) \subset \mathrm{SO}(2n, \mathbb{C}),$$

приводит к построению базиса в пространстве представления T_m , не являющегося весовым. Такой базис принято называть *базисом Гельфанда–Цетлина*, как и метод разделения кратных точек спектра с помощью цепочки вложенных полупростых промежуточных подгрупп.

В работах автора [1], [2] (см. также [8]) предложено обобщение метода Гельфанда–Цетлина, использующее для разделения кратных точек спектра в правиле ветвления (1) неполупростые промежуточные подгруппы $G_{n-1/2}$, $G_0 \subset G_{n-1/2} \subset G$, если $G = A_n, B_n, C_n$. Показано, что “освобождения от кратностей” можно добиться не за счет разложения T_m в прямую сумму $(G_{n-1/2})$ -модулей (представления нередуктивных групп Ли довольно редко являются вполне приводимыми), а путем построения в T_m фильтрации $(G_{n-1/2})$ -подмодулей. Фильтрации эти аналогичны рядам Жордана–Гёльдера: они строятся, вообще говоря, неоднозначно, но их факторы имеют инвариантный смысл и не зависят от способа построения фильтрации. Каждому неприводимому представлению T_m группы Ли G отвечает (определенный с точностью до изоморфизма) присоединенный градуированный $(G_{n-1/2})$ -модуль $\bigoplus_{l \rightarrow m} T_l$, где представления T_l действуют в факторпространствах соответствующей фильтрации. Нами подробно исследована категория $\mathcal{L}$ всех таких $(G_{n-1/2})$ -модулей T_l , получаемых из всевозможных неприводимых представлений T_m группы Ли G со старшим весом m . Представления T_l этой категории $\mathcal{L}$ для неполупростых групп Ли $G_{n-1/2}$ имеют такое же значение, какое для полупростых групп Ли имеют конечномерные неприводимые представления. Во-первых, они являются циклическими. Во-вторых, они с точностью до изоморфизма определяются своим старшим весом. В-третьих, для них справедливы формулы характеров и размерностей, аналогичные формулам Г. Вейля для характеров и размерностей неприводимых представлений классических групп Ли. Но при

¹Напомним, что вложение полупростой группы Ли G_1 в полупростую группу Ли G_2 называется *регулярным*, если система корней G_1 является подмножеством системы корней G_2 .

этом представления T_l , вообще говоря, приводимы. И только в серии D мы сталкиваемся с явлением увеличения размерности категории $\mathcal{L}$: $(D_{n-1/2})$ -модули этой категории определяются старшими весами, зависящими от $n + 1$ параметра, в то время как неприводимые конечномерные D_n -модули имеют n -мерный старший вес.

В § 1 вводятся определения промежуточной группы Ли $D_{n-1/2}$ и ее алгебры Ли $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ и описывается их строение. В частности, доказывается, что эта группа Ли нередуктивна.

В § 2 вводятся понятия полустарших и квазистарших векторов в пространстве V_m конечномерного неприводимого представления алгебры Ли $\mathfrak{d}_n$ со старшим весом m . Следуя результатам, полученным Д. П. Желобенко в [5], мы реализуем V_m в пространстве многочленов на максимальной унипотентной подгруппе $Z \subset D_n$. Здесь же приводится пример, показывающий, что схемы Гельфанда–Цетлина, описанные в [4], приспособлены именно для редукции $\mathfrak{d}_n \downarrow \mathfrak{b}_{n-1} \downarrow \mathfrak{d}_{n-1}$, но некорректны для редукции $\mathfrak{d}_n \downarrow \mathfrak{d}_{n-1/2} \downarrow \mathfrak{d}_{n-1}$. Получаемый здесь вариант схемы позволит нам в § 3 построить канонический весовой базис в пространстве V_m , поэтому схему, связанную с цепочкой вложений

$$\mathfrak{d}_1 \subset \mathfrak{d}_{2-1/2} \subset \mathfrak{d}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{d}_{n-1} \subset \mathfrak{d}_{n-1/2} \subset \mathfrak{d}_n,$$

мы называем *весовой схемой*. Наиболее важной компонентой этой весовой схемы является последняя компонента l_n промежуточного веса l , $l \rightarrow m$, которая отличается от соответствующей компоненты в схеме Гельфанда–Цетлина.

В § 3 изложено обобщение традиционного метода разделения кратных точек спектра (метода Гельфанда–Цетлина), использующее неполупростую промежуточную подалгебру. Основным результатом этого параграфа – доказательство теоремы 3.1 о том, что промежуточная подалгебра $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ позволяет разделить изоморфные $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модули в правиле ветвления (1) для четной ортогональной алгебры Ли (группы Ли). Указывается метод построения канонического весового базиса в V_m , элементы которого нумеруются весовыми схемами, рассмотренными в § 2.

Наконец, в § 4 подробно изучается категория $\mathcal{L}$ конечномерных $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модулей, которые возникают как фактормодули filtrаций, разделяющих изоморфные компоненты $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модулей $V_m|_{\mathfrak{d}_{n-1}}$. Каждый такой фактормодуль является циклическим $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модулем, порожденным образом квазистаршего вектора, и определяется с точностью до изоморфизма своим старшим весом, компоненты которого удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{array}{ccccccc} & & & m_n & \longrightarrow & -l_{n-1} & \\ & & & \nearrow & & \searrow & \\ l_1 \longrightarrow l_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow l_{n-2} & \longrightarrow & m_{n-1} & & & & -m_{n-1} \\ & & \searrow & & \nearrow & & \\ & & l_{n-1} & \longrightarrow & -m_n & & \end{array}$$

где стрелка обозначает знак неравенства $\geq$.

§ 1. Группа Ли $D_{n-1/2}$ и ее алгебра Ли

Комплексной простой группой Ли типа D_n называют собственную ортогональную группу $SO(2n)$, состоящую из всех ортогональных преобразований комплексного $2n$ -мерного пространства $\mathbb{C}^{2n}$, не изменяющих ориентацию.

Пусть в $\mathbb{C}^{2n}$ зафиксирован базис $e_1, e_2, \dots, e_n, e_{-n}, \dots, e_{-2}, e_{-1}$ и скалярное произведение, определяемое формулой

$$(x, y) = x_1 y_{-1} + \dots + x_n y_{-n} + x_{-n} y_n + \dots + x_{-1} y_1.$$

Тогда все элементы g группы $SO(2n)$ и только они удовлетворяют матричному уравнению

$$\sigma^{-1} g \sigma = (g^T)^{-1},$$

где σ – матрица, у которой все элементы побочной диагонали равны единице, а все остальные элементы – нулю. Промежуточную подгруппу $D_{n-1/2}$ можно определить как стабилизатор ненулевого изотропного вектора в пространстве стандартного представления группы Ли $SO(2n)$. Как замкнутая подгруппа группы Ли $D_{n-1/2}$ является комплексной группой Ли.

Зафиксируем выбор вложений $SO(2n-2) \subset D_{n-1/2} \subset SO(2n)$ следующим образом. Подгруппа $D_{n-1/2}$ группы Ли $SO(2n)$ является стабилизатором n -го базисного вектора e_n пространства $\mathbb{C}^{2n}$, а $SO(2n-2)$ наряду с e_n оставляет неподвижным также базисный вектор e_{-n} . Аналогично определяются вложения алгебр Ли $\mathfrak{so}(2n-2) \subset \mathfrak{d}_{n-1/2} \subset \mathfrak{so}(2n)$. Более точно, алгебру Ли $\mathfrak{so}(2n)$ (типа $\mathfrak{d}_n$) группы Ли $SO(2n)$ будем отождествлять с алгеброй матриц $\|a_{ij}\| \in \mathfrak{gl}(2n)$, удовлетворяющих соотношению

$$a_{ij} = -a_{-j, -i}, \quad i, j \in \{-n, \dots, -1, 1, 2, \dots, n\}.$$

Она порождена $n(2n-1)$ образующими

$$X_{ij} = E_{ij} - E_{-j, -i}, \tag{2}$$

где E_{ij} – образующие $\mathfrak{gl}(2n)$ (матричные единицы).

Коммутационные соотношения в $\mathfrak{so}(2n)$ являются следствием (2) и коммутационных соотношений в $\mathfrak{gl}(2n)$, они имеют вид

$$[X_{ij}, X_{kl}] = \delta_{kj} X_{il} - \delta_{il} X_{kj} + \delta_{-l, j} X_{k, -i} - \delta_{k, -i} X_{-j, l},$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера.

Подалгебра $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ выделяется из $\mathfrak{so}(2n)$ при наложении условий $a_{in} = 0$, $a_{-n, i} = 0$, $i = \pm 1, \dots, \pm n$, а $\mathfrak{so}(2n-2)$ – из $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ с помощью соотношений $a_{nj} = 0$, $a_{j, -n} = 0$, $j = \pm 1, \dots, \pm n$.

Подалгебра Картана $\mathfrak{h}_n$ алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n)$ порождена образующими X_{ii} , $1 \leq i \leq n$. Пусть R_n – система корней алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n)$, $P(R_n)$ – ее группа весов.

Стандартный базис B в $P(R_n)$ образуют элементы $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathfrak{h}_n^*$, определенные равенствами $\varepsilon_i(X_{jj}) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. Тогда

$$R_n = \{\pm \varepsilon_i \pm \varepsilon_j, 1 \leq i < j \leq n\};$$

простыми корнями системы R_n являются

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \alpha_{n-1} = \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \alpha_n = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n.$$

Система корней $R_{n-1/2}$ алгебры Ли $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ имеет следующий вид:

$$R_{n-1/2} = \{\alpha \in R_n \mid (\alpha, \varepsilon_n) \geq 0\},$$

где $(\cdot, \cdot)$ – произвольное скалярное произведение в $\mathfrak{h}_n^*$, инвариантное относительно группы Вейля. Соответственно, система корней R_{n-1} алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n-2)$ имеет следующий вид:

$$R_{n-1} = \{\alpha \in R_n \mid (\alpha, \varepsilon_n) = 0\}.$$

Пусть $\mathfrak{so}(2n) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h}_n \oplus \mathfrak{n}_+$ – разложение Картана–Вейля алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n)$, согласованное с базисом B , $\mathfrak{b}^\pm = \mathfrak{h}_n \oplus \mathfrak{n}_\pm$ – соответствующие борелевские подалгебры. Пусть $\mathfrak{m}_\pm = \mathfrak{n}_\pm \cap \mathfrak{d}_{n-1/2}$. Мы получаем следующее разложение $\mathfrak{d}_{n-1/2}$, аналогичное разложению Картана–Вейля:

$$\mathfrak{d}_{n-1/2} = \mathfrak{m}_- \oplus \mathfrak{h}_{n-1} \oplus \mathfrak{m}_+.$$

Алгебры Ли $\mathfrak{d}_{n-1/2}^- = \mathfrak{h}_{n-1} \oplus \mathfrak{m}_-$ и $\mathfrak{d}_{n-1/2}^+ = \mathfrak{h}_{n-1} \oplus \mathfrak{m}_+$ являются аналогами борелевских подалгебр в $\mathfrak{d}_{n-1/2}$. Пусть также $\mathfrak{so}(2n-2) = \mathfrak{n}_-^0 \oplus \mathfrak{h}_{n-1} \oplus \mathfrak{n}_+^0$ – соответствующее разложение Картана–Вейля алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n-2)$.

Докажем следующее простое предложение, которое описывает разложение Леви–Мальцева группы Ли $D_{n-1/2}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Группа Ли $D_{n-1/2}$ не редуктивна. Ее разложение Леви–Мальцева описывается формулой*

$$D_{n-1/2} \simeq \mathrm{SO}(2n-2) \ltimes \mathbb{C}^{2n-2},$$

где $\mathbb{C}^{2n-2}$ – аддитивная группа Ли, $\ltimes$ – полупрямое произведение групп Ли.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_i(t)$ (соответственно, $y_i(t)$), $1 \leq i \leq n-1$, – однопараметрическая подгруппа в $D_{n-1/2}$, отвечающая образующему X_{ni} (соответственно, $X_{i,-n}$) алгебры Ли $\mathfrak{d}_{n-1/2}$. Однопараметрические подгруппы $x_i(t)$, $y_i(t)$, $1 \leq i \leq n-1$, порождают мультипликативную абелеву группу Ли H , изоморфную аддитивной группе $\mathbb{C}^{2n-2}$. Далее, группа $\mathrm{SO}(2n-2) \ltimes H$ является, по определению, множеством упорядоченных пар (s, h) , $s \in \mathrm{SO}(2n-2)$, $h \in H$, с групповым умножением $(s_1, h_1) \cdot (s_2, h_2) = (s_1 s_2, h_1 s_1 h_2 s_1^{-1})$. Определим аналитическое отображение $\varphi: \mathrm{SO}(2n-2) \ltimes H \rightarrow D_{n-1/2}$ равенством $\varphi(s, h) = hs$. Тогда φ осуществляет искомый изоморфизм.

СЛЕДСТВИЕ 1.1. *Алгебра Ли $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ имеет нетривиальный радикал r , изоморфный коммутативной алгебре Ли размерности $2n-2$, при этом*

$$\mathfrak{d}_{n-1/2} \simeq \mathfrak{so}(2n-2) \dot{+} r,$$

где $\dot{+}$ – полупрямая сумма алгебр Ли.

§ 2. Полустаршие и квазистаршие векторы

Пусть P_n^D – множество старших весов алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n)$, $P_n^D \subset \frac{1}{2}P(R_n)$. Хорошо известно (см., например, [6]), что в определенном выше базисе $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ элементы из P_n^D представляются векторами с целочисленными или полуцелочисленными компонентами:

$$P_n^D = \left\{ (m_1, \dots, m_n); m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{n-1} \geq |m_n|, m_i \in \mathbb{Z} \text{ или } m_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right\}.$$

Старшие векторы с полуцелыми компонентами необходимы для описания двузначных представлений группы Ли $\mathrm{SO}(2n)$. Обозначим через V_m конечномерный неприводимый $\mathfrak{so}(2n)$ -модуль со старшим весом $m \in P_n^D$. Хорошо известно, что V_m обладает единственным с точностью до постоянного множителя контравариантным скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Контравариантность $\langle \cdot, \cdot \rangle$, по определению, равносильна выполнению соотношения

$$\langle X_{ij}v, w \rangle = \langle v, X_{ji}w \rangle$$

для любых $v, w \in V_m$ и $i, j \in \{1, 2, \dots, n, -n, \dots, -1\}$. Далее под ортогональностью векторов в V_m будем подразумевать ортогональность относительно этого скалярного произведения. Как обычно, мы не делаем различия между элементами X_{ij} алгебры Ли $\mathfrak{so}(2n)$ и их образами относительно представления этой алгебры Ли в V_m .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Вектор $v \in V_m$, собственный относительно $\mathfrak{h}_n$ и старший относительно $\mathfrak{so}(2n-2)$, называется *полустаршим*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 (ср. [7], [8]). Полустарший вектор $v \in V_m$, удовлетворяющий соотношениям $X_{in}v = 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, называется *квазистаршим*.

Обозначим через V_m^+ (соответственно, V_m^{++}) линейную оболочку множества полустарших (соответственно, квазистарших) векторов. Подпространство V_m^+ будем называть *пространством полустарших векторов*, соответственно, V_m^{++} – *пространством квазистарших векторов*.

Следующие простые предложения описывают связь между пространством полустарших векторов и разложением $\mathfrak{so}(2n-2)$ -модуля $V_m|_{\mathfrak{so}(2n-2)}$ в прямую сумму неприводимых подмодулей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Старший вектор v любого неприводимого $\mathfrak{so}(2n-2)$ -подмодуля модуля V_m принадлежит V_m^+ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. а) Пусть $V_m|_{\mathfrak{so}(2n-2)} = \bigoplus_{i=1}^k V_i$ – некоторое разложение V_m в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{so}(2n-2)$ -подмодулей. Тогда старшие векторы модулей V_i , $1 \leq i \leq k$, образуют базис в V_m^+ .

б) Пусть $v_1, \dots, v_k$ образуют базис в V_m^+ , состоящий из полустарших векторов. Пусть V_i – $\mathfrak{so}(2n-2)$ -подмодуль V_m , порожденный вектором v_i , $1 \leq i \leq k$. Тогда модули V_i , $1 \leq i \leq k$, неприводимы и

$$V_m|_{\mathfrak{so}(2n-2)} = \bigoplus_{i=1}^k V_i.$$

Предложения 2.1 и 2.2 доказываются стандартным образом с помощью метода старших векторов Э. Картана. Более того, эти предложения допускают естественное обобщение на случай редукций представлений полупростых комплексных алгебр Ли (см., например, [9], [10]).

Для более наглядного описания пространств V_m^+ и V_m^{++} воспользуемся конструкцией Желобенко [5], реализующей любое конечномерное неприводимое представление T_m классической комплексной группы Ли G в пространстве многочленов на максимальной унитарной подгруппе Z_+ .

Пусть Z_- (соответственно, Z_+) – подгруппа $SO(2n)$, состоящая из нижнетреугольных (соответственно, верхнетреугольных) матриц с единицами на главной диагонали, H – подгруппа диагональных матриц. Тогда $SO(2n) = \overline{Z_-} H Z_+$ – разложение Гаусса и всякий регулярный элемент $g \in SO(2n)$ однозначно представляется в виде $g = \zeta \delta z$, где $\zeta \in Z_-$, $\delta \in H$, $z \in Z_+$. Напомним, что матрица $g \in SO(2n)$ называется *регулярной*, если все ее главные миноры, т.е. миноры, расположенные на пересечении первых k строк и первых k столбцов, $k = 1, 2, \dots, 2n$, отличны от нуля. Независимыми параметрами в подгруппе Z_+ являются матричные элементы, стоящие над побочной диагональю (т.е. это элементы z_{pq} такие, что $0 < p < |q|$). Согласно [5] всякое конечномерное неприводимое представление $SO(2n)$ может быть реализовано в пространстве многочленов $\mathbb{C}[z_{pq}]$ от независимых матричных элементов Z_+ . Пространство неприводимого представления T_m группы Ли $SO(2n)$ со старшим весом $m \in P_n^D$ является пространством решений системы дифференциальных уравнений (индикаторной системы)

$$\begin{aligned} D_1^{r_1+1} f(z) &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ D_n^{r_n+1} f(z) &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $f(z) \in \mathbb{C}[z_{pq}]$, $r_i = m_i - m_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$, $r_n = m_{n-1} + m_n$, а $D_1, \dots, D_n$ – так называемые “главные сдвиги”, т.е. инфинитезимальные операторы левых сдвигов на подгруппе Z_+ , соответствующих простым корням $SO(2n)$. Это пространство мы обозначим через V_m , как и соответствующий $\mathfrak{so}(2n)$ -модуль. Операторы $D_1, \dots, D_n$ могут быть выписаны явно:

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\partial}{\partial z_{12}} + z_{23} \frac{\partial}{\partial z_{13}} + \dots + z_{2n} \frac{\partial}{\partial z_{1n}} + z_{2,-n} \frac{\partial}{\partial z_{1,-n}} + \dots + z_{2,-3} \frac{\partial}{\partial z_{1,-3}} \\ &\quad - (z_{23} z_{2,-3} + \dots + z_{2n} z_{2,-n}) \frac{\partial}{\partial z_{1,-2}}, \\ D_2 &= \frac{\partial}{\partial z_{23}} + z_{34} \frac{\partial}{\partial z_{24}} + \dots + z_{3n} \frac{\partial}{\partial z_{2n}} + z_{3,-n} \frac{\partial}{\partial z_{2,-n}} + \dots + z_{3,-4} \frac{\partial}{\partial z_{2,-4}} \\ &\quad - (z_{34} z_{3,-4} + \dots + z_{3n} z_{3,-n}) \frac{\partial}{\partial z_{2,-3}}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{n-2} &= \frac{\partial}{\partial z_{n-2,n-1}} + z_{n-1,n} \frac{\partial}{\partial z_{n-2,n}} \\
&\quad + z_{n-1,-n} \frac{\partial}{\partial z_{n-2,-n}} - z_{n-1,n} z_{n-1,-n} \frac{\partial}{\partial z_{n-2,-(n-1)}}, \\
D_{n-1} &= \frac{\partial}{\partial z_{n-1,n}}, \quad D_n = \frac{\partial}{\partial z_{n-1,-n}}.
\end{aligned}$$

Пусть $\mathfrak{n}_\pm$ – алгебра Ли группы $Z_\pm$ и $\mathfrak{n}_\pm^0 = \mathfrak{n}_\pm \cap \mathfrak{so}(2n-2)$. Обозначим через V^+ подпространство всех многочленов в $\mathbb{C}[z_{pq}]$, аннулируемых подалгеброй $\mathfrak{n}_+^0$. Легко видеть, что

$$V^+ = \mathbb{C}[z_{1n}, \dots, z_{n-1,n}, z_{1,-n}, \dots, z_{n-1,-n}],$$

и теперь $V_m^+ = V^+ \cap V_m$.

Далее, пусть V^{++} – подпространство всех многочленов в V^+ , аннулируемых операторами X_{in} , $i = 1, \dots, n-1$. В используемой реализации инфинитезимальные операторы X_{in} имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
X_{1n} &= \frac{\partial}{\partial z_{1n}}, \\
X_{2n} &= \frac{\partial}{\partial z_{2n}} + z_{12} \frac{\partial}{\partial z_{1n}} - z_{1,-n} \frac{\partial}{\partial z_{1,-2}}, \\
&\dots\dots\dots \\
X_{n-2,n} &= \frac{\partial}{\partial z_{n-2,n}} + z_{n-3,n-2} \frac{\partial}{\partial z_{n-3,n}} + \dots + z_{1,n-2} \frac{\partial}{\partial z_{1n}} \\
&\quad - z_{n-3,-n} \frac{\partial}{\partial z_{n-3,-(n-2)}} - \dots - z_{1,-n} \frac{\partial}{\partial z_{1,-(n-2)}}, \\
X_{n-1,n} &= \frac{\partial}{\partial z_{n-1,n}} + z_{n-2,n-1} \frac{\partial}{\partial z_{n-2,n}} + \dots + z_{1,n-1} \frac{\partial}{\partial z_{1n}} \\
&\quad - z_{n-2,-n} \frac{\partial}{\partial z_{n-2,-(n-1)}} - \dots - z_{1,-n} \frac{\partial}{\partial z_{1,-(n-1)}}.
\end{aligned}$$

Отсюда имеем $V^{++} = \mathbb{C}[z_{1,-n}, \dots, z_{n-1,-n}]$ и $V_m^{++} = V^{++} \cap V_m$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Система квазистарших векторов

$$\begin{aligned}
\{z_{1,-n}^{k_1} \dots z_{n-1,-n}^{k_{n-1}}; 0 \leq k_i \leq m_i - m_{i+1}, k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n-2, \\
0 \leq k_{n-1} \leq m_{n-1} + m_n\}
\end{aligned}$$

образует ортогональный базис пространства квазистарших векторов V_m^{++} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На подпространстве V^{++} “главные сдвиги” имеют следующий вид:

$$D_1 = z_{2,-n} \frac{\partial}{\partial z_{1,-n}}, \quad D_2 = z_{3,-n} \frac{\partial}{\partial z_{2,-n}}, \quad \dots, \quad D_{n-2} = z_{n-1,-n} \frac{\partial}{\partial z_{n-2,-n}},$$

$$D_{n-1} = 0, \quad D_n = \frac{\partial}{\partial z_{n-1,-n}}.$$

Базис в пространстве решений индикаторной системы (3), принадлежащих V^{++} , т. е. базис в пространстве V_m^{++} , образуют мономы вида $z_{1,-n}^{k_1} z_{2,-n}^{k_2} \dots z_{n-1,-n}^{k_{n-1}}$, где $k_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k_i \leq m_i + m_{i-1}$, $i = 1, \dots, n-2$, $0 \leq k_{n-1} \leq m_{n-1} - m_n$. Легко видеть, что моноом $z_{1,-n}^{k_1} \dots z_{n-1,-n}^{k_{n-1}}$ — весовой вектор V_m . Его вес в базисе $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ имеет следующий вид:

$$\left(m_1 - k_1, m_2 - k_2, \dots, m_{n-1} - k_{n-1}, m_n - \sum_{i=1}^{n-1} k_i \right).$$

Построенная система квазистарших векторов ортогональна, поскольку является системой собственных векторов эрмитовых операторов $X_{11}, \dots, X_{nn}$, отвечающих различным наборам собственных значений.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Размерность пространства квазистарших векторов V_m^{++} равна*

$$\left(\prod_{i=1}^{n-2} (m_i - m_{i+1} + 1) \right) (m_{n-1} + m_n + 1).$$

Перейдем теперь к изучению пространства V_m^+ полустарших векторов. К сожалению, аналог предложения 2.3 в V_m^+ не имеет места в том смысле, что в нем нельзя построить, вообще говоря, ортогональный базис, состоящий из мономов от независимых параметров z_{pq} группы Z_+ . Ниже будет явно построен канонический базис пространства V_m^+ , состоящий из полустарших векторов (см. следствие 3.1), но векторы этого базиса являются полиномами от z_{pq} . Пока лишь отметим, что вычисление размерностей весовых подпространств пространства V_m^+ позволяет получить правило ветвления для редукции $D_n \downarrow D_{n-1}$. Это правило ветвления впервые было получено И. М. Гельфандом и М. Л. Цетлиным в [4]. Пусть $V_{(m_1, \dots, m_n)}|_{\mathfrak{d}_{n-1}}$ — сужение конечномерного неприводимого $\mathfrak{so}(2n)$ -модуля $V_{(m_1, \dots, m_n)}$ на регулярно вложенную подалгебру $\mathfrak{so}(2n-2)$. Тогда

$$V_{(m_1, \dots, m_n)}|_{\mathfrak{d}_{n-1}} = \bigoplus V_{(m'_1, \dots, m'_{n-1})}, \quad (4)$$

где прямая сумма берется по всем наборам векторов $m'' = (m'_1, \dots, m'_{n-1})$, $m' = (m'_1, \dots, m'_{n-1})$, одновременно целочисленных (если вектор $m = (m_1, \dots, m_n)$ целочисленный) или полуцелочисленных (если вектор $m = (m_1, \dots, m_n)$ полуцелочисленный), удовлетворяющим системе неравенств

$$m_1 \geq m'_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{n-2} \geq m'_{n-2} \geq m_{n-1} \geq m'_{n-1} \geq |m_n|,$$

$$m'_1 \geq m''_1 \geq m'_2 \geq \dots \geq m'_{n-2} \geq m''_{n-2} \geq m'_{n-1} \geq |m''_{n-1}|.$$

Следующий пример показывает, что правило ветвления (4), хорошо приспособленное к редукции $\mathfrak{d}_n \downarrow \mathfrak{b}_{n-1} \downarrow \mathfrak{d}_{n-1}$, некорректно в случае неполупростой промежуточной подалгебры $\mathfrak{d}_{n-1/2}$.

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим $\mathfrak{d}_3$ -модуль $V = V_{(1,1,1)}$. Пользуясь конструкцией Желобенко [5], реализуем V как подпространство многочленов на максимальной унитарной подгруппе Z_+ ;

$$f(z) = f(z_{12}, z_{13}, z_{1,-3}, z_{1,-2}, z_{23}, z_{2,-3}) \in V$$

тогда и только тогда, когда $f(z)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z_{12}} + z_{23} \frac{\partial}{\partial z_{13}} + z_{2,-3} \frac{\partial}{\partial z_{1,-3}} - z_{23} z_{2,-3} \frac{\partial}{\partial z_{1,-2}} \right) f(z) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z_{23}} f(z) &= 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z_{2,-3}} \right)^3 f(z) = 0. \end{aligned}$$

Согласно правилу ветвления (4) сужение $V_{(1,1,1)}$ на $\mathfrak{d}_2$ имеет следующий спектр:

$$V_{(1,1,1)}|_{\mathfrak{d}_2} = \bigoplus V_{(m'_1, m'_2)},$$

где суммирование ведется по всем целочисленным решениям системы неравенств

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 1 & & 1 & & -1 & & -1 \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ & m'_1 & & m'_2 & & -m'_2 & & -m'_1 & \\ & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow \\ & m''_1 & & m''_2 & & -m''_1 & & & \end{array} \quad (5)$$

Здесь стрелка, как и выше, обозначает знак неравенства $\geq$.

Эта система имеет решения: $m'_1 = m'_2 = 1$; $m''_1 = 1$; $-1 \leq m''_2 \leq 1$. Таким образом,

$$V_{(1,1,1)}|_{\mathfrak{d}_2} = V_{(1,-1)} \oplus V_{(1,0)} \oplus V_{(1,1)}.$$

Далее, согласно предложению 2.3 мономы 1 , $z_{2,-3}$ и $z_{2,-3}^2$ образуют ортогональный базис в $V_{(1,1,1)}^{++}$. Каждый из них порождает циклический $(\mathfrak{d}_{3-1/2})$ -подмодуль модуля V соответственно $\mathcal{D}(1)$, $\mathcal{D}(z_{2,-3})$ и $\mathcal{D}(z_{2,-3}^2)$. Легко проверить, что они вложены друг в друга:

$$\{0\} \subset \mathcal{D}(1) \subset \mathcal{D}(z_{2,-3}) \subset \mathcal{D}(z_{2,-3}^2) = V.$$

Мы получили фильтрацию $(\mathfrak{d}_{3-1/2})$ -подмодулей V , факторы которой как $\mathfrak{d}_2$ -модули изоморфны указанным выше неприводимым прямым слагаемым:

$$\mathcal{D}(1)|_{\mathfrak{d}_2} \cong V_{(1,1)}, \quad \mathcal{D}(z_{2,-3})/\mathcal{D}(1)|_{\mathfrak{d}_2} \cong V_{(1,0)}, \quad \mathcal{D}(z_{2,-3}^2)/\mathcal{D}(z_{2,-3})|_{\mathfrak{d}_2} \cong V_{(1,-1)}.$$

Легко видеть, что все эти факторы между собой не изоморфны. Следовательно, и как $(\mathfrak{d}_{3-1/2})$ -модули они должны иметь *разные* старшие веса. Но в схеме Гельфанда–Цетлина (5) всем им соответствует одна и та же промежуточная строка $(m'_1, m'_2) = (1, 1)$. Следовательно, промежуточные строки $(m'_1, m'_2, \dots, m'_{n-1})$ в правиле ветвления (4) соответствуют старшим весам $(\mathfrak{b}_{n-1})$ -подмодулей в редукции $\mathfrak{d}_n \downarrow \mathfrak{b}_{n-1} \downarrow \mathfrak{d}_{n-1}$ и не соответствуют старшим весам $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -подмодулей в редукции $\mathfrak{d}_n \downarrow \mathfrak{d}_{n-1/2} \downarrow \mathfrak{d}_{n-1}$.

С помощью следующего предложения и весовой схемы, приведенной на рис. 1, исправим эту ситуацию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть $V_{(m_1, \dots, m_n)}|_{\mathfrak{d}_{n-1}}$ – сужение конечномерного неприводимого $\mathfrak{so}(2n)$ -модуля V_m , $m = (m_1, \dots, m_n) \in P_n^D$, на регулярно вложенную подалгебру $\mathfrak{so}(2n-2)$. Тогда его спектр описывается следующим правилом ветвления:

$$V_{(m_1, \dots, m_n)}|_{\mathfrak{d}_{n-1}} = \bigoplus V_{(t_1, \dots, t_{n-1})}, \quad (6)$$

где прямая сумма берется по всем наборам векторов $l = (l_1, \dots, l_{n-1})$, $t = (t_1, \dots, t_{n-1})$, одновременно целочисленных (если вектор t целочисленный) или полуцелочисленных (если вектор t полуцелочисленный), удовлетворяющим системе неравенств

$$\begin{aligned} m_1 \geq l_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{n-1} \geq l_{n-1} \geq -m_n, \\ l_1 \geq t_1 \geq l_2 \geq t_2 \geq \dots \geq l_{n-2} \geq t_{n-2} \geq \nu(m_n, l_{n-1}) \geq l_{n-1} \geq t_{n-1} \\ \geq l_{n-1} + m_n - \mu(m_{n-1}, t_{n-2}), \end{aligned}$$

где введены обозначения $\nu(a, b) = \max(a, b)$, $\mu(a, b) = \min(a, b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть старший вес $m = (m_1, \dots, m_n)$ фиксирован. Введем отображение φ , областью определения которого является множество схем вида (6), а множеством значений – множество схем вида (4), посредством

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}; l_1, l_2, \dots, l_{n-1}) = (m''_1, m''_2, \dots, m''_{n-1}; m'_1, m'_2, \dots, m'_{n-1}),$$

где

$$\begin{aligned} m''_i &= t_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ m'_j &= l_j, \quad j = 1, \dots, n-2, \end{aligned}$$

$$m'_{n-1} = \begin{cases} l_{n-1}, & \text{если } m_n \leq t_{n-1}, \\ m_n + l_{n-1} - t_{n-1}, & \text{если } t_{n-1} \leq m_n. \end{cases}$$

Проверим, что компоненты (m''_i, m'_j) удовлетворяют системе неравенств, по которым идет суммирование в (4), в предположении того, что исходные компоненты (t_k, l_s) удовлетворяют системе неравенств, по которым идет суммирование в (6).

а) Пусть $m_n \leq t_{n-1}$. Имеем

$$l_{n-1} \geq t_{n-1} \geq m_n, \quad l_{n-1} \geq -m_n \geq -t_{n-1}.$$

Следовательно, $m'_{n-1} = l_{n-1} \geq |m_n|$ и $m'_{n-1} = l_{n-1} \geq |m''_{n-1}| = |t_{n-1}|$. Справедливость остальных неравенств из системы (4) очевидна.

б) Пусть $t_{n-1} \leq m_n$. Имеем

$$m_{n-1} \geq \mu(m_{n-1}, t_{n-2}) \geq l_{n-1} + m_n - t_{n-1}.$$

Следовательно, $m_{n-1} \geq m'_{n-1}$. Далее, $t_{n-2} \geq \mu(m_{n-1}, t_{n-2}) \geq l_{n-1} + m_n - t_{n-1}$, откуда $t_{n-2} \geq m'_{n-1}$. Из неравенств

$$m_n + l_{n-1} - t_{n-1} \geq m_n, \quad m_n + l_{n-1} - t_{n-1} \geq -t_{n-1} \geq -m_n$$

вытекает $m'_{n-1} = m_n + l_{n-1} - t_{n-1} \geq |m_n|$.

Наконец, из неравенств $m_n \geq t_{n-1}$ и $l_{n-1} \geq t_{n-1}$ следует $m_n + l_{n-1} - t_{n-1} \geq t_{n-1}$, откуда $m'_{n-1} \geq |m''_{n-1}| = |t_{n-1}|$.

Проверим, что φ осуществляет взаимно однозначное соответствие между множеством схем, удовлетворяющих (6), и множеством схем, удовлетворяющих (4). Инъективность φ очевидна.

Пусть теперь $\Lambda = (m'_1, \dots, m''_{n-1}; m'_1, \dots, m'_{n-1})$ – произвольная схема, удовлетворяющая (4). Тогда схема $(t'_1, \dots, t'_{n-1}; l'_1, \dots, l'_{n-1})$, где

$$\begin{aligned} t'_i &= m''_i, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ l'_j &= m'_j, \quad j = 1, \dots, n-2, \end{aligned}$$

$$l'_{n-1} = \begin{cases} m'_{n-1}, & \text{если } m_n \leq m''_{n-1}, \\ m''_{n-1} + m'_{n-1} - m_n, & \text{если } m''_{n-1} \leq m_n, \end{cases}$$

удовлетворяет (6) и переводится отображением φ в Λ . Следовательно, φ сюръективно, и предложение доказано.

Отметим, что число промежуточных строк $(l_1, l_2, \dots, l_{n-1})$ в правиле ветвления (6) совпадает с размерностью пространства квазистарших векторов $\dim V_m^{++}$ (см. следствие 2.1). Сравнение серии D с сериями A , B и C позволяет предположить, что каждая такая строка является старшим весом некоторого представления группы Ли $D_{n-1/2}$.

Цепочка редукций

$$D_n \downarrow D_{n-1/2} \downarrow D_{n-1} \downarrow \dots \downarrow D_{2-1/2} \downarrow D_1$$

описывается схемами, получаемыми многократным применением правила ветвления (6). Нижняя часть такой схемы, соответствующая случаю $n = 4$, приведена на рис. 1.

Рис. 1. Весовая схема для конечномерного неприводимого представления $V_{(m_1, m_2, m_3, m_4)}$ группы Ли $\text{SO}(8)$

Здесь введены обозначения: $\nu_1 = \max(m_4, l_3)$, $\nu_2 = \max(t_3, l'_2)$, $c_1 = m_4 + l_3 - \min(m_3, t_2)$, $c_2 = t_3 + l'_2 - \min(t_2, t'_1)$, $c_3 = t'_2 + l''_1 - t'_1$; каждая стрелка соответствует неравенству $\geq$. Легко видеть, что неравенства, отвечающие параллельным сторонам правильных шестиугольников, на схеме дублируются. Однако именно эти шестиугольники являются отличительным признаком серии D .

В отличие от схем Гельфанда–Цетлина, мы называем их *весовыми* схемами, поскольку они будут применяться ниже для нумерации базисных векторов весового базиса в пространстве неприводимого представления V_m (см. §3). Отметим, что схемы Гельфанда–Цетлина, описывающие цепочку редукций ортогональных групп Ли

$$D_n \downarrow B_{n-1} \downarrow D_{n-1} \downarrow \dots \downarrow B_1 \downarrow D_1,$$

приводят к построению базиса в пространстве V_m , не являющегося весовым.

Правило ветвления (6) мы запишем в более компактном виде (1), используя условия подчинения весов.

Пусть P_n^D – множество старших весов алгебры Ли $\mathfrak{d}_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Вес $l \in P_i^D$ подчинен весу $m \in P_{i+1}^D$, если их компоненты удовлетворяют системе неравенств

$$m_1 \geq l_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{i-1} \geq l_{i-1} \geq m_i \geq l_i \geq -m_{i+1}.$$

Запись $l \rightarrow m$ для $l \in P_i^D$, $m \in P_{i+1}^D$ будет означать, что l подчинен m .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть вес $l \in P_i^D$ подчинен весу $m \in P_{i+1}^D$. Вес $t \in P_i^D$ подчинен весам l и m , если их компоненты удовлетворяют системе неравенств

$$l_1 \geq t_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{i-1} \geq t_{i-1} \geq \nu(m_{i+1}, l_i) \geq l_i \geq t_i \geq m_{i+1} + l_i - \mu(m_i, t_{i-1}).$$

Запись $t \rightarrow l \rightarrow m$ для весов $t \in P_i^D$, $l \in P_i^D$, $m \in P_{i+1}^D$ будет означать, что вес t подчинен весам l и m . Иногда эту запись будем укорачивать до $t \rightarrow l$, если понятно, о каком весе m идет речь.

Теперь правило ветвления (6) для редукции $\mathfrak{so}(2n) \downarrow \mathfrak{so}(2n-2)$ может быть записано в виде (1):

$$V_m|_{\mathfrak{so}(2n-2)} = \bigoplus_{l \rightarrow m} \left(\bigoplus_{t \rightarrow l} V_t \right), \quad t \in P_{n-1}^D, \quad l \in P_{n-1}^D, \quad (7)$$

причем в каждой сумме веса l и t , по которым идет суммирование, одновременно целочисленные, если вектор m целочисленный, либо полуцелочисленные, если вектор m имеет полуцелые компоненты.

Далее получим истолкование “промежуточных строк” $l \in P_{n-1}^D$ (дополненных двумя “вершинами” соответствующего шестиугольника) в формуле (7) с точки зрения теории представлений неполупростой группы Ли $D_{n-1/2}$.

§3. Разделение изоморфных компонент

Пусть $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0$ – полупростые комплексные алгебры Ли, причем $\mathfrak{g}_0$ регулярно вложена в $\mathfrak{g}$, т.е. система корней $\mathfrak{g}_0$ является частью системы корней $\mathfrak{g}$. Пусть V – неприводимый конечномерный $\mathfrak{g}$ -модуль такой, что спектр сужения $V|_{\mathfrak{g}_0}$ не прост.

Традиционный метод разделения изоморфных компонент $\mathfrak{g}_0$ -модуля V (метод Гельфанда–Цетлина) предусматривает использование одной или нескольких промежуточных (между $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{g}$) полупростых подалгебр. В работах автора [1], [8] было предложено обобщение метода Гельфанда–Цетлина, применимое и в тех (часто встречающихся) случаях, когда с помощью полупростых промежуточных подалгебр не удастся разделить изоморфные компоненты. Допустим, необходимо найти цепочку $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{g}_{k-1} \subset \mathfrak{g}_k = \mathfrak{g}$ регулярно вложенных полупростых подалгебр $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_{k-1}$ таких, что сужение каждого неприводимого $\mathfrak{g}_i$ -подмодуля модуля V на $\mathfrak{g}_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$, имеет простой спектр. Метод Гельфанда–Цетлина

оказывается неприменимым, если найдется неприводимый $\mathfrak{g}_i$ -подмодуль W модуля V такой, что сужение $W|_{\mathfrak{g}_{i-1}}$ содержит изоморфные компоненты, а между $\mathfrak{g}_{i-1}$ и $\mathfrak{g}_i$ не существует никакой промежуточной полупростой подалгебры, разделяющей эти изоморфные компоненты в указанном выше смысле.

Как отмечалось во введении, такое положение имеет место, в частности, в редукциях $\mathfrak{a}_n \downarrow \mathfrak{a}_{n-1}$ и $\mathfrak{c}_n \downarrow \mathfrak{c}_{n-1}$, где $\mathfrak{a}_n$ – унимодулярная комплексная алгебра Ли (изоморфная $\mathfrak{sl}(n+1)$), $\mathfrak{c}_n$ – симплектическая комплексная алгебра Ли. Ниже будет показано, что серия D имеет разделение изоморфных компонент более простое, чем серия B , и к ней полностью применим подход, разработанный в [1], [8] для симплектической и унимодулярной серий. Точная формулировка нашего метода заключена в следующих двух определениях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Для всякой фильтрации

$$f = \{V_0, V_1, \dots, V_s; V_{i-1} \subset V_i, i = 1, 2, \dots, s\}$$

$\mathfrak{g}$ -модулей, $\mathfrak{g}$ – произвольная алгебра Ли, фактормодули V_i/V_{i-1} будем называть *факторами* фильтрации f . Фильтрацию, у которой никакие два фактора не изоморфны, будем называть *фильтрацией без кратностей*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть, как и выше, W – неприводимый $\mathfrak{g}_i$ -модуль такой, что спектр $W|_{\mathfrak{g}_{i-1}}$ не прост. Будем говорить, что $(\mathfrak{g}_{i-1})$ -модуль W *допускает разделение изоморфных компонент с помощью промежуточной подалгебры* $\mathfrak{g}_{i-1/2}$, $\mathfrak{g}_{i-1} \subset \mathfrak{g}_{i-1/2} \subset \mathfrak{g}_i$, если существует фильтрация $f = \{W_0, W_1, \dots, W_s; W_{i-1} \subset W_i, i = 1, 2, \dots, s, W_0 = \{0\}, W_s = W\}$ $(\mathfrak{g}_{i-1/2})$ -подмодулей в W такая, что:

- а) f – фильтрация без кратностей;
- б) сужения факторов фильтрации f на $\mathfrak{g}_{i-1}$ имеют простой спектр.

Если условия а) и б) определения 3.2 выполняются, то изоморфные неприводимые компоненты $(\mathfrak{g}_{i-1})$ -модуля W можно различать, относя их к неизоморфным факторам фильтрации f . Отметим, что если в определении 3.2 алгебра Ли $\mathfrak{g}_{i-1/2}$ полупроста, то фильтрацию f можно заменить прямой суммой $(\mathfrak{g}_{i-1/2})$ -подмодулей в W в силу того, что всякое конечномерное представление полупростой алгебры Ли вполне приводимо, т. е. в этом случае наш метод сводится к методу Гельфанда–Петлина.

Сформулируем основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть V_m – конечномерный неприводимый $\mathfrak{d}_n$ -модуль со старшим весом $m \in P_n^D$. Тогда сужение V_m на $\mathfrak{d}_{n-1}$ допускает разделение изоморфных компонент с помощью промежуточной подалгебры $\mathfrak{d}_{n-1/2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем во множестве квазистарших векторов $\mathfrak{d}_n$ -модуля V_m , рассматриваемых с точностью до пропорциональности, отношение линейного порядка:

$$z_{1,-n}^{k_1} z_{2,-n}^{k_2} \cdots z_{n-1,-n}^{k_{n-1}} < z_{1,-n}^{p_1} z_{2,-n}^{p_2} \cdots z_{n-1,-n}^{p_{n-1}},$$

если $(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}) < (p_1, p_2, \dots, p_{n-1})$ относительно лексикографического порядка. Перенумеруем квазистаршие векторы в соответствии с этим линейным порядком: $q_1 = 1, q_2 = z_{n-1, -n}, \dots, q_N = z_{1, -n}^{r_1} \dots z_{n-2, -n}^{r_{n-2}} z_{n-1, -n}^{r_n}$, $N = \dim V_m^{++}$ (см. следствие 2.1). Далее, обозначим через $\mathcal{D}_i, i = 1, \dots, N$, $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -подмодуль V_m , порожденный векторами $q_1, \dots, q_i$. Пусть также $\mathcal{D}_0 = \{0\}$. По построению полученные $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модули образуют фильтрацию: $\mathcal{D}_{i-1} \subset \mathcal{D}_i, i = 1, 2, \dots, N$. Покажем, что $\mathcal{D}_N = V_m$. Для этого достаточно проверить равенство $\mathfrak{d}_{n-1/2} q_N = \mathfrak{d}_n q_N$. Заметим, что $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ может быть дополнена до $\mathfrak{d}_n$ подалгеброй

$$\langle X_{1n}, \dots, X_{nn}, X_{-n,1}, \dots, X_{-n,n-1} \rangle.$$

Образующие $X_{1n}, \dots, X_{n-1,n}$ аннулируют q_N по определению квазистаршего вектора. Далее, X_{nn} сохраняет одномерное подпространство, порожденное q_N , так как $X_{nn} \in \mathfrak{h}_n$, а q_N – собственный вектор относительно $\mathfrak{h}_n$. Наконец, образующий $X_{-n,i}, 1 \leq i \leq n-1$, также аннулирует q_N . Это вытекает из того, что $X_{-n,i} q_N$ является весовым вектором с компонентами веса в базисе $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$:

$$(m_2, m_3, \dots, m_i, m_{i+1} - 1, m_{i+2}, \dots, m_n, -m_1 - 1).$$

Но длина такого веса превосходит длину старшего веса модуля V_m , следовательно, $X_{-n,i} q_N = 0$. Тем самым равенство $\mathfrak{d}_{n-1/2} q_N = \mathfrak{d}_n q_N$, а вместе с ним и равенство $\mathcal{D}_N = V_m$ доказаны.

Мы получили фильтрацию

$$f = \{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_N; \mathcal{D}_{i-1} \subset \mathcal{D}_i, i = 1, \dots, N, \mathcal{D}_0 = \{0\}, \mathcal{D}_N = V_m\} \quad (8)$$

$(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -подмодулей V_m . Фильтрация f удовлетворяет условиям а), б) определения 3.2, что непосредственно вытекает из следующей формулы, описывающей спектры сужений факторов f на $\mathfrak{d}_{n-1}$.

Пусть $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ – фактор $\mathfrak{d}_n$ -модуля $V_{(m_1, \dots, m_n)}$, порожденный образом квазистаршего вектора $q_{i+1} = z_{1, -n}^{m_1 - p_1} z_{2, -n}^{m_2 - p_2} \dots z_{n-1, -n}^{m_{n-1} - p_{n-1}}$. Тогда

$$\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i|_{\mathfrak{d}_{n-1}} = \bigoplus_{\substack{p_1 \geq t_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_{n-2} \geq t_{n-2} \geq \nu(p_{n-1}, m_n) \\ \geq p_{n-1} \geq t_{n-1} \geq p_{n-1} + m_n - \mu(t_{n-2}, m_{n-1})}} V_{(t_1, \dots, t_{n-1})}, \quad (9)$$

где введены обозначения $\nu(a, b) = \max(a, b)$, $\mu(a, b) = \min(a, b)$. Суммирование в (9) производится по всевозможным значениям индексов $t_1, t_2, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}$ в предположении, что $p_1, \dots, p_{n-1}$ фиксированы. Из (9) видно, что каждый неприводимый $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модуль $V_{(t_1, \dots, t_{n-1})}$ может входить в $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ в качестве прямого слагаемого не более одного раза. С другой стороны, $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -факторы, отвечающие разным квазистаршим векторам, между собой не изоморфны, так как изменение показателей $p_1, \dots, p_{n-1}$ приводит к изменению диапазонов значений $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$.

Итак, условия а) и б) определения 3.2 действительно выполняются для построенной выше (см. (8)) фильтрации f .

Оставшаяся часть настоящего параграфа посвящена доказательству формулы (9).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. *Тройка весов $t \in P_{n-1}^D$, $l \in P_{n-1}^D$, $m \in P_n^D$ образует кортеж $\{t, l, m\}$, если $t \rightarrow l \rightarrow m$, где условия подчинения весов такие же, как в определениях 2.3 и 2.4:*

- а) $l \rightarrow m$ равносильно $m_1 \geq l_1 \geq m_2 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{n-2} \geq m_{n-1} \geq l_{n-1} \geq -m_n$;
 б) $t \rightarrow l$ равносильно $l_1 \geq t_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{n-2} \geq t_{n-2} \geq \nu(l_{n-1}, m_n) \geq l_{n-1} \geq t_{n-1} \geq l_{n-1} + m_n - \mu(t_{n-2}, m_{n-1})$.

Каждому кортежу $\{t, l, m\}$ сопоставим полустарший вектор $\omega(t, l, m) \in V_m^+$, определяемый формулой

$$\omega(t, l, m) = z_{1n}^{l_1-m_2} \dots z_{n-2,n}^{l_{n-2}-m_{n-1}} z_{n-1,n}^{l_{n-1}-t_{n-1}} z_{1,-n}^{m_1-l_1} z_{2,-n}^{t_1-l_2} \dots z_{n-1,-n}^{t_{n-2}-l_{n-1}} \\ \times \Omega_1^{m_2-t_1} \Omega_2^{m_3-t_2} \dots \Omega_{n-2}^{m_{n-1}-t_{n-2}},$$

где

$$\Omega_1 = z_{1n} z_{2,-n} - \widehat{z_{1,-n} z_{2n}}, \quad \Omega_2 = z_{2n} z_{3,-n} - \widehat{z_{2,-n} z_{3n}}, \\ \dots \dots \dots \Omega_{n-2} = z_{n-2,n} z_{n-1,-n} - \widehat{z_{n-2,-n} z_{n-1,n}},$$

а символ $\widehat{}$ над слагаемым означает, что данное слагаемое должно быть пропущено, если показатель степени k в выражении Ω_i^k будет отрицательным.

Далее, сопоставим каждому кортежу $\{t, l, m\}$ вектор $r(t, l, m)$, определяемый формулой

$$r(t, l, m) = X_{n1}^{l_1-t_1} \dots X_{n,n-1}^{l_{n-1}-t_{n-1}} q_{lm},$$

где $q_{lm} = z_{1,-n}^{m_1-l_1} z_{2,-n}^{m_2-l_2} \dots z_{n-1,-n}^{m_{n-1}-l_{n-1}}$.

Отношение линейного порядка, определенное выше на множестве квазистарших векторов $\{q_{lm}; l \in P_n^D\}$, перенесем на первые индексы этих векторов, принадлежащие P_n^D . Более точно, будем говорить, что $l \succ p$, $l, p \in P_n^D$, если $q_{lm} < q_{pm}$.

ЛЕММА 3.1. а) Пусть $\{t, l, m\}$ и $\{q, p, m\}$ – кортежи. Тогда если $t \neq q$, то

$$\langle r(t, l, m), \omega(q, p, m) \rangle = 0.$$

б) Пусть $\{t, l, m\}$ и $\{t, p, m\}$ – кортежи. Тогда если $l \succ p$, то

$$\langle r(t, l, m), \omega(t, p, m) \rangle = 0.$$

в) Для любого кортежа $\{t, l, m\}$

$$\langle r(t, l, m), \omega(t, l, m) \rangle \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО почти дословно повторяет доказательство аналогичной леммы для серии $\mathfrak{b}$ [2] и потому не приводится.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Система векторов $\{\omega(t, l, m); \{t, l, m\} - \text{кортеж}\}$ образует базис пространства V_m^+ , состоящий из полустарших векторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вектор $\omega(t, l, m)$, как легко видеть, является весовым вектором V_m , его вес в базисе $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ следующий:

$$\left(t_1, \dots, t_{n-1}, -\sum_{i=1}^{n-1} m_i + m_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} l_i - \sum_{i=1}^{n-1} t_i \right).$$

Поскольку различные весовые подпространства V_m линейно независимы, достаточно доказать линейную независимость векторов $\omega(t, l, m)$, имеющих один и тот же фиксированный вес. Пусть

$$\alpha_1 \omega(t, p_1, m) + \alpha_2 \omega(t, p_2, m) + \dots + \alpha_s \omega(t, p_s, m) = 0,$$

где веса $p_1, p_2, \dots, p_s$ упорядочены так, что $p_1 \succ p_2 \succ \dots \succ p_s$. Последовательно умножая это равенство скалярно на $r(t, p_1, m), r(t, p_2, m), \dots, r(t, p_s, m)$ и применяя лемму 3.1, получим $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 0$.

ЛЕММА 3.2. а) $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модуль $\mathcal{D}_i$, $i = 0, 1, \dots, N$, порождается системой векторов $\{r(t, l, m); \{t, l, m\} - \text{кортеж, удовлетворяющий } q_{lm} \leq q_i\}$.

б) $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модуль $\mathcal{D}_i^\perp$, $i = 0, 1, \dots, N$, порождается системой векторов $\{\omega(t, l, m); \{t, l, m\} - \text{кортеж, удовлетворяющий } q_{lm} > q_i\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по i с учетом контравариантности скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Оно несущественно отличается от доказательства леммы 3.2 из [2].

С помощью лемм 3.1 и 3.2 легко выводятся равенства (6). Поскольку $\mathfrak{d}_{n-1}$ — простая алгебра Ли, то следующие $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модули изоморфны:

$$\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i \cong \mathcal{D}_i^\perp/\mathcal{D}_{i+1}^\perp.$$

В силу утверждения б) леммы 3.2 последний модуль порождается полустаршими векторами $\{\omega(t, l, m) + \mathcal{D}_{i+1}^\perp; \{t, l, m\} - \text{кортеж, удовлетворяющий } q_{lm} = q_{i+1}\}$. Вес вектора $\omega(t, l, m) + \mathcal{D}_{i+1}^\perp$ в базисе $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ пространства $\mathfrak{h}_{n-1}^*$ равен t , поэтому $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -подмодуль модуля $D_i^\perp/D_{i+1}^\perp$, порождаемый этим вектором, изоморфен $V_{(t_1, \dots, t_{n-1})}$. Условие $t \rightarrow l \rightarrow m$ (см. определение 3.3), где $q_{lm} = q_{i+1} = z_{1,-n}^{m_1-l_1} z_{2,-n}^{m_2-l_2} \dots z_{n-1,-n}^{m_{n-1}-l_{n-1}}$, сводится к системе неравенств

$$\begin{aligned} l_1 &\geq t_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{n-2} \geq t_{n-2} \geq \nu(l_{n-1}, m_n) \\ &\geq l_{n-1} \geq t_{n-1} \geq l_{n-1} + m_n - \mu(t_{n-2}, m_{n-1}); \end{aligned}$$

здесь $\nu(a, b) = \max(a, b)$, $\mu(a, b) = \min(a, b)$. Это и доказывает равенства (9).

Итак, построенная нами фильтрация f удовлетворяет всем условиям определения 3.2, и теорема 3.1 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Согласно следствию 3.1 можно явно выписать базис из весовых векторов в пространстве V_m^+ . Этот базис образован полустаршими векторами $\omega(t, l, m)$, $\{t, l, m\}$ – кортеж. Полученный базис может быть легко достроен до базиса во всем пространстве V_m . Для этого достаточно взять циклические $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -подмодули модуля V_m , порожденные базисными векторами $\omega(t, l, m)$, $t \rightarrow l \rightarrow m$. В силу предложения 2.2, б) эти $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -подмодули неприводимы и V_m разлагается в их прямую сумму. В каждом из полученных $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -подмодулей V_t , $t \rightarrow l$, можно снова выбрать базис из полустарших (относительно $\mathfrak{d}_{n-2}$) векторов и т. д.

Можно явно записать весовой вектор $\mathfrak{d}_n$ -модуля V_m , соответствующий весовой схеме, приведенной на рис. 1. В используемой модели представлений $\mathfrak{d}_n$ он будет записываться некоторым многочленом от канонических параметров z_{pq} в подгруппе Z_+ . Построенный таким образом базис в пространстве V_m является весовым, так как все векторы $\omega(t, l, m)$, $\{t, l, m\}$ – кортеж, весовые относительно картановской подалгебры $\mathfrak{h}_n$ алгебры Ли $\mathfrak{d}_n$, но, вообще говоря, не является ортогональным.

§ 4. Категория $\mathcal{L}$ конечномерных $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модулей

В предыдущем параграфе мы получили большой класс конечномерных $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модулей, которые являются факторами filtrаций f , разделяющих изоморфные компоненты $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модулей V_m с помощью промежуточной подалгебры $\mathfrak{d}_{n-1/2}$. Эти $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модули, вообще говоря, не являются неприводимыми, но всегда неразложимы. В настоящем параграфе мы получим более полное описание этого класса в терминах модулей Верма и их конечномерных фактормодулей.

Пусть P_n^D – множество старших весов $\mathfrak{d}_n$, $M(\lambda)$ – модуль Верма над $\mathfrak{d}_n$ со старшим весом $\lambda \in P_n^D$. Напомним [10], что модуль Верма $M(\lambda)$ над $\mathfrak{d}_n$ определяется равенством

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{d}_n) \bigotimes_{U(\mathfrak{b}^+)} \mathbb{C}_\lambda,$$

где борелевская подалгебра Ли $\mathfrak{b}^+$ действует на $\mathbb{C}_\lambda$ с помощью одномерного представления τ_λ : $\tau_\lambda(h + n) = \lambda(h)$ для любых $h \in \mathfrak{h}_n$ и $n \in \mathfrak{n}_+$. Обозначим через $v_\lambda = 1 \otimes 1$ канонический образующий вектор модуля $M(\lambda)$. Его вес в базисе $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ равен λ , т. е. $X_{ii}v_\lambda = \lambda_i v_\lambda$, $i = 1, \dots, n$ (нередко модуль Верма $M(\lambda)$ обозначается $M(\lambda + \delta)$, где δ – полусумма положительных корней (см., например, [10]); аналогичное замечание относится и к модулю $L(\lambda)$).

Обозначим через $\mathcal{M}(\lambda)$ циклический $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -подмодуль модуля $M(\lambda)$, порожденный v_λ . Теперь мы получаем категорию $\mathcal{M}$ модулей Верма над $\mathfrak{d}_{n-1/2}$:

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{M}(\lambda); \lambda \in P_n^D\}.$$

Оказывается, модуль Верма $\mathcal{M}(\lambda) = \mathcal{M}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ не зависит от последней компоненты λ_n старшего веса λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}_n^* \cap P_n^D$ таковы, что их сужения на $\mathfrak{h}_{n-1}$ совпадают. Тогда имеет место изоморфизм $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модулей:

$$\mathcal{M}(\lambda) \cong \mathcal{M}(\mu).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda_0 = \lambda|_{\mathfrak{h}_{n-1}}$ – сужение формы λ на $\mathfrak{h}_{n-1}$. Определим одномерное представление τ_{λ_0} алгебры Ли $\mathfrak{d}_{n-1/2}^+ = \mathfrak{h}_{n-1} \oplus \mathfrak{m}_+$, полагая

$$\tau_{\lambda_0}(h + m) = \lambda_0(h)$$

для всех $h \in \mathfrak{h}_{n-1}$ и $m \in \mathfrak{m}_+$. Обозначим через $\mathcal{M}_0(\lambda)$ $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модуль, полученный индуцированием представления τ_{λ_0} на $\mathfrak{d}_{n-1/2}$:

$$\mathcal{M}_0(\lambda) = U(\mathfrak{d}_{n-1/2}) \bigotimes_{U(\mathfrak{d}_{n-1/2}^+)} \mathbb{C}_{\lambda_0},$$

где действие $\mathfrak{d}_{n-1/2}^+$ на $\mathbb{C}_{\lambda_0}$ совпадает с τ_{λ_0} . С другой стороны [10],

$$M(\lambda) = U(\mathfrak{d}_n) \bigotimes_{U(\mathfrak{b}^+)} \mathbb{C}_{\lambda}.$$

Легко видеть, что $\tau_{\lambda}|_{\mathfrak{d}_{n-1/2}^+} = \tau_{\lambda_0}$, следовательно, $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модуль $\mathcal{M}_0(\lambda)$ изоморфен циклическому $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -подмодулю $M(\lambda)$, порожденному $1 \otimes 1$. Это означает, что $\mathcal{M}_0(\lambda) \cong \mathcal{M}(\lambda)$. Аналогично, $\mathcal{M}_0(\mu) \cong \mathcal{M}(\mu)$. Однако модули $\mathcal{M}_0(\lambda)$ и $\mathcal{M}_0(\mu)$ изоморфны по построению. Предложение доказано.

Пусть $\{t, l, m\}$ – кортеж (в смысле определения 3.3), $t \in P_{n-1}^D$, $l \in P_{n-1}^D$, $m \in P_n^D$. В том случае, когда веса t и l совпадают (и только в этом случае), полустарший вектор $\omega(t, l, m)$ является квазистаршим, а именно

$$\omega(l, l, m) = z_{1,-n}^{m_1-l_1} z_{2,-n}^{m_2-l_2} \dots z_{n-1,-n}^{m_{n-1}-l_{n-1}}.$$

Для сокращения записи будем ниже квазистарший вектор $\omega(l, l, m)$ обозначать q_{lm} . Наша ближайшая цель – выяснить, зависит ли $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -фактор, порожденный образом вектора q_{lm} , от компонент $(m_1, m_2, \dots, m_n)$ исходного $\mathfrak{d}_n$ -модуля. Но прежде сформулируем следующее предложение, описывающее связь между квазистаршими векторами q_{lm} и $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -факторами фильтраций f , порожденными образами этих векторов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. а) Система векторов $\{q_{lm}; \{l, l, m\} \text{ – кортеж}\}$ образует ортогональный базис пространства квазистарших векторов V_m^{++} . Размерность этого пространства равна

$$\left(\prod_{i=1}^{n-2} (m_i - m_{i+1} + 1) \right) (m_{n-1} + m_n + 1).$$

б) Факторы фильтраций f , разделяющих изоморфные компоненты $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модулей V_m , являются циклическими $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модулями, порожденными образами квазистарших векторов q_{lm} .

в) Пусть $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ – фактор фильтрации f , порожденный образом квазистаршего вектора q_{lm} . Тогда его спектр как $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модуля имеет вид

$$\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i|_{\mathfrak{d}_{n-1}} = \bigoplus_{\substack{l_1 \geq t_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_{n-2} \geq t_{n-2} \geq \nu(m_n, l_{n-1}) \\ \geq l_{n-1} \geq t_{n-1} \geq m_n + l_{n-1} - \mu(t_{n-2}, m_{n-1})}} V_{(t_1, \dots, t_{n-1})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) было доказано в предложении 2.3. Утверждение б) вытекает из метода построения фильтров f , а в) – эквивалентно (9).

Из предложения 4.2, в) вытекает, в частности, что строение $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -фактора, порожденного q_{lm} , даже при рассмотрении его как $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модуля, зависит не только от вектора $l \in P_{n-1}^D$, но и от последних двух компонент m_{n-1} и m_n старшего веса исходного представления V_m . Ниже мы получим независимое доказательство этого свойства, которое, отметим, не наблюдается в сериях A , B и C .

Хорошо известно [10], что модуль Верма $M(\lambda)$ обладает единственным наибольшим $\mathfrak{d}_n$ -подмодулем K , отличным от $M(\lambda)$. Кроме того, при $\lambda \in P_n^D$ фактормодуль $L(\lambda) = M(\lambda)/K$ неприводим, конечномерен и имеет старший вес λ , следовательно,

$$L(\lambda) \cong V_\lambda.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть $\mathcal{K} = \mathcal{M}(\lambda) \cap K$. Фактормодуль $\mathcal{M}(\lambda)/\mathcal{K}$ является конечномерным $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модулем со старшим весом λ , который мы будем обозначать $\mathcal{L}(\lambda)$.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть v_λ (соответственно, v'_λ) – канонический образующий модуля $\mathcal{M}(\lambda)$ (соответственно, $\mathcal{L}(\lambda)$). Пусть I (соответственно, I') – аннулятор элемента v_λ (соответственно, v'_λ) в $U(\mathfrak{d}_{n-1/2})$. Тогда:

$$\begin{aligned} \text{а) } I &= U(\mathfrak{d}_{n-1/2})\mathfrak{m}_+ + \sum_{h \in \mathfrak{d}_{n-1}} U(\mathfrak{d}_{n-1/2})(h - \lambda(h)); \\ \text{б) } I' &= I + U(\mathfrak{d}_{n-1/2})X_{-(n-2), n-1}^{\lambda_{n-2} + \lambda_{n-1} + 1} + \sum_{j=1}^{n-1} U(\mathfrak{d}_{n-1/2})X_{j+1, j}^{\lambda_j - \lambda_{j+1} + 1}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение а) сразу вытекает из соответствующей теоремы об аннуляторе модуля Верма $M(\lambda)$ над $\mathfrak{d}_n$ [10, предложение 7.2.7] и предложения 4.1. Для доказательства б) нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 4.1. Пусть $\mathbb{Z}_+$ – множество неотрицательных целых чисел. Тогда элементы $X_{n1}^{\alpha_1} X_{n2}^{\alpha_2} \dots X_{n, n-1}^{\alpha_{n-1}}$, где $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \dots, n-1$, образуют базис алгебры $U(\mathfrak{m}_-)$ как левого модуля над $U(\mathfrak{n}_-^0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы следует из [10, предложение 2.2.7].

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Векторы $X_{n1}^{\alpha_1} X_{n2}^{\alpha_2} \dots X_{n, n-1}^{\alpha_{n-1}} v_\lambda$, где $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, порождают $U(\mathfrak{n}_-^0)$ -модуль $\mathcal{M}(\lambda)$.

Действительно, $\mathcal{M}(\lambda)$ порождается как $U(\mathfrak{m}_-)$ -модуль вектором v_λ .

Введем обозначение $p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) = X_{n1}^{\alpha_1} X_{n2}^{\alpha_2} \dots X_{n, n-1}^{\alpha_{n-1}} v_\lambda$, где $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \dots, n-1$. Пусть также

$$S_0 = \{p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}); 0 \leq \alpha_i \leq \lambda_i - \lambda_{i+1}, i = 1, \dots, n-1\}.$$

По предложению 7.1.15 из [10] векторы

$$X_{21}^{\lambda_1 - \lambda_2 + 1} v_\lambda, X_{32}^{\lambda_2 - \lambda_3 + 1} v_\lambda, \dots, X_{n, n-1}^{\lambda_{n-1} - \lambda_n + 1} v_\lambda \quad (10)$$

аннулируются нильпотентной подалгеброй $\mathfrak{n}_+$, следовательно, они принадлежат K и $\mathcal{K}$. Из этого же предположения, примененного к $U(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модулю $\mathcal{M}(\lambda)$, следует, что $\mathfrak{n}_+^0(X_{-(n-2),n-1}^{\lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}+1}v_\lambda) = 0$. Покажем, что вектор $w = X_{-(n-2),n-1}^{\lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}+1}v_\lambda$ также принадлежит K . Предположим противное. Тогда образ $\psi(w)$ при отображении факторизации $\psi: M(\lambda) \rightarrow M(\lambda)/K$ является ненулевым и имеет в базисе $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ вес

$$(\lambda_1, \dots, -\lambda_{n-1} - 1, -\lambda_{n-2} - 1, \lambda_n),$$

откуда $\mathfrak{d}_n$ -модуль $V_{(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n)} \cong M(\lambda)/K$ должен обладать $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -подмодулем со старшим весом $(\lambda_1, \dots, -\lambda_{n-1} - 1, -\lambda_{n-2} - 1)$. Противоречие.

Мы доказали, что векторы (10), а также w принадлежат $\mathcal{K} = \mathcal{M}(\lambda) \cap K$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Пусть Q_0 (соответственно, Q) — $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -подмодуль модуля $\mathcal{M}(\lambda)$, порожденный векторами (10) (соответственно, (10) и $X_{-(n-2),n-1}^{\lambda_{n-2}+\lambda_{n-1}+1}v_\lambda$).

Как мы только что доказали, $Q_0 \subset Q \subset \mathcal{K}$.

ЛЕММА 4.2. $U(\mathfrak{n}_-^0)$ -модуль $\mathcal{M}(\lambda)$ разлагается в сумму $U(\mathfrak{n}_-^0)$ -подмодулей:

$$\mathcal{M}(\lambda) = U(\mathfrak{n}_-^0)S_0 + Q_0. \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По следствию 4.1 $U(\mathfrak{n}_-^0)$ -модуль $\mathcal{M}(\lambda)$ порождается векторами $p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = 1, \dots, n-1$. Поэтому достаточно проверить, что $p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \in U(\mathfrak{n}_-^0)S_0 + Q_0$. Введем на множестве этих векторов отношение линейного порядка τ :

$$p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \geq_\tau p(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}),$$

если $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) > (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$ лексикографически. Принадлежность векторов $p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$ сумме (11) проверим индукцией по τ . База индукции: $p(0, 0, \dots, 0) = v_\lambda \in S_0$. Предположим, что для всех $p(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$ таких, что $p(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}) \leq_\tau p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$, выполняется $p(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}) \in U(\mathfrak{n}_-^0)S_0 + Q_0$. Пусть k — наибольшее значение индекса такое, что $\alpha_k > \lambda_k - \lambda_{k+1}$, $\alpha_{k+1} \leq \lambda_{k+1} - \lambda_{k+2}, \dots, \alpha_{n-1} \leq \lambda_{n-1} - \lambda_n$ (если такого значения k не существует, то $p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \in S_0$ и все доказано). Рассмотрим вектор

$$v_0 = X_{n,k+1}^{\alpha_k + \alpha_{k+1}} X_{k+1,k}^{\alpha_k} v_\lambda.$$

Ясно, что $v_0 \in Q_0$, так как $\alpha_k > \lambda_k - \lambda_{k+1}$. С другой стороны, используя соотношение

$$[X_{n,k+1}, X_{k+1,k}] = X_{nk},$$

можно в записи вектора v_0 переставить местами любые два соседних оператора $X_{n,k+1}$ и $X_{k+1,k}$ так, чтобы все операторы $X_{n,k+1}$ оказались справа. В результате получим

$$v_0 = \sum_{s=0}^{\alpha_k} c_s X_{k+1,k}^{\alpha_k - s} X_{nk}^s X_{n,k+1}^{\alpha_k + \alpha_{k+1} - s} v_\lambda, \quad (12)$$

где c_s – некоторые целочисленные коэффициенты. Отметим что $c_{\alpha_k} \neq 0$, т.е. в сумме (12) содержится слагаемое вида $c_{\alpha_k} X_{nk}^{\alpha_k} X_{n,k+1}^{\alpha_{k+1}} v_\lambda$. Далее, все операторы в правой части (12) коммутируют с операторами $X_{n1}, \dots, X_{n,k-1}, X_{n,k+2}, \dots, X_{n,n-1}$, поэтому, применив оператор

$$X = X_{n1}^{\alpha_1} \dots X_{n,k-1}^{\alpha_{k-1}} X_{n,k+2}^{\alpha_{k+2}} \dots X_{n,n-1}^{\alpha_{n-1}}$$

к обеим частям равенства (12), получим

$$\begin{aligned} Xv_0 &= c_{\alpha_k} p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \\ &+ \sum_{s=0}^{\alpha_k-1} c_s X_{k+1,k}^{\alpha_k-s} p(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, s, \alpha_k + \alpha_{k+1} - s, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_{n-1}). \end{aligned} \quad (13)$$

Теперь из $v_0 \in Q_0$ следует, что $Xv_0 \in Q_0$, так как Q_0 является $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модулем. С другой стороны,

$$p(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, s, \alpha_k + \alpha_{k+1} - s, \alpha_{k+2}, \dots, \alpha_{n-1}) \underset{\tau}{<} p(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k, \dots, \alpha_{n-1})$$

для всех $s \in \{0, 1, \dots, \alpha_k - 1\}$, поэтому к этим векторам применимо предположение индукции, а значит, сумма по s в правой части (13) принадлежит $U(\mathfrak{n}_-^0)S_0 + Q_0$. Отсюда $p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \in U(\mathfrak{n}_-^0)S_0 + Q_0$ и лемма доказана.

Перейдем теперь к доказательству утверждения б) теоремы 4.1.

Выше мы доказали включение $Q_0 \subset Q \subset \mathcal{H}$. Следовательно, $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модуль $\mathcal{L}(\lambda)$ является фактормодулем модуля $\mathcal{M}(\lambda)/Q$. Покажем, что в действительности $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модули $\mathcal{L}(\lambda)$ и $\mathcal{N}(\lambda) = \mathcal{M}(\lambda)/Q$ изоморфны. Из леммы 4.2 вытекает, что $\mathcal{N}(\lambda)$ как $U(\mathfrak{n}_-^0)$ -модуль порождается системой ненулевых векторов

$$\{X_{n1}^{\alpha_1} X_{n2}^{\alpha_2} \dots X_{n,n-1}^{\alpha_{n-1}} v_\lambda''; \alpha_i \in \mathbb{Z}_+, 0 \leq \alpha_i \leq \lambda_i - \lambda_{i-1}, i = 1, \dots, n-1\},$$

где v_λ'' – канонический образующий модуля $\mathcal{N}(\lambda)$. Распространим на эту систему векторов отношение линейного порядка τ :

$$X_{n1}^{\alpha_1} X_{n2}^{\alpha_2} \dots X_{n,n-1}^{\alpha_{n-1}} v_\lambda'' \underset{\tau}{>} X_{n1}^{\beta_1} X_{n2}^{\beta_2} \dots X_{n,n-1}^{\beta_{n-1}} v_\lambda'',$$

если $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) > (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1})$ лексикографически. Обозначим через Z_i $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -подмодуль модуля $\mathcal{N}(\lambda)$, порожденный первыми младшими относительно τ векторами $r_1, r_2, \dots, r_i$, $r_1 \underset{\tau}{<} r_2 \underset{\tau}{<} \dots \underset{\tau}{<} r_i$. Тогда $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модуль Z_i/Z_{i-1} , $i = 1, 2, \dots, k$, где $k = \prod_{i=1}^{n-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1} + 1)$, порожден единственным вектором $r_i + Z_{i-1}$ таким, что $\mathfrak{n}_+^0 r_i = 0$. По построению $\mathcal{N}(\lambda)$ каждый из отрицательных корней $X_{21}, X_{32}, \dots, X_{n-1,n-1}, X_{-(n-2),n-1}$ алгебры Ли $\mathfrak{d}_{n-1}$ в некоторой натуральной степени аннулирует старший вектор v_λ'' , а значит, и $r_i + Z_{i-1}$. Теперь

по лемме 7.2.4 из [10] $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модуль Z_i/Z_{i-1} является конечномерным и простым. В случае, когда $r_i = X_{n1}^{\alpha_1} X_{n2}^{\alpha_2} \dots X_{n,n-1}^{\alpha_{n-1}} v''_\lambda$, имеем изоморфизм $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модулей

$$Z_i/Z_{i-1} \cong V_{(\lambda_1 - \alpha_1, \lambda_2 - \alpha_2, \dots, \lambda_{n-1} - \alpha_{n-1})}.$$

Следовательно,

$$\mathcal{N}(\lambda)|_{\mathfrak{d}_{n-1}} = \bigoplus_{i=1}^k Z_i/Z_{i-1} \cong \bigoplus_{\lambda_1 \geq t_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq t_{n-1} \geq \lambda_n} V_t, \quad t \in P_{n-1}^D.$$

С другой стороны, как выше отмечалось, $L(\lambda) \cong V_\lambda$ при $\lambda \in P_n^D$ (изоморфизм $\mathfrak{d}_n$ -модулей). Поэтому $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модуль $\mathcal{L}(\lambda)$ изоморфен V_λ -фактору, порожденному квазистаршим вектором $q_{\lambda\lambda}$. По предложению 4.2, в) его спектр как $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модуля имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}(\lambda)|_{\mathfrak{d}_{n-1}} = \bigoplus_{\lambda_1 \geq t_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq t_{n-1} \geq \lambda_n} V_t, \quad t \in P_{n-1}^D,$$

так как $\max(\lambda_{n-1}, \lambda_n) = \lambda_{n-1}$ и $\min(t_{n-2}, \lambda_{n-1}) = \lambda_{n-1}$. Отсюда $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модули $\mathcal{L}(\lambda)$ и $\mathcal{N}(\lambda)$ изоморфны и $Q = \mathcal{K}$. Остается заметить, что $X \in U(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ аннулирует v' тогда и только тогда, когда $Xv \in \mathcal{K}$. Теорема 4.1 полностью доказана.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть f – фильтрация, разделяющая изоморфные компоненты $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модуля V_m , $m \in P_n^D$. Пусть $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ – фактор фильтрации f , порожденный образом квазистаршего вектора $q_{\lambda m}$, $\{\lambda, \lambda, m\}$ – кортеж. Тогда если $\lambda_{n-1} = m_{n-1}$, то следующие $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модули изоморфны:

$$\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i \cong \mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, m_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При построении фильтрации f в §3 линейный порядок на множестве квазистарших векторов выбирался так, чтобы $\mathfrak{m}_+(q_{\lambda m}) \subset \mathcal{D}_i$. Следовательно, любой элемент идеала I аннулирует образ $q_{\lambda m}$ в $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$. Тогда по свойству универсальности индуцированных представлений [10, предложение 7.1.8] существует единственный сюръективный $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -гомоморфизм

$$\varphi: \mathcal{M}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, m_n) \rightarrow \mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$$

такой, что $\varphi(1 \otimes 1) = q_{\lambda m} + \mathcal{D}_i$. Далее, из спектрального разложения $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ как $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модуля (предложение 4.2, в)) следует, что

$$\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i|_{\mathfrak{d}_{n-1}} = \bigoplus_{\lambda_1 \geq t_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} \geq t_{n-1} \geq m_n} V_t, \quad t \in P_{n-1}^D,$$

поскольку $\max(m_n, \lambda_{n-1}) = \lambda_{n-1}$ ввиду $\lambda_{n-1} = m_{n-1} \geq m_n$, $\min(m_{n-1}, t_{n-2}) = \min(\lambda_{n-1}, t_{n-2}) = \lambda_{n-1}$. Покажем, что $\mathcal{K} \subseteq \ker \varphi$. Действительно, по теореме 4.1, б) $\mathcal{K}$ порождается векторами $X_{-(n-2), n-1}^{\lambda_{n-2} + \lambda_{n-1} + 1}(1 \otimes 1)$ и $X_{j+1, j}^{\lambda_j - \lambda_{j+1} + 1}(1 \otimes 1)$, $j = 1, \dots, n-1$. Предположим, что $w = X_{-(n-2), n-1}^{\lambda_{n-2} + \lambda_{n-1} + 1}(1 \otimes 1) \notin \ker \varphi$. Ввиду $n_+^0 \varphi(w) = 0$ вектор $\varphi(w)$ порождает конечномерный простой $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -подмодуль модуля $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ со старшим весом $t = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-3}, -\lambda_{n-1} - 1, -\lambda_{n-2} - 1)$. Но спектр $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модуля $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ не содержит V_t . Противоречие. Аналогично проверяется, что $X_{j+1, j}^{\lambda_j - \lambda_{j+1} + 1}(1 \otimes 1) \in \ker \varphi$ для всех $j = 1, \dots, n-1$, откуда $\mathcal{K} \subseteq \ker \varphi$. Тогда факторотображение

$$\tilde{\varphi}: \mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, m_n) \rightarrow \mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$$

является изоморфизмом $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модулей, поскольку как $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модули они изоморфны. Теорема доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.3. Пусть $\mathcal{L}$ – категория $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -факторов фильтраций, разделяющих изоморфные компоненты $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модулей V_m , $m \in P_n^D$ (как обычно, морфизмами $\mathcal{L}$ являются гомоморфизмы $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модулей).

Основная цель настоящего параграфа – описать элементы категории $\mathcal{L}$ в терминах старших весов. Какова размерность этой категории? Иначе говоря, сколько компонент имеет старший вес произвольного модуля категории $\mathcal{L}$? Из теоремы 4.2 следует, что введенные определением 4.2 конечномерные $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модули $\mathcal{L}(\lambda)$, $\lambda \in P_n^D$, где $\mathcal{L}(\lambda)$ – фактормодуль модуля Верма $\mathcal{M}(\lambda)$ над $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ по наибольшему особому подмодулю $\mathcal{K}$, заведомо принадлежат категории $\mathcal{L}$. Из доказательства этой теоремы следует, однако, что если $\lambda_{n-1} \neq m_{n-1}$, то порожденный образом квазистаршего вектора $q_{\lambda m}$, $\{\lambda, \lambda, m\}$ – кортеж, $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -фактор уже не изоморфен $\mathcal{L}(\theta)$ ни для какого $\theta \in P_n^D$. В этом заключается принципиальное отличие серии D от остальных серий комплексных простых групп Ли. Напомним, что для серий A и C

$$\mathcal{L} = \{\mathcal{L}(\lambda); \lambda \in P_n\},$$

где

$$P_n = \{(m_1, \dots, m_n); m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 0, m_i \in \mathbb{Z}\},$$

т. е. множества старших весов категории $\mathcal{L}$ для серий A и C совпадают [1]; для серии B

$$\mathcal{L} = \{\mathcal{L}(\lambda); \lambda \in P_n^B\},$$

где (см. [2])

$$P_n^B = \left\{ (m_1, \dots, m_n); m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 0, m_i \in \mathbb{Z} \text{ или } m_i \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} \right\}.$$

Интуитивно понятно, что если $\lambda_{n-1} \neq m_{n-1}$, то разность $\lambda_{n-1} - m_{n-1}$ является целым числом, следовательно, для описания нашей категории необходимо еще одно измерение и размерность $\mathcal{L}$ должна быть равна $n + 1$. Развита в настоящем

параграфе техника позволяет строго доказать это предположение и тем самым получить полное описание категории $\mathcal{L}$.

Обозначим через $\tilde{P}_{n+1}$ множество целочисленных векторов с компонентами $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n$, удовлетворяющими системе неравенств

$$\lambda_1 \rightarrow \lambda_2 \rightarrow \dots \rightarrow \lambda_{n-2} \rightarrow m_{n-1} \begin{array}{l} \nearrow m_n \rightarrow -\lambda_{n-1} \\ \searrow \lambda_{n-1} \rightarrow -m_n \end{array} \rightarrow -m_{n-1}, \quad (14)$$

где стрелка, как и ранее, обозначает неравенство $\geq$.

До сих пор мы рассматривали модули Верма $\mathcal{M}(\lambda)$ над $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ и $M(\lambda)$ над $\mathfrak{d}_n$ для $\lambda \in P_n^D$. Далее будем рассматривать эти же модули Верма для более широкого множества старших весов, например модули вида $\mathcal{M}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, m_n)$ и $M(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, m_n)$, старшие веса которых удовлетворяют системе неравенств (14). В частности, предпоследняя компонента λ_{n-1} теперь может оказаться отрицательной. Напомним, что модуль Верма $M(\lambda)$ имеет смысл для всех $\lambda \in \mathfrak{h}_n^*$ [10].

Весу $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n) \in \tilde{P}_{n+1}$ сопоставим следующую систему векторов $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модуля $\mathcal{M}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, m_n)$:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_0 = \{ & p(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}); 0 \leq \alpha_i \leq \lambda_i - \lambda_{i+1}, i = 1, \dots, n-3, \\ & 0 \leq \alpha_{n-2} \leq \lambda_{n-2} - \nu(\lambda_{n-1}, m_n), 0 \leq \alpha_{n-1} \leq m_{n-1} - m_n, \\ & \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} \leq \lambda_{n-2} - m_n \}, \end{aligned}$$

где, как и ранее, $\nu(a, b) = \max(a, b)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.4. Пусть $\tilde{Q}_0$ (соответственно, $\tilde{Q}$) – $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -подмодуль модуля $\mathcal{M}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, m_n)$, порожденный векторами

$$X_{i+1,i}^{\lambda_i - \lambda_{i+1} + 1} v, \quad X_{n,n-1}^{m_{n-1} - m_n + 1} v, \quad X_{n,n-2}^{\lambda_{n-2} - \nu(\lambda_{n-1}, m_n) - j + 1} X_{n,n-1}^{\nu(\lambda_{n-1}, m_n) - m_n + j} v; \quad (15)$$

здесь $i = 1, 2, \dots, n-2$, $j = 0, 1, \dots, m_{n-1} - \nu(\lambda_{n-1}, m_n)$, v – канонический образующий модуля $\mathcal{M}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, m_n)$ (соответственно, векторами (15) и $X_{-(n-2),n-1}^{\lambda_{n-2} + \lambda_{n-1} + 1} v$).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Если вес из $\tilde{P}_{n+1}$ удовлетворяет условию $\lambda_{n-1} = m_{n-1}$, то $\nu(\lambda_{n-1}, m_n) = \lambda_{n-1}$, поскольку $m_{n-1} \geq m_n$, и, как следствие, система векторов $\tilde{S}_0$ совпадает с системой S_0 , а $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модули $\tilde{Q}_0$ (соответственно, $\tilde{Q}$) совпадут с модулями Q_0 (соответственно, Q).

Действительно, образующий элемент в (15) при $j = 0$ в этом случае имеет вид $X_{n,n-2}^{\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1} + 1} X_{n,n-1}^{\lambda_{n-1} - m_n}$. Покажем, что этот образующий принадлежит

$(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -подмодулю $\mathcal{M}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, m_n)$, порожденному остальными векторами из (15). Рассмотрим вектор $v_0 = X_{n,n-1}^{\lambda_{n-2}-m_n+1} X_{n-1,n-2}^{\lambda_{n-2}-\lambda_{n-1}+1} \in \tilde{Q}_0$. Воспользуемся соотношением

$$[X_{n,n-1}, X_{n-1,n-2}] = X_{n,n-2},$$

чтобы в записи вектора v_0 переставить местами любые два соседних оператора $X_{n,n-1}$ и $X_{n-1,n-2}$ так, чтобы все $X_{n,n-1}$ оказались справа. Тогда

$$v_0 = \sum_{s=0}^{\lambda_{n-2}-\lambda_{n-1}+1} c_s X_{n-1,n-2}^{\lambda_{n-2}-\lambda_{n-1}+1-s} X_{n,n-2}^s X_{n,n-1}^{\lambda_{n-2}-m_n+1-s},$$

где c_s – некоторые целочисленные коэффициенты. В последней сумме по s одно из слагаемых с точностью до ненулевого множителя равно $X_{n,n-2}^{\lambda_{n-2}-\lambda_{n-1}+1} \times X_{n,n-1}^{\lambda_{n-1}-m_n}$, а остальные слагаемые заведомо принадлежат $\tilde{Q}_0$ ввиду соотношения $X_{n,n-1}^{\lambda_{n-1}-m_n+1} v \in \tilde{Q}_0$. Мы доказали, что при $\lambda_{n-1} = m_{n-1}$ все образующие в (15), зависящие от j , можно опустить. Но тогда $\tilde{Q}_0 = Q_0$, $\tilde{Q} = Q$.

ЛЕММА 4.3. $U(\mathfrak{n}_-^0)$ -модуль $\mathcal{M}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, m_n)$ разлагается в сумму $U(\mathfrak{n}_-^0)$ -подмодулей:

$$\mathcal{M}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, m_n) = U(\mathfrak{n}_-^0) \tilde{S}_0 + \tilde{Q}_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналогично доказательству леммы 4.2 и потому не приводится.

Каждому весу $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n) \in \tilde{P}_{n+1}$ сопоставим следующий $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модуль $\mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n)$:

$$\mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n) = \mathcal{M}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, m_n) / \tilde{Q},$$

который действительно зависит от параметров m_{n-1} и m_n , поскольку от них зависит $\tilde{Q}$.

Из замечания 4.1 следует, что если $\lambda_{n-1} = m_{n-1}$, то

$$\mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n) = \mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, m_n).$$

Легко видеть также, что множество $\tilde{P}_{n+1}$ старших весов, зависящих от $n+1$ компонент, переходит в P_n^D при $\lambda_{n-1} = m_{n-1}$. Поэтому следующая теорема является обобщением теоремы 4.2 для случая $\lambda_{n-1} \neq m_{n-1}$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть f – фильтрация, разделяющая изоморфные компоненты $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модуля V_m , $m \in P_n^D$. Пусть $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ – фактор фильтрации f , порожденный образом квазистаршего вектора $q_{\lambda m}$, $\{\lambda, \lambda, m\}$ – кортеж. Тогда следующие $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модули изоморфны:

$$\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i \cong \mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Благодаря подходящему выбору линейного порядка на множестве квазистарших векторов при построении фильтрации f имеем $\mathfrak{m}_+(q_{\lambda m}) \subset \mathcal{D}_i$. Следовательно, любой элемент идеала I (теорема 4.1, а)) аннулирует образ $q_{\lambda m}$ в $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$. Далее, по свойству универсальности индуцированных представлений существует единственный сюръективный $(\mathfrak{d}_{n-1}/2)$ -гомоморфизм

$$\varphi: \mathcal{M}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, m_n) \rightarrow \mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$$

такой, что $\varphi(1 \otimes 1) = q_{\lambda m} + \mathcal{D}_i$. Покажем, что подмодуль $\tilde{Q}$ содержится в ядре φ . Рассмотрим сначала образующий $X_{n,n-1}^{m_{n-1}-m_n+1}(1 \otimes 1)$. Предположим противное:

$$\varphi(X_{n,n-1}^{m_{n-1}-m_n+1}(1 \otimes 1)) = X_{n,n-1}^{m_{n-1}-m_n+1}q_{\lambda m} + \mathcal{D}_i \not\subset \mathcal{D}_i.$$

Поскольку $\mathfrak{m}_+(q_{\lambda m}) \subset \mathcal{D}_i$, то

$$\mathfrak{n}_+^0(X_{n,n-1}^{m_{n-1}-m_n+1}q_{\lambda m}) \subset \mathcal{D}_i,$$

т. е. образ $X_{n,n-1}^{m_{n-1}-m_n+1}q_{\lambda m}$ порождает конечномерный простой $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -подмодуль модуля $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ со старшим весом $t = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}, m_n + \lambda_{n-1} - m_{n-1} - 1)$. Но если $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модуль V_t , $t \in P_{n-1}^D$, содержится в качестве подмодуля в $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$, то по предложению 4.2, в) имеем

$$\begin{aligned} \lambda_1 \geq t_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-2} \geq t_{n-2} \geq \nu(m_n, \lambda_{n-1}) \\ \geq \lambda_{n-1} \geq t_{n-1} \geq m_n + \lambda_{n-1} - \mu(m_{n-1}, t_{n-2}). \end{aligned}$$

Если $t_{n-2} = \lambda_{n-2}$, то $\mu(m_{n-1}, t_{n-2}) = m_{n-1}$ и $t_{n-1} \geq m_n + \lambda_{n-1} - m_{n-1}$. Полученное противоречие доказывает, что образующий $X_{n,n-1}^{m_{n-1}-m_n+1}(1 \otimes 1)$ подмодуля $\tilde{Q}$ принадлежит ядру φ . Рассмотрим образующие

$$w_j = X_{n,n-2}^{\lambda_{n-2}-\nu(\lambda_{n-1}, m_n)-j+1} X_{n,n-1}^{\nu(\lambda_{n-1}, m_n)-m_n+j}(1 \otimes 1),$$

где $j = 0, 1, \dots, m_{n-1} - \nu(\lambda_{n-1}, m_n)$. Если $\varphi(w_j) \neq 0$, то в стандартном базисе $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ пространства $\mathfrak{h}_n^*$ сумма $(n-2)$ -й и $(n-1)$ -й компонент веса у всех этих векторов равна $m_n + \lambda_{n-1} - 1$ (т. е. не зависит от j). С другой стороны, сумма этих же компонент у старшего веса произвольного $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -подмодуля V_t модуля $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ удовлетворяет неравенству

$$t_{n-2} + t_{n-1} \geq \mu(m_{n-1}, t_{n-2}) + t_{n-1} \geq m_n + \lambda_{n-1}.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\varphi(w_j) = 0$ для всех перечисленных в определении 4.4 значений индекса j . Остальные образующие из (15) также принадлежат ядру φ , что проверяется точно так же, как в теореме 4.2. Таким образом, $\tilde{Q} \subseteq \ker \varphi$.

Рассмотрим теперь факторотображение

$$\tilde{\varphi}: \mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n) \rightarrow \mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i,$$

которое, естественно, как и φ , является сюръективным $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -гомоморфизмом. Опишем спектр $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модуля $\mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n)$. По лемме 4.3 $U(\mathfrak{n}_-^0)$ -модуль $\mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n)$ порождается системой ненулевых векторов

$$\begin{aligned} \tilde{S}_0 = \{ & p(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}); 0 \leq \alpha_i \leq \lambda_i - \lambda_{i+1}, i = 1, \dots, n-3, \\ & 0 \leq \alpha_{n-2} \leq \lambda_{n-2} - \nu(m_n, \lambda_{n-1}), 0 \leq \alpha_{n-1} \leq m_{n-1} - m_n, \\ & \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1} \leq \lambda_{n-2} - m_n \}, \end{aligned}$$

где $p(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) = X_{n1}^{\alpha_1} X_{n2}^{\alpha_2} \dots X_{n,n-1}^{\alpha_{n-1}} v''$, v'' – канонический образующий модуля $\mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n)$. Введем на множестве $\tilde{S}_0$ отношение порядка τ , как при доказательстве теоремы 4.1, б). Обозначим через $\tilde{Z}_i$ $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -подмодуль $\mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n)$, порожденный первыми i младшими относительно τ векторами $\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_i$. Тогда $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модуль $\tilde{Z}_i/\tilde{Z}_{i-1}$ является циклическим, порожденным вектором $\tilde{r}_i + \tilde{Z}_{i-1}$, причем в силу выбора отношения τ справедливо равенство $\mathfrak{n}_+^0(\tilde{r}_i + \tilde{Z}_{i-1}) = 0$. Теперь по лемме 7.2.4 из [10] $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модуль $\tilde{Z}_i/\tilde{Z}_{i-1}$ является конечномерным и простым. Если $\tilde{r}_i = p(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}) \in \tilde{S}_0$, то, вычисляя вес вектора $\tilde{r}_i$, имеем

$$\tilde{Z}_i/\tilde{Z}_{i-1} \cong V_{(\lambda_1 - \alpha_1, \lambda_2 - \alpha_2, \dots, \lambda_{n-1} - \alpha_{n-1})},$$

откуда

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n)|_{\mathfrak{d}_{n-1}} \\ &= \bigoplus \tilde{Z}_i/\tilde{Z}_{i-1} = \bigoplus_{\substack{\lambda_1 \geq t_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-2} \geq t_{n-2} \geq \nu(m_n, \lambda_{n-1}) \\ \geq \lambda_{n-1} \geq t_{n-1} \geq m_n + \lambda_{n-1} - \mu(m_{n-1}, t_{n-2})}} V_t, \end{aligned} \quad (16)$$

где введены обозначения $t_i = \lambda_i - \alpha_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Сравнивая спектр $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модуля $\mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n)$ из формулы (16) со спектром $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модуля $\mathcal{D}_{i+1}/\mathcal{D}_i$ (см. предложение 4.2, в), в котором нужно положить $l = \lambda$), мы видим, что они совпадают. Следовательно, сюръективный гомоморфизм $\tilde{\varphi}$ является изоморфизмом. Теорема доказана.

Теперь можно дать полное описание категории $\mathcal{L}$ конечномерных $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модулей.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Категория $\mathcal{L}$ представлений алгебры Ли $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ является $(n+1)$ -мерной. Каждое представление этой категории является конечномерным циклическим представлением $\mathfrak{d}_{n-1/2}$ со старшим весом, принадлежащим $\tilde{P}_{n+1}$:

$$\mathcal{L} = \{ \mathcal{L}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n); (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n) \in \tilde{P}_{n+1} \}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть i – отображение, сопоставляющее фактору, порожденному образом квазистаршего вектора $q_{\lambda m}$, $\{\lambda, m\}$ – кортеж, его “старший” вес $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n)$. Тогда по определению кортежа

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n) \in \tilde{P}_{n+1}.$$

Легко видеть, что определенное таким образом отображение $i: \mathcal{L} \rightarrow \tilde{P}_{n+1}$ сюръективно. Действительно, весу $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n) \in \tilde{P}_{n+1}$ можно сопоставить $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -фактор модуля V_m , $m = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2}; m_{n-1}, m_n) \in P_n^D$, порожденный образом квазистаршего вектора $q_{\lambda m}$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$ подчинен m . Далее, модули категории $\mathcal{L}$, соответствующие различным “старшим” весам $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}; m_{n-1}, m_n)$, $(\mu_1, \dots, \mu_{n-1}; \tilde{m}_{n-1}, \tilde{m}_n) \in \tilde{P}_{n+1}$, $(\lambda, m) \neq (\mu, \tilde{m})$, не изоморфны как $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модули (предложение 4.2, в)). Это доказывает биективность отображения $i: \mathcal{L} \rightarrow \tilde{P}_{n+1}$.

Из следующего предложения видно, как модули категории $\mathcal{L}$ позволяют “расщепить” правило ветвления (7).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Для любого $\mathfrak{d}_n$ -модуля V_m , $m \in P_n^D$, имеем

$$V_m|_{\mathfrak{d}_{n-1/2}} = \dot{+}_{l \rightarrow m} \mathcal{L}(l_1, \dots, l_{n-1}; m_{n-1}, m_n),$$

где $\dot{+}$ – полупрямая сумма (зацепление) $(\mathfrak{d}_{n-1/2})$ -модулей берется по всем весам $l \in P_{n-1}^D$ таким, что $l \rightarrow m$,

$$\mathcal{L}(l_1, \dots, l_{n-1}; m_{n-1}, m_n)|_{\mathfrak{d}_{n-1}} = \bigoplus_{t \rightarrow l \rightarrow m} V_t,$$

где прямая сумма $(\mathfrak{d}_{n-1})$ -модулей V_t берется по всем весам $t \in P_{n-1}^D$, подчиненным весам $l \in P_{n-1}^D$ и $m \in P_n^D$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Полученное в настоящем параграфе описание категории $\mathcal{L}$, сформулированное на языке групп Ли, приводит к неожиданному результату: хотя группа Ли $D_{n-1/2}$ вложена в группу Ли $D_n \cong \mathrm{SO}(2n)$, категория конечномерных представлений $D_{n-1/2}$ со старшим весом является $(n+1)$ -мерной, т.е. обладает бóльшим запасом представлений, чем категория неприводимых представлений D_n . Отметим, что это свойство “увеличения размерности категории представлений при переходе к неполупростой подгруппе” не наблюдалось в сериях A , B и C комплексных простых групп Ли (см. [1], [2]).

Приведенный ниже пример показывает, как можно различать изоморфные неприводимые компоненты $\mathfrak{d}_2$ -модуля $V_{(2,1,0)}$, относя их к различным модулям категории $\mathcal{L}$.

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим сужение $\mathfrak{d}_3$ -модуля $V = V_{(2,1,0)}$ на $\mathfrak{d}_2$. Согласно правилу ветвления (6) имеем

$$V_{(2,1,0)}|_{\mathfrak{d}_2} = V_{(2,1)} \oplus 2V_{(2,0)} \oplus V_{(2,-1)} \oplus 2V_{(1,1)} \oplus 4V_{(1,0)} \oplus 2V_{(1,-1)} \oplus 2V_{(0,0)}.$$

Пользуясь конструкцией Желобенко [5], реализуем $\mathfrak{d}_3$ -модуль V в пространстве многочленов на максимальной унипотентной подгруппе Z_+ ;

$$f(z) = f(z_{12}, z_{13}, z_{1,-3}, z_{1,-2}, z_{23}, z_{2,-3}) \in V$$

тогда и только тогда, когда $f(z)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z_{12}} + z_{23} \frac{\partial}{\partial z_{13}} + z_{2,-3} \frac{\partial}{\partial z_{1,-3}} - z_{23} z_{2,-3} \frac{\partial}{\partial z_{1,-2}} \right)^2 f(z) &= 0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z_{23}} \right)^2 f(z) &= 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial z_{2,-3}} \right)^2 f(z) = 0. \end{aligned}$$

Согласно предложению 2.3 система векторов $\{z_{1,-3}^{k_1} z_{2,-3}^{k_2}; k_i \in \{0; 1\}, i = 1, 2\}$ образует ортогональный базис пространства квазистарших векторов $V_{(2,1,0)}^{++}$. Проверим, например, что четыре $\mathfrak{d}_2$ -подмодуля модуля V , изоморфных $V_{(1,0)}$, разделяются с помощью промежуточной подалгебры $\mathfrak{d}_{3-1/2}$. Как в § 3, введем во множестве квазистарших векторов отношение линейного порядка: $1 < z_{2,-3} < z_{1,-3} < z_{1,-3} z_{2,-3}$. Фильтрация f ($\mathfrak{d}_{3-1/2}$)-подмодулей V , разделяющая изоморфные компоненты, имеет вид

$$\{0\} \subset \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}_3 \subset \mathcal{D}_4 = V,$$

где $\mathcal{D}_1$ порожден квазистаршим вектором $q_{(2,1)} = 1$, $\mathcal{D}_2$ – квазистаршими векторами $q_{(2,1)} = 1$ и $q_{(2,0)} = z_{2,-3}$ (достаточно, впрочем, лишь $q_{(2,0)}$), $\mathcal{D}_3$ – квазистаршими векторами $q_{(2,1)} = 1$, $q_{(2,0)} = z_{2,-3}$ и $q_{(1,1)} = z_{1,-3}$, $\mathcal{D}_4$ – векторами $q_{(2,1)}$, $q_{(2,0)}$, $q_{(1,1)}$ и $q_{(1,0)} = z_{1,-3} z_{2,-3}$ (достаточно последнего вектора). Факторы фильтрации f имеют следующий спектр как $\mathfrak{d}_2$ -модули:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1/\mathcal{D}_0|_{\mathfrak{d}_2} &\cong V_{(2,1)} \oplus V_{(2,0)} \oplus V_{(1,1)} \oplus V_{(1,0)}, \\ \mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1|_{\mathfrak{d}_2} &\cong V_{(2,0)} \oplus V_{(2,-1)} \oplus V_{(1,0)} \oplus V_{(1,-1)} \oplus V_{(0,0)}, \\ \mathcal{D}_3/\mathcal{D}_2|_{\mathfrak{d}_2} &\cong V_{(1,1)} \oplus V_{(1,0)}, \\ \mathcal{D}_4/\mathcal{D}_3|_{\mathfrak{d}_2} &\cong V_{(1,0)} \oplus V_{(1,-1)} \oplus V_{(0,0)}. \end{aligned}$$

Теперь старшие векторы четырех подмодулей, изоморфных $V_{(1,0)}$, различаются по их принадлежности к различным модулям категории $\mathcal{L}$: $X_{31}X_{32}q_{(2,1)}$ имеет ненулевой образ в $\mathcal{D}_1/\mathcal{D}_0 \cong \mathcal{L}(2, 1; 1, 0)$, $X_{31}q_{(2,0)}$ – в $\mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1 \cong \mathcal{L}(2, 0; 1, 0)$, $X_{32}q_{(1,1)}$ – в $\mathcal{D}_3/\mathcal{D}_2 \cong \mathcal{L}(1, 1; 1, 0)$, $q_{(1,0)}$ – в $\mathcal{D}_4/\mathcal{D}_3 \cong \mathcal{L}(1, 0; 1, 0)$.

Отметим, что векторы $X_{31}q_{(2,0)}$ и $X_{32}q_{(1,1)}$ не различаются даже картановской подалгеброй $\mathfrak{h}_3$ алгебры Ли $\mathfrak{d}_3$, так как их веса относительно $\mathfrak{h}_3$ совпадают.

Автор благодарит Д. П. Желобенко за полезные обсуждения правила ветвления в редукции $\mathfrak{d}_n \downarrow \mathfrak{d}_{n-1/2} \downarrow \mathfrak{d}_{n-1/2}$.

Список литературы

1. Штепин В. В. Промежуточные алгебры Ли и их конечномерные представления // Изв. РАН. Сер. матем. 1993. Т. 57. № 6. С. 176–198.
2. Штепин В. В. Промежуточная ортогональная алгебра Ли $\mathfrak{b}_{n-1/2}$ и ее конечномерные представления // Изв. РАН. Сер. матем. 1998. Т. 62. № 3. С. 201–223.
3. Вейль Г. Теория групп и квантовая механика. М.: Наука, 1986.
4. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л. Конечномерные представления группы ортогональных матриц // ДАН СССР. 1950. Т. 71. № 6. С. 1017–1020.
5. Желобенко Д. П. Классические группы. Спектральный анализ конечномерных представлений // УМН. 1962. Т. 17. № 1. С. 27–119.
6. Желобенко Д. П. Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970.
7. Bincer A. M. Bases in $\mathrm{Sp}(2n)$ representation space // Lect. Notes in Phys. 1980. V. 135. P. 459–463.
8. Штепин В. В. Разделение кратных точек спектра в редукции $\mathfrak{sp}(2n) \downarrow \mathfrak{sp}(2n-2)$ // Функц. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. № 4. С. 93–95.
9. Серр Ж. П. Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1969.
10. Диксмье Ж. Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1978.

Поступило в редакцию
20.08.2002